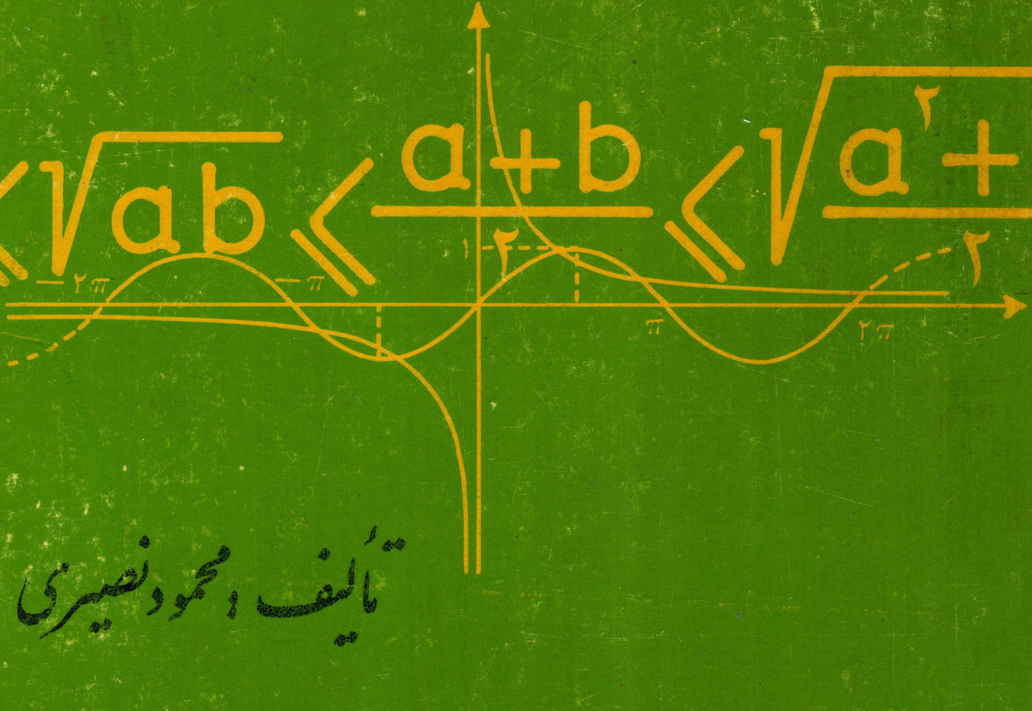
جبر و حساب

چاپ یازدهم

$$\frac{1}{b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$



تألیف: محمود نصیری

جبر و حساب

شامل کلیه مباحث درسی
با انضمام
تعداد ۲۳۰ مسئله و ۳۰۰ مثال

تألیف: محمود نصیری

شابک: ۴ - ۱۶ - ۵۹۹۳ - ۹۶۴
ISBN: 964 - 5993 - 16 - 4

انتشارات مبتکران **(شمارهٔ پروانهٔ نشر: ۱۶۷)**

تهران، انتهای خیابان طالقانی، کوچهٔ طباطبایی‌مقدم، شمارهٔ ۳۹، طبقهٔ اول، کد پستی ۱۵۶۱۹

تلفن **۷۶۲۸۲۳** دورنویس **۷۶۷۵۶۴**

نام کتاب : **جبر و حساب**

مؤلف : محمود نصیری

چاپ یازدهم : زمستان ۱۳۷۶ (چاپ اول: پاییز ۱۳۶۹)

تیراژ : ۳۰۰۰ جلد

حروفچینی : هویزه

لیتوگرافی : قدس

چاپ : دانشگاه الزهرا (س)

قیمت ۱۳۰۰ تومان

فهرست مطالب

غلطنامه

صفحه	سطر	غلط	صحیح
۳۵	۶	$۳(۱-x)$	$۳(x-۱)$
۹۴	۸	$-۳\leqslant x\leqslant ۱$	$-۳\leqslant x\leqslant -۱$
۱۱۲	آخر	$\lvert f(x)\rvert$	$\lvert g(x)\rvert$
۱۲۴	۱۱	$a^{n-۱}$	$a^{n+۱}$
۱۲۴	ماقبل آخر	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$
۱۲۶	۱۵	$(-\sqrt{۳},-۲]\cup[۲,\sqrt{۳})$	$[-۲,-\sqrt{۳})\cup(\sqrt{۳},۲]$
۱۴۷	شماره ۲۱	$=۶$	$=۱۶$
۱۵۹	۲	$=۴$	$=۳$
۱۷۵	۱۰	$a_۱=۰$	$a_۱=۱۰$
۲۲۲	۴	$\Delta=۴P^۳+۲۷q^۲$	$\Delta=\frac{۴P^۳+۲۷q^۲}{۲۷}$
۲۸۰	شماره ۲۳	دو ریشه‌منفی	دو ریشه مختلف‌العلامت
۳۱۷	۳	۴۰	۴۱−
۳۹۵	۱۲	۱۴–(الف)	۱۴–(ب)
۴۰۳	۱	۸–(ج)	۸–(ب)
۴۰۵	۱۲	$=۲\sqrt{۲}$	$=۲\sqrt{۳}$
۴۰۶	شماره ۱۳	۱۳. (الف)	۱۳. (ج)
۳۱۲	شماره ۳	ج–$x^۲$	ج–$-x^۲$
۴۲۱	ماقبل آخر	۷. ج $-\frac{۱}{۴}=(-۱)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)$	۷. ب $-\frac{۱}{۸}=\left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)$
۴۲۷	۱	۵۴. (ج) $x=\frac{۱}{۲}$	۵۴. (د) $x=-\frac{۱}{۲}$
۴۳۴	۵	$R=x^۲$	$R=-x^۲$
۴۳۷	۲	۲۵–(ج)	۲۵–(د)

بنام خدا

مقدمه مؤلف

استقبال بی‌نظیر دبیران محترم ریاضی و دانش‌آموزان عزیز سالهای سوم وچهارم دبیرستان از انتشارکتاب قبلی اینجانب تحت عنوان «**مجموعه جبر و آنالیز**» از یکطرف وکمبود کتابهای کمك‌درسی در زمینه مباحث درسی سالهای اول و دوم دبیرستان ازطرف دیگر مرا برآن داشت‌که اقدام به نگارش کتاب حاضر نمایم تا بدینوسیله مجموعه کاملی در مورد مباحث ریاضیات دبیرستانی دراختیار دانش‌آموزان و دانش‌پژوهان عزیز قرار گیرد. امید است همکاران‌گرامی و دبیران محترم ریاضی نیز مطالب آنرا مورد استفاده قرار دهند.

ازآنجائیکه مسائل و مطالب درسی متنوعی دراین‌کتاب مطرح گردیده است لذا داوطلبان آزمونهای ورودی دانشگاهها و موسسات عالی نیز می‌توانند از آنها استفاده نمایند و بهمین منظور و درجهت تقویت و آماده‌سازی هرچه بیشتر این داوطلبان درپایان هرفصل تعدادی پرسش تستی آورده شده است و هم‌چنین علاوه بر تستها درآخر هرفصل مسائلی نیز مطرح شده است‌که حل آنها دانش‌آموزان عزیز را در هرسطح علمی که‌باشند یاری نموده و توانائی‌هائی علمی آنها را نیز افزایش می‌دهد. برخی از این مسائل ویژه دانش‌آموزانی است‌که خود را برای شرکت در مسابقات ریاضی آماده می‌کند، این‌قبیل دانش‌آموزان بامطالعه و دقت بیشتر به‌مطالب درسی مجموعه حاضر می‌توانند درحل‌مسائل مسابقات مهارت‌کافی‌کسب نمایند.

هرچندکه مطالب این‌کتاب برای‌استفاده دانش‌آموزان رشته‌های ریاضی و تجربی تدوین شده است ولی مباحثی ازکتاب مانند بسط دوجمله‌ای و قسمتهائی از معادلات و...

از حدود برنامه رشته تجربی خارج می‌باشد و این مباحث جهت استفاده دانش‌آموزان رشته ریاضی و سایر علاقمندان مطرح شده است.

درمورد نحوه استفاده از این‌کتاب مطالب زیر به دانش‌آموزان توصیه می‌شود:

۱- نظر به‌اینکه در تدوین کتاب برخی از مطالب کتابهای درسی دانسته فرض شده است لذا دانش‌آموزان‌عزیز لازم است قبل‌ازمطالعه این‌کتاب، کتب درسی مربوطه رابطور کامل و با دقت فراگیرند.

۲- قبل از اقدام به‌حل مسائل و بررسی تستهای آن، حتماً مطالب درسی متن‌کتاب را دقیق مطالعه نمایند.

۳- جهت راهنمائی دانش‌آموزان و هم‌چنین اطمینان‌کامل آنها از عملیات خود در حل مسائل و تستها، پاسخ‌کامل مسائل و حل تشریحی تستها درفصل پایانی‌کتاب قید شده است‌لیکن، دانش‌آموزان و داوطلبان کنکور بایستی قبل‌ازاینکه به پاسخ مسائل وتستها مراجعه نمایند، شخصاً اقدام به‌حل مسائل نموده و نسبت به حل آنها نهایت کوشش و اهتمام خود را بخرج دهند و سپس جهت حصول اطمینان از صحت عملیات خود به پاسخها رجوع نمایند.

۴- ازکلیه دانش‌آموزان عزیز تقاضا دارم چنانچه درضمن مطالعه‌کتاب با مشکلی‌مواجه شده و یا خواستار توضیحات بیشتری باشند، می‌توانند به‌آدرس انتشارات **مبتکران** و یا مجله رشد یا اینجانب مکاتبه فرمایند.

در پایان وظیفه خود می‌دانم، از مسئولین انتشارات **مبتکران**، آقایان یحیی دهقانی و سیدشمس‌الدین انوار و سایر کارمندان آن موسسه که مقدمات چاپ این کتاب را فراهم نمودند،هم‌چنین ازآقای خدایار مبین برای ترسیم نمودارها، از آقای جوهر و کارمندان زحمتکش حروف‌چینی هویزه برای خدمات چاپی، تشکر نمایم.

از دبیران محترم ریاضی و دانش‌آموزان عزیز و کلیه دانش پژوهان تقاضا دارم، نظریات‌اصلاحی خود رابه‌آدرس انتشارات **مبتکران** ارسال فرمایند تا در چاپهای بعدی مورد استفاده قرارگیرد.

محمود نصیری
بهار ۱۳۶۹

فصل اول

عبارتهای جبری و رادیکالها

۱ـ۱. مجموعه اعداد

۱ـ اعدادطبیعی ـ اعداد طبیعی‌به اعدادی گوئیم‌که وسیله شمردن وشماره‌گذاری هستند این مجموعه‌را به N نشان می‌دهیم

$$N=\{ ۱,۲,۳,۴, \ldots \}$$

۲ـ اعدادصحیح ـ این اعدادشامل اعدادطبیعی وقرینه آنها به انضمام‌صفر می‌باشد ایـن مجموعه‌را به Z نشان می‌دهیم

$$Z=\{ \ldots -۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴, \ldots \}$$

۳ـ اعداد منطق (گویا) ـ یعنی اعدادی به‌صورت $\frac{p}{q}$ کـه در آن p عـددی صحیـح و q عـددی طبیعی است . این مجموعـه را به Q نشان می‌دهیم ، مانند ، $\frac{۲}{۳}$ ، $-\frac{۵}{۴}$ ، $\frac{۲}{۱}$ ، ۷ ، ....

$$Q=\{\frac{p}{q} \mid p\in Z \ , \ q\in N \}$$

ازخواص مهم این اعدادآن است که بازاء هردوعدد منطق a , b که $a<b$ عددی منطق

مانند c هست که $a<c<b$

۴ـ اعداد اصم یا گنگ ـ برای حل مشکل بی‌جواب بودن معادلهٔ ۲ $=x^{۲}$ در میان اعداد منطق و به عبارت‌دیگر برای پر کردن سوراخهای مجموعهٔ نقاط منطق روی محور اعداد، مجموعه اعداد منطق‌را با اضافه‌کردن اشیاءجدیدی (مانند $\sqrt{۲}$) به‌آن وسعت میدهند، این اشیاءجدید را اعداد اصم می‌نامیم، مانند $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt[۳]{۴}$ ، π ، $\sqrt[۵]{۵}$

۵ـ اعدادحقیقی ـ مجموعهٔ‌جمیع اعداد منطق و اصم‌را اعدادحقیقی می‌نامیم این مجموعه را به R نشان می‌دهیم

بنابراین: $$N\subset Z\subset Q\subset R$$

۲ـ۱. قواعد و قضایائی درمورد اعمال روی اعداد حقیقی

۱ـ یك و تنها یك عدد حقیقی، که آن‌را (۰) می‌نامیم هست که بازاء هرعدد حقیقی a ، $a+۰=a$.

۲ـ یك وتنها یك‌عدد حقیقی، که آن‌را (۱) می‌نامیم، وجود دارد که ۱$\neq$۰ ، وبازاء هر عددحقیقی a ، $a.۱=a$.

۳ـ قاعدهٔ حذف درجمع وضرب: $$a+c=b+c \implies a=b$$

$$ac=bc \ , \ c\neq ۰ \implies a=b$$

۴ـ تعریف. $b-a$ یعنی $b+(-a)$.

۵ـ بازاء هرعددحقیقی a ، یك وتنها یك‌عدد ، که آن‌را $(-a)$ می‌نامیم وجوددارد که $a+(-a)=۰$ ، $-a$ را متقابل یا قرینه a گوئیم.

۶ـ بازاء هرعددحقیقی a مخالف‌صفر، یك‌وتنها یك‌عدد غیرازصفر b هست‌که $ab=۱$، b را عکس a می‌نامیم، پس $b=\frac{۱}{a}=a^{-۱}$.

۷ـ تعریف ـ بازاء دوعددحقیقی a و b که $a\neq ۰$ عدد $\frac{b}{a}$ راخارج‌قسمتbبرaمی‌نامیم، عبارت $\frac{b}{a}$ رایك‌کسر می‌نامیم و باید توجه‌کرد که عبارت $\frac{b}{۰}$ را تعریف نمی‌کنیم، ایـن عبارت بی‌معنی است.

۸ـ حاصلضرب هرعددحقیقی درصفر مساوی‌صفر است. $a.۰=۰$.

۹ـ شرط لازم وکافی برای‌آنکه حاصلضرب دوعدد صفر باشدآن است‌که حداقل یکی‌از

آنها صفر باشد $ab=0 \iff a=0$ یا $b=0$.

نتیجه.

$$abcd\ldots=0 \iff a=0 \text{ یا } b=0 \text{ یا } c=0 \text{ یا } d=0 \text{ یا } \ldots$$

۱۰ـ تعریف. aa را a^2 (مجذور a) و aaa را a^3 (مکعب a) و.... می‌نامیم.

۱۱ـ a و $b\neq 0$، $a=b \iff \frac{1}{a}=\frac{1}{b}$

۱۲ـ می‌توان دوطرف یک تساوی را درعددی مخالف صفر ضرب یا تقسیم کرد.

۱ـ۳. عبارت جبری و چند جمله‌ای‌ها

به مجموعه‌ای از علامتها وحروفی که متعلق به یک مجموعهٔ مرجع‌هستند و نشانه‌های مربوط به عملیاتی که روی این‌عضوها انجام می‌گیرند عبارت ریاضی گوئیم، به عبارت ریاضی که روی مجموعه اعدادبیان می‌شوند عبارت‌جبری گفته می‌شود.

هرعبارت جبری‌شامل حروف وعلاماتی است که بیانگر اعدادند و شامل‌نشانه‌های مربوط به‌روابط و عملیاتی که باید روی‌آن اعداد عمل‌شود. در هرعبارت جبری به حرفهایی که نشانگر عددهای غیرمشخص باشند متغیر گوئیم هرعبارت‌جبری‌را برحسب تعداد متغیرهای آن یک‌متغیری‌یا دومتغیری،...یا چندمتغیری می‌نامیم‌عبارت‌جبری با یک‌متغیر x را با $f(x)$ وبامتغیرهای $x, y, z, \ldots$ را با $f(x,y,z,\ldots)$ نشان می‌دهیم. مانند $f(x)=x^3+\sqrt{x}$ که عبارتی‌یک‌متغیری برحسب xاست و $f(x,y)=x^2+y^2-xy+\frac{x}{y}$ که‌عبارتی‌دومتغیری شامل x, y می‌باشد.

ممکن‌است درعبارتی مانند $f(x)$، حرف یاحروف‌دیگری وجود داشته‌باشد اما آن‌حرف یاحروف‌که به‌غیراز x باشند درآن عبارت‌به عنوان مقادیر معلوم یا پارامترها به حساب می‌آیندمانند $f(x)=ax^3+bx^2+c$ که‌درآن a, b, c مقادیرمعلوم یا پارامترمی‌باشند و x متغیر عبارت است.

۱ـ۴. انواع عبارت‌های جبری

۱ـ عبارت‌جبری‌صحیح‌به عبارت‌جبری گوئیم که متغیر یاعامل‌شامل‌آن دارای‌توان صحیح و مثبت یاصفر باشد مانند:

$f(x)=x^3+\frac{x^2}{a}+\frac{ax}{2}+\frac{1}{a-b}$ که نسبت‌به x صحیح‌است اما نسبت به b,a صحیح نمی‌باشد.

هرگاه عبارت‌جبری نسبت به تمام‌حروف خودصحیح باشد عبارت‌جبری، صحیح گفته‌می‌شود.

۲ـ عبارت جبری کسری ـ به‌عبارتی گوئیم که نسبت به متغیر آن یا عامل شامل متغیردارای توان منفی باشد مانند $f(x)=\frac{x^3+x}{x^2-1}$ یا $f(x)=5x^4-3x^{-2}$

۳ـ عبارت جبری گنگ ـ به‌عبارتی گوئیم که نسبت به متغیر آن یـا عامل شامل متغیر آن دارای توان کسری باشد مانند: $f(x)=\sqrt[3]{x}+x^{\frac{5}{4}}$

۴ـ عبارت جبری راکه شامل نسبتهای مثلثاتی یالگاریتم باشد عبارت مثلثاتی یا لگاریتمی می‌نامیم. مانند:

$$g(x)=\log x+4x^6 \qquad \text{یا} \qquad f(x)=\cos x+\operatorname{tg} x^2$$

۵ـ۱. حوزه تعریف عبارت جبری

مجموعهٔ مقادیری که به‌ازای هرعضو آن، عبارت‌جبری معین باشدحوزهٔ تعریف‌عبارت گوئیم، مثلاً حوزه‌تعریف عبارتهای‌صحیح، تمام‌اعدادحقیقی می‌باشند یـا حوزه تعریف عبارتهای کسری، تمام‌اعداد حقیقی‌به جز اعدادی‌که مخرج را صفر می‌کنند می‌باشد همچنین حوزهٔ تعریف عبارتهای گنگ، مجموعه اعدادی می‌باشندکه بازاءآنهازیر رادیکال درصورتی‌که فرجه‌زوج‌باشد، نامنفی‌باشد هرعبارت‌جبری‌اصم‌شامل فرجه فرد درصورتی‌که زیررادیکال عبارت‌صحیحی باشد همواره معین‌است.

مثال ۱. حوزه تعریف‌عبارتهای‌زیر را پیدا کنید.

$$f(x)=\frac{x^3+x}{x} \qquad g(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}+\sqrt[3]{x^2-1}$$

$$h(x)=\frac{x+1}{x^2+\sqrt{x}} \qquad u(x)=\frac{1}{\frac{1}{x-1}}$$

حل: درمورد تابع $f(x)$ بازاء $x=0$ مخرج‌صفرمی‌شود پس‌حوزه تعریف $R-\{0\}$ است، می‌توان $f(x)$ را چنین ساده‌کرد، چون $x\neq 0$ پس‌می‌توانیم صورت و مخرج‌را بر x تقسیم‌کنیم، $x\neq 0$ و $f(x)=x^2+1$

عبارت $g(x)$ وقتی‌معین است‌که زیر دو رادیکال بافرجه‌زوج نامنفی‌باشد (مثبت یاصفر).

$$\begin{cases} x-1\geqslant 0 \\ \text{و} \\ 1-x\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1 \\ \\ x\leqslant 1 \end{cases} \Longrightarrow x=1$$

یعنی عبارت $g(x)$ فقط بازاء $x=1$ معین است.

عبارت $h(x)$ کسری و اصم است، اولاً باید $x\geqslant 0$ باشد ثانیاً باید $x^2+\sqrt{x}\neq 0$، یعنی $x\neq 0$ پس حوزهٔ تعریف تمام اعداد حقیقی مثبت می‌باشد $(R^{>0})$

همچنین عبارت $u(x)$ بازاء $x=1$ تعریف نشده است و با شرط $x\neq 1$، $u(x)=x-1$

۶ـ۱. مقدار عددی عبارت جبری

اگر $f(x)$ عبارتی نسبت به متغیر x و a عددی در حوزهٔ تعریف $f(x)$ باشد آنگاه مقدار $f(x)$ را بازاء عدد a با $f(a)$ نشان می‌دهیم و به همین ترتیب برای عبارتهای با چندمتغیر...

مثال ۲. اگر $f(x)=\sqrt{x^2+6x+9}+\dfrac{1+x^2}{x}$ باشد مقدار عددی عبارت را به‌ازاء $x=1$ و $x=0$ و $x=-1$ پیدا کنید.

حل: $$f(1)=\sqrt{(1)^2+6(1)+9}+\frac{1+(1)^2}{1}=4+2=6$$

اما مقدار عبارت بازاء $x=0$ معین نیست زیرا $x=0$ درحوزه تعریف عبارت نمی‌باشد، عبارت دوم به‌صورت $\frac{1}{0}$ که تعریف نشده است تبدیل می‌شود.

$$f(-1)=\sqrt{(-1)^2+6(-1)+9}+\frac{1+(-1)^2}{-1}=\sqrt{4}-2=2-2=0$$

مثال ۳. اگر $f(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+\sqrt{x^2+y^2}$ باشد.

$f(1,-1)$ و $f(3,4)$ و $f(0,2)$ را پیدا کنید.

حل: $$f(1,-1)=\frac{1}{-1}+\frac{-1}{1}+\sqrt{(1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$f(3,4)=\frac{3}{4}+\frac{4}{3}+\sqrt{9+16}=\frac{25}{12}+5=\frac{85}{12}$$

اما $f(0,2)$ نامعین است زیرا $x=0$, $y=0$ متعلق به‌حوزهٔ تعریف عبارت نمی‌باشد
تذکر: درمحاسبه عبارتهای جبری می‌توان متغیری را با مغیردیگر یا باعبارتی برحسب متغیر جانشین کرد، مثلاً درعبارت $f(x)$ اگر x را با $1+x^2$ جانشین کنیم $f(x^2+1)$ را خواهیم‌داشت یا می‌توان x رابا متغیری مانند y یا z یا t جانشین کرد.

مثال ۴. اگر $f(x)=x^2+2$ باشد $f(x-\frac{1}{x})$ را پیدا کنید.

$$f(x-\frac{1}{x})=(x-\frac{1}{x})^2+2=x^2+\frac{1}{x^2}$$

مثال۵. اگر $f(x+y)+f(x-y)=2\,f(x)\cdot f(y)$ وبازاء هر x، $f(x)\neq 0$ ثابت کنید $f(-x)=f(x)$

حل: اگر $x=a$, $y=0$ قرار دهیم:

$$f(a+0)+f(a-0)=2f(a)f(0) \quad \text{یا} \quad 2f(a)=2f(a)f(0)$$

چون $f(a)\neq 0$ پس طرفین‌را بر $f(a)$ تقسیم می‌کنیم، $f(0)=1$ بدست می‌آید
اکنون درعبارت به‌جای x صفر و به‌جای y ، x قرار می‌دهیم

$$f(0+x)+f(0-x)=2f(0)f(x) \implies$$

$$f(x)+f(-x)=2f(x) \implies f(-x)=f(x)$$

۱-۷. چند جمله‌ای‌ها

□ یك‌جمله‌ای ـ یك‌جمله‌ای عبارت‌جبری‌صحیحی‌است که فقط شامل‌عمل‌ضرب‌و‌توان‌باشد، حاصل‌ضرب عاملهای‌عددی و معلوم‌را ضریب آن یك‌جمله‌ای و‌مجموع‌نماهای متغیرهای آن را درجه آن‌یك‌جمله‌ای می‌نامیم درجه‌یك‌جمله‌ای نسبت به یك‌متغیر برابراست با نمای این متغیر در‌آن جمله مانند $5\sqrt{2}x^3y$ که نسبت‌به x ازدرجه ۳ و‌نسبت‌به y از درجه‌یك و ضریب‌عددی نسبت‌به x برابر $5\sqrt{2}y$ و‌نسبت‌به y، $5\sqrt{2}x^3$ است این‌یك‌جمله‌ای‌نسبت‌به xو y از درجه۴ است.
تذکر: هرگاه متغیری دریك، یك‌جمله‌ای وجودنداشته‌باشد درجه‌یك جمله‌ای نسبت به‌آن برابرصفراست. صورت‌کلی یك جمله‌ای ax^n می‌باشدکه نسبت‌به x ازدرجه nو a ضریب عددی است.

یك جمله‌ای‌های متشابهـ دو یا چند یك‌جمله‌ای را متشابه گوئیم هرگاه قسمتهای حرفی آنها یکسان باشند مانند $\text{۷}x^{\text{۳}}$ و $\text{۲۵}ax^{\text{۳}}$ یا مانند ax^n و bx^n .

۸ـ۱. اعمال روی یك جمله‌ای‌ها

الف ـ جمع جبری. چند یك‌جمله‌ای‌را وقتی می‌توان جمع جبری کرد که متشابه باشند. در این‌صورت مجموع جبری آنها برابر یك‌جمله‌ای‌است که متغیر آن‌همان‌متغیر مشترك وضریب آن جمع جبری ضریبهای آن جمله‌ها باشد.

مانند:
$$\text{۵}ax^{\text{۲}}+\text{۲}ax^{\text{۲}}-\text{۶}ax^{\text{۲}}=ax^{\text{۲}}$$

یا
$$abx^n-acx^n=(ab-ac)x^n=a(b-c)x^n$$

که $a(b-c)$ ضریب می‌باشد.

ب ـ ضرب. حاصلضرب چند یك‌جمله‌ای عبارتست‌از یك‌جمله‌ای که ضریبش‌حاصل ضرب ضریبهای آن یك‌جمله‌ای‌ها و سایرعاملهای آن بنابه قاعده‌ضرب توانها به‌دست می‌آیند.

مانند:
$$\text{۲۷}x^{\text{۲}}\times\text{۳}a^{\text{۲}}x^{\text{۳}}\times ax^{\text{۴}}=\text{۸۱}a^{\text{۳}}x^{\text{۲+۳+۴}}=\text{۸۱}a^{\text{۳}}x^{\text{۹}}$$

ج ـ خارج‌قسمت. خارج‌قسمت یا تقسیم‌جمله‌ها همان عکس عمل‌ضرب است.

$$\text{۲۵}x^{\text{۵}}y^{\text{۳}}\div\text{۳}x^{\text{۲}}y^{\text{۲}}=\text{۲۵}x^{\text{۵}}y^{\text{۳}}\times\frac{\text{۱}}{\text{۳}x^{\text{۲}}y^{\text{۲}}}=\frac{\text{۲۵}}{\text{۳}}x^{\text{۳}}y$$

۹ـ۱. چند جمله‌ای (بسجمله‌ای)

مجموع جبری چندیك جمله‌ای که همه آنها متشابه‌نباشندرا یك‌چند جمله‌ای می‌نامیم، می‌توان دریك چندجمله‌ای، جمله‌های متشابه‌را جمع‌جبری کرد تاچندجمله‌ای ساده‌تر شود. مانند:

$$f(x)=\text{۳}x^{\text{۳}}+\text{۵}x^{\text{۲}}-\text{۳}x^{\text{۴}}+\text{۲}x^{\text{۳}}-\text{۴}x^{\text{۲}}+\text{۷}$$

که برابر $f(x)=\text{۵}x^{\text{۳}}-\text{۳}x^{\text{۴}}+x^{\text{۲}}+\text{۷}$ می‌باشد.

درجه چندجمله‌ای عبارت است‌از درجه‌جمله‌ای از آن که نسبت‌به‌دیگرجمله‌های آن دارای بزرگترین‌درجه باشد مثلاً چندجمله‌ای بالا نسبت‌به x ازدرجه ۴ می‌باشد یا چند جمله‌ای

$$\text{۵}x^{\text{۵}}y^{\text{۲}}-\text{۳}x^{\text{۴}}y+\text{۷}xy^{\text{۴}}+x^{\text{۲}}y$$

نسبت‌به x,y از درجه۷ ونسبت‌به x از درجه۵ ونسبت‌به y از درجه۴ است.

صورت کلی یك چند جمله‌ای. به‌طور کلی یك‌چند جمله‌ای‌از درجه n را بصورت:

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ ......\ +kx+l$$

نشان می‌دهیم که $a\neq 0$ و $n\in N\cup\{0\}$ و $l,k,\ ....,c,b,a$ ضریبهای یك جمله‌ایها می‌باشند، اگر یك‌چند جمله‌ای‌از درجه n ، همه‌جمله‌های ازدرجه n تا درجه‌صفر را داشته باشد آنرا کامل گوئیم به‌طور مثال دوجمله‌ای‌کامل درجه اول $ax+b$ با شرط $a\neq 0$ و $b\neq 0$ می‌باشدو ax^2+bx+c سه‌جمله‌ای‌درجه‌دوم‌باشرط $a\neq 0$ و ax^3+bx^2+cx+b چهارجمله‌ای درجه‌سوم باشرط $a\neq 0$ می‌باشد.

۱۰-۱۰ اعمال روی چند جمله‌ایها

الف- جمع چندجمله‌ای‌ها - برای جمع دوچند جمله‌ای جمله‌های متشابه و غیرمتشابه را جمع‌جبری می‌کنیم اگر $p(x)$ چندجمله‌ای‌ازدرجه m و $f(x)$ چندجمله‌ای‌ازدرجه n باشد. $f(x)+p(x)$ ، یك چندجمله‌ای حداکثر ازدرجه m یا n می‌باشد.

اگر
$$f(x)=a+bx+cx^2+.....+kx^n$$
$$p(x)=a'+b'x+c'x^2+.....+l'x^m$$

آنگاه
$$f(x)+p(x)=(a+a')+(b+b')x+(c+c')x^2+\ .....$$

ب- ضرب چند جمله‌ایها - برای‌ضرب چندجمله‌ایها هریك‌از جمله‌های یکی‌را به ترتیب در هریك‌از جمله‌های‌دیگری ضرب کرده و حاصل‌هارا باهم جمع می‌کنیم، اگر $f(x)$ از درجه n و $p(x)$ ازدرجه m باشند آنگاه $f(x)p(x)$ از درجه $m+n$ می‌باشد.

$$f(x)g(x)=aa'+(ab'+ba')x+\ .....\ +kl'x^{m+n}$$

تذکر: تقسیم چند جمله‌ایهارا درقسمتهای‌بعدی بررسی می‌کنیم.

۱.۱۱ چند جمله‌ای‌های متحد

برای‌آنکه یك‌چند جمله‌ای نسبت به یك‌متغیر متحد باصفر باشد لازم وکافیست‌که ضریبهای آن نسبت‌به‌آن متغیر برابرصفر باشند. زیرا در چند جمله‌ای

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\ ....\ +kx+l$$

اگر $a=b=\ ...\ =l=0$ آنگاه مقدار چندجمله‌ای به‌ازای هر x برابر صفر است برعکس اگر چندجمله‌ای به ازاء هر x صفر باشد بازاء $x=0$ نیز صفر است یعنی

$x(ax^{n-1}+\dots+k)\equiv 0$ و $l=0$ و درنتیجه $f(0)=l=0$ واگر به همین ترتیب عمل بالا را ادامه‌دهیم نتیجه می‌گیریم که $a=b=\dots=k=l=0$

همچنین دوچندجمله‌ای‌را نسبت‌به‌یك‌متغیر متحد گوئیم هرگاه ضریبهای جمله‌های هم درجه برابر باشند می‌توان بااستفاده ازآن‌چه دربالا بیان‌شد اثبات کرد.

مثال ۶. a , b , c را طوری پیدا کنید که دو چند جمله‌ای $(x^2-1)(x+2)$ و x^3+ax^2+bx+c متحد باشند. چندجمله‌ای‌اول‌را ضرب کرده وبا دومی متحد قرار می‌دهیم.

$$(x^2-1)(x+2)\equiv x^3+ax^2+bx+c$$

درنتیجه:

$$x^3+2x^2-x-2\equiv x^3+ax^2+bx+c$$

که $a=2$, $b=-1$, $c=-2$ بدست می‌آید.

۱-۱۲. مجموع ضرائب یك چندجمله‌ای یا عبارت جبری

برای‌تعیین مجموع ضرائب چندجمله‌ای $f(x)$ کافیست $f(1)$ را پیداکنیم به‌طورکلی برای تعیین مجموع ضرائب عبارت $f(x,y,z,\dots)$ باید $f(1,1,1,\dots)$ را پیداکنیم.

مثال ۷. مجموع ضرائب‌را درعبارت $f(x,y,z)=(x+y+z)^n$ حساب کنید.

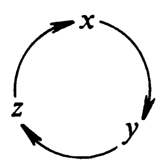
حل: مجموع ضرائب $=f(1,1,1)=(1+1+1)^n=3^n$

مثال ۸. مجموع ضرائب‌در چند جمله‌ای $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ برابراست با:

$$f(1)=a_0+a_1+\dots+a_n$$

۱-۱۳. چند جمله‌ای متقارن

یك‌چند جمله‌ای یا عبارت‌جبری‌را برحسب متغیرهای‌آن متقارن گوئیم هرگاه‌باتبدیل‌دوری متغیرها به‌یکدیگر عبارت‌تغییر نکند.



مثلاً اگر f شامل سه متغیر x,y,z باشد

$$f(x,y,z)=f(y,z,x)=f(z,x,y)$$

به‌طور مثال عبارت $a^3+b^3+c^3-a^2b^2c^2+abc$ نسبت به سه حرف c,b,a متقارن است.

عبارتهای زیر را که شامل n متغیر $x_1,x_2,\dots,x_n$ هستند عبارتهای متقارن اصلی یا ساده‌ترین روابط متقارن گوئیم.

مجموع متغیرها $\quad P_1=x_1+x_2+\dots+x_n$

$$P_2=x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_ix_j+\dots+x_{n-1}x_n$$

مجموع همه‌حاصلضرب‌های دو به‌دوی متغیرها

$$P_k=x_1x_2\dots x_k+x_2x_3\dots x_{k+1}+\dots$$

مجموع همه‌انواع حاصلضرب‌های k به k

حاصلضرب همه‌متغیرها $\quad P_n=x_1x_2\dots x_n$

ثابت می‌شود که هرعبارت متقارن را می‌توان به‌صورت چند جمله‌ای از عبارتهای متقارن اصلی نوشت.

مثال ۹. عبارت‌زیر را برحسب عبارتهای متقارن اصلی بنویسید

$$S=x^3(y+z)+y^3(x+z)+z^3(x+y)+xyz(x+y+z)$$

حل: عبارت‌را به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم

$$\begin{aligned}S&=(x^3y+x^3z+x^2yz)+(xy^3+xy^2z+y^3z)+(xyz^2+xz^3+yz^3)\\&=x^2(xy+xz+yz)+y^2(xy+xz+yz)+z^2(xy+xz+yz)\\&=(xy+xz+yz)(x^2+y^2+z^2)=\\&\quad(xy+xz+yz)[(x+y+z)^2-2(xy+xz+yz)]\\&=P_2(P_1^2-2P_2)=P_1^2P_2-2P_2^2\end{aligned}$$

۱۴ـ۱. اتحادها

اصطلاح تساوی‌در ریاضی‌به معانی‌مختلف‌بکار می‌رود مثلاً درحساب گوئیم $\frac{2}{3}$ مساوی $\frac{6}{9}$

است ودر هندسه گوئیم اگر سه‌ضلع ازمثلثی با سه‌ضلع از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث مساویند در مثال اول مقصود این است که $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۶}{۹}$ اسامی یک عدد هستند و در مثال دوم، منظور ازتساوی دومثلث قابلیت انطباق آنها بریکدیگراست. تعریف‌تساوی منطقی این است که وقتی می‌گوئیم $x=y$ یعنی y, x اسامی یك‌چیزند یا x همان y است. و ایـن رابطه تساوی یك‌رابطه هم‌ارزی است. رابطه‌تساوی درمجموعه چندجمله‌ای‌ها به دومفهوم به‌کار می‌رود یك مفهوم‌آن همانی یـا اتحاد است‌به این‌معنی‌که هریك‌از دو عبارت همان عبارت‌دیگر است وهریك‌بعداز انجام‌عملیاتی‌از روی‌دیگری بدست‌می‌آید واین‌دوعبارت بازاء هرمقدار متغیر یا متغیرها برابرند.

مفهوم‌دیگر برابری عددی دوعبارت‌است یعنی دوعبارت به‌ازای مقادیرمعینی از متغیر یـا متغیرها باهم برابرندکه این‌نوع برابری‌را معادله‌گوئیم.

اتحادهای‌مهم: اکنون‌اتحادهای مهمی‌راکه وجود دارند بیان‌می‌کنیم‌اثبات‌این اتحادها با ضرب به‌آسانی‌بدست می‌آید، اگر درپاره‌ای مواردلازم‌باشد اثبات‌بعضی‌رابیان می‌کنیم.

۱) $(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲$ ۲) $(a-b)^۲=a^۲-۲ab+b^۲$

۳) $(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab+ac+bc)$

می‌توان به‌آسانی اتحادهای ۱ تا ۳ را تعمیم‌داده وبه اتحاد زیر برسیم.

۴) $(a+b+c+ \dots +k+l)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+ \dots +k^۲+l^۲$
$+۲(ab+ac+ \dots +al+bc+ \dots +bl+ \dots +kl)$

می‌توان اتحادهای (۱) و (۲) رابه‌صورتهای زیرکه درتجزیه نیز کاربرد دارد نوشت.

$$a^۲+b^۲=(a+b)^۲-۲ab=(a-b)^۲+۲ab$$

همچنین:

$$(a+b)^۲-(a-b)^۲=۴ab$$

۵) $(a-b)(a+b)=a^۲-b^۲$

مثال ۱۰. حاصل عبارت زیررا پیداکنید.

$$A=(۱+x)(۱+x^۲)(۱+x^۴) \dots\dots (۱+x^{۲^n})$$

حل: اگر $x=۱$ باشد.

$$A=\underbrace{۲\times۲ \dots\dots \times۲}_{n+۱}=۲^{n+۱}$$

فرض کنیم $x\neq ۱$ دراین‌صورت دوطرف رابطه‌را در $x-۱$ ضرب می‌کنیم ودرطرف دوم اتحاد (۵) را $n+۱$ مرتبه به‌کار می‌بریم.

$$(۱-x)A=(۱-x)(۱+x)(۱+x^۲)(۱+x^۴)\cdots(۱+x^{۲^n})$$
$$=(۱-x^۲)(۱+x^۲)(۱+x^۴)\cdots(۱+x^{۲^n})$$
$$=(۱-x^۴)(۱+x^۴)(۱+x^۸)\cdots(۱+x^{۲^n})$$
$$=(۱-x^۸)(۱+x^۸)(۱+x^{۱۶})\cdots(۱+x^{۲^n})=\cdots\cdots=(۱-x^{۲^n})(۱+x^{۲^n})=$$
$$\Longrightarrow (۱-x)A=۱-x^{۲^{n+۱}} \Longrightarrow A=\frac{۱-x^{۲^{n+۱}}}{۱-x}$$

مثال ۱۱. اگر $x^۲+x+۱=۰$ مقدار عبارت گویای $A=x^{۵۰۰}+\frac{۱}{x^{۵۰۰}}$ را پیدا کنید.

حل: از شرط $x^۲+x+۱=۰$ داریم $x+\frac{۱}{x}=-۱$ و همچنین $x^۲=-x-۱$ با ضرب آن در x داریم $x^۳=-x^۲-x=۱$ پس $x^۳=۱$.

$$x^{۵۰۰}+\frac{۱}{x^{۵۰۰}}=(x^۳)^{۱۶۶}\cdot x^۲+\frac{۱}{(x^۳)^{۱۶۶}\cdot x^۲}=x^۲+\frac{۱}{x^۲}=(x+\frac{۱}{x})^۲-۲$$
$$=(-۱)^۲-۲=-۱$$

۶) $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$

۷) $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$

می‌توان اتحادهای ۷,۶,۵ را تعمیم‌داده ، به اتحادهای زیر می‌رسیم

۸) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+a^{n-۳}b^۲+\cdots\cdots+b^{n-۱})$

اگر n عددی‌فرد باشد با تبدیل b به $-b$ از اتحاد (۸) به اتحاد زیر می‌رسیم

۹) $(a^n+b^n)=(a+b)(a^{n-۱}-a^{n-۲}b+a^{n-۳}b^۲-\cdots\cdots+b^{n-۱})$

نتیجه: اگر در اتحادهای ۹,۸ ، $a=\sqrt[n]{x}$ و $b=\sqrt[n]{y}$ فرض کنیم بـه اتحادهای زیر می‌رسیم که درگویا کردن مخرج کسرها نیز اهمیت دارند.

(درحالتی‌که n زوج است باید $x\geqslant ۰$ و $y\geqslant ۰$)

$$(x-y)=(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\dots\dots+\sqrt[n]{y^{n-1}})$$

و اگر n فرد باشد داریم:

$$(x+y)=(\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^{n-1}}-\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\dots\dots+\sqrt[n]{y^{n-1}})$$

به‌طور مثال:

$$(x-y)=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}) \qquad x,y\geqslant 0$$

$$(x-y)=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$$

$$(x+y)=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$$

۱۰) $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

۱۱) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

۱۲) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

۱۳) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2+(b-c^2)+(c-a)^2)$$

می‌توان باشرایطی‌اتحاد ۱۳ را به‌صورت یک اتحاد شرطی در آورد که کاربرد بیشتری دارد.

نتیجه ۱. اگر $a+b+c=0$ آنگاه $a^3+b^3+c^3=3abc$

نتیجه ۲. اگر $a^3+b^3+c^3=3abc$ آنگاه $a+b+c=0$ یا $a=b=c$

مثال ۱۲. اگر $a^3+b^3+c^3=a+b+c=0$ و n عددی‌فرد باشد حاصل‌عبارت $A=a^n+b^n+c^n$ را پیدا کنید.

حل: بنابه اتحاد بالا چون $a+b+c=0$ پس $a^3+b^3+c^3=3abc$ و چـون $a^3+a^3+c^3=0$ در نتیجه $abc=0$ و بنابراین:

$$abc=0 \Longrightarrow a=0 \text{ یا } b=0 \text{ یا } c=0$$

فرض‌کنیم $a=0$ در نتیجه $b+c=0$ و $b=-c$ دراین‌صورت:

زیرا n فرد است $\qquad A=a^n+b^n+c^n=0+(-c)^n+c^n=0$

مثال ۱۳. اگر $a+b+c=0$ و $a\neq 0$ ، $b\neq 0$ و $c\neq 0$ ثابت کنید

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$$

حل: کل پرانتز اول‌را درهریك ازعبارتهای پرانتزدوم ضرب می‌کنیم

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}\right)=1+\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}\times\frac{c}{a-b}$$

$$=1+\frac{(a-b)(c-(a+b))}{ab}\times\frac{c}{a-b}=1+\frac{c}{ab}(c-(a+b))$$

$$=1+\frac{c}{ab}(c+c)=1+\frac{2c^2}{ab}$$

زیرا $(a+b=-c)$

به همین‌ترتیب چون عبارت نسبت به c,b,a متقارن است

پس حاصلضرب‌های پرانتز اول در هریك از جمله‌های بعدی پرانتز دوم بـه‌ترتیب برابر $1+\frac{2a^2}{bc}$ و $1+\frac{2b^2}{ca}$ می‌باشد درنتیجه حاصل‌عبارت برابراست با:

$$1+\frac{2c^2}{ab}+1+\frac{2a^2}{bc}+1+\frac{2b^2}{ca}=3+2\left(\frac{c^2}{ab}+\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ac}\right)$$

$$=3+2\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\right)=3+2\left(\frac{3abc}{abc}\right)=9$$

زیرا بنابه نتیجه اتحاد (۱۳) $a+b+c=0$ و $a^3+b^3+c^3=3abc$

مثال ۱۴. اگر $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{b}$ آنگاه $A=(a-b+c)^3$ را حساب کنید.

حل: بنابه نتیجه اتحاد (۱۳) چون $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=0$ لـذا :
$a-b+c=-3\sqrt[3]{abc}$ و در نتیجه :

$$A=(-3\sqrt[3]{abc})^3=-27abc$$

مثال ۱۵. اگر $\frac{x}{x^2+1}=a$ باشد حاصل عبارت $A=\frac{x^2}{x^4+1}$ را بـرحسب a پیدا کنید.

حل:

$$\frac{x}{x^{۲}+۱}=a \implies x+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{a}$$

اگر $x=۰$ ، $a=۰$ و درنتیجه $A=۰$ پس فرض می‌کنیم $x\neq ۰$

$$A=\frac{x^{۲}}{x^{۴}+۱} \implies \frac{۱}{A}=\frac{x^{۴}+۱}{x^{۲}}=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=(x+\frac{۱}{x})^{۲}-۲$$

$$\implies \frac{۱}{A}=(\frac{۱}{a})^{۲}-۲=\frac{۱-۲a^{۲}}{a^{۲}} \implies A=\frac{a^{۲}}{۱-۲a}$$

مثال ۱۶. اگر $\frac{x^{۲}}{x^{۴}+۱}=\frac{۱}{۷}$ باشد باشرط $x>۰$ حاصل عبارت $A=x^{۳}+\frac{۱}{x^{۳}}$ را پیدا کنید.

حل: چون عبارت A را نمی‌توان مستقیماً برحسب عبارت فرض نوشت بنابراین هردو عبارت را برحسب عبارتی مشترك تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{x^{۲}}{x^{۴}+۱}=\frac{۱}{۷} \implies x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=۷ \implies (x+\frac{۱}{x})^{۲}=۹ \implies x+\frac{۱}{x}=۳$$

پس برای محاسبه A داریم.

$$A=(x+\frac{۱}{x})(x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۱) =(x+\frac{۱}{x})[(x+\frac{۱}{x})^{۲}-۳] =۳(۹-۳)=۱۸$$

مثال ۱۷. اگر $x-\frac{۱}{x}=۴$ باشد حاصل $A=x^{۲}-\frac{۱}{x^{۲}}$ را باشرط $x>۰$ پیدا کنید.

حل: $A=(x-\frac{۱}{x})(x+\frac{۱}{x})$ لذا باید $x+\frac{۱}{x}$ را پیدا کنیم ،

$$x-\frac{۱}{x}=۴ \implies x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=۱۸ \implies (x+\frac{۱}{x})^{۲}=۲۰$$

$$\implies x+\frac{۱}{x}=۲\sqrt{۵} \implies A=۸\sqrt{۵}$$

۱۴. تعمیم اتحاد ۱۰

$$(x+a_{۱})(x+a_{۲})(x+a_{۳}) \cdots\cdots (x+a_{n})=$$

$$x^n+(a_1+a_2+\cdots+a_n)x^{n-1}+(a_1a_2+\cdots+a_1a_n+\cdots)x^{n-2}$$
$$+(a_1a_2a_3+\cdots\cdots)x^{n-3}+\cdots\cdots+a_1a_2a_3\cdots a_{n-1}a_n$$

مثال ۱۸. درعبارت $(x+1)(x+2)\cdots(x+100)$ ضریب x^{99} وهمچنین‌مقدار ثابت‌را پیدا کنید.

حل: با توجه به‌اتحاد فوق‌ضریب x^{99} برابراست با :

$$1+2+\cdots+100=\frac{100}{2}(100+1)=5050$$

و عددثابت عبارت برابر است با:

$$1\times2\times\cdots\times100=100!$$

تذکر: مقدار ثابت یك چندجمله‌ای‌را درحالت‌کلی می‌توان پیدا کـرد کافیست $f(0)$ را حساب‌کنیم همچنین مجموع‌ضرائب توانهای x برابراست با $f(1)-f(0)$.

مثال ۱۹. درمثال قبلی مجموع‌ضرائب وهمچنین مجموع‌ضرائب توانهایx راپیداکنید

حل: مجموع ضرائب برابر است‌با $f(1)$ لذا

$$f(1)=(2)(3)\cdots(101)=101!$$

و مجموع ضرائب‌توانهای x برابراست با:

$$f(1)-f(0)=101!-100!=100!(101-1)=100!\,100$$

مثال ۲۰. حاصل عبارت‌زیر را پیداکنید.

$$(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$$

حل: از اتحاد ۵ استفاده می‌کنیم.

$$[(x^2+8)+4x][x^2+8)-4x]=(x^2+8)^2-16x^2=x^4+64$$

ازکاربرهای‌مهم اتحادها درتجزیه‌عبارتهای‌جبری‌می‌باشدکه ذیلاً به‌آنهامی‌پردازیم.

۱-۱۵. تجزیه عبارتهای جبری به عوامل ضرب

برای‌تجزیه عبارتهای‌جبری روشهای‌زیادی وجود داردکه دراینجا مهمترین‌آنهارا بررسی می‌کنیم .

۱ـ تجزیه به‌روش فاکتورگیری یا عامل مشترك

مانند عبارت $a^2bc+ab^2c+abc^2$ که اگر از abc فاکتور بگیریم داریم

$$a^2bc+ab^2c+abc^2=abc\ (a+b+c)$$

۲ـ روش دسته‌بندی و فاکتورگیری

در این روش در ابتدا کلیه جمله‌ها دارای فاکتور مشترك نیستند اما اگر آنها را به دسته‌هائی تقسیم کنیم هر دسته برای خود فاکتور مشترك خواهد داشت البته این دسته‌بندی باید به‌گونه‌ای باشد که عبارتهای بدست‌آمده دارای عامل مشترك باشند تا بتوان روش فاکتورگیری را ادامه داد.

مثال۴۱. عبارت زیر را به حاصلضرب عوامل تجزیه کنید.

$$ac+bc+bd+ad$$

حل: $ac+bc+bd+ad=c(a+b)+d(a+b)=(a+b)(c+d)$

مثال۴۲. عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$f(a,b,c)=(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$$

حل: ابتدا حاصل $(a+b+c)^3$ را پیدا می‌کنیم اگر آنرا به صورت $((a+b)+c)^3$ نوشته و از اتحاد ۱۱ دومرتبه استفاده کنیم داریم،

$$(a+b+c)^3=$$

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a+3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc$$

بنابراین

$$f(a,b,c)=3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+2abc)=$$

$$3[(a^2b+b^2a+abc+b^2c)-(a^2c+ac^2+bc^2+abc)]$$

$$=3[b(a^2+ab+ac+bc)+c(a^2+ab+ac+bc)]$$

$$=3(a^2+ab+ac+bc)(b+c)\ =3[a(a+b)+c(a+b)](b+c)$$

$$=3(a+b)(a+c)(b+c)$$

تمرین. بااستفاده از مثال بالا ثابت کنید اگر $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$ باشد با شرط فردبودن n داریم.

$$(a+b+c)^n=a^n+b^n+c^n$$

مثال ۲۳. عبارت زیررا تجزیه کنید.

$$f(a,b,c)=ab(a+b)-bc(b+c)+ac(a-c)$$

حل. داریم $a+b=(b+c)+(a-c)$ پس

$$f(a,b,c)=ab(b+c)+ab(a-c)-bc(b+c)+ac(a-c)$$
$$=(b+c)(ab-bc)+(a-c)(ab+ac)=$$
$$(b+c)b(a-c)+(a-c)a(b+c)=(b+c)(a-c)(a+b)$$

۳ـ تجزیه به کمك اتحادها.

از تمام اتحادهایی که ذکر شد می‌توان در تجزیه عبارتها استفاده کرد البته ممکن است از روشهای فاکتورگیری نیز استفاده کرد.

مثال ۲۴. عبارت $f(a,b)=a^6+a^4+a^2b^2+b^4-b^6$ را تجزیه کنید.

حل.

$$a^6-b^6=(a^3-b^3)(a^3+b^3)=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$

از اتحادهای ۱و۲ یا نتیجه‌های آنها داریم.

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2$$

پس:

$$f(a,b)=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2(a^2-ab+b^2)+(a^2+b^2)^2-a^2b^2$$
$$=(a-b)(a+b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$$
$$+(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$$
$$=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)(a^2-b^2+1)$$

تذکر. گاهی درتجزیه عبارتها باید جمله‌ای را اضافه‌وکم کنیم و با استفاده ازروشهای بالا عبارت را تجزیه‌کرد این قسمت احتیاج به تمرین زیاد دارد.

مثال ۲۵. عبارت زیر را تجزیه کنید.

$$f(a,b,c)=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$$

حل. اگر جمله $2a^2b^2$ اضافه و کم کنیم می‌توانیم از اتحاد (۳) استفاده کنیم.

$$f(a,b,c)=a^۴+b^۴+c^۴+۲a^۲b^۲-۲a^۲c^۲-۲b^۲c^۲-۴a^۲b^۲=$$

$$(a^۲+b^۲-c^۲)^۲-۴a^۲b^۲ = \text{(اتحادمزدوج)}$$

$$(a^۲+b^۲-c^۲+۲ab)(a^۲+b^۲-c^۲-۲ab)=$$

$$[(a+b)^۲-c^۲][(a-b)^۲-c^۲]=$$

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$

مثال ۲۶. اگر $x^۲+y^۲-xy-x-y+۱=۰$ باشد

حاصل عبارت $A=\dfrac{x^n+y^n}{x^۲+y^۲}$ را پیدا کنید

حل. آنچه مسلم است باید به‌طریقی عبارت فرض را تجزیه‌کنیم. دوطـرف آنرا در ۲ می‌کنیم

$$۲x^۲+۲y^۲-۲xy-۲x-۲y+۲=۰$$

$$\Longrightarrow x^۲-۲xy+y^۲+x^۲-۲x+۱+y^۲-۲y+۱=۰$$

$$\Longrightarrow (x-y)^۲+(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۰$$

می‌دانیم اگر مجموع مربعات چند عبارت برابر صفر شود باید هریك ازآنها برابر صفر باشد درصورتی جواب خواهیم داشت که مقدارهای بدست‌آمده درعبارت سازگار باشند مثلاً اگر بازاء $x=\alpha$ یکی ازعبارتها صفر شود باید سایر عبارتها نیز بازاء $x=\alpha$ برابر صفر شوند دراین‌صورت $x=\alpha$ را ریشه عبارت گوئیم.

بنابراین با توضیحات بالا داریم:

$$\begin{cases} x=y \\ x=۱ \\ y=۱ \end{cases} \Longrightarrow x=y=۱ \Longrightarrow A=\frac{۱+۱}{۱+۱}=۱$$

مثال ۲۷. عبارت $f(a)=(a+۱)(a+۳)(a+۵)(a+۷)+۱۵$ را تجزیه کنید

حل. برای تجزیه چنین عباراتی باید پرانتزها را به‌طریقی ضرب کرده و عبارت را از حالت ضرب خارج کنیم

$$f(a)=(a+۱)(a+۷)(a+۳)(a+۵)+۱۵=$$

$$(a^۲+۸a+۷)(a^۲+۸a+۱۵)+۱۵$$

اگر فرض‌کنیم $x = a^{۲}+۸a$ داریم،

$$f(a)=(x+۷)(x+۱۵)+۱۵=x^{۲}+۲۲x+۷\times۱۵+۱۵$$
$$=x^{۲}+۲۲x+۱۲۰=(x+۱۰)(x+۱۲)=$$
$$(a^{۲}+۸a+۱۰)(a^{۲}+۸a+۱۲)=(a^{۲}+۸a+۱۰)(a+۲)(a+۶)$$

مثال ۲۸. عبارت زیر را تجزیه‌کنید.

$$f(a,b,c)=(a-b)^{۳}+(b-c)^{۳}-(a-c)^{۳}$$

حل. می‌توان عبارت را به‌صورت $f(a,b,c)=(a-b)^{۳}+(b-c)^{۳}+(c-a)^{۳}$ نوشت.اکنون باتوجه به نتیجه اتحاد (۱۳) چون $(a-b)+(b-c)+(c-a)\doteq ۰$ پس $(a-b)^{۳}+(b-c)^{۳}+(c-a)^{۳}=۳(a-b(b-c)(c-a)$

مثال ۲۹. عبارت $f(x)=x^{۳}(x^{۲}-۷)^{۲}-۳۶x$ را تجزیه‌کنید.

حل. $f(x)=x[x^{۲}(x^{۲}-۷)^{۲}-۳۶]=x[x(x^{۲}-۷)+۶][x(x^{۲}-۷)-۶]$

$$=x(x^{۳}-۷x+۶)(x^{۳}-۷x-۶)$$
$$=x[x^{۳}-x-۶x+۶][x^{۳}-x-۶x-۶]$$
$$=x[x(x-۱)(x+۱)-۶(x-۱)][x(x-۱)(x+۱)-۶(x+۱)]$$
$$=x(x--۱)(x^{۲}+x-۶)(x+۱)x^{۲}-x-۶)$$
$$=x(x-۱)(x+۱)(x+۲)(x-۳)(x-۲)(x+۳)$$

۴ـ تجزیه به‌روش ضرائب نامعین.

چندجمله‌ای راکه تجزیه‌پذیر باشد می‌توان به‌صورت حاصلضرب چندجمله‌ای‌هائی با ضرائب نامعین در نظر گرفت، سپس دوطرف را متحد یکدیگر قرار می‌دهیم تا ضرائب محاسبه شوند، این روش‌وقتی ممکن‌است که بتوان دستگاه حاصل را حل‌کرد زیراهمواره این دستگاهها قابل حل نیستند.

مثال ۳۰. چند جمله‌ای $f(x)=x^{۴}+x^{۳}+x-۱$ را درصورت‌امکان به‌حاصلضرب دوعبارت درجه دوم تجزیه‌کنید‌که یکی از عاملها $x^{۲}+۱$ باشد.

حل.

$$x^{۴}+x^{۳}+x-۱\equiv(x^{۲}+۱)(x^{۲}+ax+b)\Longrightarrow$$

$$x^4+x^3+x-1\equiv x^4+ax^3+(b+1)x^2+ax+b$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b+1 \ =0 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Longrightarrow a=1, b=-1$$

که دستگاه سازگار است

$$x^4+x^3+x-1 \ = \ (x^2+1)(x^2+x-1)$$

۱۶-۱. کاربردهای تجزیه

ازکاربردهای تجزیه ساده‌کردن عبارتهـای جبری و کسرهـا و همچنین پیداکردن بزرگترین مقسوم علیه مشترك وکوچکترین مضرب مشترك و سایرکاربردها می‌باشند که در ذیل با مثالهائی بعضی از آنها را بیان می‌کنیم.

مثال ۳۱. کسر زیر را ساده‌کنید

$$f(a)=\frac{a^6+a^4+a^2+1}{a^3+a^2+a+1} \quad (a\neq -1)$$

حل. ابتدا هریك از صورت و مخرج را به حاصلضرب تبدیل می‌کنیم

$$f(a)=\frac{a^4(a^2+1)+(a^2+1)}{a^2(a+1)+(a+1)}=\frac{(a^2+1)(a^4+1)}{(a+1)(a^2+1)}=\frac{a^4+1}{a+1}$$

مثال۳۲. کسر زیر ساده کنید

$$f(a)=\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^6-b^6} \quad (a\neq \pm b)$$

حل.

$$f(a)=\frac{(a^2+b^2)^2-a^2b^2}{(a^3-b^3)(a^3+b^3)}=\frac{(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)}{(a-b)(a+b)(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}$$

۱-۱۷. بزرگترین مقسوم علیه مشترك و کوچکترین مضرب مشترك. (ب-م-م و ك-م-م)

برای تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترك و کوچکترین مضرب مشترك چند عبارت ابتدا هریك از عبارتها را به‌حاصلضرب تبدیل می‌کنیم سپس حاصلضرب عامل‌های‌مشترك با کوچکترین نما برابر بزرگترین مقسوم علیه مشترك و حاصلضرب عامل‌های مشترك و غیرمشترك با بزرگترین نما برابر کوچکترین مضرب مشترك عبارتها می‌باشد

مثال ۳۳. ب-م-م وك-م-م بین عبارتهای زیر را تعیین‌کنید.

$$g(a)=a^{۴}+a^{۲}+۱ \quad و \quad f(a)=a^{۵}+a^{۴}+a^{۳}+a^{۲}+a+۱$$

حل. ابتدا هریك از عبارتها را تجزیه می‌کنیم

$$f(a)=a^{۳}(a^{۲}+a+۱)+(a^{۲}+a+۱)=(a^{۲}+a+۱)(a^{۳}+۱)$$

$$=(a^{۲}+a+۱)(a+۱)(a^{۲}-a+۱)$$

$$g(a)=a^{۴}+۲a^{۲}+۱-a^{۲}=(a^{۲}+۱)^{۲}-a^{۲}$$

$$=(a^{۲}+۱-a)(a^{۲}+۱+a)=(a^{۲}+a+۱)(a^{۲}-a+۱)$$

لذا ب-م-م برابر $(a^{۲}+a+۱)(a^{۲}-a+۱)$ و ك-م-م برابر $(a^{۲}+a+۱)(a^{۲}-a+۱)(a+۱)$ می‌باشد

مثال ۳۴. ب-م-م و ك-م-م دوعبارت زیر را پیداکنید.

$$g(a)=a^{۴}+۵a^{۳}-۳۶a^{۲} \quad و \quad f(a)=a^{۳}+۲a^{۲}-۲۴a$$

حل. ابتدا عبارتها را تجزیه می‌کنیم

$$f(a)=a(a^{۲}+۲a-۲۴)=a(a+۶)(a-۴)$$

$$g(a)=a^{۲}(a^{۲}+۵a-۳۶)=a^{۲}(a+۹)(a-۴)$$

لذا ب-م-م برابر $a(a-۴)$ و ك-م-م برابر $a^{۲}(a-۴)(a+۶)(a+۹)$ است.

مثال ۳۵. عبارت زیر را ساده‌کنید $(a\neq\pm۱)$

$$f(a)=\frac{a}{a^{۲}-۱}+\frac{a^{۲}+a-۱}{a^{۳}-a^{۲}+a-۱}+\frac{a^{۲}-a-۱}{a^{۳}+a^{۲}+a+۱}-\frac{۲a^{۳}}{a^{۴}-۱}$$

حل.

$$f(a)=\frac{a}{(a-1)(a+1)}+\frac{a^2+a-1}{a^2(a-1)+(a-1)}$$

$$+\frac{a^2-a-1}{a^2(a+1)+(a+1)}-\frac{2a^3}{(a^2-1)(a^2+1)}$$

$$=\frac{a}{(a-1)(a+1)}+\frac{a^2+a-1}{(a-1)(a^2+1)}$$

$$+\frac{a^2-a-1}{(a+1)(a^2+1)}-\frac{2a^3}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}$$

$$=\frac{a(a^2+1)+(a+1)(a^2+a-1)+(a-1)(a^2-a-1)-2a^3}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}$$

$$=\frac{a^3+a+a^3+2a^2-1+a^3-2a^2+1-2a^3}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}=\frac{a^3+a}{(a-1)(a+1)(a^2+1)}$$

$$=\frac{a(a^2+1)}{(a^2-1)(a^2+1)}=\frac{a}{a^2-1}$$

مثال ۳۶. عبارت زیر را ساده کنید.

$$f(a,b,c)=\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

حل.

$$f(a,b,c)=\frac{\frac{b+c+a}{a(b+c)}}{\frac{b+c-a}{a(b+c)}}\left(\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$\frac{b+c+a}{b+c-a}\times\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}=\frac{(a+b+c)^2}{2bc}$$

۱۸-۱. معادله یك مجهولی درجه اول

صورت کلی این معادله $ax+b=0$ با شرط $a\neq 0$ است که در این حالت $x=-\dfrac{b}{a}$ ریشه معادله است.

اگر $a=0$ و $b=0$ معادله به‌صورت $0\times x=0$ می‌باشد که دارای بی‌شمار جواب است.

اگر $a=0$ و $b\neq 0$ معادله دارای جواب نیست وغیرممکن است.

اگر معادله‌ای به‌صورت حاصلضرب چندین عبارت درجه اول نسبت به‌یك یا چند متغیر برابر صفر باشد برای تعیین ریشه یا ریشه‌های معادله هریك از عاملها (عبارتها) را برابر صفر قرار می‌دهیم.

مثال ۳۷. معادله زیر را حل کنید $(x-a)(x+b)=(x-a+b)^2$

حل. ابتدا عبارتها را ساده می‌کنیم

$$x^2+bx-ax-ab=x^2+a^2+b^2-2ax+2bx-2ab \Longrightarrow$$
$$ax-bx=a^2+b^2-ab \Longrightarrow (a-b)x=a^2+b^2-ab$$

اگر $a-b\neq 0$ یا $a\neq b$ آنگاه $x=\dfrac{a^2+b^2-ab}{a-b}$ ریشه معادله است اگر $a=b\neq 0$ باشد آنگاه معادله به‌صورت $0\times x=a^2\neq 0$ است که جواب ندارد و بالاخره اگر $a=b=0$ آنگاه معادله به‌صورت $0\times x=0$ است که بی‌شمار جواب‌دارد.

مثال ۳۸. بازاء چه مقادیر m معادله $x+m^2+2=m^2x-3m$ بی‌شمار جواب دارد همچنین معاداه را حل کنید.

حل. ابتدا معادله را برحسب x مرتب می‌کنیم.

$$x(m^2-1)=m^2+3m+2 \Longrightarrow (m-1)(m+1)x=(m+1)(m+2)$$

برای آنکه معادله بی‌شمار جواب داشته باشد باید $(m-1)(m+1)=0$ و هم $(m+1)(m+2)=0$ که‌از اولی $m=\pm 1$ و از دومی $m=-1$ و $m=-2$ بدست می‌آید باید جوابی را انتخاب کنیم که هردو عبارت را صفر کند یعنی ریشه مشترك دو معادله. که دراین‌صورت $m=-1$ جواب می‌باشد.

این معادله بازاء $m=1$ دارای جواب نیست و درحالی که $m\neq\pm 1$ دارای جواب $x=\dfrac{m+2}{m-1}$ می‌باشد

مثال ۳۹. معادله $x^{2}-1+(x+1)(x-4)=0$ را حل کنید.

حل.
$$(x-1)(x+1)+(x+1(x-4)=0\Longrightarrow$$
$$(x+1)(x-1+x-4)=0\Longrightarrow(x+1)(2x-5)=0$$
$$\Longrightarrow x+1=0 \text{ یا } 2x-5=0\Longrightarrow x=-1 \text{ یا } x=\frac{5}{2}$$

مثال ۴۰. معادله زیر را حل و بحث کنید

$$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-b}=\frac{a-b}{x^{2}-ab}$$

حل. اولاً باید $x\neq a$ و $x\neq b$ و $x\neq\pm\sqrt{ab}\,(ab\geqslant 0)$ باشند تاعبارت دارای معنی باشد

ثانیاً با برقراری شرایط بالا داریم.

$$\frac{a-b}{(x-a)(x-b)}=\frac{a-b}{x^{2}-ab}$$

اگر $a=b$ معادله بی‌شمار جواب دارد.

اگر $a\neq b$ آنگاه. $(x-a)(x-b)=x^{2}-ab$ یا $(a+b)x=2ab$ که با شرط $a\neq b$ ، $x=\frac{2ab}{a+b}$ ریشه معادله است.

مثال ۴۱. معادله $\frac{x-a}{b^{2}}+\frac{x-b}{a^{2}}=\frac{x}{ab}$ را حل و بحث کنید،

حل. اولاً باید $a\neq 0$ و $b\neq 0$ ثانیاً برای حل می‌توانیم همه‌را به‌یك‌طرف تساوی برده و مخرج مشترك بگیریم.

$$\frac{x-a}{b^{2}}+\frac{x-b}{a^{2}}-\frac{x}{ab}=0\Longrightarrow\frac{a^{2}x-a^{3}+b^{2}x-b^{3}-abx}{a^{2}b^{2}}=0$$

هرگاه کسری برابر صفر باشد صورت آن صفر است. لذا

$$(a^{2}+b^{2}-ab)x-a^{3}-b^{3}=0\Longrightarrow$$
$$(a^{2}+b^{2}-ab)x=(a+b)(a^{2}+b^{2}-ab)$$

چون b,a هردو مخالف صفر هستند پس $a^{2}+b^{2}-ab\neq 0$ و درنتیجه $x=a+b$ ریشه معادله است.

مثال ۴۲. معادله $\frac{x+2}{x+1}+\frac{2-x}{1-x}+\frac{4}{x-1}=0$ را حل کنید.

حل. باید $x\neq 1$ و $x\neq -1$، تا معادله دارای معنی باشد.

$$\frac{(x+2)(x-1)+(x-2)(x+1)+4(x+1)}{(x+1)(x-1)}=0$$

$$\Longrightarrow (x+1)(x-2+4)+(x+2)(x-1)=0$$

$$\Longrightarrow (x+2)(x+1+x-1)=0 \Longrightarrow 2x(x+2)=0$$

$$\Longrightarrow x=0 \ , \ x=-2$$

که هردو قابل قبولند.

۲۰-۱. تعیین علامت عبارت درجه اول $A=ax+b$

هدف از تعیین علامت یك عبارت جبری آن است که مشخص کنیم به‌ازاء چه مقادیر x (متغیر) عبارت مثبت یا منفی است، مثلاً درعبارت $A=x+2$ اگر $x>-2$، آنگاه، $A>0$ واگر $x<-2$ آنگاه، $A<0$ یعنی به‌ازای xهای بیشتراز -2 عبارت مثبت و به‌ازای xهای کمتر از -2 عبارت منفی است.

درعبارت $A=ax+b$، اگر آنرا مساوی صفر قرار دهیم $x=-\frac{b}{a}$ ریشه‌عبارت

است، بنابراین اگر $x>-\frac{b}{a}$، $x+\frac{b}{a}>0$ حال اگر دوطرف نامساوی را در a ضرب کنیم، دوحالت داریم

$$a>0 \Longrightarrow ax+b>0 \Longrightarrow A>0$$

$$a<0 \Longrightarrow ax+b<0 \Longrightarrow A<0$$

اگر $x<-\frac{b}{a}$، $x+\frac{b}{a}<0$ و مانند حالت قبل داریم.

$$a<0 \Longrightarrow ax+b>0 \Longrightarrow A>0$$

$$a>0 \Longrightarrow ax+b<0 \Longrightarrow A<0$$

درنتیجه علامت عبارت $ax+b$ به‌ازای مقادیر بزرگتر از ریشه $\left(-\frac{b}{a}\right)$ موافق علامت‌ضریب x یعنی a و به‌ازای مقادیر کمتر از ریشه مخالف علامت‌ضریب x یعنی a است.

هرگاه عبارتی به‌صورت حاصلضرب یا خارج قسمت چند عبارت درجه اول باشد هریك را جداگانه تعیین علامت کرده و علامتها را درهم ضرب یا برهم تقسیم می‌کنیم هرعبارت یك جمله‌ای $ax+b$ به‌ازای ریشه‌اش تغییر علامت می‌دهد.

مثال ۴۳. عبارت $A=x^۳-۲x^۲-x+۲$ را تعیین علامت کنید.

حل. ابتدا عبارت را به‌حاصلضرب تجزیه می‌کنیم.

$$A=x^۲(x-۲)-(x-۲)=(x-۲)(x^۲-۱)=(x-۲)(x-۱)(x+۱)$$

عبارت را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا ریشه‌ها مشخص شوند.

$$A=۰ \Longrightarrow x=۲ \text{ یا } x=۱ \text{ یا } x=-۱$$

اکنون جدولی رسم کرده و درآن هرعبارت را تعیین علامت می‌کنیم، در سطر اول این جدول ریشه‌ها را ازکوچك به بزرگ می‌نویسیم،

x	$-\infty$		-۱		۱		۲		$+\infty$
$x+۱$		$-$	۰	$+$		$+$		$+$	
$x-۱$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$x-۲$		$-$		$-$		$-$	۰	$+$	
A		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

نتیجه: اگر $x<۱$ یا $+۱<x<۲$ آنگاه $A<۰$

اگر $-۱<x<۱$ یا $x>۲$، آنگاه $A>۰$

می‌توانیم بدون تشکیل جدول نیز عبارتها را تعیین علامت کنیم، به‌این‌صورت‌که ریشه‌ها را از سمت چپ به‌ترتیب صعودی می‌نویسیم. وعددی را درفاصلهٔ دوریشهٔ متوالی‌دلخواه انتخاب کرده درعبارت قرارمی‌دهیم، علامت عددی‌که بدست می‌آید همان علامت‌عبارت در فاصله بین‌آن دوریشه است، سپس هرجا عبارت صفرشده‌است، علامت را تغییرمی‌دهیم یعنی در هر ریشه به‌شرطی آن ریشه، ریشه مضاعف نباشد علامت تغییر می‌کند.

مثال ۴۴. عبارت $B=x^۳-x^۲-۹x+۹$ را تعیین علامت کنید.

حل. $B=x^{۲}(x-۱)-۹(x-۱)=(x-۱)(x^{۲}-۹)$

بنابراین $B=(x-۱)(x-۳)(x+۳)$

ریشه‌ها ۳− و ۱ و ۳ می‌باشند لذا، اگر مثلاً $x=۰$ را که بین ۱ و ۳− است در عبارت قرار دهیم $B=۹>۰$ یعنی بین ۳− و ۱ علامت مثبت است پس بین $-\infty$ تا ۳− علامت منفی و بین ۱ تا ۳ علامت منفی و بین ۳ تا $+\infty$ علامت مثبت است.

x	$-\infty$		-۳		۱		۳		$+\infty$
B		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

نتیجه: $x<-۳$ یا $۱<x<۳ \Longrightarrow B<۰$

$-۳<x<۱$ یا $x>۳ \Longrightarrow B>۰$

۱-۲۱. نامعادله یک‌مجهولی درجه اول

نامعادله یک‌مجهولی درجه اول پس از انتقال همه جمله‌ها به‌یک‌طرف و ساده‌کردن به یکی از صورتهای زیر است.

$$ax+b>۰ \text{ یا } ax+b\geqslant ۰ \text{ یا } ax+b<۰ \text{ یا } ax+b\leqslant ۰$$

برای حل این نامعادله‌ها، b را به‌سمت راست نامعادله می‌بریم و سپس طرفین نامعادله را بر a تقسیم می‌کنیم، اگر a منفی باشد جهت نامعادله تغیر می‌کند به‌عنوان مثال برای حل نامعادله $ax+b>۰$ داریم،

$$ax+b>۰ \Longrightarrow ax>-b$$

اگر $a>۰$ آنگاه $x>-\frac{b}{a}$ و فاصله $(-\frac{b}{a}, +\infty)$ جواب نامعادله است

اگر $a<۰$ آنگاه $x<-\frac{b}{a}$ و فاصله $(-\infty , -\frac{b}{a})$ جواب نامعادله است

دراین حالت اگر $a=۰$، به‌شرط $b>۰$، نامعادله برای هر x حقیقی برقرار است اما اگر $a=۰ , b\leqslant ۰$، جواب ندارد.

مثال ۴۵. نامعادله $x-\frac{۳x-۱}{۲} \leqslant \frac{۱-۲x}{۳}$ را حل کنید.

حل. طرفین نامعادله را در ۶ ضرب می‌کنیم، بدست می‌آید،

$$۲-۴x\leqslant ۹x-۳-۶x \Longrightarrow ۲-۴x\leqslant ۳x-۳$$

تمام جمله‌هائی راکه شامل x است به‌یك طرف و اعـداد ثابت را به‌طـرف دیگر منتقل می‌کنیم

بنا براین $-۷x\leqslant -۵$ یا $x\geqslant \frac{۵}{۷}$ جواب نامعادله است.

مثال ۴۶. نامعادله $۲(x-۱)-x>۳(x-۱)-۲x-۵$ را حل کنید.

حل. پس از خلاصه‌کردن بدست می‌آید، $x-۲>x-۸$ یا $-۲>-۸$

یا $۶>۰$ که همواره برقرار است پس هر x حقیقی جواب نامعادله است.

مثال ۴۷. نامعادله زیر را حل و بحث کنید $m^۲(x-۱)-m>x-۲$

حل. ابتدا نامعادله را مرتب می‌کنیم.

$$m^۲x-x>m^۲+m-۲ \Longrightarrow (m^۲-۱)x>(m-۱)(m+۲)$$

$$\Longrightarrow (m-۱)(m+۱)x>(m-۱)(m+۲)$$

ابتدا طرفین را بر $m-۱$ تقسیم می‌کنیم، دوحالت داریم،

۱ـ اگر $m-۱>۰$ یا $m>۱$ آنگاه $(m+۱)x>m+۲$ و چون $m+۱>۰$ ، لذا $x>\dfrac{m-۲}{m+۱}$

۲ـ اگر $m-۱<۰$ یا $m<۱$ آنگاه $(m+۱)x<m+۲$

اکنون برای $m+۱$ دوحالت داریم، $m+۱>۰$ یا $m+۱<۰$

اگر $m+۱>۰$ یا $m>-۱$ که درنتیجه $-۱<m<۱$ آنگاه $x<\dfrac{m+۲}{m+۱}$

اگر $m+۱<۰$ یا $m<-۱$ آنگاه $x>\dfrac{m+۲}{m+۱}$

در حالتی که $m=۱$ نامعادلـه برقرار نیست واگر $m=-۱$ نامعادلـه به‌صورت $۲>۰$ است که همواره برقرار است.

نتیجه: اگر $m>۱$ یا $m<-۱$ آنگاه $x>\dfrac{m+۲}{m+۱}$

اگر $-۱<m<۱$ آنگاه $x<\frac{m+۲}{m+۱}$

مثال ۴۸. جواب نامعادله زیر را مشخص کنید $x^۳-۴x\leqslant ۰$

حل. اگر عبارت را تجزیه‌کنیم داریم $x(x-۲)(x+۲)\leqslant ۰$ که ریشه‌های آن $x=۰$ و $x=\pm ۲$ است، اگر $x=۱$ قرار دهیم عبارت منفی است لذا:

x		-۲		۰		۲	
$x^۳-۴x$	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$

جواب نامعادله $۲\geqslant x\geqslant ۰$ یا $x\leqslant -۲$ است.

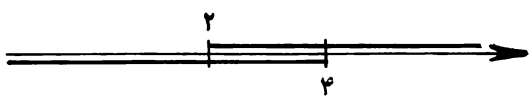
۲۲-۱. دستگاه نامعادلات یك مجهولی

هدف از دستگاه نـامعادلات یك مجهولی، دستگاهـی است‌که پس از ساده‌کردن به‌صورت $\begin{cases} ax+b>۰ \text{ یا } <۰ \\ a'x+b'>۰ \text{ یا } <۰ \end{cases}$ باشند، برای حل‌این دستگاهها هر نامعادله‌راجداگانه حل‌کرده سپس جواب مشترك آنها را پیدا مـی‌کنیم، ممکن است درایـن دستگاه تعداد نامعادلات بیشتر از دو نیز باشد، دراین‌صورت نیز هر نامعادله‌را جداگانـه حل کرده و جواب مشرك آنها را پیدا می‌کنیم.

مثال ۴۹. دستگاه زیر را حل‌کنید $\begin{cases} \frac{x-۱}{۳}>۳x-۱۱ \\ ۴+\frac{x}{۲}<۳x-۱ \end{cases}$

حل.

$$\begin{cases} x-۱>۹x-۳۳ \\ ۸+x<۶x-۲ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -۸x>-۳۲ \\ -۵x<-۱۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x<۴ \\ x>۲ \end{cases}$$



ودر نتیجه جواب مشترك یا جواب دستگاه $۲<x<۴$ است.

۲۳-۱. توان و ریشه (رادیکالها)

ریشه طبیعی یك‌عدد.

اگر n عددی‌طبیعی باشد، ریشه nام عدد حقیقی a. عددی است مانند b بطوری‌که b^n برابر a باشد

$$b=\sqrt[n]{a} \iff a=b^n$$

وقتی n فرد باشد هموارهٔ ریشهٔ nام a وجود دارد و هم علامت با خود a مـی‌باشد و در حالت ۱ $= n$ برابر خود a است

وقتی n زوج است که دراین صورت باید a نامنفی باشد برای عدد a دوریشه nام‌وجود دارد که قرینه یکدیگرند یکی $\sqrt[n]{a}$ ودیگری $-\sqrt[n]{a}$ مانند:

$$\sqrt[۵]{-۳۲} = \sqrt[۵]{-۲^۵} = -۲$$

$$\sqrt[۴]{۸۱} = ۳ \quad , -\sqrt[۴]{۸۱} = -۳$$

$$x^۲ = ۲۵ \implies x = \pm\sqrt{۲۵} = \pm ۵$$

تذکر مهم۱. وقتی n زوج‌باشد $\sqrt[n]{a}$ عددی است نامنفی (مثبت یا صفر) یعنـی حاصل $\sqrt[n]{a}$ در این حالت هیچگاه نمی‌توانـد منفی باشد از این‌رو $\sqrt[n]{x^n}$ وقتـی n زوج بـاشد برابر $|x|$ است مثلاً $\sqrt{(-۵)^۲} = |-۵| = ۵$ باید توجه داشت که ریشه دوم ۲۵ با $\sqrt{۲۵}$ متفاوت است ریشه‌دوم ۲۵ برابر ± ۵ است اما $\sqrt{۲۵} = ۵$.

تذکر ۲. قدرمطلق یك عدد حقیقی مانند x به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$|x| = \begin{cases} x & x \geqslant ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

مثلا $|\pi - ۳| = \pi - ۳$ اما $|۳ - \pi| = \pi - ۳$ زیرا $۳ - \pi < ۰$

همچنین $|x| = |-x|$ مانند $|-۴| = |۴| = ۴$ و هموارهٔ $\sqrt[۲n]{x^{۲n}} = |x|$ درفصلهای بعدی در مورد قدرمطلق بحث می‌کنیم.

۱-۲۴. روابط مهم رادیکالها

اگر m و n و k اعداد طبیعی باشند

۱- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ، $a \geqslant 0 , b \geqslant 0$

اگر n فرد باشد، a و b می‌توانند منفی نیز باشند

همچنین اگر $a<0$ و $b<0$ و n زوج باشد

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|} \cdot \sqrt[n]{|b|}$$

مانند

$$\sqrt[4]{(-3)(-5)} = \sqrt[4]{|-3|} \cdot \sqrt[4]{|-5|} = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{5}$$

۲- $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ، $a \geqslant 0 \ , \ b>0$

اگر n فرد باشد، a,b می‌توانند منفی نیز باشند

همچنین اگر $a<0$ و $b<0$ و n زوج باشد

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}$$

۳- $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k} \qquad a \geqslant 0$

واگر n فرد باشد، $a<0$ نیز می‌تواند باشد

۴- $a=b \implies a^n = b^n$

$$a^n = b^n \text{ و } n \text{ فرد، } \implies a=b$$

$$a^n = b^n \text{ و } n \text{ زوج، } \implies |a| = |b| \implies a=b \text{ یا } a=-b$$

۵- $0<a<b \implies \begin{cases} a^n < b^n \\ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \end{cases}$

$$a<b<0 \text{ و } n \text{ فرد، } \implies \begin{cases} a^n < b^n \\ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \end{cases}$$

$$a<b<\circ \text{ و } ، n \text{ زوج} \Longrightarrow \begin{cases} a^n>b^n \\ \sqrt[n]{a},\sqrt[n]{b} \end{cases}$$ غیرحقیقی هستند

$$a<\circ<b \text{ و } ، n \text{ فرد} \Longrightarrow \begin{cases} a^n<b^n \\ \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b} \end{cases}$$

درحالتی‌که n زوج و $a<\circ<b$، اگر طرفین را به‌توان n برسانیم $a^n=b^n$ یا $a^n<b^n$ یا $a^n>b^n$ می‌باشد.

$$a<\circ<b ، n \text{ زوج} \begin{cases} |a|=|b| \Longrightarrow a^n=b^n \\ |a|<|b| \Longrightarrow a^n<b^n \\ |a|>|b| \Longrightarrow a^n>b^n \end{cases}$$

درحالتی‌که n زوج و $a<\circ<b$ ریشه معنی ندارد

مانند:
$$-۳<۳ \Longrightarrow (-۳)^۲=(۳)^۲$$
$$-۳<۵ \Longrightarrow (-۳)^۲<۵^۲ \Longrightarrow ۹<۲۵$$
$$-۳<۲ \Longrightarrow (-۳)^۲>۲^۲ \Longrightarrow ۹>۴$$

۶-
$$۱<a \text{ و } n<m \Longrightarrow a^n<a^m$$
$$\circ<a<۱ \text{ و } n<m \Longrightarrow a^n>a^m$$

مانند:

$$a>۱ \Longrightarrow a^۲<a^۳<a^۴<\dots \text{ و } \circ<a<۱ \Longrightarrow a^۲>a^۳>a^۴>\dots$$

و به‌همین ترتیب:

$$۱<a \text{ و } n<m \Longrightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[m]{a}$$
$$\circ<a<۱ \text{ و } n<m \Longrightarrow \sqrt[n]{a}<\sqrt[m]{a}$$

مانند:
$$a>۱ \Longrightarrow \sqrt{a}>\sqrt[۳]{a}>\sqrt[۴]{a}>\cdots$$

$$\circ < a < ۱ \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt[۳]{a} < \sqrt[۴]{a} < \cdots$$

$$\frac{۱}{۴} < ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۴} < \sqrt{\frac{۱}{۴}} = \frac{۱}{۲}$$

۷. $$a^m \cdot a^n \cdot a^k \cdot\cdot = a^{m+n+k+\cdots}$$

۸. $$(abc\ldots)^n = a^n b^n c^n \ldots\ldots , \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

۹. $$(a^m)^n = a^{mn} \text{ و } a^{\frac{۱}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad ، a \geqslant \circ$$

باید توجه کرد که $(a^m)^n$ و a^{m^n} کاملا متفاوت هستند $(a^m)^n$ یعنی a^m به‌توان n برسد که نتیجه a^{mn} است.

$$(a^m)^n = (\underbrace{a\cdot\cdot\cdot\cdot a}_{m \text{ عامل}})^n = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdots a^n}_{m \text{ عامل}} = a^{\overbrace{n+n+\cdots+n}^{m \text{ عامل}}} = a^{nm}$$

اما a^{m^n} یعنی ابتدا m به‌توان n برسد سپس a به‌توان حاصل برسد

مانند: $$(۲^۳)^۴ = ۲^{۱۲} \text{ و } ۲^{۳^۴} = ۲^{۸۱}$$

نتیجه: $$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\times n} = a^m \text{ و } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

اگر n زوج است a^m نامنفی باشد

۱۰- $$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

۱۱- توانهای صفر ومنفی. (غیرطبیعی).

توانهای صفرومنفی مفهومی ندارند اما اگر وجودآنها را بپذیریم بازاء هر $a \neq \circ$ داریم. $\boxed{a^\circ = ۱}$ زیرا اگر در رابطه $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$، $n = \circ$ قرار دهیم وبا تقسیم طرفین بر $a^m \neq \circ$ بدست می‌آید $a^\circ = ۱$ همچنین بازاء هر $a \neq \circ$،

$\boxed{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$ یا $\boxed{\frac{1}{a^{-n}}=a^n}$ زیـرا اگـر در رابطه $a^m \cdot a^n=a^{m+n}$ ، $m=-n$

قراردهیم، $a^n \cdot a^{-n}=a^0=1$ یا $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

۱۲ـ اگر n فرد باشد، آنگاه $\sqrt[n]{a^n}=a$

اگر n زوج باشد. درحالتی‌که $a\geqslant 0$ ، $\sqrt[n]{a^n}=a$ و اگـــر $a<0$ آنـــگـــاه ، $\sqrt[n]{a^n}=|a|=-a$

$$n \text{ زوج}: \begin{cases} a\geqslant 0 \implies \sqrt[n]{a^n}=a \\ a<0 \implies \sqrt[n]{a^n}=-a \end{cases}$$

نتیجه: اگر n زوج و a عددی منفی باشد و بخواهیم a را زیررادیکال ببریم باید در جلوی رادیکال یك منفی قراردهیم. (nزوج و $b\geqslant 0$)

$\boxed{a<0 \quad ، \quad \sqrt[n]{a^nb}=|a|\sqrt[n]{b}=-a\sqrt[n]{b}}$ یا $\boxed{a<0 \quad ، \quad a\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{a^nb}}$

مثال ۵۰. اگر $a<0$ و $b>0$ و $c<0$ عبارت زیر را ساده کنید.

$$A=\sqrt[4]{a^2b^5c^4}$$

$$A=\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^5}\cdot\sqrt[4]{c^4}=\sqrt{|a|}\cdot b\sqrt[4]{b}\cdot|c|$$

$$=\sqrt{-a}\cdot b\sqrt[4]{b}\,(-c)=-cb\sqrt{-a}\cdot\sqrt[4]{b}$$

۱۳ـ
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[n]{\left(a^{\frac{1}{m}}\right)}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{mn}}=\sqrt[mn]{a}$$

پس:

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{\sqrt[K]{a}}}=\sqrt[nmK]{a}}$$

به‌شرطی که $\sqrt[K]{a}$ و $\sqrt[m]{\sqrt[K]{a}}$ و ... حقیقی باشند

مثال ۵۱. عبارت $\frac{}{\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a\sqrt[4]{b}}}}$ را در صورتی که $a<0$ و $b<0$ به صورت یك رادیکال بنویسید

حل. چون $b<0$ پس $\sqrt[4]{b}<0$ و $a<0$ پس $a\sqrt[4]{b}>0$ و رادیـکال دوم با معنی است.

لذا:
$$\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a\sqrt[4]{b}}}=\sqrt[5]{-\sqrt[4]{a^5\sqrt[4]{b}}}=-\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{a^{15}b}}}=$$
$$-\sqrt[60]{a^{15}b}$$

۱۴- $\boxed{\sqrt[mn]{a^{mK}}=\sqrt[n]{a^K} \qquad a\geqslant 0}$

در حالتی که $a<0$ یا $a^K<0$ برحسب زوج یا فرد بودن m و n باید بحث کنیم مثلاً اگر n و m فرد باشند

$$\sqrt[mn]{a^{mK}}=\sqrt[n]{a^K}$$

اگر m زوج باشد

$$\sqrt[mn]{a^{mK}}=\sqrt[n]{|a^K|}$$

۱-۲۵. اعداد گنگ (اصم)

هرعدد راکه شامل یك یا چند ریشگی وغیرقابل تبدیل به‌عددگویا باشد، عددگنگ یا اصم می‌نامیم مانند $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ و ...

هردوعدد به‌صورت $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ و $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ یا $x+\sqrt{y}$ و $x-\sqrt{y}$ را اعداد گنگ مزدوج گوئیم .

مثال ۵۲. حاصل عبارت زیر را پیدا کنید.

$$A=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\cdot\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\cdot\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}}\cdot$$
$$\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}}$$

حل. با توجه به‌اتحاد مزدوج داریم.

$$A=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\cdot\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\cdot\sqrt{۴-(۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}})}=$$
$$\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\cdot\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}\cdot\sqrt{۲-\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$
$$\cdot\sqrt{۴-(۲+\sqrt{۳})}=\sqrt{۲+\sqrt{۳}}\cdot\sqrt{۲-\sqrt{۳}}=\sqrt{۴-۳}=۱$$

هر گاه دوعبارت شامل جزءهای گویا و گنگ باشند شرط لازم وکافی برای آنکه دو عبارت مساوی باشند آن است که اجزای گویا با هم واجزای گنگ نظیر نیز با هم برابر باشند.

$$x+\sqrt{y}=x'+\sqrt{y'} \Leftrightarrow x=x' \text{ و } y=y'$$

یا $x+\sqrt{y}+\sqrt[3]{z}=x'+\sqrt{y'}+\sqrt[3]{z'} \Leftrightarrow x=x'$ و $y=y'$ و $z=z'$

نتیجه: اگر بخواهیم یك رادیکال مـرکب ، مانند $\sqrt[n]{x+a\sqrt[m]{y}+b\sqrt[K]{z}+\dots}$ را بـه صـورت حاصـل جمـع چنـد رادیکال ساده بنـویسیـم آنرا مساوی عبـارتـی ماننـد $x'+a'\sqrt[m]{y}+b'\sqrt[K]{z}+\dots$ قرار داده طرفین را به‌توان n می‌رسانیـم پس ازمساوی قراردادن اجزای گنگ و گویای متناظرمقادیر x' و a' و b' و . . . را پیدا می‌کنیم

بطورمثال، درمورد $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ داریم.

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y} \Longrightarrow a\pm\sqrt{b}=x+y\pm۲\sqrt{xy}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x+y=a \\ \sqrt{b}=۲\sqrt{xy} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a+\sqrt{a^۲-b}}{۲} \\ y=\dfrac{a-\sqrt{a^۲-b}}{۲} \end{cases} \qquad (a^۲-b\geqslant ۰)$$

پس (۱)

$$\boxed{\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}}$$

مثال ۵۳. عبارت زیر را ساده کنید. ($a\geqslant 0$ و $b>0$).

$$f(a,b)=\sqrt{\frac{a+b^2}{b}+2\sqrt{a}}-\sqrt{\frac{a+b^2}{b}-2\sqrt{a}}$$

حل.

$$f(a,b)=\sqrt{\frac{(\sqrt{a}+b)^2}{b}}-\sqrt{\frac{(\sqrt{a}-b)^2}{b}}=$$

$$\frac{|\sqrt{a}+b|-|\sqrt{a}-b|}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+b-|\sqrt{a}-b|}{\sqrt{b}}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a}+b-(\sqrt{a}-b)}{\sqrt{b}} & \text{اگر } \sqrt{a}\geqslant b\\[2ex] \dfrac{\sqrt{a}+b+(\sqrt{a}-b)}{\sqrt{b}} & \text{اگر } \sqrt{a}<b\end{cases}=\begin{cases}2\sqrt{b} & \text{اگر } \sqrt{a}\geqslant b\\[2ex] 2\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} & \text{اگر } \sqrt{a}<b\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2\sqrt{b} & \text{اگر } \sqrt{a}\geqslant b\\[1ex] \dfrac{2\sqrt{ab}}{b} & \text{اگر } \sqrt{a}<b\end{cases}$$

مثال ۵۴. حاصل عبارت $A=\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا حاصل $\sqrt{13+\sqrt{48}}$ را ساده می‌کنیم می‌توان از فرمول (۱) استفاده کرد. همچنین می‌توان با استفاده از اتحادها، زیر رادیکال را به‌مربع کامل تبدیل کرد.

$$\sqrt{13+\sqrt{48}}=\sqrt{13+2\sqrt{12}}=\sqrt{1+12+2\sqrt{12}}=\sqrt{(\sqrt{12}+1)^2}$$

$$=|\sqrt{12}+1|=2\sqrt{3}+1$$

بنابراین:

$$A=\sqrt{3+\sqrt{5-(2\sqrt{3}+1)}}=\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=$$

$$\sqrt{3+\sqrt{1+3-2\sqrt{3}}}=\sqrt{3+\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}}=\sqrt{3+|\sqrt{3}-1|}$$

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

۲۶-۱. گویا کردن مخرج کسرها

برای گویا کردن مخرج کسرها می‌توان از اتحادهای ۸ و ۹ و نتایج آنها استفاده کرد.

۱ــ اگر مخرج کسر فقط شامل یك رادیکال باشد به‌صورت زیر عمل می‌کنیم

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a^{n-1}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{\sqrt[n]{a^n}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-1}}}{a}\qquad (a>0)$$

یا

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[n]{a^{n-m}}}=\frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}\qquad (a>0)$$

۲ــ اگر مخرج شامل دو رادیکال با فرجه‌های زوج باشد از اتحاد مزدوج مرتباً استفاده می‌کنیم.

مثال ۵۵. اگر $x=\frac{2ab}{1+b^2}$ و $A=\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ باشد A رامحاسبه کنید $(a>0)$ و $(b\neq 0)$

حل. ابتدا A را ساده می‌کنیم

$$A=\frac{(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})^2}{(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}=\frac{2a+2\sqrt{a^2-x^2}}{2x}$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-\frac{4a^2b^2}{(1+b^2)^2}}}{x}=\frac{a+|a|\cdot\sqrt{\frac{(1+b^2)^2-4b^2}{(1+b^2)^2}}}{\frac{2ab}{1+b^2}}=$$

$$\frac{1+b^2+\sqrt{(1-b^2)^2}}{2b}=\frac{1+b^2+|1-b^2|}{2b}=\begin{cases}\dfrac{1+b^2+1-b^2}{2b}\\[2ex]\dfrac{1+b^2-1+b^2}{2b}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{b} & -1\leqslant b\leqslant 1\ ,\ b\neq 0 \quad |b|\leqslant 1\ ,\ b\neq 0\\[2ex] b & b>1 \text{ یا } b<-1 \quad |b|>1\end{cases}$$

مثال ۵۶. مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$A=\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2}}$$

حل. می‌توان دوبار از اتحاد مزدوج استفاده کرد همچنین می‌توان مستقیماً از نتیجه‌های اتحاد ۸ و ۹ استفاده کرد

$$x-y=(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3})$$

مخرج را در پرانتز دوم عبارت‌فوق ضرب می‌کنیم ($x=5$ و $y=2$). اگراز اتحادمزدوج استفاده‌کنیم داریم.

$$A=\frac{(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})^2}{(\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2})}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\sqrt[4]{10}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\sqrt[4]{10})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2}+2\sqrt[4]{10})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}$$

۳ـ اگرمخرج شامل بیش از دو رادیکال با فرجه‌های زوج یا شامل چند رادیکال با فرجه زوج و یك عددگویا باشد از اتحاد مزدوج می‌توان استفاده کرد.

مثال ۵۷. مخرج کسر زیررا گویا کنید.

$$A=\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

حل.
$$A=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-3}$$
$$=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3+2\sqrt{2}-3}=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{4}+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

۴ــ از اتحاد $x\mp y=(\sqrt[3]{x}\mp\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}\pm\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2})$ و به طور کلی از اتحاد $x\mp y=(\sqrt[n]{x}\mp\sqrt[n]{y})(\sqrt[n]{x^{n-1}}\pm\cdots+\sqrt[n]{y^{n-1}})$ می‌توان در گویا کردن استفاده کرد (وقتی $x+y$ است باید n فرد باشد).

مثال ۵۸.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}=\frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}{(\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2\times 3}+\sqrt[3]{3^2})(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{3-2}=\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$$

می‌دانیم اگر حاصلضرب دوعدد برابر یك شود آن‌دوعدد عکس یکدیگرند مثلاً $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ معکوس یکدیگرند زیرا $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=1$ و بطور کلی $(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})=1$ ولذا $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ این دوعدد عکس یکدیگرند.

مثال ۵۹. حاصل عبارت زیر را پیدا کنید.

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

حل. با توجه به‌آنچه درفوق بیان شد

$$A=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\sqrt{n}-1$$

مسائل فصل اول

۱ــ ثابت کنید، $(a^۲+b^۲)(x^۲+y^۲)=(ax-by)^۲+(bx+ay)^۲$

۲ــ ثابت کنید، $\left(\dfrac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}+\dfrac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}-\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}\right)^۲=۲$

۳ــ اگر $\dfrac{۱}{x}+\dfrac{۱}{y}+\dfrac{۱}{z}=۱$ و $ax^۳=by^۳=cz^۳$ ثابت کنید،

$$\sqrt[۳]{ax^۲+by^۲+cz^۲}=\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{b}+\sqrt[۳]{c}$$

۴ــ عبارت $(x-y)^۵+(y-z)^۵+(z-x)^۵$ را به حاصلضرب تجزیه کنید.

۵ــ عبارت زیررا ساده کنید.

$$\left(\frac{a^۲-۶a+۵}{a^۲-۷a+۱۰}-\frac{a^۲-۶a+۸}{a^۲-۵a+۴}\right)\div\frac{۱}{a^۲-۳a+۲}$$

۶ــ عبارت زیررا ساده کنید.

$$\frac{(a^۲-b^۲)^۳+(b^۲-c^۲)^۳+(c^۲-a^۲)^۳}{(a-b)^۳+(b-c)^۳+(c-a)^۳}$$

۷ــ ثابت کنید تساوی زیر بازاء هر $x>۱$ برقراراست.

$$\left(\sqrt[۳]{(x^۲+۱)\sqrt{۱+\frac{۱}{x^۲}}}+\sqrt[۳]{(x^۲-۱)\sqrt{۱-\frac{۱}{x^۲}}}\right)^{-۲}=\frac{\sqrt[۳]{x^۲}\,(x^۲-\sqrt{x^۴-۱})}{۲}$$

۸ــ مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$a)\ \frac{1}{\sqrt[3]{15}-\sqrt[3]{7}} \quad b)\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}} \quad c)\ \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}}$$

$$d)\ \frac{\sqrt{\sqrt{5}+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3}}} \quad e)\ \frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}} \quad f)\ \frac{1}{\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}+\sqrt{10}}$$

۹ـ عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{2a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-3a^{-\frac{1}{3}}}-\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{5}{3}}-a^{\frac{2}{3}}}-\frac{a+1}{a^2-4a+3}$$

۱۰ـ ثابت کنید اگر $a>3$،

$$\frac{a^2+2a-3+(a+1)\sqrt{a^2-9}}{a^2-2a-3+(a-1)\sqrt{a^2-9}}=\frac{\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}}$$

۱۱ـ حاصل عبارت $A=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{81}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)$ را پیدا کنید

۱۲ـ عبارت زیر را تجزیه کنید،

$$a^{10}+a^5+1$$

۱۳ـ ثابت کنید، $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$

۱۴ـ ثابت کنید، $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})=1$

۱۵ـ رادیکال زیر را ساده کنید.

$$\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$$

۱۶ـ کسرهای زیر را ساده کنید.

$$a)\ \frac{5a^4+5a^2-3a^2b-3b}{a^4+3a^2+2} \qquad b)\ \frac{2a^4+7a^2+6}{3a^4+3a^2-6}$$

$$c)\ \frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^6-b^6} \qquad d)\ \frac{a^4-a^2-12}{a^4+8a^2+15}$$

$$e)\ \left(\frac{b}{a+b}+a\right)\left(\frac{a}{a-b}-b\right)-\left(\frac{a}{a+b}+b\right)\left(\frac{b}{a-b}-a\right).$$

۱۷ـ معادله‌های زیر را حل و بحث کنید.

a) $(m^3-n^3)x=m-n$ b) $(x-a)(x-b)=(x+a+b)^2$

۱۸ـ کسرهای زیر را ساده کنید.

a) $\dfrac{y^2}{x^3-y^3}+\dfrac{x^3y^2}{y^6-x^6}$ b) $1-2x+x^2+\dfrac{1-x^4}{1+2x+x^2}$

$$c)\ \frac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}-1}{\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{x}{y}+1}\times\frac{1+\dfrac{y}{x}}{x-y}\div\frac{1+\dfrac{y^3}{x^3}}{\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}}$$

d) $\dfrac{5}{(x^{-1}+y^{-1})^{-1}}$ e) $\left(1-x+\dfrac{4+x^2}{1+x}\right)(1-x^2)$

۱۹ـ اگر $a+b+c=0$، ثابت کنید،

$$\frac{b+c}{bc}(b^2+c^2-a^2)+\frac{c+a}{ca}(c^2+a^2-b^2)+\frac{a+b}{ab}(a^2+b^2-c^2)=0$$

۲۰ـ بزرگترین مقسوم‌علیه و کوچکترین مضرب مشترك سه عبارت زیر را پیدا کنید.

$6b^2(4a^2b-b^3)$ و $12a^2b(8a^3-b^3)$ و $8ab^3(2a^2-ab)$

۲۱ـ عبارات زیر را به‌حاصلضرب تجزیه کنید.

a) $x^3+y^3-x^2y-xy^2-x-y$ b) x^4+64

c) $a^2+8ab+15b^2$

۲۲ـ از رابطه $x^2+u^2=2(xy+yz+zu-y^2-z^2)$ نتیجه بگیرید،

$$x=y=z=u$$

تستهای فصل اول

۱- حاصل‌عبارت $A=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ کدام است.

الف- $\sqrt{2}$ ب- 2 ج- 4 د- $2\sqrt{2}$

۲- اگر $a+b-c=1$ باشد کدام درست است.

الف- $a^2+b^2+c^2=1$ ب- $a^2+b^2-c^2=2(1-ab+c)$

ج- $a^2+b^2-c^2=2(\frac{1}{2}-ab+c)$ د- $a^2+b^2+c^2=2(ab-ac-bc)$

۳- اگر $a>b>0$ و $a^2+b^2=6ab$ حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ کدام است.

الف- ab ب- 2 ج- $\sqrt{2}$ د- $-\sqrt{2}$

۴- $\sqrt{9-\sqrt{56}}$ برابر است با:

الف- $\sqrt{7}-\sqrt{2}$ ب- $\sqrt{2}-\sqrt{7}$ ج- $\pm(\sqrt{7}-\sqrt{2})$ د- $\sqrt{7}-2$

۵- نامساوی زیر به‌ازاء چه مقادیر x برقراراست. $\sqrt{1+x}-1\leqslant\frac{x}{2}$

الف- هر x حقیقی   ب- $x\geqslant -1$ ج- $-1\leqslant x\leqslant 0$ د- $-1\leqslant x\leqslant 4$

۶- اگر $abc=1$ باشد حاصل عبارت $\frac{1+c}{1+ab}$ کدام است؟

الف- a ب- b ج- c د- 1

۷- اگر $x+y=۳$ و $xy=-۱$، $\frac{x^{۳}+y^{۳}}{x^{۲}+y^{۲}}$ برابر است با:

الف- $\frac{۳۶}{۱۱}$ ب- $\frac{۱۸}{۱۱}$ د- $\frac{۳۵}{۳}$ ج- $\frac{۳۶}{۷}$

۸- اگر، $(۱+x+x^{۲})^{n}=a_{\circ}+a_{۱}x+a_{۲}x^{۲}+\dots+a_{۲n}x^{۲n}$ آنگاه حاصل $K=a_{\circ}+a_{۲}+a_{۴}+\dots+a_{۲n}$ برابر است با:

الف- $\frac{۳^{n}+۱}{۲}$ ب- $\frac{۳^{n}-۱}{۲}$ ج- $\frac{۳^{n}}{۲}$ د- $۳^{n}-۱$

۹- توان چهارم عدد $x=\sqrt{۱+\sqrt{۱+\sqrt{۱}}}$ برابر است با:

الف- $۳+۲\sqrt{۲}$ ب- $۱+۲\sqrt{۲}$ ج- $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ د- ۳

۱۰- حاصل $\sqrt{-x\sqrt[۴]{x^{۳}\sqrt[۵]{x^{۷}}}}$ برابر است با:

الف- $x\sqrt[۲\circ]{x}$ ب- $-x\sqrt[۲\circ]{x}$

ج- $-x\sqrt[۲\circ]{-x}$ د- بازاء هیچ x تعریف نشده است

۱۱- $\frac{x-\sqrt{xy}}{y-\sqrt{xy}}$ برابر است با: $(x>\circ\ ,\ y>\circ)$

الف- $\sqrt{xy}$ ب- $\sqrt{\frac{x}{y}}$ ج- $-\sqrt{\frac{x}{y}}$ د- $-\sqrt{\frac{y}{x}}$

۱۲- $\frac{۱}{۹+۴\sqrt{۵}}-\frac{۱}{۹-۴\sqrt{۵}}$ برابر است با:

الف- $۸\sqrt{۵}$ ب- $-۸\sqrt{۵}$ ج- $۹\sqrt{۵}$ د- $۸+\sqrt{۵}$

۱۳- $\frac{۵x^{n+۲}+۴x^{n+۱}-۹x^{n}}{x^{n+۲}-x^{n}}$ برابر است با:

الف- $\frac{x+۹}{x+۱}$ ب- $\frac{۵x+۹}{x+۱}$ ج- $\frac{x+\frac{۹}{۵}}{x+۱}$ د- $\frac{۵x-۹}{x-۱}$

۱۴ـ معادله $x^3-x^2-x+1=0$ چند ریشه متمایز دارد.

الف ـ ۳ ب ـ ۲ ج ـ ۱ د ـ صفر

۱۵ـ اگر $(x-5)^2+(2x+5y)^4+|2x+y-z|=0$ آنگاه z برابراست با

الف ـ ۸ ب ـ ۱۲ ج ـ ۳ د ـ جواب ندارد

۱۶ـ اگر $x+y=2$، حاصل $x^4+y^4-x^3y^2-x^2y^3+16xy$ برابراست با

الف ـ ۱۶ ب ـ ۸

ج ـ ۲۴ د ـ نمی‌توان حساب کرد باید xy نیزمعلوم باشد

۱۷ـ از رابطه $x^2+y^2+10=2\sqrt{2}x+4\sqrt{2}y$، x برابراست با.

الف ـ $2\sqrt{2}$ ب ـ $\sqrt{2}$ ج ـ $-\sqrt{2}$ د ـ ۲

۱۸ـ فرض کنیم $n\in \mathbb{N}$, $A_n=\left\{x \mid \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant \frac{2}{n}\ ,\ x\in R\right\}$ دراین صورت $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ برابر کدام است. (کنکور ریاضی ۶۷)

الف ـ $]0,1]$ ب ـ $]0,1[$ ج ـ $]0,2]$ د ـ $[0,2[$

۱۹ـ فرض کنیم a و b مختلف‌العلامه باشند و $a<b$ دراین‌صورت کدام نامساوی همواره برقراراست؟ (کنکور ریاضی ۶۷)

الف ـ $a^2<b^2$ ب ـ $a^3<b^3$ ج ـ $b^2<a^2$ د ـ $b^3<a^3$

۲۰ـ فرض کنیم به‌ازاء هر x،

$$1+x+2x^2-x^3=3+a(x-2)+b(x-2)^2-(x-2)^3$$

دراین‌صورت $a+b$ برابراست با؟ (کنکور ریاضی ۶۷)

الف ـ -7 ب ـ -5 ج ـ ۵ د ـ ۷

۲۱ـ حاصل‌عبارت $\sqrt[3]{(-x)^3}+\sqrt{x^2}+\sqrt{(-2)^2}$ وقتی $x<0$، کدام است؟ (کنکور ریاضی ۶۷)

الف ـ $-2x-2$ ب ـ -2 ج ـ $2x+2$ د ـ ۲

۲۲ـ حاصل عبارت $\dfrac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$ کدام است؟

(کنکور تجربی ۶۷)

الف- $-\frac{۱}{۲}(x+y+z)$ ب- $-(x+y+z)$

ج- $\frac{۱}{۲}(x+y+z)$ د- $(x+x+z)$

۲۳- اگر $a^۲+b^۲+c^۲+۳=۲(a+b+c)$ آنگاه c کدام است؟
(کنکور تجربی ۶۷)

الف- ۰ ب- ۱ ج- ۲ د- ۳

۲۴- حاصل $\frac{۲+\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}+\sqrt{۳}}$ برابر است با:

الف- ۲ ب- $\sqrt{۶}$ ج- $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ د- $\frac{\sqrt{۶}}{۲}$

۲۵- اگر $x=۱۱$، حاصل $۱-۱۲x+۱۲x^۲-۱۲x^۳+۱۲x^۴-x^۵$ برابر است با:

الف- ۱۱ پ- ۱۰ ج- ۱۲ د- ۲۰

۲۶- حاصل $\frac{۱}{۱۳۲}+\frac{۱}{۱۱۰}+\frac{۱}{۹۰}+\frac{۱}{۷۲}+\frac{۱}{۵۶}+\frac{۱}{۴۲}+\frac{۱}{۳۰}+\frac{۱}{۲۰}$ برابر است با:

الف- $\frac{۱}{۱۲}$ ب- $\frac{۸}{۱۳۲}$ ج- $\frac{۱}{۶}$ د- $\frac{۱}{۴}$

۲۷- حاصل $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^۲\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)$ برابر است با:

الف- ab ب- ۱ ج- $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ د- $a-b$

۲۸- اگر $x^۲+y^۲+۰.۲۵\,z^۲-۲x+۲y-z+۳=۰$ آنگاه $x+y+z$ برابر است با:

الف- صفر ب- ۳ ج- -۱ د- ۲

۲۹- بازاء چند مقدار از x یا y رابطه زیر برقرار است.

$$x^۲y^۲-x^۲-y^۲+۱=۰$$

الف- دومقدار x و y ب- بی‌شمارمقدار x ویك مقدار y یا برعکس

ج- چهارمقدار x و y د- بی‌شمار مقدار x و دومقدار y یا برعکس

۳۰- معادله $x^{5}+x^{3}-x^{2}-1=0$ چند ریشه دارد.

الف. هیچ　　ب. ۱　　ج. ۲　　د. ۵

۳۱- حاصل $\left(\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}\right)\div\left(1+\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)$
برابراست با:

الف. $\sqrt{a-1}$　　ب. $\sqrt{a+1}$

ج. ۱　　د. $\frac{1}{\sqrt{a-1}}$

۳۲- $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ برابراست با:

الف. $\sqrt{3}+1$　　ب. $\sqrt{3}-1$　　ج. $1-\sqrt{3}$　　د. $2-\sqrt{3}$

۳۳- حاصل، $\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{7+4\sqrt{3}}$ کدام است؟

الف. $2+\sqrt{3}$　　ب. $\sqrt[6]{2-\sqrt{3}}$　　ج. $\sqrt[6]{2+\sqrt{3}}$　　د. $2-\sqrt{3}$

۳۴- حاصل $\frac{1}{4x}\left(\frac{x+\sqrt{x^{2}-1}}{x-\sqrt{x^{2}-1}}-\frac{x-\sqrt{x^{2}-1}}{x+\sqrt{x^{2}-1}}\right)$ برابراست با:

الف. $2\sqrt{x^{2}-1}$　　ب. $\sqrt{x^{2}-1}$　　ج. صفر　　د. $2x^{2}-1$

۳۵- هرگاه $\sqrt{a^{3}\sqrt[3]{b^{7}}}=-ab\sqrt{a\sqrt[3]{b}}$ آنگاه کدام درست است؟ $(ab\neq 0)$

الف. $ab>0$　　ب. $ab<0$

ج. $b<0$ و $a>0$　　د. تساوی بهازاء هیچ مقدار a و b برقرار نیست

۳۶- اگر $\sqrt{a^{3}b^{5}}=-ab^{2}\sqrt{ab}$ کدام درست است؟

الف. $b\leqslant 0\ ,\ a\geqslant 0$　　ب. $b\leqslant 0\ ,\ a\leqslant 0$

ج. $b\geqslant 0\ ,\ a\geqslant 0$　　د. $b\geqslant 0\ ,\ a\leqslant 0$

۳۷ـ بزرگترین عامل مشترک دوعبارت $x^2-2xy-15y^2$ و $x^2+7xy+12y^2$ کدام است؟ (کنکور ریاضی ۶۵)

الف. $x-2y$ ب. $x+3y$ ج. $x+4y$ د. $x+6y$

۳۸ـ اگر $x=\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ باشد، x^2 برابراست با؟ (کنکورتجربی ۶۴)

الف. $\sqrt{2}$ ب. $\sqrt[3]{2}$ ج. $\sqrt[3]{4}$ د. ۲

۳۹ـ حاصل عبارت $\dfrac{-a+b+c}{a+b-c} : \dfrac{a^2-b^2-c^2-2bc}{a^2+b^2-c^2+2ab}$ کدام است؟ (کنکورتجربی ۶۵)

الف. -1 ب. $-a-b-c$

ج. ۱ د. $a+b+c$

۴۰ـ اگر $x+\dfrac{1}{x}=4$ باشد باشرط $x>\dfrac{1}{x}$ حاصل $x^3-\dfrac{1}{x^3}$ کدام است؟

الف. $34\sqrt{3}$ ب. ۶۰ ج. $26\sqrt{3}$ د. $30\sqrt{3}$

۴۱ـ اگر $\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{4}$ باشد حاصل $\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$ کدام است؟

الف. ۱۶ ب. $\dfrac{1}{16}$ ج. $\dfrac{1}{8}$ د. ۸

۴۲ـ اگر $a+b+c\neq 0$ و $a^3+b^3+c^3=3abc$ ، حاصل عبارت

$$\frac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}{\sqrt[3]{a+b+c}}$$

کدام است؟

الف. $\sqrt[3]{3}$ ب. $\sqrt[3]{9}$

ج. ۳ د. چون $a+b+c\neq 0$ لذا تساوی فرض برقرار نیست

۴۳ـ اگر $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$ حاصل عبارت $\dfrac{3\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$ کدام است؟

الف. ۱ ب. ۳ ج. $a^2b^2c^2$ د. $a^3+b^3+c^3$

۴۴- کوچکترین مضرب مشترک $a^{۳}+b^{۳}$ ، $a^{۳}-b^{۳}$ ، $b^{۲}-a^{۲}$ کدام است؟

الف. $a^{۶}-b^{۶}$ ب. $a^{۶}+b^{۶}$ ج. $a^{۹}-b^{۹}$ د. $a-b$

۴۵- اگر a و b دوعدد گویا و $a(\sqrt{۳}+۱)+b(\sqrt{۳}-۱)\equiv ۱$ کدام درست است؟

الف. $a=b=-\frac{۱}{۲}$ ب. $a=b=\frac{۱}{۲}$

ج. $a=-b=\frac{۱}{۲}$ د. $b=-a=\frac{۱}{۲}$

۴۶- حاصل $(\sqrt{۶}+\sqrt{۵})^{m-۲}\cdot(\sqrt{۶}-\sqrt{۵})^{m}$ کدام است؟

الف. $(\sqrt{۶}-\sqrt{۵})^{m-۱}$ ب. $۱۱-۲\sqrt{۳۰}$

ج. $۱۱+۲\sqrt{۳۰}$ د. ۱

۴۷- اگر $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=\frac{۱}{x+y+z}$ کدام درست است؟

الف. فقط $y=-x$ ب. $x=y=z$

ج. حداقل دوتا ازمتغیرها قرینه‌اند د. فقط $x=-y=z$

۴۸- اگر $x^{۲}+x+۱=۰$ ، آنگاه مقدارعبارت گویای $A=x^{۳۰۲}+\frac{۱}{x^{۳۰۲}}$ کدام است ؟

الف. نمی‌توان حساب کرد زیرا x نامعین است ب: -۱

ج. ۱ د. $۲^{۳۰۲}$

۴۹- درعبارت $A=(x^{۲}-x+۱)^{۱۰۰}(x^{۳}+x^{۲}-۳)^{۱۰}(x^{۴}+۱)^{۳}$ مجموع ضرائب حاصل ازبسط کدام است؟

الف. -۸ ب. صفر ج. $۲^{۱۱۳}$ د. ۸

۵۰- فرض‌کنیم به‌ازاء هر y و x حقیقی، $f(x+y)=f(x)+f(y)$ دراین صورت $f(۰)$ برابراست با:

الف. ۱ ب. صفر ج. -۱ د. نمی‌توان حساب‌کرد

۵۱ـ درتست قبل، $f(-x)$ برابراست با؟

الف. $-f(x)$ ب. $f(x)$ ج. $2f(x)$ د. $\frac{1}{f(x)}$

۵۲ـ عبارت $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ بهازاء چهمقادیر x تعریف شده است؟

الف. هر x حقیقی ب. $x>1$ یا $x<-1$

ج. $x>1$ د. $-1<x\leqslant 1$

۵۳ـ اگر $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=2$ باشد حاصل $x^4+\frac{1}{x^4}$ برابراست با :

الف. ۱ ب. ۲ ج. $2\sqrt{2}$ د. ۱۶

۵۴ـ اگر $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)=\frac{x+y}{x-y}$ ، $f(2,3)$ کدام است؟

الف. ۵ــ ب. $\frac{1}{5}$ ج. ۵ د. $-\frac{1}{5}$

۵۵ـ اگر $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ ، $f\left(-\frac{1}{a}\right)$ کدام است. $(a<0)$

الف. نامعین است ب. $\frac{f(a)}{a}$

ج. $-\frac{f(a)}{a}$ د. $af(a)$

۵۶ـ اگر $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x^2-2x$ باشد، $f(3)$ کدام است؟

الف. ۳ ب. صفر ج. ۴ د. ۸

۵۷ـ در بسط $(x+1)(x+2)\ldots\ldots(x+10)$ ضریب x^9 برابراست با :

الف. ۵۰ ب. ۵۵ ج. ۵۴ د. ۱۰۱

۵۸ـ بهازاء چهمقدار m معادله $m^2x-m=4x+2$ بیشمارجواب دارد؟

الف. ۲ ب. ± 2 ج. صفر د. ۲ــ

۵۹ـ به‌ازاء چه‌مقدار a معادلهٔ $a^{۲}x+۳=۹x+a$ غیرممکن است؟

الف. ۳ ب. ۳− ج. صفر د. ۳±

۶۰ـ به‌ازاء چه‌مقدار a,b معادلهٔ $(a-b)x+a-۱=۰$ بی‌شمار جواب دارد؟

الف. $a=۱\ ,\ b=۰$ ب. $a=۰\ ,\ b=۱$

د. $a=b=۰$ د. $a=b=۱$

۶۱ـ معادلهٔ $(x+a)(x-b)=x^{۲}$ وقتی یك جواب داردکه:

الف. $a\neq b$ ب. $a=b\neq ۰$

ج. $a=b=۰$ د. $a=b=۱$

۶۲ـ جواب نامعادله $x-x^{۳}\leqslant ۰$ کدام است؟

الف. $x\geqslant ۱$ یا $-۱\leqslant x\leqslant ۰$ ب. $x\leqslant -۱$ یا $۰\leqslant x\leqslant ۱$

ج. $x\leqslant -۱$ د. $x\geqslant ۰$

۶۳ـ جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases}\dfrac{x-۱}{۲}<x\\[2ex] x-۲>\dfrac{x}{۲}\end{cases}$ کدام است؟

الف. $x>-۱$ ب. $x>۴$

ج. $-۱<x<۴$ د. $x>\dfrac{۴}{۳}$

۶۴ـ حاصل عبارت $(x^{\frac{۱}{۴}}-y^{\frac{۱}{۴}})(x^{\frac{۱}{۴}}+y^{\frac{۱}{۴}})(x^{\frac{۱}{۲}}+y^{\frac{۱}{۲}})$ کدام است؟

الف. $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ب. $x-y$ ج. $x+y$ د. $\sqrt[۴]{x}-\sqrt[۴]{y}$

۶۵ـ جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases}۴+۲x<x+۳\\ ۵x-۳>۴x-۱\end{cases}$ کدام است؟

الف. $x<-۱$ ب. $x>۲$

ج. $-۱<x<+۲$ د. جواب ندارد

۶۶ـ حاصل $\frac{2ab}{a^2-b^2} \div \left(\frac{a^3-b^3}{a-b}-\frac{a^3+b^3}{a+b}\right)$ کدام است؟

الف. ۱ ب. صفر ج. a^2-b^2 د. $\frac{4a^2b^2}{a^2-b^2}$

۶۷ـ مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{2\sqrt{x}+2}{3\sqrt{x}+1} > 1$ کدام است؟

الف. $x \leqslant 1$ ب. $x < 1$ ج. $0 < x < 1$ د. $0 \leqslant x < 1$

فصل دوم

نامساوی‌ها

۱-۲. تعریف ۱. به‌ازای هردوعدد حقیقی a و b عدد حقیقی x وجوددارد به‌طوری‌که

$$a-b=x \quad \text{یا} \quad a=b+x$$

اگر $x=0$ آنگاه $a=b$ وتساوی برقراراست.
اگر x مثبت باشدگوئیم a از b بزرگتراست وچنین می‌نویسیم $a>b$.
اگر x منفی باشدگوئیم a از b کوچکتراست وچنین می‌نویسیم $a<b$.

۲-۲. تعریفات ۲.

۱. $a\leqslant b$ یعنی $a=b$ یا $a<b$

۲. $a<b \Leftrightarrow b>a$

۳. هرعبارت راکه به‌یکی از صورتهای $a<b$ یا $a>b$ یا $a\leqslant b$ یا $a\geqslant b$ باشد یك نامساوی واگرتصریح بیشتر لازم باشد، صورتهای $a<b$ و $a>b$ را نامساوی اکیدگوئیم.

۴. عدد a را مثبت‌گوئیم اگر $a>0$ وآن را منفی‌گوئیم اگر $a<0$ بنابراصل تثلیث به ازای هرعدد دلخواه a، همواره یکی از روابط $a=0$ ، $a<0$ ، $a>0$ برقراراست.

۵. $R^{>\circ}=\{x|x>\circ\}$ یا R^{+} و $R^{<\circ}=\{x|x<\circ\}$ یا R^{-}

۶. اگر $a\geqslant \circ$ گوئیم a نامنفی‌است (مثبت یاصفر) واگر $a\leqslant \circ$ گوئیم a نامثبت است (منفی یا صفر).

۷. $a<b<c$ به‌جای $a<b$ و $b<c$ به‌کار می‌رود.

۲ـ۳. خواص نامساوی‌ها

۱. اگر $a<b$ آنگاه $a\neq b$

۲. اگر $a\leqslant b$ و $b<c$ آنگاه $a<c$.

۳. اگر $a<b$ و $b\leqslant c$ آنگاه $a<c$.

برای نمونه قسمت (۲) را ثابت می‌کنیم:

$$\begin{cases} a\leqslant b \Longrightarrow b=a+x \ ,\ x\geqslant \circ \\ b<c \Longrightarrow c=b+y \ ,\ y>\circ \end{cases} \Longrightarrow c=b+y=a+x+y=$$

$$=a+(x+y)$$

ودرنتیجه $c=a+z$ که $z=x+y>\circ$ ولذا بنا به‌تعریف $c>a$.

۴. خاصیت بازتابی $a\leqslant a$

۵. اگر $a\leqslant b$ و $b\leqslant c$ آنگاه $a\leqslant c$ (خاصیت تعدی)

۶. اگر $a\leqslant b$ و $b\leqslant a$ آنگاه $a=b$

۷. می‌توان به‌طرفین نامساوی عددی را اضافه یا حذف کرد

$$a<b \Longleftrightarrow a+c<b+c$$

$$a\leqslant b \Longleftrightarrow a+c\leqslant b+c$$

۸، جمع نامساوی‌های هم‌جهت، عضو به‌عضو

$$a<b \ ,\ c<d \Longrightarrow a+c<b+d$$

$$a<b \ ,\ c\leqslant d \Longrightarrow a+c<b+d$$

$$a\leqslant b \ ,\ c\leqslant d \Longrightarrow a+c\leqslant b+d$$

تذکر: نامساوی‌های هم‌جهت را نمی‌توان عضو به‌عضو ازهم تفریق کرد.

۹. اگر a و b هردو مثبت یا هردو منفی باشند ab مثبت است و اگر یکی منفی و دیگری مثبت باشد ab منفی است.

$$(a>0,\ b>0)\ \text{یا}\ (a<0,\ b<0) \Leftrightarrow ab>0$$

$$(a<0,\ b>0)\ \text{یا}\ (a>0,\ b<0) \Leftrightarrow ab<0$$

۱۰. به ازاء هرعدد حقیقی x ، $x^2 \geqslant 0$ یا به طورکلی $x^{2n} \geqslant 0$ ، n عددی طبیعی است.

۱۱. اگر $a>0$ آنگاه $\frac{1}{a}>0$ واگر $a<0$ آنگاه $\frac{1}{a}<0$

۱۲. هرگاه دو طرف یك نامساوی مثبت باشند می‌توان دوطرف را معکوس کرد و جهت عوض می‌شود.

$$0<a<b \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}>0$$

اثبات. $$a>0\ ,\ b>a \Longrightarrow b>0$$

وچون $a>0$ و $b>0$ لذا $\frac{1}{a}>0$ و $\frac{1}{b}>0$ و در نتیجه $\frac{1}{ab}>0$ اکنون $a<b$ و $\frac{1}{ab}>0$ بنابراین $a\left(\frac{1}{ab}\right)<b\left(\frac{1}{ab}\right)$ یا $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ وبالعکس اگر $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ آنگاه بنا به قسمت اول $0<a<b$ زیرا معکوس معکوس هرعدد برابر خود آن عدد است.

۱۳. اگر $c>0$ داریم:

$$a<b \Leftrightarrow ac<bc\ \text{و}\ a<b \Leftrightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{c}$$

اگر $c<0$ داریم:

$$a<b \Leftrightarrow ac>bc\ \text{و}\ a<b \Leftrightarrow \frac{a}{c}>\frac{b}{c}$$

۱۴. می‌توان دوطرف یك نامساوی راکه هردوطرف آن منفی می‌باشند معکوس کرد و جهت تغییر می‌کند.

$$a<b<0 \Longleftrightarrow \frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$$

اثبات باتوجه به‌خواص ۱۲ و ۱۳ به‌سادگی به‌دست می‌آید.

$$a<b<0 \xRightarrow{\text{بنا به ۱۳}} -a>-b>0 \xRightarrow{\text{بنا به ۱۲}} 0<-\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$$

$$\xRightarrow{\text{بنا به ۱۳}} \frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$$

تذکر: هر گاه یك‌طرف‌نامساوی مثبت وطرف دیگرمنفی باشد می‌توان دوطرف‌نامساوی را معکوس‌کرد وجهت تغییر نمی‌کند.

۱۵. ضرب نامساوی‌ها عضو به‌عضو.

$$a<b\ ,\ b>0\ ,\ 0<c<d \Longrightarrow ac<bd$$

$$0\leqslant a<b\ ,\ 0<c\leqslant d \Longrightarrow ac<bd$$

۱۶. اگر b و d هم‌علامت باشد ($bd>0$) آنگاه:

$$\frac{a}{b}<\frac{c}{d} \Longleftrightarrow ad<bc$$

۱۷. فاصله‌ها درمجموعه اعداد حقیقی

اگر a و b دوعدد حقیقی باشند ($a<b$) منظور از فاصله بسته a و b که‌آنرا با نماد $[a,b]$ نشان می‌دهیم یعنی‌مجموعه‌کلیهٔ اعداد حقیقی‌که از a بزرگتر واز b کوچکتر وشامل a و b نیز باشند.

بنابراین اگر x متعلق به‌فاصله بسته a و b باشد داریم:

$$a\leqslant x\leqslant b \Longleftrightarrow x\in[a,b]$$

اگر a و b متعلق به‌فاصله نباشند آنرا فاصله بازگوئیم وبا نماد (a,b) یا $]a\ ,\ b[$ نشان می‌دهیم:

$$a<x<b \Longleftrightarrow x\in(a,b)$$

و به‌همین ترتیب:

$$a\leqslant x<b \iff x\in[a,b)$$
$$a<x\leqslant b \iff x\in(a,b]$$
$$x\geqslant a \iff x\in[a,+\infty)\ ,\ x>a \iff x\in(a,+\infty)$$
$$x\leqslant b \iff x\in(-\infty,b]\ ,\ x<b \iff x\in(-\infty,b)$$

۴ـ۲. نامساوی‌های اساسی

۱. همواره $a^۲+b^۲+c^۲\geqslant ۰$ وشرط لازم وکافی برای برقراری تساوی آن است که

$$a=b=c=۰$$

۲. $a^۲+b^۲\geqslant ab$ و $a^۲+b^۲+ab\geqslant ۰$ تساوی فقط وفقط وقتی برقرار است که

$$a=b=۰$$

اثبات: اولی را ثابت می‌کنیم

$$\begin{cases}(a-b)^۲\geqslant ۰\\ a^۲+b^۲\geqslant ۰\end{cases} \implies a^۲+b^۲+(a-b)^۲\geqslant ۰ \implies$$

$$۲a^۲+۲b^۲-۲ab\geqslant ۰ \implies a^۲+b^۲\geqslant ab$$

۳. $$\boxed{a>۰ \ ،\ a+\frac{۱}{a}\geqslant ۲}$$

تساوی فقط وفقط وقتی برقراراست که $a=۱$

$$\boxed{a<۰ \ ،\ a+\frac{۱}{a}\leqslant -۲}$$

تساوی فقط وفقط وقتی برقراراست که $a=-۱$

اثبات: دومی را ثابت می‌کنیم، اولی نیز شبیه آن است.

$$a<۰,\ a+\frac{۱}{a}\leqslant -۲ \iff a^۲+۱\geqslant -۲a\ ,\ a<۰ \iff (a+۱)^۲\geqslant ۰\ ,\ a<۰$$

نتیجه : $$\boxed{a\neq ۰ \ ،\ \left|a+\frac{۱}{a}\right|\geqslant ۲}$$

۴. همواره $(a-b)^۲\geqslant ۰$ ، درنتیجه $a^۲+b^۲\geqslant ۲ab$ وتساوی فقط وفقط وقتی برقرار

است که، $a=b$

به‌همین ترتیب از $a^2+b^2\geqslant 2ab$ نتیجه می‌گیریم $(a+b)^2\geqslant 4ab$ که اگر a و b مثبت باشند داریم:

$$\frac{a+b}{ab}\geqslant\frac{4}{a+b}$$

ودرنتیجه نامساوی مهم زیررا داریم:

$$\boxed{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{4}{a+b}}\qquad (a>0\ ,\ b>0)$$

وتساوی فقط وفقط وقتی برقرار است که، $a=b$

۵. نامساوی واسطه حسابی وواسطه هندسی (نامساوی کوشی)

$$\boxed{a\geqslant 0\ ,\ b\geqslant 0\ ،\ \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}}$$

تساوی وقتی برقرار است که $a=b$

اثبات :

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0 \Longrightarrow a+b-2\sqrt{ab}\geqslant 0\Longrightarrow \frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$$

می‌توان این نامساوی را تعمیم داده، برای n عدد نامنفی a_1 ، a_2 ، … ، a_n داریم:

$$\boxed{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$$

وتساوی وقتی برقرار است که $a_1=a_2=\cdots=a_n$

مثال ۱. بیشترین وکمترین مقدار عبارت $y=\dfrac{x}{x^2+1}$ را تعیین‌کنید

حل. اگر $x=0$ ، آنگاه $y=0$ پس فرض می‌کنیم $x\neq 0$

$$x>0\Longrightarrow\frac{1}{y}=\frac{x^2+1}{x}=x+\frac{1}{x}\geqslant 2\Longrightarrow y\leqslant\frac{1}{2}$$

$$x<0 \Longrightarrow \frac{1}{y}=x+\frac{1}{x}\leqslant -2 \Longrightarrow y\geqslant -\frac{1}{2}$$

بنابراین به‌ازای هر x ، $-\frac{1}{2}\leqslant y\leqslant \frac{1}{2}$ یا $|y|\leqslant \frac{1}{2}$

مثال ۲. اگر $y=\frac{x^2-3}{\sqrt{x^2-4}}$ ثابت کنید $y\geqslant 2$ $(|x|>2)$

حل .

$$y=\frac{x^2-4+1}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-4}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}=\sqrt{x^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$
$$\geqslant 2 \Longrightarrow y\geqslant 2$$

باتوجه به‌حد می‌توان ثابت کرد که هر گاه $x\to\pm\infty$ آنگاه $y\to+\infty$.

نتیجه از نامساوی ۵ :

اگر a_1 و a_2 و ... و a_n مثبت باشند،

$$a_1a_2\cdots a_n=\sqrt[n]{a_1^n a_2^n\cdots a_n^n}\leqslant\frac{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n}{n}$$

و درنتیجه:

$$\boxed{a_1^n+a_2^n+\cdots\cdots+a_n^n\geqslant n\,a_1a_2\cdots a_n}$$

مثلاً :

$$x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz \qquad \text{یا} \qquad x^4+y^4+z^4+t^4\geqslant 4xyzt$$

مثال ۳. اگر a و b و c سه‌عدد مثبت، و در نامساوی

$$a^4+b^4+c^4<2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$$

صدق کنند آنگاه a و b و c می‌توانند اندازه‌های اضلاع یك مثلث باشند.

اثبات: اگر تمام جمله‌ها را به‌سمت چپ نامساوی برده و عبارت را تجزیه‌کنیم (مثال ۲۵ تجزیه به‌کمك اتحادها) داریم:

$$((a+b)^2-c^2)((a-b)^2-c^2)<0$$

وچون a و b و c مثبت‌اند پس‌ازاین دوپرانتز همواره یکی منفی ودیگری مثبت است.

$$\begin{cases}(a+b)^۲-c^۲>۰\\(a-b)^۲-c^۲<۰\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a+b>c\\|a-b|<c\end{cases}\Longrightarrow |a-b|<c<a+b$$

مثال ۴. اگر $a>۰$ و $b>۰$ و $c>۰$ ثابت‌کنید

$$\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$$

اثبات.
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant ۲ \quad \text{یا} \quad \frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}\geqslant ۲c$$

به‌همین ترتیب

$$\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant ۲a \quad \text{و} \quad \frac{bc}{a}+\frac{ab}{c}\geqslant ۲b$$

اگر این نامساویها را باهم جمع‌کنیم

$$۲\left(\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\right)\geqslant ۲(a+b+c)$$

مثال ۵. اگر $a>۰$ و $b>۰$ و $c>۰$ ثابت‌کنید،

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant ۸\,abc$$

اثبات. باتوجه به‌نامساوی (۵)

$$a+b\geqslant ۲\sqrt{ab}\ ,\ b+c\geqslant ۲\sqrt{bc}\ ,\ c+a\geqslant ۲\sqrt{ac}$$

چون دوطرف نامساوی‌ها مثبت می‌باشند درهم ضرب می‌کنیم.

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant ۸\sqrt{a^۲b^۲c^۲}=۸\,abc$$

مثال ۶. اگر $a_۱>۰$ و $a_۲>۰$ و ... $a_n>۰$ آنگاه

$$(۱+a_۱)(۱+a_۲)\ \cdots\ (۱+a_n)\geqslant ۲^n\sqrt{a_۱a_۲\cdots a_n}$$

اثبات. باتوجه به‌نامساوی (۵) داریم.

$$۱+a_۱\geqslant ۲\sqrt{a_۱}\ ,\ ۱+a_۲\geqslant ۲\sqrt{a_۲}\ ,\ \cdots\ ۱+a_n\geqslant ۲\sqrt{a_n}$$

ازضرب عضو به‌عضو این نامساوی‌ها دریکدیگر داریم:

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 2^n\sqrt{a_1a_2\cdots a_n}$$

نتیجه: اگر $a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n=1$ آنگاه:

$$\boxed{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant 2^n}$$

تساوی وقتی برقرار است که $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$

۶. اگر a_1 و a_2 و ... a_n اعداد حقیقی مثبتی باشند:

$$\boxed{\text{اگر } a_1a_2\cdots a_n=1 \text{ آنگاه } a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n}$$

اثبات درحالت $n=2$ به سادگی بدست می‌آید زیرا اگـر $a_1a_2=1$ آنگاه a_1 و a_2 عکس یکدیگرند ولذا:

$$a_1+a_2=a_1+\frac{1}{a_1}\geqslant 2$$

برای حالت کلی می‌توان نامساوی را به استقراء ثابت‌کرد.

همچنین ازاین نامساوی می‌توان به‌سادگی نامساوی‌کوشی (۵) را ثابت‌کرد.

اگر فرض‌کنیم: $x=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ آنگاه

$$a_1a_2\cdots a_n=x^n\Longrightarrow\frac{a_1}{x}\cdot\frac{a_2}{x}\cdots\frac{a_n}{x}=1$$

ولذا بنا به‌نامساوی فوق (۶)

$$\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x}\geqslant n\Longrightarrow$$

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{x}\geqslant n\Longrightarrow\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant x$$

یعنی:

$$\boxed{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$$

نتیجه ۱. اگر a_1 و a_2 و ... و a_n اعدادحقیقی هم علامت باشند آنگاه:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\geqslant n}$$

تساوی وقتی برقرار است که $a_۱=a_۲=\dots=a_n$

برای اثبات چون، $\frac{a_۱}{a_۲}\cdot\frac{a_۲}{a_۳}\cdots\frac{a_{n-۱}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_۱}=۱$ بنا به نامساوی (۶) نامساوی برقرار است.

نتیجه ۲. اگر a و b و c اضلاع مثلثی باشند،

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant ۳$$

۷. نامساوی وایرشتراس.

هرگاه a_i ها هم‌علامت و بزرگتر از ۱− باشند.

$$\boxed{(۱+a_۱)(۱+a_۲)\cdots(۱+a_n)\geqslant ۱+a_۱+a_۲+\cdots a_n}$$

می‌توان این نامساوی را به‌استقراء ثابت کرد.

۸.
$$\boxed{a^۲+b^۲+c^۲\geqslant ab+ac+bc}$$

تساوی وقتی برقرار است که $a=b=c$

اثبات. طرفین را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲-۲ab-۲ac-۲bc\geqslant ۰ \Longrightarrow$$
$$(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲\geqslant ۰$$

که همواره برقرار است

$$(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲=۰\Longrightarrow a-b=۰\ ,\ b-c=۰\ ,$$
$$c-a=۰\Longrightarrow a=b=c$$

مثال ۷. اگر $a^۲+b^۲+c^۲=۲$ و $S=ab+ac+bc$ ، حدود S را مشخص کنید.

حل. اولاً بنا به نامساوی (۸) $ab+ac+bc\leqslant a^۲+b^۲+c^۲=۲$ یعنی $S\leqslant ۲$

ثانیاً،

$$(a+b+c)^۲\geqslant ۰ \Longrightarrow a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab+ac+bc)\geqslant ۰ \Longrightarrow$$
$$۲+۲S\geqslant ۰ \Longrightarrow S\geqslant -۱ \Longrightarrow -۱\leqslant S\leqslant ۲$$

مثال ۸. اگر $a^2+b^2+c^2=1$ و $S=a+b+c$ حدود S را پیدا کنید.

حل. $$S^2=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$$
$$=1+2(ab+ac+bc)\leqslant 1+2(a^2+b^2+c^2)=3$$

لذا $S^2\leqslant 3$ یا $|S|\leqslant\sqrt{3}$

۹ــ اگر a و b اعداد حقیقی باشند $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$ یا

$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. اگر $a=b$ تساوی برقرار است.

اثبات. $\frac{a^2+b^2+2ab}{4}\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}\Longrightarrow 2ab\leqslant 2a^2+2b^2\Longrightarrow$

$ab\leqslant a^2+b^2$ که همواره برقرار است.

می‌توان این نامساوی را تعمیم داده و به استقراء یا روش دیگری نامساوی‌های زیر را ثابت کرد.

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n\leqslant\frac{a^n+b^n}{2}$ یا $(a+b)^n\leqslant 2^{n-1}(a^n+b^n)$ و به‌طورکلی

$$(a_1+a_2+\cdots+a_m)^n\leqslant m^{n-1}(a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n)$$

نتیجه: اگر $x+y=k>0$ و $n\in N$ آنگاه $x^n+y^n\geqslant\frac{K^n}{2^{n-1}}$ وشرط لازم وکافی برای برقراری تساوی آن است که $n=1$ یا $x=y=\frac{K}{2}$

مثال ۹. اگر $a+b+c+d=8$ و $a^2+b^2+c^2+d^2=25$ و $c=d$، بیشترین مقدار c را پیدا کنید و بازای آن مقدار a را نیز حساب کنید.

حل. $a+b=8-2c$ و بنا به نامساوی (۹) $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(a+b)^2$

درنتیجه، $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}(8-2c)^2$ بنابراین، $25-2c^2\geqslant\frac{1}{2}(8-2c)^2$ که‌پس‌از ساده‌کردن داریم $4c^2-16c+7\leqslant 0$ و لذا:

$\frac{1}{2}\leqslant c\leqslant\frac{7}{2}$، یعنی ماکزیمم c برابر $\frac{7}{2}$ است حال برای‌محاسبه a اگر $c=\frac{7}{2}$ قرار

دهیم داریم،

$$\begin{cases} a^۲+b^۲=۲۵-\frac{۴۹}{۲}=\frac{۱}{۲} \\ a+b=۱ \end{cases} \Longrightarrow a=b=\frac{۱}{۲}$$

۱۰- اگر $a+b+c\geqslant ۰$ آنگاه $a^۳+b^۳+c^۳\geqslant ۳abc$

اثبات. باتوجه به‌اتحاد.

$$a^۳+b^۳+c^۳-۳abc=\frac{۱}{۲}(a+b+c)[(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲]$$

چون $a+b+c\geqslant ۰$ وعبارت داخل کروشه همواره بزرگتر یامساوی صفراست لذا طرف دوم همواره بزرگتر یا مساوی صفر است و درنتیجه $a^۳+b^۳+c^۳-۳abc\geqslant ۰$

نتیجه۱. $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc \Longrightarrow a+b+c=۰$ یا $a=b=c$

زیرا در اتحاد فوق یا پرانتز اول صفر است یا کروشه دوم.

نتیجه۲. اگر $a=\sqrt[۳]{x}$ و $b=\sqrt[۳]{y}$ و $c=\sqrt[۳]{z}$ فرض‌کنیم

$$\frac{x+y+z}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{xyz} \quad \text{یا} \quad x+y+z\geqslant ۳\sqrt[۳]{xyz}$$

که نامساوی واسطه هندسی و حسابی بین سه‌عدد است.

۱۱- انواع واسطه‌ها.

اگر $a_۱$ و $a_۲$ و . . . a_n مثبت باشند. دوواسطه هندسی وحسابی‌را قبلاً تعریف کردیم اکنون دو واسطه دیگر به‌نامهای واسطه توافقی و مربعی را تعریف می‌کنیم . اگر واسطه توافقی (*harmonic mean*) را بــه H_n و واسطه هندسی (*geometric mean*) را به G_n و واسطه حسابی (*arithmetic mean*) را به A_n و واسطه مربعی (*Square mean*) را به S_n نشان‌دهیم داریم.

$$H_n=\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n}}$$

$$G_n=\sqrt[n]{a_۱a_۲\cdots a_n}$$

$$A_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\qquad S_n=\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}{n}}$$

و رابطه زیر بین این واسطه‌ها برقرار است

$$a_1\leqslant H_n\leqslant G_n\leqslant A_n\leqslant S_n\leqslant a_n$$

که a_1 کوچکترین و a_n بزرگترین این اعداد است.

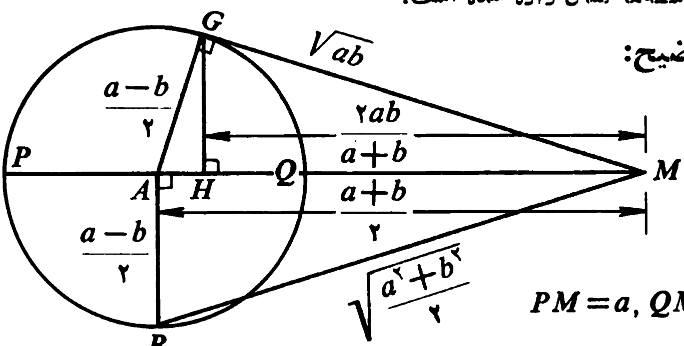
برای مثال اگر دوعدد a و b داشته‌باشیم‌که $0<a\leqslant b$ داریم.

$$\boxed{a\leqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\leqslant b}$$

به‌عنوان تمرین رابطه‌های بالا را ثابت کنید.

در شکل زیر این واسطه‌ها نشان داده شده است.

اثبات بدون توضیح:



$$PM=a,\ QM=b,\ a>b>0$$

$$HM<GM<AM<RM$$

$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

۱۲ـ هرگاه $a^2=b^2+c^2$ و c,b,a مثبت باشند،

اگر $n>2$ آنگاه $a^n>b^n+c^n$

اگر $0<n<2$ آنگاه $a^n<b^n+c^n$

اثبات. قسمت اول را ثابت می‌کنیم. و قسمت دوم را به‌عنوان تمرین ثابت کنید. چون a و b و c مثبت و $a^2=b^2+c^2$ در نتیجه $a>b$ و $a>c$ و چون $n>2$ لذا.

$$b^n+c^n=b^2(b^{n-2})+c^2(c^{n-2})<b^2(a^{n-2})+c^2(a^{n-2})$$

$$=a^{n-2}(b^2+c^2)=a^{n-2}a^2=a^n\Longrightarrow b^n+c^n<a^n$$

نتیجه: این نامساوی‌ها در هر مثلث قائم‌الزاویه نیز برقرارند.

۱۳ــ اگر n عددی طبیعی و $۱ \leqslant k \leqslant n$ آنگاه $(n-k)(k-۱) \geqslant ۰$ از ضرب آن نتیجه می‌گیریم $k(n-k+۱) \geqslant n$.

مثال ۱۰. ثابت کنید اگر n عددی طبیعی باشد $\sqrt[n]{n!} \geqslant \sqrt{n}$، $n!$ یعنی $۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times n$

حل. با توجه به نامساوی فوق (۱۳) داریم.

$$\left\{\begin{array}{l} ۱ \cdot n = n \\ ۲ \cdot (n-۱) \geqslant n \\ ۳ \cdot (n-۲) \geqslant n \\ \cdots\cdots\cdots \\ \quad n \cdot ۱ = n \end{array}\right. \Longrightarrow (۱ \cdot n)(۲ \cdot (n-۱))(۳ \cdot (n-۲)) \cdots (n \cdot ۱) \geqslant n^n$$

اما حاصلضرب طرف چپ نامساوی برابر $(n!)(n!)$ یا $(n!^۲)$ می‌باشد و درنتیجه

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \sqrt{n} \quad \text{یا} \quad (n!)^۲ \geqslant n^n$$

مثال ۱۱. اگر $n \in N$ و $n > ۱$ ثابت کنید

$$\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots + \frac{۱}{n^۲} < ۱$$

حل. $$\frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲ \times ۲} < \frac{۱}{۱ \times ۲} \quad ، \quad \frac{۱}{۹} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} < \frac{۱}{۲ \times ۳} ، \cdots\cdots$$

$$\frac{۱}{n^۲} = \frac{۱}{n \times n} < \frac{۱}{(n-۱)n} \quad \text{در نتیجه}$$

$$\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۱۶} + \cdots + \frac{۱}{n^۲} < \frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ + ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \cdots + \frac{۱}{(n-۱)n}$$

$$= \frac{۲-۱}{۱ \times ۲} + \frac{۳-۲}{۲ \times ۳} + \frac{۴-۳}{۳ \times ۴} + \cdots + \frac{n-(n-۱)}{(n-۱)n} =$$

$$(۱ - \frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}) + (\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}) + \cdots + (\frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n}) = ۱ - \frac{۱}{n} < ۱$$

۱۴ــ اگر n عدد طبیعی و a و b دوعدد مثبت باشند

$$\boxed{a^n + b^n \geqslant a^{n-۱}b + b^{n-۱}a}$$

یا
$$\boxed{a^n+b^n \geqslant ab\,(a^{n-2}+b^{n-2})}$$

اثبات. فرض می‌کنیم $a\geqslant b$، حالت دیگر یعنی $a<b$ نیز مانند آن است

$$a\geqslant b>0 \Longrightarrow a^{n-1}\geqslant b^{n-1} \Longrightarrow (a^{n-1}-b^{n-1})\geqslant 0$$

و چون $a-b\geqslant 0$ لذا $(a^{n-1}-b^{n-1})(a-b)\geqslant 0$ که از ضرب آن نامساوی‌مطلوب بدست می‌آید.

به‌طور مثال، $a^3+b^3\geqslant ab(a+b)$ یا $a^4+b^4\geqslant ab(a^2+b^2)$

۱۵– نامساوی بر نویی. $(Bernoulli's\ ineqality)$

اگر $1+a\geqslant 0$ آنگاه بازاء هرعدد طبیعی n، $(1+a)^n\geqslant 1+na$ و تساوی فقط‌وفقط وقتی برقرار است‌که $a=0$ یا $n=1$

این نامساوی را به استقراء می‌توان ثابت‌کرد، البته روشهای دیگری نیز وجـود دارد‌که به‌مقدماتی نیاز دارد درحالت $a>0$ بـه‌کمك بسط دوجمله‌ای نیوتـن به‌سادگی ثابت می‌شود.

مثال ۱۲. ثابت کنید $\sqrt{a}+\sqrt{a+2}<2\sqrt{a+1}$

حل. می‌توان نامساوی را به‌صورت زیر نوشت

$$\sqrt{a+2}-\sqrt{a+1}<\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$$

که این نامساوی معادل نامساوی زیر است

$$\frac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+1}}<\frac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}$$

که همواره برقرار است چون مخرج طرف اول بزرگتر است لذا مقدار کسر آن کوچکتر است.

۱۶– اگر تمام، a_1 و a_2 و .... و a_nها هم علامت باشند آنگاه:

$$\boxed{(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2}$$

وتساوی وقتی برقرار است که $a_1=a_2=\cdots=a_n$

اثبات.

$$H_n\leqslant A_n \Longrightarrow \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

که با ضرب کردن، نامساوی ثابت می‌شود

مثال ۱۳. اگر $S=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-4$، و $ab>0$، حدود S را پیدا کنید.

حل. با توجه به‌نامساوی فوق $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 2^2=4$ لذا $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-4\geqslant 0$
و در نتیجه $S\geqslant 0$
به روش دیگری نیز می‌توان نامساوی را اثبات کرد

$$S=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-4=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\geqslant 0$$

مثال ۱۴. اگر z,y,x مثبت باشند و $x+y+z=K$، مینیمم $S=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ را پیدا کنید. $(K>0)$

حل. با توجه به نامساوی فوق $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant 9$ در نتیجه $KS\geqslant 9$ یا $S\geqslant\frac{9}{K}$ و لـذا مینیمم آن $\frac{9}{K}$ است.

اگر این نامساوی را در xyz ضرب کنیم به‌نامساوی زیر می‌رسیم.

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)\geqslant 9xyz$$

۱۷− $\boxed{\sqrt{a^2+b^2}\leqslant|a|+|b|}$

با به‌توان رساندن به‌آسانی ثابت می‌شود.

۱۸− $\boxed{\sqrt[n]{a+b}\leqslant\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\ ،\ a\geqslant 0 \text{ و } b\geqslant 0}$

این نامساوی نیز با به‌توان n رساندن به‌سادگی ثابت می‌شود.

۱۹− اگر $n\geqslant 3$ ، $\sqrt[n]{n}>\sqrt[n+1]{n+1}$

یعنی، $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}>\dots>\sqrt[n]{n}$

۲۰− اگر b و a و x و y اعدادحقیقی باشند: $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\geqslant(ax+by)^2$
این نامساوی قابل تعمیم نیز می‌باشد (تمرین ۵)

برای اثبات این نامساوی اتحاد

$$(x^{۲}+y^{۲})(a^{۲}+b^{۲})=(ax-by)^{۲}+(ax+by)^{۲}$$

را درنظرمی‌گیریم $(ax-by)^{۲}+(ax+by)^{۲}\geqslant(ax+by)^{۲}$ ، لذا نامساوی برقرار است و وقتی تساوی برقراراست که $ax-by=۰$ یا $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$

نتیجه: اگر $ax+by=K$، مقدار ثابتی باشد، $x^{۲}+y^{۲}\geqslant\frac{K^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}}$ ودرنتیجه‌مینیمم $x^{۲}+y^{۲}$ برابر $\frac{K^{۲}}{a^{۲}+b^{۲}}$ است. این نتیجه را برای‌سه متغیر بیان‌کنید.

۲-۵. تعیین ماکزیمم و مینیمم مطلق

یك روش تعیین ماکزیمم و مینیمم به‌کمك مشتق است که موردنظر این‌کتاب نیست ، اما روشهای درتعیین ماکزیمم ومینیمم وجود داردکه به‌کمك نامساوی واسطه حسابی وهندسی قابل اثبات می‌باشند. دراین‌مورد چهارقضیه وجود داردکه در ذیل بیان می‌کنیم.

۱ــ هرگاه مجمــوع چند متغییر مثبت مقدارثابتی باشد، حاصل‌ضرب آنها وقتی ماکزیمم است که آن متغیـرها مساوی باشند.

یعنی اگربازاء هر i، $a_i>۰$ و $a_۱+a_۲+\ldots+a_n=K$ آنگاه $P=a_۱a_۲\ldots a_n$ وقتی ماکزیمم است که، $a_۱=a_۲=\ldots=a_n$

اثبات. بنا به نامساوی واسطه حسابی و هندسی (۵): $(a_i>۰)$

$$\frac{a_۱+a_۲+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_۱a_۲\ldots a_n}$$

و تساوی وقتی برقرار است‌که، $a_۱=a_۲=\ldots=a_n$

بنابراین، $\frac{K}{n}\geqslant\sqrt[n]{P}$ یا $P\leqslant\left(\frac{K}{n}\right)^n$ و P وقتی‌ماکزیمم است که $P=\left(\frac{K}{n}\right)^n$ باشد یعنی در نامساوی واسطه حسابي و هندسی تساوی برقرار باشد و این وقتی‌ممکن است‌که متغییرها برابر باشند یعنی $a_۱=a_۲=\ldots=a_n=\frac{K}{n}$

۲ــ اگر xوyوz،...،t متغیـرهای‌مثبت‌و به‌مجموع ثابت‌باشند، $x+y+z+\ldots+t=K$ آنگاه‌حاصلضرب $P=x^n.y^m.z^r\ldots t^l$ وقتی ماکزیمم‌است که: $\frac{x}{n}=\frac{y}{m}=\frac{z}{r}=\ldots=\frac{t}{l}$

برای اثبات کافیست از قضیه ۱. استفاده کنیم، به‌این‌صورت که از $\frac{x}{n}$ ، n عامل و از $\frac{y}{m}$ ، m عامل، . . . و از $\frac{t}{l}$ ، l عامل در نظر بگیریم، مجموع ثابت و برابر K است و لذا باید عامل‌ها مساوی باشند،

$$\underbrace{\frac{x}{n}=\frac{x}{n}=\ldots=\frac{x}{n}}_{n \text{ بار}}=\underbrace{\frac{y}{m}=\frac{y}{m}=\ldots=\frac{y}{m}}_{m \text{ بار}}=\ldots \Longrightarrow \frac{x}{n}=\frac{y}{m}=\ldots=\frac{t}{l}$$

۳ـ اگر حاصلضرب چند متغیر مثبت ثابت باشد، حاصل‌جمع آنها وقتی مینیمم است که آن متغیرها باهم مساوی باشند. یعنی،

اگر P ، $a_1a_2\ldots a_n=P$ و P ثابت باشد، آنگاه $S=a_1+a_2+\cdots+a_n$ وقتی مینیمم است که، $a_1=a_2=\ldots=a_n$ $(a_i>0)$

اثبات. مانند قضیه ۱. از نامساوی واسطه حسابی وهندسی داریم:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{P} \implies S\geqslant n\sqrt[n]{P}$$

S وقتی مینیمم است که $S=n\sqrt[n]{P}$. و این وقتی ممکن‌است که متغیرها مساوی باشند

۴ـ اگر x و y و z و . . . t مثبت و حاصلضرب، $P=x^n.y^m.\,.\,.t^l$ مقداری ثابت باشد، آنگاه $S=x+y+z+.\,.\,.+t$ وقتی مینیمم است که:

$$\frac{x}{n}=\frac{y}{m}=\ldots=\frac{t}{l}$$

برای اثبات ازقضیه ۳ـ استفاده مـی‌کنیم، باتوجه به‌اینکه، n عامل از $\frac{x}{n}$ در m عامل از $\frac{y}{m}$ ، ... ضرب شده است چنین‌داریم:

$$\left(\frac{x}{n}\right)^n\cdot\left(\frac{y}{m}\right)^m\cdot\ldots\cdot\left(\frac{t}{l}\right)^l=\frac{P}{n^n.m^m\ldots l^l}=\frac{P}{K}$$

وچون $\frac{P}{K}$ ثابت است پس مجموع این عاملها یعنی،

$$S=\underbrace{\frac{x}{n}+\frac{x}{n}+\cdots+\frac{x}{n}}_{n\text{ بار}}+\underbrace{\frac{y}{m}+\cdots+\frac{y}{m}}_{m\text{ بار}}+\cdots+\underbrace{\frac{t}{l}+\cdots+\frac{t}{l}}_{l\text{ بار}}$$

وقتی مینیمم است که همه با هم مساوی باشند، $\frac{x}{n}=\frac{y}{m}=\cdots=\frac{t}{l}$

تذکر: در قضایای فوق، n، m و l... می‌توانند گویا نیز باشند

مثال ۱۵. مینیمم عبارت $y=\frac{x^۶+۱۲۸}{x^۲}$ را پیدا کنید $(x\neq ۰)$

حل. $y=x^۴+\frac{۱۲۸}{x^۲}$، وچون $(x^۴)\cdot\left(\frac{۱۲۸}{x^۲}\right)^۲=۱۲۸^۲$ و ثابت است لذا،

y وقتی مینیمم است که $\frac{x^۴}{۱}=\frac{\frac{۱۲۸}{x^۲}}{۲}$ یعنی $x^۶=۶۴$ یا $x=\pm ۲$

و $y_{Min}=\frac{۶۴+۱۲۸}{۴}=۴۸$

به‌عنوان تمرین درحالت کلی مانند مثال فوق ثابت‌کنید اگر $n>m$ و $\frac{a}{x^m}$ و x^{n-m}

مثبت باشند آنگاه عبارت $y=\frac{x^n+a}{x^m}$ وقتی مینیمم است که $x=\sqrt[n]{\frac{am}{n-m}}$

و مقدار این مینیمم برابر $y=\frac{n}{m}\sqrt[n]{\left(\frac{am}{n-m}\right)^{n-m}}$ است

مثال ۱۶. اگر $x+y=۴$ و $S=x^۳+y^۳$ با شرط $x,y>۰$ مینیمم S کدام‌است.

حل.

$$\begin{aligned}S&=x^۳+y^۳=(x+y)(x^۲+y^۲-xy)\\&=(x+y)((x+y)^۲-۳xy)\\&=۴(۱۶-۳xy)=۶۴-۱۲yx\end{aligned}$$

S وقتی مینیمم است که xy ماکزیمم باشد و چون $x+y=۴$ و ثابت است لذا،

xy وقتی ماکزیمم است که $x=y=۲$ و درنتیجه، $\text{Min } S=۶۴-۴۸=۱۶$

مثال ۱۷. اگر x در ربع اول و سوم باشد مینیمم عبارت $S=۴\text{tg}x+۹\cot\text{g}x$ را پیدا کنید.

حل. چون x در ربع اول یا سوم است لذا $\text{tg}x$ و $\text{cotg}x$ مثبت و داریم $۴\,\text{tg}x \cdot ۹\,\text{cotg}\,x=۳۶$ که مقدار ثابتی است درنتیجه S وقتی مینیمم است که $۴\text{tg}x=۹\text{cotg}x$ یا $\text{tg}^۲x=\frac{۹}{۴}$ و بنابراین $\text{tg}x=\frac{۳}{۲}$ و $\text{cotg}x=\frac{۲}{۳}$ و

$$\text{Min}\, S=۴\times\frac{۳}{۲}+۹\times\frac{۲}{۳}=۱۲$$

مثال ۱۸. اگر $c^۲=b^۲x^۲+a^۲y^۲$، ماکزیمم xy را پیدا کنید (c,b,a,y,x مثبت‌اند)

حل. وقتی xy ماکزیمم باشد $x^۲y^۲$ و لذا $b^۲x^۲.a^۲y^۲$ ماکزیمم است، چون مجموع این دوعامل ثابت است حاصلضرب آنها وقتی ماکزیمم است که برابر باشند یعنی $b^۲x^۲=a^۲y^۲$ یا $۲b^۲x^۲=c^۲=۲a^۲y^۲$ که درنتیجه $x=\frac{c\sqrt{۲}}{۲b}$ و $y=\frac{c\sqrt{۲}}{۲a}$ و

$$\text{Max }(xy)=\frac{c^۲}{۲a^۲b^۲}$$

نتیجه: اگر $c^۲=a^۲b^۲$ ، یعنی $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱$ آنگاه xy وقتی ماکزیمم است که $x=\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ و $y=\frac{b\sqrt{۲}}{۲}$ این معادلهٔ یك بیضی است و $۴xy$ مساحت مستطیلی محاط در آن ، با ابعاد فوق، مساحت مستطیل ماکزیمم است.

مثال ۱۹. مینیمم عبارت $y=\frac{a+bx^۴}{x^۲}$ را پید کنید ($a>۰$ و $b>۰$)

حل. بدکمك قضایای فوق می‌توان این مینیمم را محاسبه‌کرد اما اگر از نامساوی ۵. (واسطه حسابی و هندسی) استفاده کنیم محاسبه مینیمم ساده‌تر خواهدبود.

$$x+y\geqslant ۲\sqrt{xy}$$

بنابراین،

$$y=bx^{۲}+\frac{a}{x^{۲}}\geqslant ۲\sqrt{bx^{۲}.\frac{a}{x^{۲}}}=۲\sqrt{ab} \quad \text{یا} \quad y_{\text{Min}}=۲\sqrt{ab}$$

و تساوی وقتی برقرار است که $y=x$ یا $bx^{۲}=\frac{a}{x^{۲}}$ و $x^{۲}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ یا $x=\sqrt[۴]{\frac{a}{b}}$

مثال ۲۰. اگر a،b،c،...،l و x،y،z، ... t اعدادی مثبت و $ax+by+cz+\cdots+lt=K$ ثابت باشد ثابت کنید حاصلضرب $P=xyz\ldots t$ وقتی ماکزیمم است که

$$ax=by=cz=\cdots=lt$$

حل. چون تمام اعداد و متغیرها مثبت‌اند، پس P ماکزیمم است فقط و فقط اگر $(xyz\cdots t)(abc\cdots l)$ ماکزیمم باشد و چون حاصل جمع این متغیرها ثابت است لذا $ax=by=\cdots=lt$

مسائل نامساوی‌ها

۱ــ ثابت‌کنید برای هرسه‌عدد مثبت و متمایز a و b و c نامساوی زیر برقرار است:

$$(a^{4}+b^{4}+c^{4})(ab+ac+bc)>9a^{2}b^{2}c^{2}$$

۲ــ ثابت کنید اگر a و b و c مثبت باشند آنگاه:

$$a^{3}+b^{3}+c^{3}>\frac{1}{2}[bc(b+c)+ac(a+c)+ab(a+b)]$$

۳ــ ثابت‌کنید،

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1)$$

۴ــ اگر $a,b,c>0$ ثابت‌کنید

$$\frac{1}{a^{3}+b^{3}+abc}+\frac{1}{b^{3}+c^{3}+abc}+\frac{1}{c^{3}+a^{3}+abc}\leqslant\frac{1}{abc}$$

۵ــ ثابت‌کنید

$$(a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+\dots+a_{n}^{2})(b_{1}^{2}+b_{2}^{2}+\dots+b_{n}^{2})\geqslant(a_{1}b_{1}+a_{2}b_{2}+\dots+a_{n}b_{n})^{2}$$

۶ــ اگر $a_{1}^{2}+a_{2}^{2}+\dots+a_{n}^{2}=1$ و $b_{1}^{2}+b_{2}^{2}+\dots+b_{n}^{2}=1$

ثابت‌کنید.

$$-1\leqslant a_{1}b_{1}+a_{2}b_{2}+\dots+a_{n}b_{n}\leqslant 1$$

۷ــ اگر c,b,a سه‌عدد حقیقی مثبت‌باشند به‌طوری که $abc=x^{3}$ ثابت‌کنید،

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant(1+x)^{3}$$

۸ـ اگر d, c, b, a اعدادی حقیقی و مثبت باشند ثابت کنید،

$$\frac{a+c}{a+b}+\frac{b+d}{b+c}+\frac{c+a}{c+d}+\frac{d+b}{d+a}\geqslant ۴$$

۹ـ ثابت کنید اگر $a+b=۱$ و a و b مثبت باشند

$$\left(a+\frac{۱}{a}\right)^۲+\left(b+\frac{۱}{b}\right)^۲\geqslant \frac{۲۵}{۲}$$

۱۰ـ اگر $x_۱+x_۲+\dots+x_n=K$ و K ثابت باشد ثابت کنید که $S=x_۱^۲+x_۲^۲+\dots+x_n^۲$ وقتی‌مینیمم است که $x_۱=x_۲=\dots=x_n=\frac{K}{n}$

۱۱ـ ثابت کنید عبارت $(x-x_۱)^۲+(x-x_۲)^۲+\dots+(x-x_n)^۲$ هرگاه $x=\frac{x_۱+x_۲+\dots+x_n}{n}$ باشد مینیمم است.

۱۲ـ ثابت کنید اگر $n>m$ ، $(a^m+b^m)^n>(a^n+b^n)^m$

۱۳ـ اگر $a+b+c=۶$ و c, b, a مثبت باشند ثابت کنید،

$$\left(a+\frac{۱}{b}\right)^۲+\left(b+\frac{۱}{c}\right)^۲+\left(c+\frac{۱}{a}\right)^۲\geqslant \frac{۷۵}{۴}$$

۱۴ـ اگر $ac+bd=pq$، و تمام آنها مثبت باشند ثابت کنید،

$$(a^۲+b^۲)(c^۲+d^۲)\geqslant p^۲q^۲$$

۱۵ـ اگر $ax+by+cz=K$، مقدار ثابتی باشد ثابت کنید $S=x^۲+y^۲+z^۲$ وقتی مینیمم است که $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ و مقدار این مینیمم برابر است با $\frac{K^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}$

تست‌های نامساوی‌ها

۱. اگر $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant ۲$ آنگاه کدام درست است؟

الف. $x>۰$ و $y>۰$ ب. $x>۰$ و $y<۰$

ج. $xy<۰$ د. $xy>۰$

۲. اگر $A=\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{۲}}$، $۰<a<b$ آنگاه هموارهٔ

الف. $۰<A<b$ ب. $\frac{a}{۲}<A<\frac{b}{۲}$

ج. $a<A<b$ د. $\sqrt{a}<A<\sqrt{b}$

۳. اگر $S=(a^۲+b^۲)\left(\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}\right)-۴$ آنگاه:

الف. $S>۰$ ب. $S\geqslant ۰$ ج. $S>a^۲b^۲$ د. $S\leqslant ۰$

۴. اگر $A=x^۸-x^۵+x^۲-x+۱$ آنگاه:

الف. $A\geqslant ۰$ ب. $A>۰$ ج. $A\leqslant ۰$

د. بازاء بعضی مقادیر x، $A=۰$ و $A>۰$ یا $A<۰$ است.

۵. نامساوی $a^۳+a\geqslant a^۲+a$ وقتی همیشه برقرار است که.

الف. $a\geqslant ۰$ ب. $a\leqslant -۱$ ج. بازاء همه‌مقادیر a برقرار است د. $a\geqslant +۱$

۶. نامساوی $ab(a+b)\leqslant a^۳+b^۳$ وقتی برقرار است که.

الف. $a\geqslant 0$ و $b\geqslant 0$ ب. بازاء همه مقادیر a و b برقرار است

ج. $a+b\geqslant 0$ د. $a\neq 0$ و $b\neq 0$ و $a+b>0$

۷. اگر $a>0$ و $b>0$ کدامیك **نادرست** است.

الف. $\dfrac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$ ب. $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

ج. $\sqrt[4]{4}>\sqrt[5]{5}$ د. $\sqrt{a^2+b^2}>\sqrt[3]{a^3+b^3}$

۸. اگر $S=\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}$ $(x\geqslant 0)$ کدام درست است.

الف. $-\frac{1}{2}\leqslant S\leqslant\frac{1}{2}$ ب. $0\leqslant S\leqslant 1$

ج. $0\leqslant S\leqslant\frac{1}{2}$ $0<S\leqslant\frac{1}{4}$

۹. اگر $A=xy+xz+yz$ و $x+y+z=0$ آنگاه.

الف. $A\geqslant 0$ ب. $A>-2$ ج. $A\leqslant 0$ د. $A<0$

۱۰. اگر $S=\dfrac{a}{b^2}+\dfrac{b}{a^2}-\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$ آنگاه

الف. همیشه $S\geqslant 0$

ب. همواره اگر $a\neq 0$ و $b\neq 0$ آنگاه $S>0$

ج. فقط اگر $a>0$ و $b>0$ آنگاه $S\geqslant 0$

د. اگر $a+b\geqslant 0$ و $a\neq 0$ و $b\neq 0$ آنگاه $S\geqslant 0$

۱۲. اگر $S=a^2+2b^2-2ab+2b+2$ آنگاه همواره

الف. $S\geqslant 0$ ب. $S>0$ ج. $S\geqslant +1$ د. $S>1$

۱۳. اگر $xy=1$ و $x<0$ و $y<0$ و $S=x+y$ آنگاه.

الف. $S<0$ ب. $-4<S\leqslant -2$ ج. $S\leqslant -2$ د. $-2\leqslant S\leqslant 2$

۱۴. اگر $2<a<3$ و $-3<b<-2$ و $A=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ آنگاه کدام

همواره درست است؟

الف. $-\frac{۱}{۶}<A<+\frac{۱}{۶}$ ب. $-۱<A<۱$

ج. $-\frac{۵}{۶}<A<+\frac{۵}{۶}$ د. نمی‌توان حساب کرد

۱۵. اگر، $a+b>۰$ و $S=a^{۳}+b^{۳}$ کدام همواره درست است.

الف. $S\geqslant ۰$ ب. $S>۰$ ج. $S\geqslant ۱$ د. اگر $ab=۰$ آنگاه $S\geqslant ۰$

۱۶. کمترین مقدار تابع $y=x^{۶}+۵x^{۲}+۷$ کدام است.

الف. ۷ ب. صفر ج. ۱ د. ۱۲

۱۷. اگر $xy>۰$، و $S=\left(x+\frac{۱}{x}\right)\left(y+\frac{۱}{y}\right)+\left(x-\frac{۱}{x}\right)\left(y-\frac{۱}{y}\right)$ آنگاه

الف. $S\geqslant ۲$ ب. $S\geqslant ۴$ ج. $S\geqslant ۰$ د. $S\leqslant ۴$

۱۸. اگر $A=\frac{x^{۴}-۲x^{۲}+۲}{x^{۸}+۴}$ کدام درست است؟

الف. $۰<A<۱$ ب. $۰\leqslant A<۱$ ج. $۰<A\leqslant\frac{۳}{۲}$ د. $۰<A\leqslant\frac{۱}{۲}$

۱۹. اگر $A=xy+xz+yz$ و $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=۴$ کدام درست است.

الف. $-۲\leqslant A\leqslant ۲$ ب. $۰<A\leqslant ۴$

ج. $-۲\leqslant A\leqslant ۴$ د. $-۴\leqslant A\leqslant ۴$

۲۰. اگر $xy+xz+yz=۱۲$ و $B=x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}$ آنگاه:

الف. $B\leqslant ۱۲$ ب. $B\geqslant ۱۲$ ج. $B>۱۲$ د. $B\geqslant ۶$

۲۱. اگر $xy+zx+yz=۶$ و $S=x+y+z$ کدام درست است.

الف. $|S|\leqslant ۳\sqrt{۲}$ ب. $|S|\geqslant ۳\sqrt{۲}$ ج. $۰\leqslant S\leqslant ۳\sqrt{۲}$ د. $S\geqslant ۱۸$

۲۲. اگر $x>۰$، مینیمم عبارت $y=\frac{x^{۲}+۴}{x}$ برابر است با:

الف. ۲ ب. ۴ ج. ۸ د. ۱۶

۲۳- اگر $xy+yz+xz=۴۸$، ماکزیمم xyz کدام است؟

الف. ۶۴ ب. ۴۸ ج. ۸ د. ۱۲۸

۲۴- اگر $x+y=۲$ مینیمم عبارت $S=x^۲+y^۲$ برابراست با:

الف. صفر ب. ۲ ج. ۸ د. ۴

۲۵- اگر $۳x+۴y=۵$ باشد مینیمم $S=x^۲+y^۲$ برابراست با:

الف. ۵ ب. ۲ ج. ۱ د. ۷

۲۶- اگر x حاده و $y=۵\operatorname{tg}x+۴\operatorname{cotg}x$، مینیمم y برابراست با:

الف. ۴ ب. $۲\sqrt{۵}$ ج. $۴\sqrt{۵}$ $\frac{\sqrt{۵}}{۲}$

۲۷- اگر x و y دومتغیر مثبت و $xy=k$ و ثابت باشد مینیمم عبارت $S=\frac{۱}{x^۲}+\frac{۱}{y^۲}$ برابراست با؛

الف. $\frac{۲}{k^۲}$ ب. $\frac{۲}{k}$ ج. $۲k$ د. $۲k^۲$

۲۸- اگر $x+y=a$ و x و y دومتغیرمثبت باشند عبارت $S=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}$

الف. دارای ماکزیممی برابر $\frac{۴}{a}$ است

ب. دارای مینیممی برابر $\frac{۴}{a}$ است

ج. دارای ماکزیممی برابر $\frac{a^۲}{۴}$ است

د. دارای مینیممی برابر $\frac{a^۲}{۴}$ است

۲۹- اگر $y=\frac{۴x^۶+۱۶}{x^۳}$، $(x>۰)$ آنگاه مینیمم y کدام است وبازاء چه‌مقدار x؟

الف. ۱۶ و $x=\sqrt[۳]{۴}$ ب. ۱۶ و $x=\sqrt[۳]{۲}$

ج. ۸ و $x=۲$ د. ۳۲ و $x=۴$

۳۰ـ اگر $x+y+z=۶$ و $A=x^۲+y^۲+z^۲$ آنگاه

الف. $A\leqslant ۱۲$ ب: $A\geqslant ۱۲$ ج. $A\geqslant ۶$ د. $A\geqslant ۳۶$

۳۱ـ مکعب مستطیلی به‌حجم ثابت $V=۲۴\sqrt{۳}$ مفروض است اگرسطح کل این مکعب مستطیل‌مینیمم باشد، ارتفاع آن برابراست با:

الف. ۲ ب. $۲\sqrt{۳}$ ج. $۲\sqrt[۳]{۳}$ د. ۳

فصل سوم

۳. قدرمطلق

۳ـ۱. تعریف. اگر x عددی حقیقی باشد قدرمطلق x که آنرا با نماد $|x|$ نشان می‌دهیم برابرخود x است اگر x بزرگتر ازصفر باشد وبرابر $-x$ است اگر xکوچکتر از صفر باشد وصفراست اگر x برابر صفر باشد

پس
$$|x|=\begin{cases} x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

چون درهرحالت اگر $x=0$ باشد درهردوقسمت اول وسوم نیزصدق می‌کند پس می‌توان مساوی صفر را برای هرکدام به‌دلخواه قرارداد. درنتیجه.

$$|x|=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases} \quad \text{یا} \quad |x|=\begin{cases} x & x>0 \\ -x & x\leqslant 0 \end{cases}$$

به‌طورمثال. $|4|=4$ و $|-4|=-(-4)=4$

یا $|3-\pi|=\pi-3$ زیرا $3-\pi<0$ و $|\pi-3|=\pi-3$ زیرا $\pi-3>0$

یا $|\sqrt{2}-\sqrt{3}|=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ زیرا $\sqrt{2}-\sqrt{3}<0$

پس درهرصورت اگر بخواهیم قدرمطلق عبارتی را برداریم باید علامت عبارت داخل قدر مطلق را مشخص کنیم هرجا علامت عبارت مثبت است قدرمطلق را برداشته خود عبارت‌را

بدون هیچ تغییری می‌نویسیم وهرجا علامت عبارت داخل قدرمطلق منفی باشد، قدرمطلق را برداشته عبارت داخل قدرمطلق را دریك منها ضرب می‌کنیم

به‌طور مثال اگر $|x-۱|$ را در نظر بگیریم اگر $x\geqslant ۱$ آنگاه $x-۱\geqslant ۰$ و $|x-۱|=x-۱$ واگر $x<۱$ آنگاه $x-۱<۰$ و $|x-۱|=۱-x$

لذا:
$$|x-۱|=\begin{cases}x-۱ & x\geqslant ۱\\ ۱-x & x<۱\end{cases}$$

۳.۲. خواصی از قدرمطلق

۱. $|x|\geqslant ۰$ ، $\forall x\in R$. یعنی قدرمطلق هر عبارتی همواره مثبت یا صفر است مثلاً عبارتی به‌صورت $|x|<-۱$ بی‌معنی است.

۲. $-|x|\leqslant x\leqslant |x|$ ، $\forall x\in R$. اگر $x\geqslant ۰$ آنگاه $|x|=x$ و اگر $x<۰$ آنگاه $x<|x|$ پس.

$$\begin{cases}|x|=x \iff x\geqslant ۰\\ |x|>x \iff x<۰\end{cases}$$

مثال ۱. عبارت زیر بازاء چه‌مقادیر x تعریف شده است.

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{|x|-x}}$$

حل. باید $|x|-x>۰$ یا $|x|>x$ که درنتیجه باید $x<۰$ باشد لذا $x\in(-\infty,۰)$

۳. $|-x|=|x|$ ، $\forall x\in R$ یا $|a-b|=|b-a|$

مانند $|۲-\sqrt{۳}|=|\sqrt{۳}-۲|$ یا $|\sqrt{۳}+۱-\pi|=|\pi-\sqrt{۳}-۱|$

۴. $\sqrt{x^{۲}}=|x|$ یا به‌طور کلی $\sqrt[۲n]{x^{۲n}}=|x|$ $(n\in N)$

مثال ۲. عبارت زیر را تا حد امکان ساده‌کنید.

$$A=\sqrt{x+۳+۴\sqrt{x-۱}}-\sqrt{x+۳-۴\sqrt{x-۱}} \qquad \boxed{x\geqslant ۱}$$

حل.
$$A=\sqrt{x-۱+۴+۴\sqrt{x-۱}}-\sqrt{x-۱+۴-۴\sqrt{x-۱}}=$$

$$\sqrt{(\sqrt{x-۱}+۲)^۲}-\sqrt{(\sqrt{x-۱}-۲)^۲}=|\sqrt{x-۱}+۲|-|\sqrt{x-۱}-۲|$$

$$=\sqrt{x-۱}+۲-|\sqrt{x-۱}-۲|=\begin{cases}\sqrt{x-۱}+۲+\sqrt{x-۱}-۲ \text{ ، } ۱\leqslant x\leqslant ۵\\ \sqrt{x-۱}+۲-\sqrt{x-۱}+۲ \text{ ، } x>۵\end{cases}$$

$$\Longrightarrow A=\begin{cases}۲\sqrt{x-۱} & ۱\leqslant x\leqslant ۵\\ ۴ & x>۵\end{cases}$$

اگر $۱\leqslant x\leqslant ۵$ آنگاه $\sqrt{x-۱}-۲\leqslant ۰$ ولذا $|\sqrt{x-۱}-۲|=۲-\sqrt{x-۱}$

اگر $x>۵$ آنگاه $\sqrt{x-۱}-۲>۰$ ولذا $|\sqrt{x-۱}-۲|=\sqrt{x-۱}-۲$

۵. $\begin{cases}x=\pm a\\ a\geqslant ۰\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}|x|=a\\ a\geqslant ۰\end{cases}$ مثلاً $|x|=-۱$ دارای معنی نیست

$$|۲x-۵|=۷\Longrightarrow ۲x-۵=\pm ۷\Longrightarrow\begin{cases}۲x=۱۲\\ ۲x=-۲\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x=۶\\ x=-۱\end{cases}$$

مثال ۳. معادله $||x+a|+b|=c$ را حل کنید.

حل. اولاً باید $c\geqslant ۰$ در این صورت معادله به‌دو معادله $|x+a|+b=c$ و $|x+a|+b=-c$ تبدیل‌می‌شود یا $|x+a|=c-b$ و $|x+a|=-c-b$ وهرکدام از معادله‌های فوق به شرط مثبت بودن طرف دوم آنها دارای دو جواب است.

بنابراین معادله داده شده حداکثرچهارجواب دارد.

مثال ۴. معادله $||x+۲|-۵|=۳$ را حل کنید

حل. $\begin{cases}|x+۲|-۵=۳\\ |x+۲|-۵=-۳\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}|x+۲|=۸\\ |x+۲|=۲\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x+۲=\pm ۸\\ x+۲=\pm ۲\end{cases}$

ریشه‌های معادله عبارتنداز: $x=۶$ ، $x=-۱۰$ ، $x=۰$ ، $x=-۴$

اگرمعادله مثال‌فوق به‌صورت $||x+۲|+۵|=۳$ داده شود دارای جواب‌نیست زیرا $|x+۲|+۵=\pm ۳$ یا $|x+۲|=-۸$ ، $|x+۲|=-۲$ که جوابی ندارند.

۶. $x=y \Longrightarrow |x|=|y|$ اما عکس آن درست نیست درحقیقت:

$$|x|=|y| \Longleftrightarrow x=\pm y$$

۷. $x^2=y^2 \Longleftrightarrow |x|=|y|$

مثلاً: $x^2=9 \Longrightarrow |x|=3 \Longrightarrow x=\pm 3$

۸. $|x|^2=|x|\cdot|x|=x^2=(-x)^2$

۹. $|xy|=|x|\,|y|$

۱۰. $y\neq 0$، $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

اثبات قضایای فوق برحسب حالات به‌سادگی بدست می‌آید.

۱۱. اگر $a\geqslant 0$، نامساویهای ذیل دو به‌دو معادلند.

$$x^2\leqslant a^2 \Longleftrightarrow |x|\leqslant a \Longleftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$$

$-a$ a

۱۲. اگر $a\geqslant 0$ آنگاه داریم.

$$x^2\geqslant a^2 \Longleftrightarrow |x|\geqslant a \Longleftrightarrow x\geqslant a \text{ یا } x\leqslant -a$$

$-a$ a

اثبات نامساوی‌های فوق برحسب حالات‌است.

به‌طور مثال در نامساوی (۱۱) اگر $x\geqslant 0$ آنگاه $x\leqslant a$ واگر $x<0$ آنگاه $-x\leqslant a$ یا $x\geqslant -a$ و درنتیجه $-a\leqslant x\leqslant a$ نامساوی‌های فوق‌کاربرد زیادی درحل نامعادلات دارندکه چند نمونه درمثالهای ذیل نشان می‌دهیم.

مثال ۵. نامعادله $|x-3|<2$ را حل کنید

حل. $|x-3|<2 \Longrightarrow -2<x-3<2 \Longrightarrow 1<x<5$

مثال ۶. نامعادله $|x+2|<-1$ را حل کنید

حل. این نامعادله دارای جواب نیست غیرممکن است.

مثال ۷. نامعادله $||x-1|-2|\leqslant 0$ را حل کنید

حل. این نامعادله برقرار نیست مگر آنکه $||x-۱|-۲|=۰$ یعنی فقط حالت صفر باقی می‌ماند که از آن نتیجه می‌گیریم $|x-۱|-۲=۰$ یا $|x-۱|=۲$ و در نتیجه $x-۱=\pm ۲$ وجوابها $x=۳$ و $x=-۱$ است.

مثال ۸. نامعادله $|x-a|>-۳$ را حل کنید.

حل. این نامعادله بازای تمام اعداد حقیقی برقرار است زیرا قدرمطلق هرعبارت همواره مثبت یا صفر است و ازهرعدد منفی بزرگتر است.

مثال ۹. نامعادله $|x+۵|>۴$ را حل کنید.

حل. بنا به قضیه ۱۲ داریم.

$$x+۵>۴ \text{ یا } x+۵<-۴ \Longrightarrow x>-۱ \text{ یا } x<-۹$$

مثال ۱۰. نامعادله زیر را حل کنید. $\left(\frac{x+|x|}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{x-|x|}{۲}\right)^{۲}\leqslant ۴$

حل.

$$۱)\ x\geqslant ۰ \Longrightarrow |x|=x \Longrightarrow \left(\frac{x+x}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{x-x}{۲}\right)^{۲}\leqslant ۴ \Longrightarrow$$

$$x^{۲}\leqslant ۴ \Longrightarrow |x|\leqslant ۲ \text{ یا } -۲\leqslant x\leqslant ۲ \text{ ، } x\geqslant ۰ \Longrightarrow ۰\leqslant x\leqslant ۲$$

$$۲)\ x<۰ \Longrightarrow \left(\frac{x-x}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{x+x}{۲}\right)^{۲}\leqslant ۴ \Longrightarrow x^{۲}\leqslant ۴ \Longrightarrow -۲\leqslant x\leqslant ۲$$

$$\text{،}x<۰ \Longrightarrow -۲\leqslant x<۰$$

پس جواب $-۲\leqslant x\leqslant ۲$ است.

مثال ۱۱. معادله زیر را حل کنید. $|x^{۲}-۹|=۹-x^{۲}$

حل. چون قدرمطلق برداشته‌شده وعبارت داخل آن درمنفی ضرب شده‌است، پس عبارت داخل قدرمطلق منفی یا صفر بوده است.

یعنی $x^{۲}-۹\leqslant ۰$ یا $x^{۲}\leqslant ۹$ و درنتیجه $-۳\leqslant x\leqslant ۳$ جواب است ومشخص است که معادله بی‌شمارجواب دارد.

مثال ۱۲. معادله $x^{۲}-۴|x|+۱=۰$ را حل کنید.

حل. چون $|x|^{۲}=x^{۲}$ لذا،

$$|x|^{۲}-۴|x|+۱=۰ \implies |x|=۲\pm\sqrt{۳} \implies$$
$$x=\pm(۲\pm\sqrt{۳}) \implies x=۲\pm\sqrt{۳} \text{ و } x=-۲\pm\sqrt{۳}$$

مثال ۱۳. نامعادله $۰\leqslant(۴-|x-۱|)(۲-|۱-x|)$ را حل کنید

حل. باید $|۱-x|$ بین دو ریشه باشد پس،

$$۲\leqslant|x-۱|\leqslant۴ \implies ۲\leqslant\pm(x-۱)\leqslant۴ \implies \begin{cases}۲\leqslant x-۱\leqslant۴\\ ۲\leqslant -x+۱\leqslant۴\end{cases} \implies$$

$$\begin{cases}۳\leqslant x\leqslant۵\\ \text{یا}\\ -۳\leqslant x\leqslant۱\end{cases}$$

مثال ۱۴. نامعادله زیر را حل کنید.

$$۲x+|x-۱|<۸$$

حل.

۱) $x\geqslant۱ \implies |x-۱|=x-۱ \implies ۲x+x-۱<۸\implies۳x<۹\implies x<۳$

بنابراین یك جواب، $۱\leqslant x<۳$ می‌باشد

۲) $x<۱ \implies |x-۱|=۱-x \implies ۲x+۱-x<۸ \implies x<۷$

ولذا جواب $x<۱$ می‌باشد

درنتیجه جواب کلی نامعادله $x<۳$ یا فاصله $(-\infty,۳)$ است.

مثال ۱۵. اگر $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ حاصل عبارت $A=\sqrt{۱+\sin x}+\sqrt{۱-\sin x}$ را پیدا کنید.

$$A=\sqrt{\sin^{۲}\frac{x}{۲}+\cos^{۲}\frac{x}{۲}+۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}+$$
$$\sqrt{\sin^{۲}\frac{x}{۲}+\cos^{۲}\frac{x}{۲}-۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=$$
$$\left|\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}\right|+\left|\sin\frac{x}{۲}-\cos\frac{x}{۲}\right|$$

چون $\frac{\pi}{۴}>\frac{x}{۲}>۰$ لذا $\cos\frac{x}{۲}>\sin\frac{x}{۲}$ و درنتیجه:

$$A=\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}-\sin\frac{x}{۲}+\cos\frac{x}{۲}=۲\cos\frac{x}{۲}$$

۱۳. بازاء هردوعدد حقیقی x و y، $\boxed{|x+y|\leqslant|x|+|y|}$

اثبات.

$$|x+y|^۲=x^۲+y^۲+۲xy\leqslant x^۲+y^۲+۲|x|\cdot|y|=(|x|+|y|)^۲$$ یا

$$|x+y|\leqslant|x|+|y|$$

شرط تساوی‌آن است که $|xy|=xy$ یا $xy\geqslant ۰$ یعنی x و y هم‌علامت باشند

می‌توان این‌قضیه‌را درمورد هرتعداد عدد حقیقی نیز بیان و به‌استقراء ثابت کرد.

$$\boxed{|x+y+z+\dots+k|\leqslant|x|+|y|+\dots+|k|}$$

وتساوی وقتی برقراراست‌که تمام این اعداد هم‌علامت باشند

مثال ۱۶. اگر $f(x)=x-۱$ و $g(x)=۲x-۳$ معادله $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$ را حل‌کنید.

حل. بنا به‌شرط تساوی درقضیه فوق باید $f(x)\cdot g(x)\geqslant ۰$،

$$(x-۱)(۲x-۳)\geqslant ۰ \Longrightarrow x\geqslant\frac{۳}{۲} \text{ یا } x\leqslant ۱$$

۱۴. نامساوی مثلثی:

$$\forall x,y,z\in R:\ |x-y|\leqslant|x-z|+|z-y|$$

اثبات. با توجه به‌قضیه ۱۳.

$$|x-z|+|z-y|\geqslant|x-z+z-y|=|x-y|$$

۱۵. $|x+y|\geqslant||x|-|y||$

اثبات. $|x|=|(x+y)-y|\leqslant|x+y|+|-y|=|x+y|+|y|$

$$\Longrightarrow |x+y|\geqslant|x|-|y| \qquad (۱)$$

با تبدیل x به y، $|x+y|\geqslant|y|-|x|$ یا $|x|-|y|\geqslant-|x+y|$ (۲)

با توجه به‌روابط (۱) و (۲)، $\boxed{-|x+y|\leqslant|x|-|y|\leqslant|x+y|}$

یا $\boxed{\big||x|-|y|\big|\leqslant|x+y|}$

برای تعیین شرط تساوی، داریم:

$$(|x|-|y|)^2=|x+y|^2 \Longrightarrow x^2+y^2-2|x|\cdot|y|=x^2+y^2+2xy$$

$$\Longrightarrow |xy|=-xy \Longrightarrow \boxed{xy\leqslant 0}$$ شرط تساوی

مثال ۱۷. ماکزیمم و مینیمم عبارت $A=|x-2|-|x+3|$ را پیدا کنید.

حل. با توجه به‌قضیه فوق

$$|A|=\big||x-2|-|x+3|\big|=\big||2-x|-|x+3|\big|\leqslant|2-x+3+x|=5$$

درنتیجه $|A|\leqslant 5$ یا $-5\leqslant A\leqslant 5$

۱۶. بازاء هردوعدد حقیقی x و y،

$\boxed{-|x-y|\leqslant|x|-|y|\leqslant|x-y|}$

یا $\boxed{\big||x|-|y|\big|\leqslant|x-y|}$

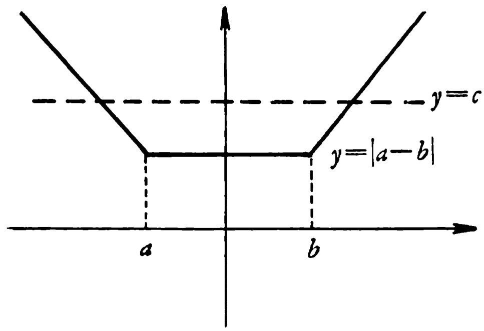
۳ـ۳. اکنون کاربردی از قضایای فوق را در تعیین تعداد جوابهای بعضی معادلات و نامعادلات بیان می‌کنیم

۱ـ تعیین تعداد جوابهای‌معادله $|x-a|+|x-b|=c$، با شرط $c\geqslant 0$.

می‌دانیم منظور از حل معادله فوق یعنی تعیین نقاط تلاقی منحنی:

$y=|x-a|+|x-b|$ و خط $y=c$،

نمودارتابعهای فوق به‌صورت زیراست.



با توجه به‌قضیه (۱۳)

$$|x-a|+|x-b|=|x-a|+|b-x|\geqslant|b-a|=|a-b|$$

درنتیجه مینیمم y برابراست‌با $|a-b|$ پس‌کافیست خط $y=c$ را با خط $y=|a-b|$ مقایسه کنیم،

۱) اگر $c<|a-b|$، آنگاه معادله دارای جواب نیست

۲) اگر $c=|a-b|$، آنگاه معادلهٔ دارای بی‌شمار جواب است. که اگر $a<b$ این جوابها درفاصله $[a,b]$ می‌باشند

۳) اگر $c>|a-b|$ ، آنگاه معادله دو جواب دارد که در فاصله‌های $(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ می‌باشند

۲ـ نامعادله $|x-a|+|x-b|<c$

مانند آنچه در قسمت (۱) بیان شد و با توجه به نمودار تابعهای $y=c$ و $y=|x-a|+|x-b|$. اگر $c\leqslant|a-b|$ آنگاه نامعادله جواب ندارد و اگر $c>|a-b|$ آنگاه تمام xهائی‌که بازاء آنها نمودار تابع زیر خط $y=c$ می‌باشد جواب نامعادله است. دراین‌حالت محل تلاقی خارج فاصله $[a,b]$ است لذا نقاط تلاقی برابرند با

$$\begin{cases} x-a+x-b=c \ \text{یا}\ x=\dfrac{a+b+c}{۲} \\ a-x+b-x=c \ \text{یا}\ x=\dfrac{a+b-c}{۲} \end{cases}$$

و درنتیجه جواب نامعادله $\frac{a+b+c}{۲} > x > \frac{a+b-c}{۲}$ است.

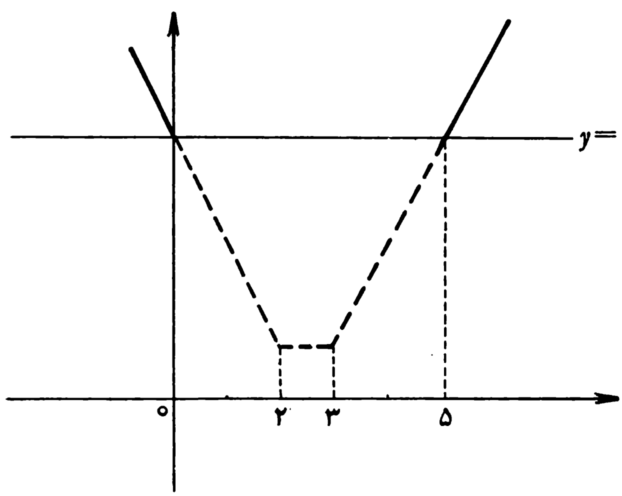
مثال ۱۸. نامعادله $۸ > |x+۵| + |۱-x|$ را حل کنید

حل. $۶ = |۵+۱| > ۸$ لذا نامعادله جواب دارد و جواب آن فاصله $\left(\frac{+۱-۵+۸}{۲} \text{ ، } \frac{۱-۵-۸}{۲}\right)$ یا فاصله $(۲,۶-)$ است.

تذکر: درحالتی که $c > |x-b| + |a-x|$، خارج فاصله جواب نامعادله فوق، جواب این نامعادله است.

مثال ۱۹. جوابهای نامعادله $۵ > |x-۳| + |x-۲|$ فاصله‌های زیراست.

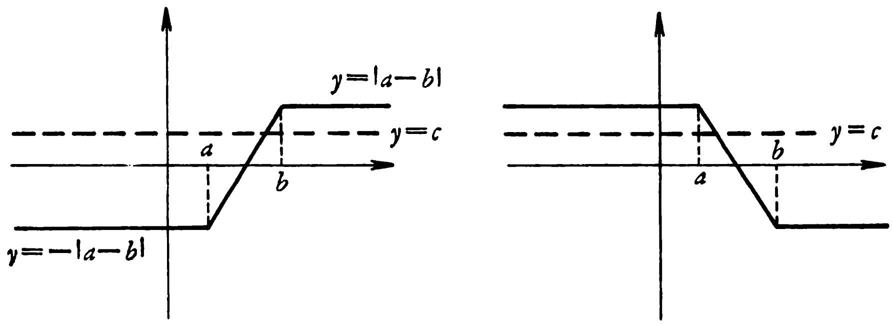
$$x \in (-\infty, ۰) \cup (۵, +\infty)$$



مثال ۲۰. جوابهای نامعادله $۲ > |x| + |x-۳|$ هر x حقیقی یعنی R است زیرا همواره $|x-۳| + |x| \geqslant ۳$

۳. معادله $|x-a| - |x-b| = c$.

جوابهای این معادله نیز محل تلاقی تابع $y = |x-a| - |x-b|$ وخط $y = c$ می‌باشد که نمودار این تابعها به یکی ازدوصورت زیراست.



به‌کمك قضایای ۱۵ یا ۱۶ داریم.

$$-|b-a| = -|x-a-x+b| \leqslant |x-a|-|x-b| \leqslant |x-a-x+b| = |b-a|$$

لذا

$$-|a-b| \leqslant y \leqslant |a-b|$$

درنتیجه بحث زیررا داریم.

معادله جواب ندارد ، $c<-|a-b|$ یا $c>|a-b|$ (۱

معادله بی‌شمارجواب دارد ، $c=-|a-b|$ یا $c=|a-b|$ (۲

این بی‌شمار جواب دریکی از فاصله‌های $(-\infty,a]$ یا $[b,+\infty)$ است‌که با امتحان کردن یك نقطه، آن فاصله مشخص می‌شود.

معادله یك‌جواب‌داردکه درفاصله (a,b) است. $-|a-b|<c<|a-b|$ (۳

۳.۴. ساده‌کردن عبارتهای شامل قدرمطلق

به‌طورکلی هرعبارتی راکه شامل قدرمطلق باشد می‌توان به‌عبارتهای ساده‌تری تبدیل‌کرد که شامل قدر مطلق نباشند مثلاً هر تابـع با ضابطه قدرمطلق را می‌توان به یك تابع چند ضابطه تبدیل‌کرد.

برای ساده کردن عبارتهای قدر مطلقی شامل یك متغیر ابتدا ریشه‌های هر یـك از عبارتهای داخل هر قدرمطلق را مشخص می‌کنیم ، سپس این ریشه‌ها را به‌ترتیب صعودی مرتب‌کرده ومجموعه اعداد حقیقی‌را به‌این ریشه‌ها افراز (تقسیم) می‌کنیم، مثلاً از $-\infty$ تاکوچکترین ریشه ، از کوچکترین ریشه تا دومین ریشه وبه‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم .

آنگاه درهرفاصله عددی را به‌دلخواه از آن انتخاب کرده درعبارت قرارمی‌دهیم تاعلامت عبارتهای داخل قدرمطلقها مشخص شود، وسپس قدرمطلقها را برمی‌داریم.

مثال ۲۱. عبارت زیررا ساده‌کرده نمودارآنرا رسم‌کنید.

$$y=|x-۱|-|x|-|x-۲|$$

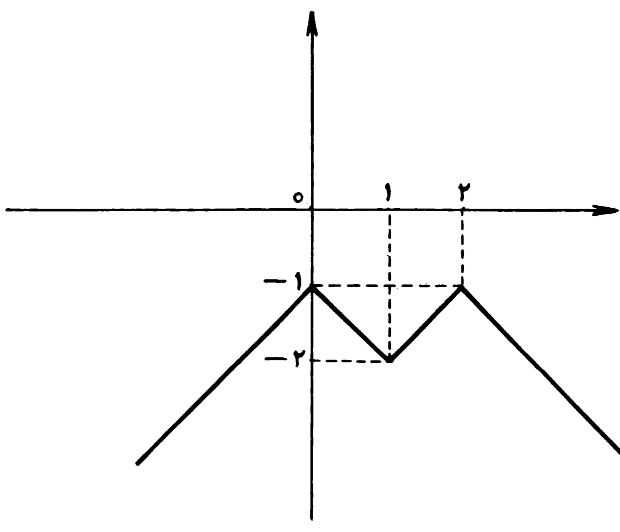
حل. ریشه‌های عبارتها ۰، ۱، ۲ می‌باشند پس فاصله‌های $(-\infty,۰)$، $(۰,۱)$، $(۱,۲)$، $(۲,+\infty)$ را داریم که اگر $x=-۱$ ازفاصله اول انتخاب کنیم، هرسه عبارت منفی بوده ولذا:

$$y=-x+۱+x+x-۲=x-۱$$

واگربه‌همین‌ترتیب عمل‌کنیم چنین داریم:

$$y=\begin{cases} x-۱ & x<۰ \\ ۱-x-x+x-۲ & ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ x-۱-x+x-۲ & ۱<x\leqslant ۲ \\ x-۱-x-x+۲ & x>۲ \end{cases}=\begin{cases} x-۱ & x<۰ \\ -x-۱ & ۰\leqslant x\leqslant ۱ \\ x-۳ & ۱<x\leqslant ۲ \\ -x+۱ & x>۲ \end{cases}$$

لازم به‌تذکراست‌که تساوی‌را اگر درهرکدام ازفاصله‌های مجاور قراردهیم‌فرقی‌نمی‌کند. نمودارتابع فوق به‌صورت زیراست.



مثال ۲۲. اگر $-۱\leqslant x\leqslant ۲$ مقدار عبارت $y=|۲x-۵|-|۳x+۴|$ را پیدا کنید.

حل. ریشه‌های عبارتها $x=-\frac{۴}{۳}$ و $x=\frac{۵}{۲}$ است پس فاصله مفروض بین این‌دوریشه قرار دارد چون $x=۰$ دراین فاصله است، آنرا امتحان می‌کنیم $۲x-۵$ منفی و $۲x+۴$ مثبت می‌شود لذا:

$$y=۵-۲x-۳x-۴=۱-۵x \qquad -۱\leqslant x\leqslant ۲$$

۳.۵. اگرعبارت شامل قدرمطلق به‌گونه‌ای باشد کـه y نیز داخل قدرمطلق باشد، تمام حالاتی راکه برای عبارتهای‌شامل هردوی x و y اتفاق‌می‌افتد باید درنظربگیریم.

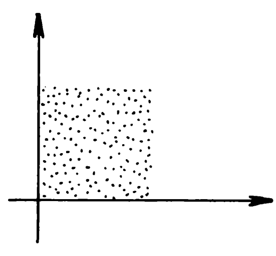
مثال ۲۳. عبارت $\frac{|x|}{x}+\frac{|y|}{y}=۲$ را به‌ساده‌ترین‌صورت نوشته مجموعه نقاط‌صدق در آن را به‌کمک محورهای مختصات مشخص کنید.

حل. اولاً باید $x\neq ۰$ و $y\neq ۰$، تا عبارت بامعنی باشد

۱) $\quad x>۰\ ,\ y>۰ \Longrightarrow ۱+۱=۲$

یعنی هر x و y مثبت در رابطه فوق‌صدق می‌کند وتمام نقاطی‌ازصفحه محورهای‌مختصات که در ربع اول هستند مشخص‌کننده نقاط صدق می‌باشند

۲) اگر $x>۰$ و $y<۰$ یا $x<۰$ و $y>۰$ ویا هردوی x و y منفی باشند هیچ نقطه در رابطه فوق صدق نمی‌کند پس مجموعه نقاط همان‌قسمت (۱) می‌باشد



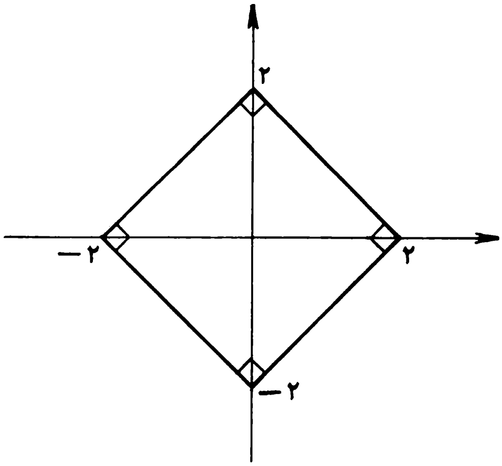
مثال ۲۴. نقاط صدق معادله $|x|+|y|=۲$ را مشخص کنید.

۱) $\quad x\geqslant ۰\ ,\ y\geqslant ۰ \Longrightarrow x+y=۲$

۲) $\quad x\geqslant ۰\ ,\ y\leqslant ۰ \Longrightarrow x-y=۲$

$$۳)\ x \leqslant ۰\ ,\ y \geqslant ۰ \implies -x+y=۲$$

$$۴)\ x < ۰\ ,\ y < ۰ \implies x+y=-۲$$

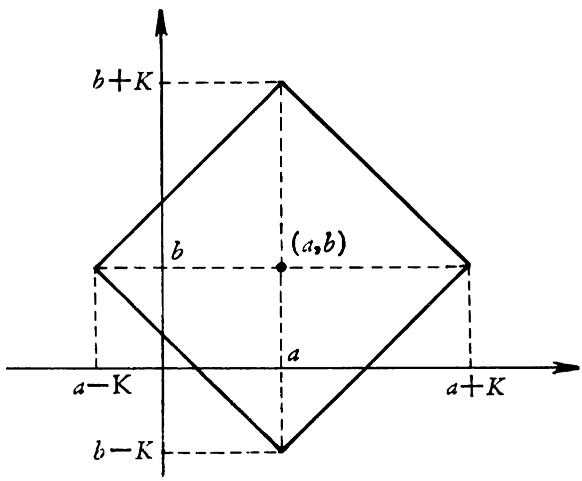


برای رسم، هرخط را درفاصله موردنظر رسم‌می‌کنیم، این‌نمودار یك مربع به‌مرکز $(۰,۰)$ وقطر ۴ می‌باشد

به‌طور کلی نمودار رابطه‌های به صورت $|x-a|+|y-b|=K$ با شرط $K>۰$ یك مربع است که مرکز آن (a,b) وقطرهای آن موازی محورهای مختصات و به‌طول $۲K$ است. اگر $K=۰$ باشد، نمودار یك نقطه است، (a,b)

همچنین تغییرات x و y فاصله‌های زیر است:

$$a-K \leqslant x \leqslant a+K \quad \text{و} \quad b-K \leqslant y \leqslant b+K$$



همچنین نمودار رابطه‌های به‌صورت $|ax-c|+|by-d|=k$ با شرط $k>0$ یك لوزی است که قطرهای آن موازی محورهای مختصات و به‌طولهای $\frac{2k}{a}$ و $\frac{2k}{b}$ و مرکز آن $\left(\frac{c}{a}, \frac{d}{b}\right)$ است و مانند آنچه درفوق بیان شده‌داریم:

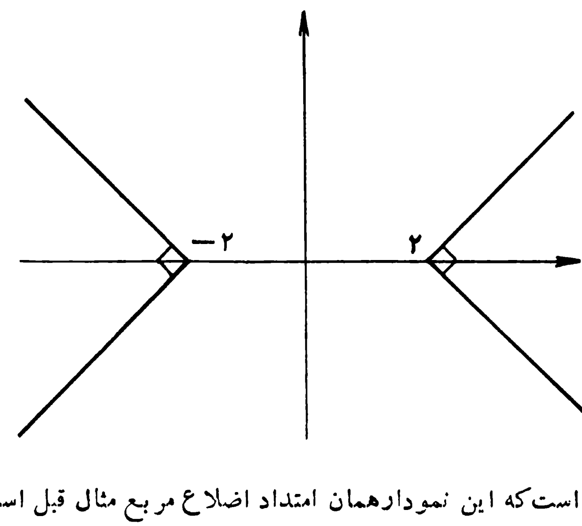
$$\frac{c-k}{a} \leqslant x \leqslant \frac{c+k}{a} \quad \text{و} \quad \frac{d-k}{b} \leqslant y \leqslant \frac{d+k}{b}$$

و خطوط $x=\frac{c}{a}$ و $y=\frac{d}{b}$ معادلات محورهای تقارن و $\left(\frac{c}{a}, \frac{d}{b}\right)$ مرکز تقارن است.

مثال ۲۵. مجموعه نقاط صدق در رابطه $|x|-|y|=2$ را مشخص کنید

حل: اگر مانند مثال قبل عمل کنیم داریم؛

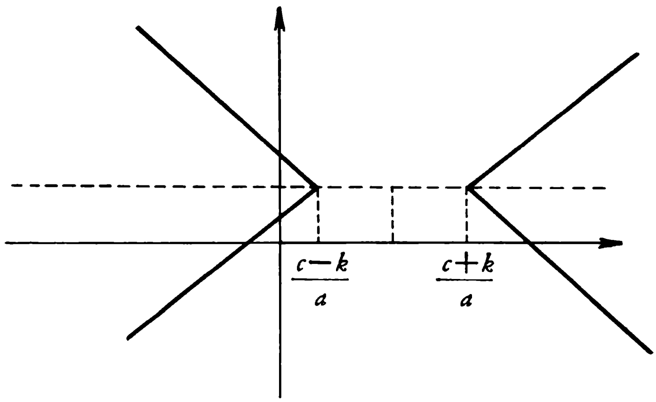
$$1)\ x \geqslant 0\ ,\ y \geqslant 0 \implies x-y=2$$
$$2)\ x \geqslant 0\ ,\ y \leqslant 0 \implies x+y=2$$
$$3)\ x \leqslant 0\ ,\ y \geqslant 0 \implies -x-y=2$$
$$4)\ x < 0\ ,\ y < 0 \implies -x+y=2$$



مشخص است که این نمودارهمان امتداد اضلاع مربع مثال قبل است. به‌طور کلی نمودار رابطه‌های به‌معادله $|ax-c|-|by-d|=k$ دو زاویه می‌باشد.

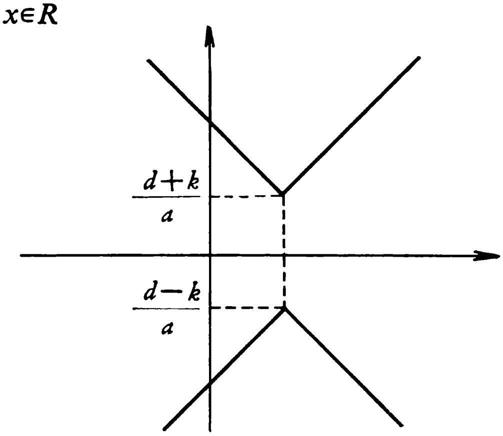
اگر $k \geqslant 0$، نمودار به‌صورت زیراست که در آن داریم:

$$x \in \left(-\infty, \frac{c-k}{a}\right] \cup \left[\frac{c+k}{a}, +\infty\right)$$
$$y \in R$$



واگر $k \leqslant 0$ نمودار به‌صورت زیراست که در آن داریم:

$$y \in \left(-\infty, \frac{d-k}{b}\right] \cup \left[\frac{d+k}{b}, +\infty\right)$$
$$x \in R$$



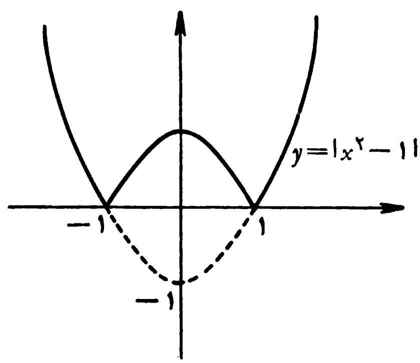
تذکر: درحالتی‌که $k = 0$ دو رأس زاویه بر هم منطبق می‌شوند یعنی نمودار دوخط متقاطع است.

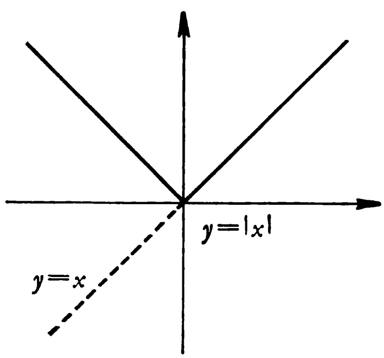
درهردوحالت خطوط $x = \frac{c}{a}$ ، $y = \frac{d}{b}$ محـورهای تقارن و $\left(\frac{c}{a}, \frac{d}{b}\right)$ مرکز تقارن است.

۳-۶. «رسم تابع $y=|f(x)|$»

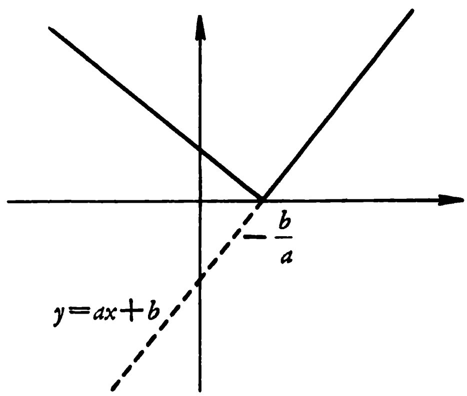
به‌طورکلی برای رسم تابع $y=|f(x)|$، ابتدا نمودارتابع $f(x)$ را رسم کرده وسپس قرینه آن قسمت را که زیرمحور xها می‌باشد نسبت به محور xها پیدا می‌کنیم، نمودار $y=|f(x)|$ رسم می‌شود.

به‌طورمثال تابعهای $y=|x|$ و $y=|x^2-1|$ به‌صورتهای زیرمی‌باشند.





همچنین نمودار $y=|ax+b|$ به‌صورت زیراست.



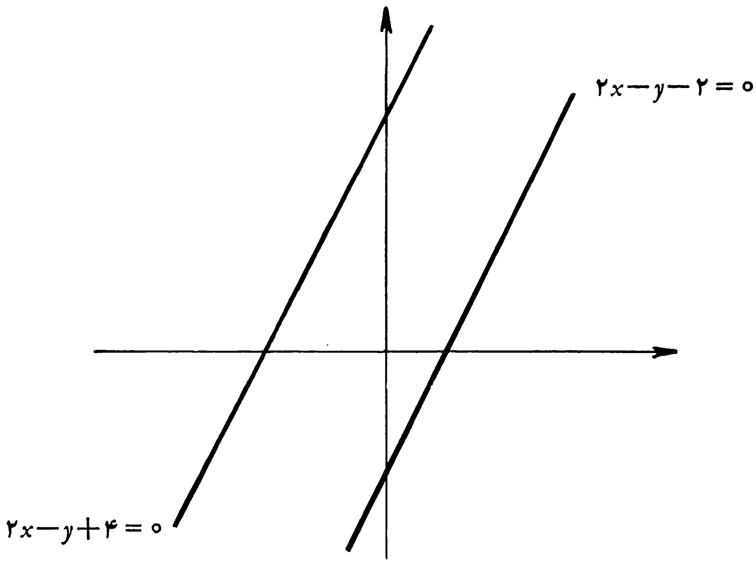
۳-۷. نمودار رابطه‌های $|ax+by+c|=k$

برای رسم این رابطه‌ها داریم، $ax+by+c=k$ یا $ax+by+c=-k$ که درنتیجه نمودار دوخط موازی است.

مثال ۲۶. نمودار $|2x-y+1|=3$ را رسم کنید

حل: $۲x-y+۱=۳ \Rightarrow ۲x-y-۲=۰$

$$۲x-y+۱=-۳ \Rightarrow ۲x-y+۴=۰$$



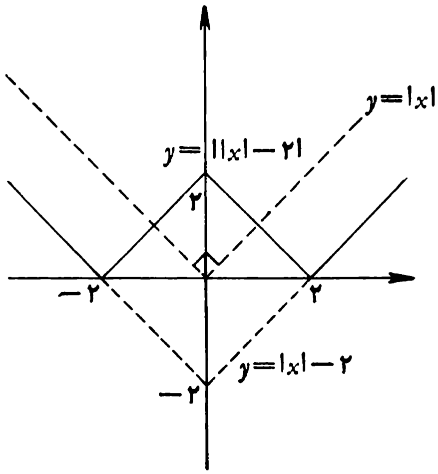
۸.۳. رسم توابع $y=|f(x)|+k$

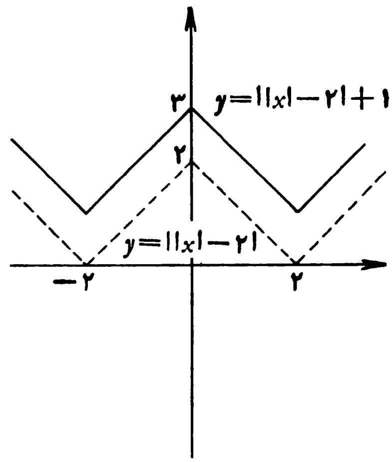
برای رسم نمودارتابع $y=|f(x)|+k$ ابتدا نمودار $|f(x)|$ را رسم کرده و سپس آنرا به‌اندازه k به‌موازات محور yها انتقال می‌کنیم اگر $k>۰$ ، انتقال درجهت مثبت محور و اگر $k<۰$ انتقال، درجهت منفی محور yهاست.

مثال ۲۷. نمودارتابع $y=||x|-۲|+۱$ را رسم کنید.

حل: ابتدا نمودار $y=|x|$ را رسم می‌کنیم سپس آنرا به اندازهٔ ۲ واحد در جهت منفی yها انتقال می‌دهیم نمودار $y=|x|-۲$ مشخص می‌شود در مرحله دوم قرینه آن قسمت ازنمودار $y=|x|-۲$ را که زیر محور xها می‌باشد نسبت به محور x ها پیدا می‌کنیم ، $y=||x|-۲|$ رسم می‌شود و بالاخره در مرحله سوم نمودار $y=||x|-۲|$ را به اندازهٔ ۱ واحد به موازات محور yها و درجهت مثبت انتقال می‌دهیم، نمودار $y=||x|-۲|+۱$ رسم می‌شود.

درشکل زیرمراحل رسم مشخص شده است.

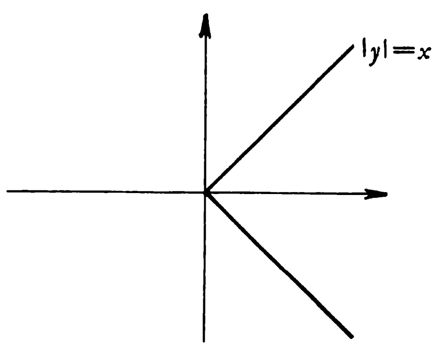




۳-۹. رسم رابطه‌های $|y|=f(x)$

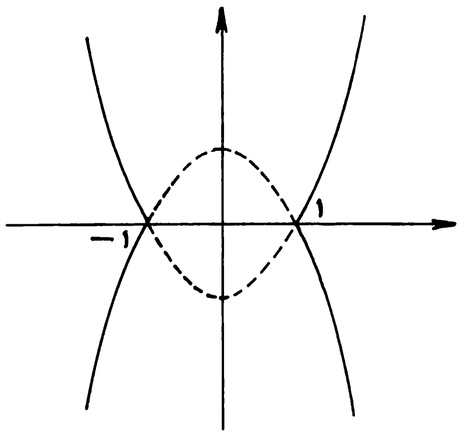
برای رسم نمودار رابطه‌های $|y|=f(x)$ که معمولاً تابع نیستند ابتدا نمودار $y=f(x)$ را با فرض $0 \leqslant y$ رسم کرده وسپس قرینـه آنرا نسبت به محور xها پیدا می‌کنیم. مثلاً برای رسم $x=|y|$ ابتدا خط $x=y$ را با شرط $0 \leqslant y$ رسم می‌کنیم که همان نیمساز ربع اول وسوم با شرط $0 \leqslant y$ است و سپس قرینه‌آنرا نسبت به محور xها پیدا می‌کنیم.

در تمام این رابطه‌ها محور xها محور تقارن است.



مثال ۲۸. نموار $|y|=x^2-1$ را رسم کنید

حل: ابتدا نمودار $y=x^2-1$ را با شرط $y\geqslant 0$ رسم می‌کنیم وسپس قرینه آن قسمت را که بالای محور xها می‌باشد نسبت به‌محور xها پیدا می‌کنیم،

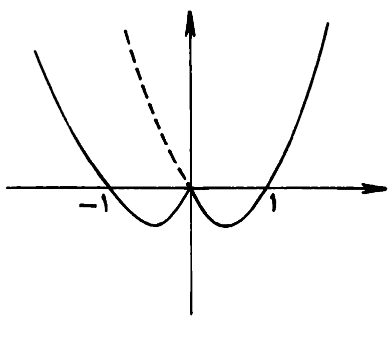


۳-۱۰. رسم توابع $y=f(|x|)$

برای رسم توابع $y=f(|x|)$ ابتدا نمودار $y=f(x)$ را با شرط $x\geqslant 0$ رسم کرده وسپس قرینه‌آنرا نسبت به‌محور yها پیدا می‌کنیم نمودار $y=f(|x|)$ مشخص می‌شود، یعنی محور yها محور تقارن این توابع است.

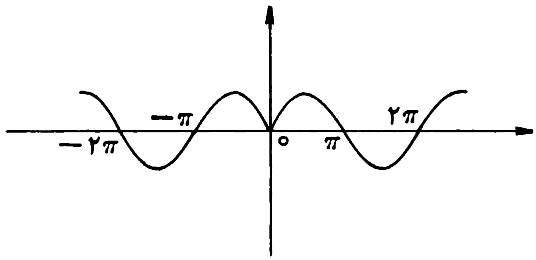
مثال ۲۹. نمودارتابع $y=x^2-|x|$ را رسم کنید.

حل: در واقع تابع به‌صورت $y=|x|^2-|x|$ است، ابتدا نمودار $y=x^2-x$ را با شرط $x\geqslant 0$ رسم می‌کنیم، وسپس قرینه‌آنرا نسبت به‌محور yها پیدا می‌کنیم



مثال ۳۰. نمودارتابع $y=\sin|x|$ را رسم کنید.

حل: با توجه به‌نمودار $y=\sin x$ با شرط $0\leqslant x$، نمودار به‌صورت زیر است.



۳-۱۱. ماکزیمم ومینیمم بین دومقدار

اگر a و b دوعدد حقیقی باشندآنگاه:

$$Max\{a,b\}=\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}$$

$$Min\ \{a,b\}=\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}$$

زیرا اگر $a>b$ باشد آنگاه:

$$\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}=\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}=a \Longrightarrow Max\ \{a,b\}=a$$

$$\frac{a+b}{2}-\frac{|a-b|}{2}=\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}=b \Longrightarrow Min\ \{a,b\}=b$$

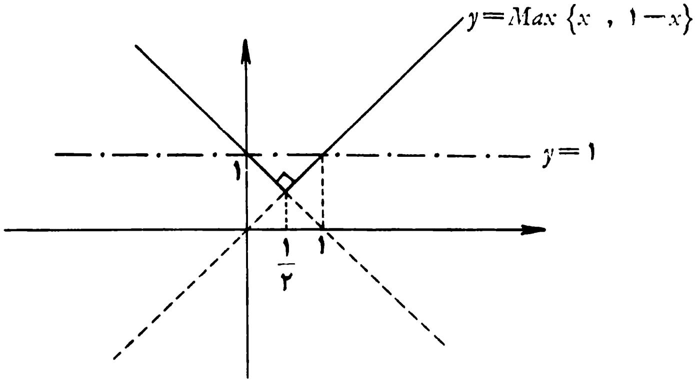
اثبات درحالت $a<b$ نیزمانندآن است.

نتیجه: $Max\{a,0\}=\frac{a+|a|}{2}$, $Min\ \{a,0\}=\frac{a-|a|}{2}$

مثال ۳۱. معادله زیر را حل کنید $Max\ \{x\ ,\ 1-x\}=1$

حل: $\frac{x+1-x}{2}+\frac{|x-1+x|}{2}=1 \Longrightarrow \frac{|2x-1|}{2}=\frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow |2x-1|=1 \Longrightarrow 2x-1=\pm 1 \Longrightarrow x=0,1$$



مثال ۳۲. معادله زیر را حل کنید

$$Max\{2x , x-1\}+Min\{2x,x-1\}=2$$

حل: طبق تعریف مشخص است که:

$$Max\{f(x) , g(x)\}+Min\{f(x) , g(x)\}=f(x)+g(x)$$

درنتیجه $2x+x-1=2 \Longrightarrow 3x=3 \Longrightarrow x=1$

اگر $a<c<b$ آنگاه ،

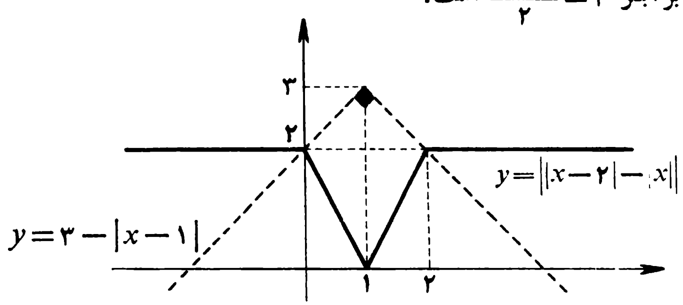
$$|c|<Max\{|a| , |b|\}$$

برای a و b حالات مختلف در نظر گرفته آنرا ثابت کنید.

مثال ۳۳. هرگاه $S=\left\{(x,y) \middle| \left||x-2|-|x|\right|\leqslant y\leqslant 3-|x-1|\right\}$

مساحت ناحیه S را پیدا کنید.

حل. هرگاه نمودار ناحیه S را رسم کنیم مشاهده می‌کنیم کـه مجموعه نقاطی که در رابطه فوق صدق می‌کنند، نقاط درون و روی یك شبهٔ لوزی ($kite$) به‌اقطار ۲ و ۳ می‌باشد بنابراین مساحت ناحیه S برابر $3=\frac{2\times 3}{2}$ است.



مسائل قدرمطلق (فصل سوم)

۱ــ معادلات زیر را حل کنید.

۱) $۲|x+۱|+|x|+|x-۱|=۳$

۲) $||x-۵|-۱۰|=۴$ ۳) $||x-۲|+۳|=۶$

۴) $|x^۲-\pi^۲|=\pi^۲-x^۲$ ۵) $x^۲+۲|x|-۱=۰$

۶) $(|x+۱|+۱)(x-۳)=۲$ ۷) $|x^۲-x-۶|=x+۲$

۸) $|x^۲+۳x|+x^۲-۲=۰$ ۹) $|x^۲-۹|+|x^۲-۴|=۵$

۱۰) $|x-۱۰|+|x-۵|=۵$ ۱۱) $|x^۲+۲x|-|۲-x|=|x^۲-x|$

۲ــ نامعادلات زیر را حل کنید.

۱) $|x-۳|>-۱$ ۲) $|۴-۳x|\leqslant\frac{۱}{۲}$

۳) $|x-۲|<\frac{x}{۲}$ ۴) $(۱+x)^۲\geqslant|۱-x^۲|$

۵) $\left|\frac{۲x-۱}{x+۱}\right|>۱$ ۶) $|x-۱|<|x-۳|$

۷)) $|x|+|x+۱|+|x+۲|<x^۲+x$

۸) $|x^۲-۵x-۴|<۱۰$ ۹) $|x-۲|+|x-۵|>۷$

۳ــ ثابت کنید،

۱) $|x-۱|+|x-۲|\geqslant۱$

۲) $|x-۱|+|x-۲|+|x-۳|\geqslant۲$

درچه صورت تساوی برقرار است.

۴ـ اگر $a<b<c$ ثابت کنید

$$|x-a|+|x-b|+|x-c|\geqslant|c-a|$$

درچه‌صورت تساوی برقرار است.

۵ـ اگر x و y هم‌علامت باشند ثابت کنید

$$\left|\frac{x+y}{۲}-\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{۲}+\sqrt{xy}\right|=|x|+|y|$$

۶ـ اگر $۲>x>۱$ حاصل عبارت زیر را پیدا کنید

$$y=\frac{۱}{\sqrt{x+۲\sqrt{x-۱}}}+\frac{۱}{\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}}$$

۷ـ اگر $۲=|۴+y|+|۲-x|$ تغییرات x و y را مشخص کرده نمودار آنرا رسم کنید.

۸ـ توابع زیر را رسم کنید

(۱ $y=||x-۲|-۳|$ (۲ $y=|x^۲-۲|x||$

(۳ $y=۵+|x-۱|$ (۴ $y=|x-۳|-|x|+|x+۳|$

(۵ $y=x(۱-|x|)$ (۶ $y=||x-۱|-۲|-۱$

۹ـ نمودارهای زیر را رسم کنید.

(۱ $|x|+x=|y|+y$ (۲ $|x-y|=۲$

(۳ $|x-y|<۲$ (۴ $y=\sqrt{x^۲-۴|x|+۴}$

(۵ $|y|=x+|x|$ (۶ $|x-۴|+|y+۱|\leqslant۱$

(۷ $|۲x-۲|-|۳y-۶|=۰$ (۸ $(x+|x|)^۲+(y+|y|)^۲=۴$

۱۰ـ اگر $f(x)=|x^۲-۴|$ و $g(x)=|x-۱|$ معادله زیررا حل کنید.

$$|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|f(x)|$$

تستهای قدر مطلق

۱– حاصل $y=\dfrac{x\sqrt{\dfrac{x^4-2x^2+1}{4x^2}+1}}{x^2+1}$ برابر است با.

الف– $\frac{1}{2}$ ب– $-\frac{1}{2}$ ج– $+\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$ د– $\frac{1}{2}$ یا صفر

۲– جواب نامعادله $|x|<|2+x|$ کدام است.

الف– $x\geqslant -2$ ب– $x\geqslant -1$ ج– $x>-1$ د– $x\geqslant 0$

۳– اگر $x^2-3|x|+2<0$ آنگاه

الف– $x>2$ یا $x<1$ ب– $1<x<2$ یا $-2<x<-1$

ج– $0<x<2$ د– $|x|<2$

۴– اگر $|x^3-1|\leqslant x^2+x+1$ آنگاه

الف– $0\leqslant x\leqslant 2$ ب– $x\leqslant 1$

ج– $x\geqslant 2$ یا $x\leqslant 0$ د– $x\geqslant 1$

۵– معادله $|x-1|=1-2x$ چند جواب دارد؟

الف– هیچ ب– ۱ ج– ۲ د– بی‌شمار

۶– جواب معادله $|x-3|-|x+2|=5$ کدام است؟

الف– $(-2\ ,\ 3)$ ب– $(-\infty\ ,\ -2]$

ج– $[3\ ,\ +\infty)$ د– جواب ندارد

۷ـ نامعادله $|x-۱|+|x+۲|>۴$ چند جواب دارد؟

الف ـ جواب ندارد　　ب ـ یك جواب

ج ـ دوجواب　　د ـ بی‌شمارجواب

۸ـ معادله $|۲x-۳|=|x+۷|$ چند جواب دارد

الف ـ هیچ　　ب ـ ۱　　ج ـ ۲　　د ـ بی‌شمار

۹ـ معادله $x^۳+|x|=۰$ چند جواب دارد

الف ـ هیچ　　ب ـ ۱　　ج ـ ۲　　د ـ ۳

۱۰ـ معادله $|x^۲-\pi^۲|=\pi^۲-x^۲$ دارای جواب زیر است.

الف ـ $\pm\pi$　　ب ـ $[-\pi\ ,\ \pi]$

ج ـ $(-\infty,-\pi]\cup[\pi,+\infty)$　　د ـ جواب ندارد

۱۱ـ جواب نامعادله $||x-۳|+۱|\geqslant ۲$ کدام است؟

الف ـ $(-\infty\ ,\ +\infty)$　　ب ـ $(-\infty\ ,۲]\cup[۴,+\infty)$

ج ـ $[۲\ ,\ ۴]$　　د ـ $[۴,+\infty)$

۱۲ـ عبارت $y=\dfrac{x^۲-|x|}{x+|x|}$ درکدام فاصله تعریف شده است

الف ـ R　　ب ـ $R-\{۰\}$　　ج ـ $(۰,+\infty)$　　د ـ $(۱,+\infty)$

۱۳ـ درعبارت $y=\sqrt{x-|x|}$، تغییرات y کدام است.

الف ـ $[۰+\infty)$　　ب ـ $y=۰,۱$　　ج ـ $y=۰$　　د ـ $(۱,+\infty)$

۱۴ـ تابع با ضابطه $f(x)=|x-۲|$ مساوی کدام یك ازتوابع زیراست

(کنکور ریاضی ۶۵)

الف ـ $\left|\dfrac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}\right|$　　ب ـ $\left|\dfrac{x^۲-۴}{x+۲}\right|$

ج ـ $\dfrac{(x-۲)^۲}{|x-۲|}$　　د ـ $\dfrac{|۶x-۱۲|}{۶}$

۱۵- مجموعه جوابهای معادله $|x-۱|+|x-۳|=۱$ کدام است
(کنکور ریاضی ۶۵)

الف- $\varnothing$ ب- R ج- $[-۳, ۱]$ د- $R-(-۳ , ۱)$

۱۶- معادله $|x^{۲}-۳|=۱$ چند جواب گویا دارد

الف- هیچ   ب- ۱   ج- ۲   د- ۴

۱۷- معادله $\frac{x+|x|}{۲}+\frac{|x-|x||}{۲}=۱$ چند جواب دارد

الف- هیچ   ب- ۱   ج- ۲   د- بی‌شمار

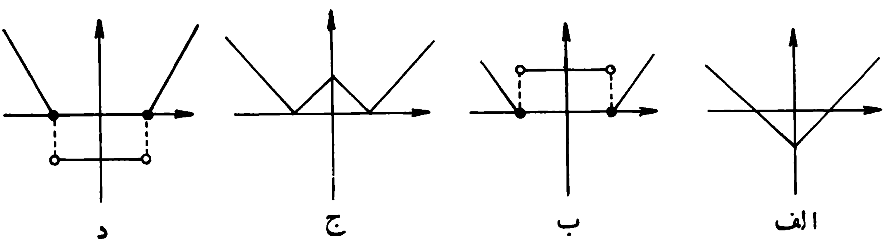
۱۸- نمودار تابع $y=Min\{x , |x|\}$ بر نمودار کدامیك از توابع زیر منطبق است.

الف- $y=|x|$ ب- $y=x$ ج- $y=-x$ د- $y=x-|x|$

۱۹- معادله $Max\{-x , x-۲\}=۱$ چند جواب دارد

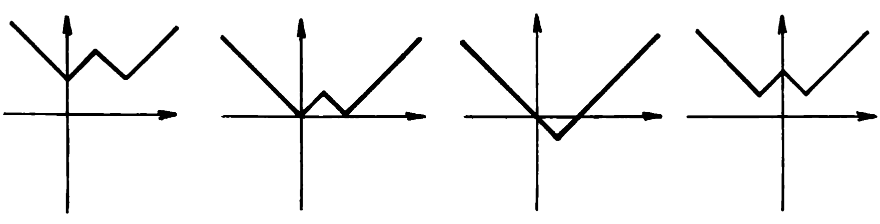
الف- هیچ   ب- ۱   ج- ۲   د- ۳

۲۰- نمودار $y=||x|-۲|$ کدام است   (کنکور ریاضی ۶۷)



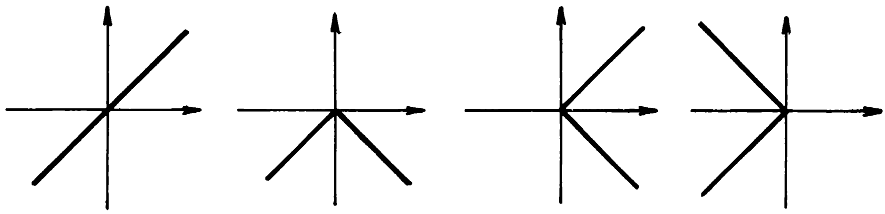
الف   ب   ج   د

۲۱- نمودار $y=||x-۱|-۱|+۱$ کدام است.



الف   ب   ج   د

۲۲ـ نمودار $|y|=-x$ کدام است؟



الف　　ب　　ج　　د

۲۳ـ جواب نامعادله $(|x-۱|+۳)(|x-۱|-۲)<۰$ کدام است.

الف ـ $-۱<x<۳$　　ب ـ $۰<x<۳$

ج ـ $x>۳$ یا $x<-۱$　　د ـ $-۳<x<۱$

۲۴ـ جواب نامعادله $(|x|-۱)(|x|-۳)<۰$ کدام است.

الف ـ $|x|<۳$　　ب ـ $|x|>۱$

ج ـ $۱<x<۳$　　د ـ $۱<x<۳$ یا $-۳<x<-۱$

۲۵ـ جواب نامعادله $\sqrt{x^۲-۲\sqrt{x^۲}+۱}\leqslant ۱$ کدام است.

الف ـ $۰\leqslant x\leqslant ۲$　　ب ـ $-۱\leqslant x\leqslant ۱$

ج ـ $|x|\geqslant ۲$　　د ـ $-۲\leqslant x\leqslant ۲$

۲۶ـ اگر $|x|+|y-۲|=۲$ تغییرات x کدام است

الف ـ $|x|\leqslant ۲$　　ب ـ $|x|\geqslant ۲$

ج ـ $۰\leqslant x\leqslant ۲$　　د ـ $۲\leqslant x\leqslant ۴$

۲۷ـ جواب معادله $|x-۱|+|۲x-۳|=|۳x-۴|$ کدام است.

الف ـ R　　ب ـ $x\geqslant \frac{۳}{۲}$ یا $x\leqslant ۱$

ج ـ $۱\leqslant x\leqslant \frac{۴}{۳}$　　د ـ $۱\leqslant x\leqslant \frac{۳}{۲}$

۲۸ـ جواب نامعادله $۲ < |۲x - ۵| + |۳ - ۲x|$ کدام است.

الف ـ R ب ـ $\varnothing$ ج ـ $\frac{۳}{۲} \leqslant x \leqslant \frac{۵}{۲}$ د ـ $x \geqslant \frac{۵}{۲}$ یا $x \leqslant \frac{۳}{۲}$

۲۹ـ جواب نامعادله $|x-a| + |x+a| < b$ $(a \neq ۰)$ اگر $b > ۲|a|$ باشد کدام است.

الف ـ $\left(-\frac{b}{۲}\, ,\, \frac{b}{۲}\right)$ ب ـ $\left[-\frac{b}{۲}\, ,\, \frac{b}{۲}\right]$

ج ـ جواب ندارد   د ـ $\left(-\infty\, ,\, -\frac{b}{۲}\right) \cup \left(\frac{b}{۲}\, ,\, +\infty\right)$

۳۰ـ اگر $۱ > x > ۰$ حاصل عبارت $A = |x+۳| + |x| + |۲x-۴|$ کدام است.

الف ـ ۷   ب ـ ۱   ج ـ -۷ د ـ $۴x + ۷$

۳۱ـ حاصل $A = \sqrt{x^۲ - ۴\sqrt{x^۲} + ۴} + \sqrt{x^۲ + ۴\sqrt{x^۲} + ۴}$ اگر $-۲ < x < ۰$ باشد.

الف ـ عددی بزرگتر از ۴ است   ب ـ عددی کوچکتر از ۴ است

ج ـ عددی برابر ۴ است   د ـ عددی کوچکتر از ۳ است.

۳۲ـ اگر $a \geqslant ۲$، حاصل $A = \sqrt{a^۲ - ۴a + ۴} + \sqrt{a^۲ + ۶a + ۹}$ کدام است؟

الف ـ $۲a - ۱$ ب ـ ۵   ج ـ $۲a + ۱$ د ـ $۲a - ۵$

۳۳ـ نمودار مجموعه نقاطی که در رابطهٔ $۲ \leqslant |y - ۱| \leqslant ۴$ صدق می‌کنند چیست؟

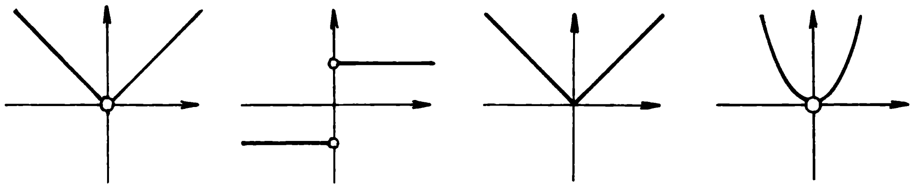
الف ـ دوخط موازی محور xها

ب ـ تمام نقاط روی وخارج دوخط موازی محور xها

ج ـ تمام نقاط داخل و روی دونوار موازی محور xها

د ـ تمام نقاط داخل و روی دو نوار موازی محور yها

۳۴ـ نمودار $y = \frac{x^۲}{|x|}$ کدام است.



الف ب ج د

۳۵- نمودار $|x-3|-|y+3|=0$ چیست؟

الف- دوخط موازی ب- یك خط راست

ج- یك لوزی د - دوخط متقاطع

۳۶- نمودار $y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}+4$ اگر $-1\leqslant x\leqslant 1$ باشد کدام است

الف- دونیم‌خط ب- یك نیم‌خط و دوپاره‌خط

ج- یك پاره‌خط د - دونیم خط ویك پاره‌خط

۳۷- اگر $x^2<8$، آنگاه حاصل عبارت $|x-2\sqrt{2}|+|x+2\sqrt{2}|$ برابر است با

الف- صفر ب- $2x$ ج- $4\sqrt{2}$ ج- $-4\sqrt{2}$

فصل چهارم

۴. لگاریتم

۱ـ۴. تعریف. بازاء هردوعدد مثبت N و a که $a \neq ۱$ یگانه عدد حقیقی x را کـه در معادله $a^x = N$ صدق می‌کند لگاریتـم N درمبنای a می‌نامیم وچنین می‌نـویسیم $\log_a N = x$، بنابراین اگر $N > ۰$ و $۰ < a \neq ۱$ آنگاه:

$$\boxed{a^x = N \Longleftrightarrow \log_a N = x}$$

اگرمبنا درلگاریتم ۱۰ باشد آنرا لگاریتم اعشاری می‌نامیـم ، که معمولاً مبنا را نمی‌نویسیم

مثلاً: $\log_{\sqrt{۳}} \frac{۱}{۸۱} = -۸$ زیرا $(\sqrt{۳})^{-۸} = \frac{۱}{۸۱}$

مثال ۱. $\log_{\frac{۱}{\sqrt[۴]{۸}}} \sqrt[۳]{۱۶}$ را پیداکنید.

حل.

$$\log_{\frac{۱}{\sqrt[۴]{۸}}} \sqrt[۳]{۱۶} = x \Longrightarrow \sqrt[۳]{۲^۴} = ((\sqrt[۴]{۸})^{-۱})^x \Longrightarrow$$

$$۲^{\frac{۴}{۳}} = \left(۲^{-\frac{۳}{۴}}\right)^x = ۲^{-\frac{۳}{۴}x} \Longrightarrow -\frac{۳}{۴}x = \frac{۴}{۳} \Longrightarrow x = -\frac{۱۶}{۹}$$

۴.۲ـ قضایای لگاریتم

۱. $\log_a a = 1 \qquad 0 < a \neq 1$

زیرا $a^1 = a$

۲. $\log_a 1 = 0 \qquad 0 < a \neq 1 \qquad (a^0 = 1)$

۳. $a^{\log_a N} = N \qquad N > 0$ و $0 < a \neq 1$

زیرا اگر در رابطه $N = a^x$ به‌جای x مقدار آن $\log_a N$ را قرار دهیم $N = a^{\log_a N}$

۴. اگر $N, M, P \ldots > 0$، آنگاه:

$\log_a NMP \cdots = \log_a N + \log_a M + \log_a P \cdots$ **(تعداد متناهی)**

درحالتی‌که تعداد زوج باشد می‌توان فرمول کلی‌تری نیز نوشت

$\log_a MN = \log_a |M| + \log_a |N|$ ، $MN > 0$ و $0 < a \neq 1$

۵. $\log \dfrac{M}{N} = \log_a |M| - \log_a |N|$ ، $MN > 0$ و $0 < a \neq 1$

یعنی در دوفرمول فوق M و N هردو با هم منفی نیزمی‌توانند باشند

اگر رابطه (۴) را برای n عدد مساوی N به‌کار ببریم داریم:

۶. $\log_a N^n = n \log_a N$ ، $N > 0$ و $0 < a \neq 1$

درحالتی‌که n زوج باشد می‌توان رابطه (۶) را با دامنه وسیعتری بیان کرد.

$\log_a N^n = n \log_a |N|$ ، $0 < a \neq 1$ و $N \neq 0$ و n زوج

مانند: $\log_a x^2 = 2 \log_a |x|$

۷. $\log_{a^m} N = \dfrac{1}{m} \log_a N$ ، $N > 0$ و $0 < a \neq 1$

اگر m زوج باشد داریم.

$\log_{a^m} N = \dfrac{1}{m} \log_{|a|} N$ ، $N > 0$ و $a \neq 0, \pm 1$

۸. $\log_a \sqrt[n]{N} = \dfrac{1}{n} \log_a N = \log_{a^n} N$ ، $N > 0,\ 0 < a \neq 1$

نتیجه:

$$\log_{a^m} N^n = \frac{n}{m}\log_a N \text{ ، } N > ۰ \text{ و } ۰ < a \neq ۱$$

مثال ۲. معادله زیر را حل کنید.

$$x^{\log_{\sqrt{x}}(x-۲)} = ۹$$

حل.

$$x^{\log_{\sqrt{x}}(x-۲)} = ۹ \Longrightarrow x^{۲\log_x(x-۲)} = ۹ \Longrightarrow x^{\log_x(x-۲)^۲} = ۹ \Longrightarrow$$

$$(x-۲)^۲ = ۹ \Longrightarrow x-۲ = \pm ۳ \Longrightarrow \begin{cases} x = ۵ \\ x = -۱ \end{cases} \Longrightarrow x = ۵$$

که $x = -۱$ قابل‌قبول نیست.

مثال ۳. معادلهٔ زیر را حل کنید

$$\log\frac{۱}{۲} + \log\frac{۲}{۳} + \cdots + \log\frac{n}{n+۱} = -۲$$

حل.

$$\log\frac{۱\times ۲ \cdots \times n}{۲\times ۳ \cdots \times (n+۱)} = -۲ \Longrightarrow \log\frac{n!}{(n+۱)!} = -۲$$

$$\Longrightarrow \log\frac{۱}{n+۱} = -۲ \Longrightarrow \frac{۱}{n+۱} = ۱۰^{-۲} \Longrightarrow n+۱ = ۱۰۰ \Longrightarrow n = ۹۹$$

مثال ۴. معادله $\log_۴ \log_۲ \log_۳(۲x-۱) = \frac{۱}{۲}$ را حل کنید

حل. اولاً باید $۲x-۱ > ۰$ یا $x > \frac{۱}{۲}$

$$\log_۲ \log_۳(۲x-۱) = (۴)^{\frac{۱}{۲}} = ۲ \Longrightarrow \log_۳(۲x-۱) = ۲^۲ = ۴$$

$$\Longrightarrow ۲x-۱ = ۳^۴ = ۸۱ \Longrightarrow x = ۴۱$$

به‌طور کلی برای حل معادله به‌صورت $\log_a \log_b \log_c \log_d x = K$ داریم:

$$x=d^{c^{b^{a^k}}}$$

مثال ۵. تابع $y=\log_{\sqrt{x}}(۴-x^۲)$ بازاء چه مقادیر x تعریف شده است؟

حل. باید $۴-x^۲>۰$ و $x>۰$ و $x\neq ۱$

$$۴-x^۲>۰ \Longrightarrow x^۲<۴ \Longrightarrow -۲<x<۲$$

$$-۲<x<۲ \text{ و } x>۰\ ,\ x\neq ۱ \Longrightarrow ۰<x<۲\ ,\ x\neq ۱ \Longrightarrow$$

$$D_f=(۰,۱)\cup(۱,۲)$$

۹. $\log_b a\cdot\log_a b=۱$ یا $\log_b a=\dfrac{۱}{\log_a b}$ $\qquad ۰<a\neq ۱$ ، $۰<b\neq ۱$

برای اثبات فرض می‌کنیم، $\log_b a=x$، درنتیجه $a=b^x$ ازطرفین‌این رابطه در مبنای a لگاریتم می‌گیریم.

$$\log_a a=x\log_a b \Longrightarrow ۱=x\log_a b \Longrightarrow ۱=\log_b a\cdot\log_a b$$

۱۰. $\log_b a=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ $\qquad ۰<a$ و $۰<b,c\neq ۱$

برای اثبات این رابطه فرض می‌کنیم $x=\log_c a$ لذا $a=c^x$ واگر ازطرفین این رابطه درمبنای b لگاریتم بگیریم:

$$\log_b a=\log_b c^x \Longrightarrow \log_b a=x\log_b c \Longrightarrow \frac{\log_b a}{\log_b c}=\log_c a \Longrightarrow$$

$$\log_b a=\frac{\log_c a}{\log_c b}$$

نتیجه ۱. $۰<c\neq ۱\ ,\ ۰<d\neq ۱$ ، $a>۰\ ,\ b>۰$

$$\boxed{\frac{\log_c a}{\log_c b}=\frac{\log_d a}{\log_d b}}$$

یعنی نسبت لگاریتم دوعدد مستقل ازمبنا است.

نتیجه ۲. از رابطه فوق نتیجه می‌گیریم $\log_b a\cdot\log_c b=\log_c a$ کـه این رابطه را می‌توان به‌صورت کلی‌تری تعمیم داد.

$$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c \cdot \log_e d = \log_e a$$

۱۱. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$ $\qquad 0 < c \neq 1$ و $a, b > 0$

برای اثبات از دوطرف درمبنای c لگاریتم بگیرید.

۱۲. $\log_a b + \log_{\frac{1}{a}} b = 0$ و $\log_a b + \log_a \frac{1}{b} = 0$ ، $b > 0$ $1 \neq a > 0$

۱۳. $$\begin{cases} \log_a x > 0 \implies \log_a x + \log_x a \geqslant 2 \quad (0 < a \neq 1 \ , \ 0 < x \neq 1) \\ \log_a x < 0 \implies \log_a x + \log_x a \leqslant -2 \end{cases}$$

مثال ۶. معادله زیر را حل کنید.

$$\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$$

حل. به‌طورکلی معادله $\log_{k(x)} f(x) = \log_{k(x)} g(x)$

معادل شرایط زیراست

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \ , \ g(x) > 0 \\ k(x) > 0 \ , \ k(x) \neq 1 \end{cases}$$

بنابراین برای حل معادله فوق داریم:

$$\begin{cases} x^2 - 1 = 5 - x \\ x^2 - 1 > 0 \\ 5 - x > 0 \\ x + 4 > 0 \text{ و } x + 4 \neq 1 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ |x| > 1 \\ x < 5 \\ x > -4 \text{ و } x \neq -3 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} x = 2 \text{ یا } -3 \\ 1 < x < 5 \text{ یا } -4 < x < -1 \ , \ x \neq -3 \end{cases}$$

درنتیجه فقط جواب $x = 2$ قابل‌قبول است.

مثال ۷. معادله $25^{\log x} - 4x^{\log 5} = 5$ را حل کنید.

حل. بنابه رابطه (۱۱) داریم.

$$5^{2\log x}-4\times 5^{\log x}-5=0 \Longrightarrow y^2-4y-5=0 \Longrightarrow \begin{cases} y=5 \\ y=-1 \end{cases}$$

$$5^{\log x}=5 \Longrightarrow \log x=1 \Longrightarrow x=10 \text{ ،}$$

جواب $y=-1$ قابل‌قبول نیست.

مثال ۸. اگر $\log_{14}28=a$ باشد، $A=\log_{49}16$ را پیدا کنید.

حل.

$$A=\log_{49}16=\log_{7^2}2^4=\frac{4}{2}\log_7 2=2\log_7 2$$

$$a=\log_{14}28=\log_{14}2\times 14=1+\log_{14}2 \Longrightarrow \log_2 14=\frac{1}{a-1}$$

$$\Longrightarrow 1+\log_2 7=\frac{1}{a-1} \Longrightarrow \log_2 7=\frac{2-a}{a-1}$$

لذا،

$$A=2\log_7 2=\frac{2(a-1)}{2-a}$$

مثال ۹. حاصل عبارت زیر را حساب کنید. $(0<a\neq 1)$

$$S=\log_{a^2}a\cdot\log_{a^3}a^2\cdot\log_{a^4}a^3\cdots\log_{a^{n+1}}a^n$$

حل. با توجه به‌رابطه $\log_b a=\dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ داریم

$$S=\frac{\log a}{\log a^2}\cdot\frac{\log a^2}{\log a^3}\cdots\frac{\log a^n}{\log a^{n+1}}=\frac{\log a}{\log a^{n+1}}=\frac{1}{n+1}$$

روش دوم.

$$S=\frac{1}{2}\log_a a\cdot\frac{2}{3}\log_a a\cdot\frac{3}{4}\log_a a\cdots\frac{n}{n+1}\log_a a=$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

مثال ۱۰. معادله زیررا حل کنید

$$۲۶^{\log x} - ۲۴^{\log x} = x$$

حل. $\log x = n$ فرض می‌کنیم لذا $x = ۱۰^n$ و داریم.

$$۲۶^n = ۲۴^n + ۱۰^n \implies ۱ = \left(\frac{۲۴}{۲۶}\right)^n + \left(\frac{۱۰}{۲۶}\right)^n = \left(\frac{۱۲}{۱۳}\right)^n + \left(\frac{۵}{۱۳}\right)^n$$

اگر فرض کنیم $\sin\alpha = \frac{۵}{۱۳}$ آنگاه $\cos\alpha = \frac{۱۲}{۱۳}$ و درنتیجه $n = ۲$ و $\log x = ۲$ و بنابراین $x = ۱۰۰$. **درقسمت معادلات توانی ثابت می‌کنیم این جواب منحصربفرداست.**

مثال ۱۱. اگر $x = \log_a bc$ و $y = \log_b ca$ و $z = \log_c ab$ ثابت کنید:

$$xyz = x + y + z + ۲$$

حل.

$$xyz = \log_a bc \log_b ca \log_c ab =$$

$x \quad y \quad z$

$$(\log_a b + \log_a c)(\log_b c + \log_b a)(\log_c a + \log_c b) =$$

$$۲ + \log_c a + \log_b c + \log_b a + \log_a b + \log_c b + \log_a c =$$

$$۲ + \log_c ab + \log_a bc + \log_b ac = ۲ + x + y + z$$

۳ـ۴. نامساوی‌های لگاریتمی

۱. اگر $\log_a N = x$ آنگاه، $N = a^x$. بنابراین درحالتی که $a > ۱$، اگر $x > ۰$ آنگاه $N = a^x$ بزرگتر از یک است و اگر $x < ۰$ آنگاه $N = a^x$ کوچکتر از یک است $\left(a^{-n} = \frac{۱}{a^n}\right)$ وبرعکس.

بنابراین اگر $a > ۱$؛

$$\boxed{\begin{array}{l} N \geqslant ۱ \iff \log_a N \geqslant ۰ \\ ۰ < N \leqslant ۱ \iff \log_a N \leqslant ۰ \end{array}}$$

همچنین درحالتی که $۰ < a < ۱$، اگر $x > ۰$ آنگاه $N = a^x$ کوچکتر ازیک واگر $x < ۰$ آنگاه $N = a^x$ بزرگتر ازیک است.

بنابراین اگر $0<a<1$؛

$$\boxed{\begin{array}{l} N\geq 1 \iff \log_a N\leq 0 \\ 0<N\leq 1 \iff \log_a N\geq 0 \end{array}}$$

درنتیجه با توجه به‌دوحالت فوق، اگرعدد ومبنا هریك بزرگتر ازیك باشند حاصل لگاریتم مثبت واگر ازعدد ومبنا یکی بزرگتراز یك و دیگری کوچکتر ازیك ومثبت باشد حاصل لگاریتم منفی است وبرعکس. بنابراین:

$$\boxed{(a>1 \text{ و } N\geq 1) \text{ یا } (0<a<1 \text{ و } 0<N\leq 1) \iff \log_a N\geq 0}$$

$$\boxed{(a>1 \text{ و } 0<N\leq 1) \text{ یا } (0<a<1 \text{ و } N\geq 1) \iff \log_a N\leq 0}$$

مثلاً:

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}>0 \text{ ،} \log_{\frac{3}{2}}7>0 \text{ ،} \log_3\frac{1}{20}<0 \text{ ،} \log_{\frac{1}{5}}500<0$$

مثال ۱۲. بازاء چه مقادیر x تابـع $f(x)=\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3)}$ معین است.

حل. اولاً بایـد $x^2-3>0$ یا $|x|>\sqrt{3}$ ثانیاً باید $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3)\geq 0$ ، یـعنـی حاصل لگاریتم باید نامنفی باشد واین وقتی ممکن است که عدد ومبنا هردوبزرگتر ازیك یا هردوکوچکتر یك باشند چون مبنا کوچکتر ازیك است $\left(\frac{1}{3}<1\right)$ لذا باید $x^2-3\leq 1$ یا $x^2\leq 4$ یا $|x|\leq 2$ و درنتیجه جواب $\sqrt{3}<|x|\leq 2$ یا $(-\sqrt{3},-2]\cup[\sqrt{3},\ 2)$ است.

۲. اگر x عدد حقیقی مثبت و y عددی حقیقی باشد که $f(x)=y=\log_a x$. این‌رابطه یك تابع می‌باشدکه از مجموعه عددهای حقیقـی مثبت برمجموعه عددهای حقیقی تعریف می‌شود. و لذا $x=a^{f(x)}$

درحالتی که $a>1$، اگر $x_2>x_1>0$ چون $x_1=a^{f(x_1)}$ و $x_2=a^{f(x_2)}$ آنگاه $a^{f(x_2)}>a^{f(x_1)}$ و بنابراین $f(x_2)>f(x_1)$ یا $\log_a x_2>\log_a x_1$ درنتیجه تابع لگاریتم دراین‌حالت اکیداً صعودی است لذا.

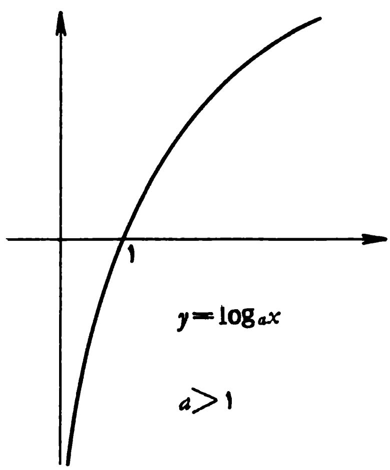
$$\boxed{0<b<c\,,\ a>1 \iff \log_a b<\log_a c\,,\ a>1}$$

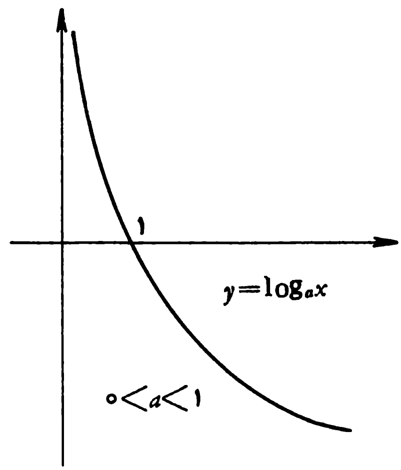
نمودار تابع درشکل (۱) رسم شده است.

درحالتی که $0<a<1$، اگر $x_2>x_1>0$ آنگاه $a^{f(x_2)}>a^{f(x_1)}$ وچون $0<a<1$
درنتیجه $f(x_2)<f(x_1)$ یعنی دراین حالت تابع لگاریتم اکیداً نزولی است. لذا.

$$\boxed{0<b<c\ ,\ 0<a<1 \iff \log_a b>\log_a c\ ,\ 0<a<1}$$

نمودار تابع دراین حالت درشکل (۲) رسم شده است.





$a>1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x=-\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x=+\infty \end{cases}$$

$0<a<1$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \log_a x=+\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \log_a x=-\infty \end{cases}$$

نتیجه:

۳. برای حل نامعادله $\log_a f(x)>\log_a g(x)$ داریم:

الف ـ اگر $a>1$ آنگاه،

$$\begin{cases} f(x)>0 \\ g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$$

ب- اگر $0<a<1$ آنگاه،
$$\begin{cases}f(x)>0\\ g(x)>0\\ f(x)<g(x)\end{cases}$$

مثال ۱۳. نامعادله زیررا حل کنید.

$$\log_2\frac{4}{x+3}>\log_2(2-x)$$

حل. اولاً، $\frac{4}{x+3}>0$ یا $x>-3$ و $2-x>0$ یا $x<2$

پس $-3<x<2$

ثانیاً، $\frac{4}{x+3}>2-x$ یا $\frac{(x+2)(x-1)}{x+3}>0$ که با توجه به‌اینکه $x+3>0$

لذا $(x+2)(x-1)>0$ که درنتیجه $x>1$ یا $x<-2$ وجواب عبارتست از،

$(-3\,,\,-2)\cup(1\,,\,2)$

مثال ۱۴. نامعادله $\log_{x-2}(2x-3)>\log_{x-2}(24-6x)$ را حل کنید.

حل. برای حل این نامعادله باید دوحالت درنظر بگیریم،

۱. $x-2>1$ یا $x>3$ درنتیجه دراین حالت جهت نامساوی تغییر نمی‌کند

$$\begin{cases}2x-3>0\\ 24-6x>0\\ 2x-3>24-6x\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x>\frac{3}{2}\\ x<4\\ x>\frac{27}{8}\end{cases}\Longrightarrow\frac{27}{8}<x<4$$

۲. $0<x-2<1$ یا $2<x<3$، دراین حالت جهت نامساوی تغییر می‌کند. شرط جواب مانند حالت قبل باید $\frac{3}{2}<x<4$ وبا توجه به‌شرط اولیه‌مبنا، $2<x<3$ همچنین $2x-3<24-6x$ یا $x<\frac{27}{8}$ و بنابراین اشتراک آن با شرط $2<x<3$ همان

$3 > x > 2$ است لذا جواب کلی نامعادله، $\left(\frac{27}{8}, 4\right) \cup (2,3)$ است.

مثال ۱۵. نامعادله. $\log_2 \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) < 1$ را حل کنید.

حل. شرط اولیه جواب آن است که $x^2 - 2 > 0$ یا $|x| > \sqrt{2}$ همچنین $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) > 0$ یا $x^2 - 2 < 1$ که در نتیجه $x^2 < 3$ یا $|x| < \sqrt{3}$.

لذا $\sqrt{2} < |x| < \sqrt{3}$

$$\log_2 \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) < \log_2 2 \Longrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) < 2 \Longrightarrow$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) < 2\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \Longrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$x^2 - 2 > \frac{1}{4} \Longrightarrow x^2 > \frac{9}{4} \Longrightarrow |x| > \frac{3}{2}$$

بنابراین جواب نامعادله فوق باتوجه به‌شرط جواب به‌صورت $\sqrt{3} > |x| > \frac{3}{2}$ یا

$x \in \left(-\sqrt{3}, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, \sqrt{3}\right)$ است.

مثال ۱۶. حوزهٔ تعریف تابع $y = \log_5 \log_{\frac{1}{3}}(x - 2)$ را معین کنید.

حل.

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x - 2) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \log_{\frac{1}{3}}(x - 2) > \log_{\frac{1}{3}} 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 2 \\ x - 2 < 1 \end{cases} \Longrightarrow 2 < x < 3$$

مثال ۱۷. نامعادله $x^{\log x} > 10$ را حل کنید

حل. دوطرف نامساوی مثبت است لذا از دوطرف آن log درمبنای ۱۰ می‌گیریم. جهت تغییر نمی‌کند.

$$\log x^{\log x}>\log 10 \Longrightarrow \log^2 x>1 \Longrightarrow \log x>1 \text{ یا } \log x<-1$$

$$\begin{cases}\log x>1 \Longrightarrow x>10\\ \log x<-1 \Longrightarrow 0<x<\frac{1}{10}\end{cases} \Longrightarrow x\in\left(0,\frac{1}{10}\right)\cup(10,+\infty)$$

می‌توان نامعادله فوق را با توجه به‌قضایای زیر نیزحل کرد.

۴.

الف- اگر $a>1$ آنگاه،

$$\log_a x<k \Longleftrightarrow 0<x<a^k$$

یا

$$\log_a x>k \Longleftrightarrow x>a^k$$

ب- اگر $0<a<1$ آنگاه،

$$\log_a x<k \Longleftrightarrow x>a^k$$

یا

$$\log_a x>k \Longleftrightarrow 0<x<a^k$$

مثال ۱۸. نامعادله زیررا حل کنید

$$\frac{1}{\log_a x}>\frac{1}{2}\ ,\ a>1$$

حل. اولا باید $\log_a x>0$، که چون $a>1$ پس $x>1$، ثانیاً با توجه به مثبت بودن دوطرف نامساوی‌آنرا معکوس می‌کنیم

$$\log_a x<2\ ,\ a>1 \Longrightarrow x<a^2$$

بنابراین، $1<x<a^2$

مثال ۱۹. اگر $4a^2+9b^2=4ab$ ثابت کنید.

$$\log\frac{2a+3b}{4}=\frac{\log a+\log b}{2}$$

حل. $۴a^۲+۹b^۲=۴ab \Longrightarrow (۲a+۳b)^۲-۱۲ab=۴ab \Longrightarrow$

$$(۲a+۳b)^۲=۱۶ab \Longrightarrow \left(\frac{۲a+۳b}{۴}\right)^۲=ab$$

ازطرفین لگاریتم می گیریم:

$$۲\log\frac{۲a+۳b}{۴}=\log ab \Longrightarrow \log\frac{۲a+۳b}{۴}=\frac{۱}{۲}(\log a+\log b)$$

مثال ۲۰. اگر $a=\log_b c$ و $c=\log_a b$ و $b=\log_c a$ ثابت کنید $abc=۱$ و همچنین ثابت کنید:

$$S=\frac{a}{ab+a+۱}+\frac{b}{bc+b+۱}+\frac{c}{ca+c+۱}=۱$$

حل. $abc=\log_b c\cdot\log_a b\cdot\log_c a=\dfrac{\log c}{\log b}\cdot\dfrac{\log b}{\log a}\cdot\dfrac{\log a}{\log c}=۱$

ثانیاً:

$$\frac{a}{ab+a+۱}=\frac{\log_b c}{\log_b c\cdot\log_c a+\log_b c+\log_b b}=\frac{\log_b c}{\log_b a+\log_b c+\log_b b}$$

$$=\frac{\log_b c}{\log_b abc}=\log_{abc}c$$

به‌همین ترتیب،

$$\frac{c}{ca+c+۱}=\log_{abc}b\ ,\ \frac{b}{bc+b+۱}=\log_{abc}a$$

بنابراین:

$$S=\log_{abc}c+\log_{abc}b+\log_{abc}a=\log_{abc}abc=۱$$

۵-۴. مفسر و مانتیس لگاریتم

لگاریتم هرعدد مثبت از دوجزء تشکیل شده است.

الف- جزء صحیح که آنرا مفسرمی‌نامیم و به n، نشان می‌دهیم.

ب- جزء اعشاری که‌آنرا مانتیس گوئیم و به P نشان می‌دهیم همواره P عددی حقیقی بزرگتر یا مساوی صفر و کوچکتر از یك است. بنابراین:

$$\log_a x = n/P \quad , \quad n \in z \quad , \quad ۰ \leqslant P < ۱$$

مفسر لگاریتم را درهرمبنا می‌توان به‌سادگی پیدا کرد اما برای تعیین مانتیس نیاز به‌جدول لگاریتم داریم.

تعیین مفسر

برای تعیین مفسر لگاریتم عدد x درمبنای a، ابتدا باید مشخص کنیم‌که عدد x بین چه دو توان صحیح متوالی از a قراردارد سپس توان کوچکتر مفسر می‌باشد.

$$a > ۱ \quad , \quad a^n \leqslant x < a^{n+۱} \Longrightarrow n \leqslant \log_a x < n+۱ \Longrightarrow$$

$$\log_a x = n/P$$

چون $۱ < a$، جهت تغییر نمی‌کند.

$$۰ < a < ۱ \quad , \quad a^{n+۱} < x \leqslant a^n \Longrightarrow n \leqslant \log_a x < n+۱ \Longrightarrow$$

$$\log_a x = n/P$$

چون $۰ < a < ۱$ ، جهت تغییر می‌کند.

مثال ۲۱. مفسر لگاریتم‌های زیر را پیدا کنید:

$$۱)\ \log_۳ ۵۰۰ \qquad ۲)\ \log_۳ \frac{۱}{۱۰} \qquad ۳)\ \log_{\frac{۱}{۲}} ۱۰۰ \qquad ۴)\ \log_{\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۱۳}$$

حل.

$$۱)\ ۳^۵ < ۵۰۰ < ۳^۶ \Longrightarrow ۵ < \log_۳ ۵۰۰ < ۶ \Longrightarrow \log_۳ ۵۰۰ = ۵/P$$

$$۲)\ \frac{۱}{۲۷} = ۳^{-۳} < \frac{۱}{۱۰} < ۳^{-۲} = \frac{۱}{۹} \Longrightarrow -۳ < \log_۳ \frac{۱}{۱۰} < -۲ \Longrightarrow$$

$$\log_۳ \frac{۱}{۱۰} = \bar{۳}/P$$

علامت منفی را بالای ۳ می‌گذاریم چون فقط مفسر منفی است.

$$۳)\ \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۶} < ۱۰۰ < \left(\frac{۱}{۲}\right)^{-۷} \Rightarrow -۷ < \log_{\frac{۱}{۲}} ۱۰۰ < -۶ \Rightarrow$$

$$\log_{\frac{۱}{۲}} ۱۰۰ = \bar{۷}/P$$

تذکر: $\left(\frac{۱}{a}\right)^{-n} = a^n$

$$۴)\ \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۳} < \frac{۱}{۱۳} < \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲} \Rightarrow ۲ < \log_{\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۱۳} < ۳ \Rightarrow \log_{\frac{۱}{۳}} \frac{۱}{۱۳} = ۲/P$$

نتیجه: با توجه به‌چهار مثال فوق مشاهده می‌کنیم که برای تعیین مفسرلگاریتم یك عدد درمبنای a کافیست مشخص کنیم آن عدد بین چه دو توان صحیح متوالی از a قرار دارد **توان کوچکتر** مفسراست.

درتمام این حالتها با مانتیس‌کاری نداریم ، فقط باید دونکتــه زیر را درمورد آن رعایت‌کنیم

۱ـ مانتیس همواره بزرگتریا مساوی صفروکوچکترازیك است پس‌اگر $n/P > ۰$ ولگاریتم عددی به‌صــورت $-n/P$ بیان شود مانتیس P نیست زیرا: $-n/P = -n + (-۰/P)$ پس‌آنرا به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$\log_a x = -n/P = -n - ۰/P = -n - ۱ + ۱ - ۰/P =$$

$$-(n+۱) + ۱ - ۰/P = \overline{n+۱}/P' \qquad ، \quad ۰ \leqslant P' < ۱$$

که دراین‌صورت مفسر $-(n+۱)$ ومانتیس $P' = ۱ - ۰/P$ است.

به‌طورمثال اگر $\log x = -۵/۲۷۸$ باشد مفسر ومانتیس را مشخص‌کنید

$$\log x = -۵ - /۲۷۸ = -۶ + ۱ - /۲۷۸ = \bar{۶}/۷۲۲$$

که مفسر ۶ــ ومانتیس ۰/۷۲۲ است.

بنابراین هرگاه مانتیس منفی باشد، یك واحد منفی به‌مفسر اضافه کرده ومانتیس را ازیك کم می‌کنیم.

۲ـ هرگاه در $\log_a x = n/P$ عدد x را درتوانهای صحیحی از a (مبنا) ضرب یاتقسیم کنیم مانتیس تغییرنمی‌کند وفقط مفسر تغییرمی‌کند.

فرض‌کنیم m عددی صحیح باشدآنگاه:

$$\log_a a^m x = \log_a a^m + \log_a x = m + n/P = (m+n)/P$$

مشاهده می‌کنیم که فقط به‌مفسر m واحد اضافه شده است‌ومانتیس تغییر نکرده‌است.

مثال۲۲. اگرمانتیس‌لگاریتم ۵درمبنای۱۰ برابر۶۹۸/۰باشد $\log ۰/۲$ و$\log ۰/۰۰۵$ را پیدا کنید،

حل.

$$\log ۰/۰۰۵ = \bar{۳}/۶۹۸$$

برای محاسبه $\log ۰/۲$ ابتدا $\log ۲$ را پیدا می‌کنیم

$$\log ۲ = \log \frac{۱۰}{۵} = ۱ - \log ۵ = ۱ - ۰/۶۹۸ = ۰/۳۰۲ \Longrightarrow$$

$$\log ۰/۲ = \bar{۱}/۳۰۲ \;,$$

۶ـ۴. تعیین مفسر درمبنای‌اعشاری

تعیین مفسر درمبنای ۱۰ نیزمانند همان حالت کلی است که بیان کردیم اما برای سرعت عمل می‌توانیم ازقوانین زیراستفاده کنیم

الف‌ـ اگرعدد بزرگتر ازیك باشد مفسر برابراست با تعداد ارقام صحیح عدد یك واحدکمتر، $۱۰^n \leqslant x < ۱۰^{n+۱} \Longrightarrow n \leqslant \log x < n+۱$ مانند،

$$\log ۵۷۸۵۶/۰۷۹۸ = ۴/P$$

زیرا:

$$۱۰^۴ < ۵۷۸۵۶/۰۷۹۸ < ۱۰^۵$$

یا

$$\log ۱۰۰۰۰۰ = \log ۱۰^۵ = ۵/۰$$

ب‌ـ اگرعدد مثبت وکوچکترازیك باشد، وآنرا به‌صورت اعشاری بنویسیم‌مفسر برابر است با تعداد صفرهای بعد ازممیز تا اولین رقم مخالف صفر بعلاوه یك، با علامت منفی.

$$\log ۰/۰۰۰۵۸۰۸ = \bar{۴}/P$$

$$\log ۰/۰۰۰۰۰۱۰۰۰۰۰۰۷۵ = \bar{۶}/P$$

۴-۷. کلگاریتم یك عدد

کلگاریتم یك عدد مثبت x که آنرا با نماد $\operatorname{colog} x$ نشان می‌دهیم یعنی منفی لگاریتم x .

$$\operatorname{colog}_a x = -\log_a x$$

کلگاریتم را می‌توان به‌صورتهای زیر نیز تعریف کرد.

$$\operatorname{colog}_a x = \log_a x^{-۱} = \log_a \frac{1}{x} \qquad \text{یا}$$

$$\operatorname{colog}_a x = -\log_a x = \log_{a^{-۱}} x = \log_{\frac{۱}{a}} x$$

برای تعیین کلگاریتم از روی لگاریتم یا بـرعکس، یك واحد به مفسر اضافه کرده، علامت آنرا تغییرمی‌دهیم ومانتیس را از یك کم می کنیم و برای کم کردن مانتیس از یك کافی است اولین رقم غیر صفر سمت راست آنرا از ۱۰ و بقیه رقمها را، هریك از ۹ کم کنیم.

$$\log_a x = n/P \Longrightarrow \operatorname{colog}_a x = -n/P = -n - ۰/P =$$

$$(-n-۱)+۱-۰/P = -(n+۱)+۰/P' = \overline{n+۱}/P'$$

مانند،

$$\log x = ۷/۵۸۳۶ \Longleftrightarrow \operatorname{colog} x = \overline{۸}/۴۱۶۴$$

$$\operatorname{colog} x = ۱۲/۵۶۷۸ \Longleftrightarrow \log x = \overline{۱۳}/۴۳۲۲$$

۴-۸. چهارعمل اصلی روی لگاریتمها

۱. برای جمع چند لگاریتم، مانتیسهای آنها را باهم جمع کرده و واحدهای صحیحی را که بدست می‌آید با مفسرها جمع جبری می‌کنیم.

۲. برای آنکه لگاریتم عددی را از لگاریتم عددی کم کنیم، کلگاریتم آن را پیداکرده با لگاریتم مفروق جمع می‌کنیم.

$$\log x - \log y = \log x + \operatorname{colog} y$$

$$\overline{۴}/۵۷۲۱ - \overline{۲}/۷۸۵۳ = \overline{۴}/۵۷۲۱ + ۱/۲۱۴۷$$

$$= \overline{۳}/۷۸۶۸$$

۳. برای تقسیم لگاریتم بریك عدد مثبت، اگرمفسرمنفی نباشد مانند تقسیم‌عدد اعشاری بر عدد صحیح انجام می‌دهیم.

اگرمفسر لگاریتم منفی، و برعدد مفــروض قابل قسمت باشد عمل تقسیم را مستقیماً انجام می‌دهیم.

اما اگرمفسرلگاریتم منفی و مضرب عدد مقسوم‌علیه نباشد، ابتدا تعدادی واحد منفی به‌آن اضافه می‌کنیم تا مضرب آن عددگــردد وسپس همیــن تعداد واحد مثبت به مانتیس می‌افزاییم، وآنگاه عمل‌تقسیم را برای هــردوعدد بدست‌آمده بــرعدد مفروض جداگانه انجام می‌دهیم.

مثال ۲۳. اگر $\log x=\bar{۷}/۵۷۲۴$ باشد $\log \sqrt[۳]{x}$ را پیدا کنید.

حل.

$$\log \sqrt[۳]{x}=\frac{۱}{۳}\log x=\frac{\bar{۷}/۵۷۲۴}{۳}=\frac{-۹+۲/۵۷۲۴}{۳}=\bar{۳}/۸۵۷۴$$

۴. برای تقسیم لگاریتم برعدد منفی، اگرمفسرلگاریتم مثبت باشد، لگاریتم را برقدرمطلق عدد تقسیم‌کرده، سپس کلگاریتم خارج قسمت را پیدا می‌کنیم.

وبرای تقسیم لگاریتم برعدد منفی، اگــر مفسرلگاریتم منفی باشد،کلگاریتم آن را حساب‌کرده وآنرا برقدرمطلق عدد مفروض تقسیم می‌کنیم.

مثال ۲۴. اگر $\log x=۵/۵۱۳۰$ باشد $\log\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}$ را پیدا کنید.

حل.

$$\log\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=\log x^{-\frac{۱}{۳}}=-\frac{۱}{۳}\log x=\frac{۵/۵۱۳۰}{-۳}$$

$$=-\left(\frac{۵/۵۱۳۰}{۳}\right)=-(۱/۸۳۷۶)=\bar{۲}/۱۶۲۴$$

فرض‌کنیم درمثال فوق $\log x=\bar{۵}/۵۱۳۰$ باشد دراین صورت،

$$\log\frac{۱}{\sqrt[۳]{x}}=\frac{\bar{۵}/۵۱۳۰}{-۳}=\frac{۴/۴۸۶۰}{۳}=۱/۴۹۵۳$$

۵. برای ضرب لگاریتم یك‌عدد، درعدد مفروضی اگراین عدد مثبت باشدآنرا درمانتیس ضرب‌کرده و واحدهای صحیح حاصل را با حاصل‌ضرب‌آن عدد درمفسر جمع جبری می‌کنیم. واگر آن عدد منفی باشد، ابتدا قدرمطلق عددرا در لگاریتم مانندفوق ضرب‌کرده سپس کلگاریتم آنرا پیدا می‌کنیم.

۶. برای ضرب یاتقسیم دولگاریتم، اگرمفسرها هردومثبت باشند مانند ضرب یا تقسیم دو عدد اعشاری عمل می‌کنیم.

اگر یکی‌ازمفسرها منفی ودیگری مثبت‌باشد، به‌جای آنکه مفسرش‌منفی‌است کلگاریتم آن را قرارداده وعمل‌ضرب یا تقسیم را انجام داده ودرآخر کلگاریتم حاصل را حساب می‌کنیم.

واگر مفسرها هردو منفی باشدکلگاریتم هریك از لگاریتمها را پیداکرده و عمل ضرب یاتقسیم را انجام می‌دهیم.

مثال ۲۵. عدد $۲^{۵۰}$ چند رقم صحیح دارد

$$\log ۲ = ۰/۳۰۱۰$$

حل.

$$A = ۲^{۵۰} \Longrightarrow \log A = ۵۰ \log ۲ = ۵۰(۰/۳۰۱۰) = ۱۵/۰۵۰$$

چون مفسر لگاریتم A برابر ۱۵ است پس A دارای ۱۶ رقم صحیح است، یعنی ۱۶ رقمی است.

مثال ۲۶. اگر $\log a = \bar{۷}/۳۰۱۰$ و $\log b = ۲/۲۰۲۰$ آنگاه عدد $A = ab$ چند صفر بین ممیز واولین رقم غیرصفر دارد.

حل. $\log A = \log a + \log b = \bar{۷}/۳۰۱۰ + ۲/۲۰۲۰ = \bar{۴}/۵۰۳۰$

پس‌عدد A دارای ۳ صفر بین ممیز واولین رقم مخالف صفرمی‌باشد.

مثال ۲۷. چه ریشه‌ای از ۰/۰۲۵ از ۰/۵ بیشتراست.

اگر $\log ۲ = ۰/۳۰۱۰$ باشد.

حل. $\sqrt[n]{۰/۰۲۵} > ۰/۵ \Longrightarrow \frac{۱}{n} \log \frac{۲۵}{۱۰۰۰} > \log \frac{۵}{۱۰}$

$$\frac{1}{n}\log\frac{1}{40}>\log\frac{1}{2}\Longrightarrow\frac{1}{n}<\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{40}}\Longrightarrow n>\frac{-\log 2^2-\log 10}{-\log 2}$$

$$=\frac{2\log 2+1}{\log 2}\Longrightarrow n>\frac{1/6020}{0/3010}=5/3\Longrightarrow n\geqslant 6$$

مثال ۲۸. اگر $\log x=\overline{18}/5365$ آنگاه $\sqrt[4]{x}$ بین چه‌توانهایی‌از ۱۰ قراردارد.

حل. روش اول:

$$\log\sqrt[4]{x}=\frac{1}{4}\log x=\frac{\overline{18}/5365}{4}=\frac{-20+2/5365}{4}=\overline{5}/6341\Longrightarrow$$

$$10^{-5}<\sqrt[4]{x}<10^{-4}$$

زیرا :

$$\boxed{a>1\ ,\ \log_a x=n/P\Longrightarrow a^n\leqslant x<a^{n+1}}$$

روش دوم :

$$\log x=\overline{18}/5365\Longrightarrow 10^{-18}<x<10^{-17}\Longrightarrow$$

$$10^{-20}<10^{-18}<x<10^{-17}<10^{-16}\Longrightarrow 10^{-20}<x<10^{-16}\Longrightarrow$$

$$10^{-5}<\sqrt[4]{x}<10^{-4}$$

دراین روش آنقدرتوانها را تغییرمی‌دهیم تا عدد ریشه‌کامل ۴ داشته باشد.

۹-۴. معادلات ونامعادلات توانی

EXPONENTIAL EQUATIONS and ...

۱. اگر $a>0$ و $a\neq 1$ ، آنگاه معادلهٔ $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ معادل بامعادلهٔ $f(x)=g(x)$ است.

مثال ۲۹. معادلهٔ زیررا حل کنید :

$$\left(\frac{۳}{۴}\right)^{x-۱}\times\left(\frac{۴}{۳}\right)^{\frac{۱}{x}}=\frac{۹}{۱۶}$$

حل .

$$\left(\frac{۳}{۴}\right)^{x-۱}\cdot\left(\frac{۳}{۴}\right)^{-\frac{۱}{x}}=\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}\Longrightarrow\left(\frac{۳}{۴}\right)^{x-۱-\frac{۱}{x}}=\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}\Longrightarrow x-۱-\frac{۱}{x}=۲$$

$$\Longrightarrow x^{۲}-۳x-۱=۰\Longrightarrow x=\frac{۳\pm\sqrt{۱۳}}{۲}$$

مثال ۳۰. معادلهٔ $\log_{۳}(۳^{x}-۸)=۲-x$ را حل کنید.

حل . بنا به‌تعریف لگاریتم،

$$۳^{x}-۸=۳^{۲-x}$$

طرفین را در ۳^{x} ضرب می‌کنیم،

$$۳^{۲x}-۸\cdot۳^{x}-۹=۰$$

درنتیجه. با به‌کاربردن فرمول معادلهٔ درجه دوم داریم:

$$۳^{x}=۴\pm۵\Longrightarrow\begin{cases}۳^{x}=۳^{۲}\Longrightarrow\boxed{x=۲}\\ ۳^{x}=-۱\end{cases}$$

اما معادلهٔ $۳^{x}=-۱$ دارای جواب نیست.

۲. ثابت‌کنید اگر معادلهٔ $a^{x}+b^{x}=۱$ که، $۰<a<۱$ ، $۰<b<۱$ دارای جواب $x_{۰}$ باشد این ریشه منحصر به‌فرد است.

اثبات. می‌دانیم، تابع $y=a^{x}$ وقتی $۰<a<۱$ ، نزولی است. پس‌اگـرمعادله ریشهٔ دیگری به‌غیراز $x_{۰}$ ، مانند x داشته باشد

$$x<x_{۰}\Longrightarrow a^{x}>a^{x_{۰}}\ ,\ b^{x}>b^{x_{۰}}\Longrightarrow a^{x}+b^{x}>a^{x_{۰}}+b^{x_{۰}}=۱$$

$$x>x_{۰}\Longrightarrow a^{x}<a^{x_{۰}}\ ,\ b^{x}<b^{x_{۰}}\Longrightarrow a^{x}+b^{x}<a^{x_{۰}}+b^{x_{۰}}=۱$$

که در هردو حالت غیرممکن است. و درنتیجه معادله اگرریشه داشته باشد منحصر به فرد است .

مثال ۳۱. معادلهٔ $25^x=9^x+4^x$ را حل کنید.

حل. $\left(\frac{2}{5}\right)^{2x}+\left(\frac{3}{5}\right)^{2x}=1$ یا $\left(\frac{4}{25}\right)^{x}+\left(\frac{9}{25}\right)^{x}=1$

با کمی جستجو کردن وامتحان کردن متوجه می‌شویم که $x=\frac{1}{2}$ یک ریشه معادله است، اما باتوجه به‌قسمت ۲. که ثابت شد این‌معادله ریشهٔ دیگری نمی‌تواند داشته‌باشد. ودرنتیجه $x=\frac{1}{2}$ همان ریشه معادله می‌باشد.

۳. معادلات به‌فرم $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^{h(x)}$.

اگردراین معادلات $f(x)>0$ و $f(x)\neq 1$ باشند مانند قسمت ۱. نتیجه می‌گیریم $g(x)=h(x)$ ومعادله حل می‌شود.

اما اگر حالتهای $f(x)\leqslant 0$ یا $f(x)=1$ نیز ممکن باشند نباید آنها را استثناء کنیم وباید این حالتها را نیز درنظر بگیریم درحالت خاصی که معادله به‌صورت

$$f(x)^{g(x)}=1$$

باشد واضح است که $f(x)=1$ و $g(x)\in R$ یا $g(x)=0$ و $f(x)>0$ و باید درنظر داشته باشیم که به‌ازاء هرریشه ازیکی دیگری تعریف شده باشد. دراین حالت نیز نباید $f(x)<0$ را ازنظر دورداشت یعنی ممکن‌است درحالت خاصی $f(x)<0$ و معادله دارای جواب باشد.

مثال ۳۲. معادلهٔ $(x-2)^{x^2-x}=(x-2)^{12}$ را حل کنید.

حل. ۱ـ اگر $x-2=1$ آنگاه $x=3$ ومعادله به‌صورت $(1)^6=1^{12}$ است و لذا معادله دارای جواب $x=3$ است.

۲ـ اگر $x-2=-1$ آنگاه $x=1$ ومعادله به صورت $(-1)^0=(-1)^{12}$ است که این جواب نیزقابل‌قبول است.

۳ـ $x-2=0$ یا $x=2$ که دراین حالت معادله به‌صورت $(0)^2=(0)^{12}$ است‌که این ریشه نیزقابل‌قبول است.

۴ـ اکنون فرض‌کنیم $x-2\neq 1$ و $x-2>0$ دراین‌صورت $x^2-x-12=0$ که $x=-3$ و $x=4$ ریشه‌های آن می‌باشند وهردو نیز قابل قبول هستند. لذا این معادله پنج جواب دارد.

مثال ۳۳. معادلهٔ $|x-3|^{\frac{x^2-4x+3}{x-2}}=1$ را حل کنید.

حل. ۱۰ $$|x-3|=1 \Longrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=2 \end{cases}$$

اما جواب $x=2$ قابل‌قبول نیست زیرا $g(x)$ به‌ازاء آن تعریف نشده‌است.

۲۰ $$x^2-4x+3=0 \Longrightarrow x=1 \ , \ x=3$$

دراین حالت نیز $x=3$ غیرقابل‌قبول است زیرا $f(x)=0$ می‌شود. پس‌ریشه‌های معادله $x_1=1$ و $x_2=4$ است.

مثال ۳۴. معادلهٔ $(2-\sqrt{3})^x+(2+\sqrt{3})^x=4$ را حل کنید.

حل. $(2+\sqrt{3})^x$ و $(2-\sqrt{3})^x$ معکوس یکدیگرند پس اگر $y=(2+\sqrt{3})^x$ فرض کنیم $y+\frac{1}{y}=4$ یا $y^2-4y+1=0$ که $y_1=2-\sqrt{3}$ و $y_2=2+\sqrt{3}$ لذا:

$$\begin{cases} (2+\sqrt{3})^x=(2+\sqrt{3}) \Longrightarrow x=1 \\ (2+\sqrt{3})^x=(2-\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})^{-1} \Longrightarrow x=-1 \end{cases}$$

۴. نامساوی به صورت $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ را که $a>0$ و $a\neq 1$ یک نامساوی توانی می‌نامیم که دراین صورت دوقضیه زیررا داریم:

الف. اگر $a>1$ ، آنگاه نامساوی $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ معادل است با نامساوی

$$f(x)>g(x)$$

ب. اگر $0<a<1$ ، آنگاه نامساوی $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ معادل نامساوی $f(x)<g(x)$ است.

مثال ۳۵. نامعادله $(0/04)^{5x-x^2-8}>625$ را حل کنید.

حل. چون $0/04=\frac{1}{25}=5^{-2}$ درنتیجه:

$$(۵)^{-۱۰x+۲x^۲+۱۶}<۵^۴ \Longrightarrow ۲x^۲-۱۰x+۱۶<۴ \Longrightarrow$$

$$x^۲-۵x+۶<۰ \quad \text{یا} \quad ۲<x<۳$$

مثال ۳۶. نامعادلهٔ زیررا حل کنید.

$$۲^{x+۲}-۲^{x+۳}-۲^{x+۴}>۵^{x+۱}-۵^{x+۲}$$

حل.

$$۲^{x+۲}(۱-۲-۴)>۵^{x+۲}(\frac{۱}{۵}-۱) \Longrightarrow -۵\times ۲^{x-۲}>-\frac{۴}{۵}\times ۵^{x+۲}$$

$$\Longrightarrow \frac{۲^{x+۲}}{۵^{x+۲}}<\frac{۴}{۲۵} \Longrightarrow \left(\frac{۲}{۵}\right)^{x+۲}<\left(\frac{۲}{۵}\right)^۲ \Longrightarrow x+۲>۲ \quad \text{یا} \quad x>۰$$

مثال ۳۷. معادله‌های $n^۲=۲^n$ و $n^۳=۳^n$ را حل کنید. $(n\in N)$

حل. به‌استقراء به‌سادگی ثابت می‌شود که اگر $n\geqslant ۵$ آنگاه $۲^n>n^۲$

$$n=۵ \Longrightarrow ۳۲>۲۵ \quad \text{و} \quad ۲^{n+۱}=۲^n\cdot ۲>n^۲\cdot ۲>(n+۱)^۲$$

پس تساوی فقط به‌ازاء $n=۱,۲,۳,۴$ ممکن‌است رخ دهد که باامتحان‌کردن فقط $x=۲$ و $x=۴$ قابل قبولند.

به‌همین ترتیب درمورد معادلهٔ دوم اگر $n\geqslant ۴$ ، $n^۳<۳^n$ لذا n می‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ باشدکه فقط $n=۳$ جواب است.

مسائل لگاریتم و معادلات توانی

۱. معادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\left(\frac{۲}{۳}\log_{۹}۲۷\right)\log_{۲}(۳+x)-\log_{۲}(۷x+۹)=\frac{۲}{\log_{۸}۱۶}-\frac{۷}{۲}$$

۲. ثابت کنید:

$$\frac{\log_a^n\cdot\log_b^n}{\log_a^n+\log_b^n}=\log_{ab}^n$$

۳. اگر $\log_a ۲۷=b$ باشد $\log_{\sqrt{۳}}\sqrt[۶]{a}$ را پیدا کنید:

$$(۱\neq a>۰)$$

۴. نامعادلهٔ زیر را حل کنید:

$$\log_\pi(x+۲۷)-\log_\pi(۱۶-۲x)<\log_\pi x$$

۵. نامعادله‌های زیر را حل کنید:

a) $\log_x\frac{x+۳}{x-۱}>۱$

b) $\log_{\frac{x-۱}{x+۵}}۰/۳>۰$

c) $\log^{۲}_{\frac{۱}{۵}}(x-۱)>۴$

d) $\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{۲+۴+۶+\cdots+۲x}>\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{۷۲}$

e) $۸^{x+۱}-۸^{۲x-۱}>۳۰$

f) $۱<۳^{|x^۲-x|}<۹$

۶. معادله‌های زیر را حل کنید:

a) $۴^{\sqrt{x+۱}}-۲^{\sqrt{x+۱}+۲}=۰$

b) $(x^۲-x-۱)^{x-۱}=۱$

$c)\ \log(\log x)+\log(\log x^{۳}-۲)=۰$ $\quad d)\ ۱۶^{\log x^{۲}}=۸$

$e)\ \log_{\frac{۱}{۵}} \log_{۵}\sqrt{۵x}=۰$ $\quad f)\ \log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=۲$

۷. اگر $f(x)=\log\frac{۱+x}{۱-x}$ و $f(z)=f(x)+f(y)$ ، z را برحسب x و y حساب کنید.

۸. اگر $\log_{c+b}a+\log_{c-b}a=۲\log_{c+b}a\cdot\log_{c-b}a$ ثابت کنید ،

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$$

۹. معادلهٔ زیررا حل کنید:

$$(\log_{۵}\sqrt{x})^{۲}-\log_{x}۵\sqrt{۵}+۱/۲۵=۰$$

۱۰. ثابت کنید $(\log_{۱۳}۱۹)^{-۱}+(\log_{۲۸}۱۹)^{-۱}>۲$

تستهای لگاریتم

۱ـ معادلهٔ $\log^{2} x+\log x+1=\dfrac{7}{\log \dfrac{x}{10}}$ چند جواب دارد؟

الف. هیچ　　ب. ۱　　ج. ۲　　د. ۳

۲ـ معادلهٔ $\log_{2}(x^{2}-1)=\log_{\frac{1}{2}}(x-1)$ چند جواب دارد؟

الف. هیچ　　ب. ۱　　ج. ۲　　د. ۳

۳ـ معادلهٔ $\log_{2}x+\log_{3}x=\log_{2}x\cdot\log_{3}x$ چند جواب دارد؟

الف. هیچ　　ب. ۲　　ج. ۱　　د. ۳

۴ـ اگر $\log_{3}12=a$ باشد، $\log_{3}18$ کدام است؟

الف. $\dfrac{a-3}{2}$　　ب. $\dfrac{a+3}{2}$　　ج. $a+3$　　د. $\dfrac{a-1}{2}$

۵ـ اگر $0<x\neq 1$ و $0<y\neq 1$ آنگاه $\dfrac{1}{\log_{x}\sqrt{xy}}+\dfrac{1}{\log_{y}\sqrt{xy}}$ برابر است با؟

الف. ۲　　ب. $\dfrac{1}{2}$

ج. صفر　　د. بستگی به x و y دارد

۶ـ اگر $A=\log_{۵}۷$ و $B=\log_{۸}۳$ کدام درست است؟

الف. $A>B$ ب. $A<B$ ج. $A=B$ د. $B=A+۱$

۷ـ اگر $\log_{ab}a=۴$ ، آنگاه $\log_{ab}\frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt{b}}$ برابراست با:

الف. ۴ ب. $\frac{۱۷}{۶}$ ج. $\frac{۴}{۳}$ د. -۳

۸ـ اگر $\log_{۱۲}۲۷=a$ باشد، $\log_{۶}۱۶$ کدام است؟

الف. $\frac{۴(۳-a)}{۳+a}$ ب. $\frac{۳(۳+a)}{۳-a}$

ج. $\frac{۴(۳+a)}{۳-a}$ د. $\frac{۲a}{۳-a}$

۹ـ اگر a عددی حقیقی و مخالف صفر باشد، از $\log_{x}(a^{۲}+۱)<۰$ نتیجه می‌گیریم

الف $x>۰$ ب. $۱\neq x>۰$ ج. $x>۱$ د. $۰<x<۱$

۱۰ـ اگر $N=۱۳۶۸!$ باشد، حاصل عبارت زیر برابراست با ؟

$$\frac{۱}{\log_{۲}N}+\frac{۱}{\log_{۳}N}+\frac{۱}{\log_{۴}N}+\dots+\frac{۱}{\log_{۱۳۶۸}N}$$

الف. صفر ب. ۱۳۶۸ ج. ۱ د. N

۱۱ـ $\log_{a}\operatorname{tg}۱^\circ\cdot\log_{a}\operatorname{tg}۲^\circ\cdots\log_{a}\operatorname{tg}۸۹^\circ$ برابراست با

الف. ۱ ب. صفر ج. $\frac{\pi}{۲}$ د. a

۱۲ـ حاصل $\log_{a}\operatorname{tg}۱^\circ+\log_{a}\operatorname{tg}۲^\circ+\dots+\log_{a}\operatorname{tg}۸۹^\circ$ برابراست با:

الف. صفر ب. ۱ ج. a د. $۸۹!$

۱۳ـ اگـر $a>۱$ و $\frac{۱}{\log_{a}x}>۱$ کدام درست است؟

الف. $x>a$ ب. $x>۱$

ج. $۱<x<a$ د. $۰<x<a$

۱۴- مفسر $\log_{\frac{1}{10}} 6000$ برابراست با:

الف. -3 ‏ ب. -4 ‏ ج. -2 ‏ د. 4

۱۵- به‌ازاء چه‌مقادیر a معادلهٔ $x^2-2x+\log a=0$ ریشه‌های حقیقی دارد؟

الف. $a\leqslant 10$ ‏ ب. $a<10$

ج. $0<a\leqslant 10$ ‏ د. $0<a\leqslant 1$

۱۶- اگر $\log\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$ باشد a^2+b^2 برابراست با

الف. ab ‏ ب. $4ab$ ‏ ج. $7ab$ ‏ د. $6ab$

۱۷- معادلهٔ $|x|^{x^2-2x}=1$ چند ریشه دارد؟

الف. هیچ ‏ ب. ۲ ‏ ج. ۳ ‏ د. ۴

۱۸- معادله $2^{3x}\cdot 3^x-2^{3x-1}\cdot 3^{x+1}=-288$ چند ریشه دارد؟

الف. هیچ ‏ ب. ۱ ‏ ج. ۲ ‏ د. ۳

۱۹- جواب نامعادلهٔ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-|x-2|}\geqslant 81$ کدام است؟

الف. $2\leqslant x\leqslant 6$ ‏ ب. $x\leqslant -2$ یا $x\geqslant 6$

ج. جواب ندارد ‏ د. $|x|\leqslant 4$

۲۰- اگر $y=\log_2\log_3\log_2(4-x)$ تغییرات x کدام است؟

الف. $x>4$ ‏ ب. $x<4$ ‏ ج. $x<2$ ‏ د. $2<x<4$

۲۱- ریشه‌های معادلهٔ $x^{\log_x (x+3)^2}=16$ کدام است؟

الف. ۱ و ۷- ‏ ب. ۱ ‏ ج. ۷- ‏ د. ریشه ندارد

۲۲- اگر $\log_a^x=8$ و $\log_b^x=3$ و $\log_c^x=6$ باشد $\log_{abc}^x$ برابراست با:

الف. ۶ ‏ ب. ۳ ‏ ج. $\frac{8}{5}$ ‏ د. $\frac{1}{18}$

۲۳- معادلهٔ $\log_a x+\log_{\sqrt{a}} x^{۲}+\log_{\sqrt[۳]{a}} x^{۳}=۴$ چند ریشه دارد. $۱\neq a>۰$

الف. هیچ ب. ۱ ج. ۲ د. ۲

۲۴- $\log\frac{a}{b}+\log\frac{b}{c}+\log\frac{c}{d}-\log\frac{ay}{xd}$ برابراست با:

الف. $\log\frac{y}{x}$ ب. $\log\frac{x}{y}$ ج. ۱ د. صفر

۲۵- اگر $\log x\geqslant \log ۲+\frac{۱}{۲}\log x$ آنگاه:

الف $x>۰$ ب. $x>۴$ ج. $x\geqslant ۴$ د. $۰<x\leqslant ۴$

۲۶- اگر $x>۰$ ، کدام همواره درست است؟

الف. $\log(۱+x)<\frac{x}{۱+x}$ ب. $\log(۱+x)>x$

ج. $\log(۱+x)<x$ د. $\log(۱+x)=x$

۲۷- معادلهٔ $\log x^{۲}+\log(-x)=۳$ چند ریشه دارد؟

الف. هیچ ب. ۱ ج. ۲ د. ۳

۲۸- معادلهٔ $\log\sqrt{x}=\sqrt{\log x}$ چند ریشه دارد؟

الف. هیچ ب. ۱ ج. ۲ د. ۳

۲۹- اگر $a=\log_{۳}۱۲$ باشد $\log_{۳}۱۸$ برابراست با:

الف. $\frac{a-۳}{۲}$ ب. $\frac{a+۳}{۲}$ ج. $\frac{a-۱}{۲}$ د. $a+۳$

۳۰ هرگاه $\log ۳=۰/۴۷۷۱$ عدد $۳^{۱۰۰}$ چندرقمی است؟

الف. ۴۷ ب. ۴۸ ج. ۴۹ د. ۴۶

۳۱- معادلهٔ $\log(۲x+۱)+\log(x-۲)=۱+۲\log ۵$ چند جواب دارد؟

الف. هیچ ب. ۱ ج. ۲ د. ۳

۳۲- عبارت $y=\sqrt{\log(x-۱)}$ بهازاء کدام مقادیر x تعریف شده است؟

الف. $x>۱$ ب. $x>۲$ ج. $x\geqslant ۲$ د. $x\leqslant ۲$

۳۳ـ معادلهٔ $\log ۲x=\frac{۱}{۴}\log (x-۱۵)^{۴}$ چندریشه دارد؟

الف. هیچ ب. ۱ ج. ۲ د. ۳

۳۴ـ اگر $\operatorname{colog} x=۱۳/۵۲۱۷$ آنگاه $\sqrt[۵]{x}$ بین چه توانهائی از ۱۰ قراردارد؟

الف. $۱۰^{-۴}$ و $۱۰^{-۵}$ ب. $۱۰^{-۳}$ و $۱۰^{-۴}$

ج. $۱۰^{-۲}$ و $۱۰^{-۳}$ د. $۱۰^{-۱۲}$ ، $۱۰^{-۱۳}$

۳۵ـ عبارت $y=\log_{x^{۲}}(x+۱)$ به‌ازاء چه‌مقادیر x تعریف شده‌است.

الف. $x>-۱$ ب. $x>۰$

ج. $(-۱,+\infty)-\{۰,۱\}$ د. $(۰,+\infty)-\{۱\}$

۳۶ـ ریشهٔ معادله $۷^{\log x}=۹۸-x^{\log ۷}$ کدام است؟

الف. ۱۰ ب. ۱۰۰ ج. ۲۰ د. $\frac{۱}{۱۰۰}$

۳۷ـ اگر $\log ۵=a$ ، آنگاه $\log_{۸}۱۰۰$ برابراست با:

الف. $\frac{۲}{۳(۱-a)}$ ب. $\frac{۲}{۳(۱+a)}$

ج. $\frac{۳(a+۱)}{۲}$ د. $\frac{۳}{۲(۱-a)}$

۳۸ـ نامعادلهٔ $\log_{\frac{۱}{۵}}(x^{۲}-۴)\geqslant -۱$ دارای جواب زیراست:

الف. $-۲<x\leqslant ۳$ ب. $۲\leqslant x<۳$

ج. $\begin{cases} ۳<x<۴ \\ \text{یا} \\ -۴<x<-۳ \end{cases}$ د. $\begin{cases} ۲<x\leqslant ۳ \\ \text{یا} \\ -۳\leqslant x<-۲ \end{cases}$

۳۹ـ اگر $x>۰$ آنگاه $\log_{x}\sqrt{x\sqrt[۳]{x\sqrt[۴]{x}}}$ برابراست با:

الف. $\frac{۱۷}{۲۴}$ ب: $\frac{۱۹}{۲۴}$ ج. $\frac{۵}{۸}$ د. $\frac{۴}{۶}$

۴۰- حاصل $a^{\frac{\log \log a}{\log a}}$ برابراست با:

الف. a ب. $\log a$ ج. $\log^2 a$ د. $\log \log a$

۴۱- مفسر $\log_5 300$ برابراست با:

الف. ۳ ب. ۲ ج. ۴ د. ۵

۴۲- اگر $0<a<1$ کدام همواره درست است؟

الف. $\log_3^a>0$ ب. $\log_a^5>\log_a^2$

ج. $\frac{1}{\log_a^7}>\frac{1}{\log_a^5}$ د. $\log_3^a>1$

۴۳- اگر $A=(\log_2 3)^{-1}+(\log_5 3)^{-1}$ کدام درست است؟

الف. $A\geqslant 2$ ب. $A<2$ ج. $A>3$ د. $2<A<3$

۴۴- جواب معادلهٔ $\log(x+4)=\frac{1}{2}\log(2x+11)$ کدام است؟

(کنکور ریاضی ۶۷)

الف. -5 ب. -1 ج. ۱ د. ۵

۴۵- فرض‌کنیم سه‌عدد مثبت، $\frac{1}{a}$ ، $\frac{1}{b}$ ، $\frac{1}{c}$ ، به‌ترتیب، سه‌جملهٔ متوالی‌یك‌تصاعدهندسی باشند. درمورد $\log a$ ، $\log b$ ، $\log c$ چه حکمی می‌توان‌کرد؟ (کنکورتجربی ۶۷)

الف. سه جمله متوالی تصاعد حسابی است

ب. سه جمله متوالی تصاعد هندسی است

ج. $\log a$ واسطهٔ حسابی بین $\log b$ و $\log c$ است

د. $\log a$ واسطهٔ هندسی بین $\log b$ و $\log c$ است.

۴۶- دامنهٔ تابع $f(x)=\log_x(x^2-1)$ کدام است؟ (کنکورتجربی ۶۷)

الف. $x>1$ یا $x<-1$ ب. $x\geqslant 1$

ج. $|x|<1$ د. $x>1$

۴۷- حاصل $\log_n\frac{۲}{۱}+\log_n\frac{۳}{۲}+\dots+\log_n\left(\frac{n}{n-۱}\right)$ کدام است؟

(کنکور تجربی ۶۷)

الف. ۰   ب. ۱   ج. $n\lg_n ۲$ د. $\left(\frac{n+۱}{n}\right)\log_n ۲$

۴۸- معادلهٔ $\log_{x^۲}(۲x+۱)^۲=۱$ چند ریشه دارد؟

الف. هیچ   ب. ۱   ج. ۲   د. ۳

۴۹- معادلهٔ $\log_{x^۲}(۲x-۱)=\frac{۱}{۲}$ چند ریشه دارد؟

الف. هیچ   ب. ۱   ج. ۲   د. ۳

۵۰- اگر $xyz=۱۰^۶$ ، ماکزیمم، $P=\log x\log y\log z$ ، کدام است؟ $(x,y,z>۱)$

الف. ۶   ب. ۸   ج. $۱۰^۶$ د. $۱۰^۳$

۵۱- اگر $x+y+z=۳۰۰$ ، ماکزیمم $S=\log x+\log y+\log z$ کدام است؟ $(x,y,z>۱)$

الف. ۶   ب. ۸   ج. ۱۰۰   د. ۱۲

۵۲- معادلهٔ $(x+۲)\log(x-۱)=۰$ چند ریشه دارد؟

الف. هیچ   ب. ۱   ج. ۲   د. بی‌شمار

فصل پنجم

۵. رشته یا دنباله‌های اعداد

۵.۱. رشته یا دنباله عبارتست ازمجموعه‌ای از اعدادکه چنان مرتب شده باشند که با دنبالهٔ عددهای طبیعی یاقطعه‌ای از آن درتناظر یك به یك باشد، وجمله متناظر با عدد یك را جمله اول دنباله و جمله متناظر باعدد ۲ را جمله دوم دنباله و . . . . جمله متناظر باعدد طبیعی n را جمله n ام دنباله یا جمله عمومی‌دنباله می‌نامیم.
لازم به‌تذکراست که هرگاه مجموعه اعداد طبیعی را به‌گونه‌ای مرتب‌کنیم که ابتدا ۱، وبعد از آن، هرعدد طبیعی برابر باشد باعدد قبل از آن به‌اضافه عددیك، آن‌را دنبالهٔ اعداد طبیعی می‌نامیم.
دنباله را به‌کمك‌تابع نیز می‌توان تعریف کرد.

تعریف: تابع f را که دامنه‌اش اعداد طبیعی و بردش اعداد حقیقی باشد یك دنباله می‌نامیم مقدار $f(n)$ را جمله n ام دنباله می‌نامیم وگاهی به‌جای $f(n)$، x_n یا a_n می‌نویسیم. اگر $f: N \underset{n \longrightarrow x_n}{\longrightarrow} R$ یك دنباله باشد، $f(n)=x_n$ و x_n را جمله عمومی یا n ام می‌نامیم و باعلامت $\{x_n\}$ ویا به‌صورت x_1، x_2، . . . . x_n . . . نشان می‌دهیم‌مانند دنباله $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ که‌عبارتست از...، $\frac{1}{n}$، ...، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{2}$، ۱ یا دنباله $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ که عبارتست از ...، $\frac{1}{n^2}$، ....، $\frac{1}{9}$، $\frac{1}{4}$، ۱

۲-۵. انواع دنباله‌ها

۱. دنباله محدود یامتناهی به‌دنباله‌ای گفته می‌شود که باقطعه‌ای از اعداد طبیعی در تناظر یك به‌یك باشد، قطعه اعداد طبیعی یعنی اعداد طبیعی از ۱ تا K که آنرا با N_K نشان می‌دهیم، مثلاً $N_5 = \{$۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵$\}$ ممکن است دنباله‌ای ازیك طرف محدود واز طرف دیگر نامحدود باشد دراین صورت چنین دنباله‌ای با اعداد طبیعی درتناظر یك به‌یك است.

همچنین ممکن است دنباله ازدوطرف نامحدود باشد

۲. دنبالهٔ مثبت یـا دنباله منفی، به‌دنباله‌ای که همه جمله‌هـایش مثبت یامنفی باشند اطلاق می‌شود.

۳. دنباله متناوب، هرگاه جمله‌های دنباله متوالیاً مثبت ومنفی شوند آنرا متناوب می‌نامیم مانند $(-1)^n . n^3$ که عبارتست از

$$-1 ، 8 ، -27 ، 64 ، \ldots$$

۴. دنباله‌های صعودی ونزولی،

دنباله $\{a_n\}$ را صعودی گوئیم هرگاه:

$$\forall n \geqslant 1 \quad : a_{n+1} \geqslant a_n$$

وآن را اکیداً صعودی گوئیم هرگاه، $\quad a_{n+1} > a_n$

دنباله $\{a_n\}$ را نزولی گوئیم هرگاه:

$$\forall n \geqslant 1 : a_{n+1} \leqslant a_n$$

وآنرا اکیداً نزولی گوئیم هرگاه، $\quad a_{n+1} < a_n$

هردنباله را که صعودی یانزولی باشد یکنوا نیز می‌نامیم

مثلاً دنبالـه، ۲ ، ۴- ، ۸ ، ۱۶- ، ... یك دنبالـه صعودی است جمله عمومی این دنباله $a_n = (-1)^{n+1}(2)^n$ است

دنبالـه $a_n = \frac{1}{n^2}$، یك دنباله نزولی‌است.

$$a_n = \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} = a_{n+1}$$

تذکر: هرگاه دریك دنباله جمله‌ها یك‌درمیان مثبت ومنفی باشند برای تعیین صعودی یا

نزولی بودن، قدرمطلق جمله‌ها را درنظرمی گیریم چون دنباله یك تابع است وقتی گوئیم دنباله‌ای به عدد L همگرا است یعنی حد این تابع در بی‌نهایت برابر L است.

تعریف: دنباله $\{a_n\}$ را گوئیم دارای حد L است یا به L همگرا است هرگاه بهازای هر ε مثبت، عدد طبیعی N موجود باشد که بهازای هـر n، اگـر $n>N$ آنگاه $|a_n-L|<\varepsilon$

وچنین می‌نویسیم: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$، یا اگـر $n\to\infty$ آنگاه $a_n\to L$ ، هرگاه دنباله‌ای حد نداشته باشد یا دارای حد متناهی نباشد آنرا واگرا می‌نامیم مثلاً دنباله $a_n=\frac{1}{n}$ به‌صفر همگرا است. یادنباله $a_n=\frac{n}{n+1}$ دنباله‌ای اکیداً صعودی و به یك همگرا است $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}}=\frac{(n+1)^2}{n^2+2n}=\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}=1+\frac{1}{n^2+2n}>1$$

$$\Longrightarrow a_{n+1}>a_n$$

مثال ۱. دنباله $x_n=\sqrt[n]{n}$ وهمچنین $b_n=\sqrt[n]{a}$، $(a>0)$ به‌یك همگرا می‌باشند. $(n\in N)$

حل. فرض کنیم $x_n=\sqrt[n]{n}-1$. بنابراین $0\leqslant x_n$ وبه‌ازای $n\geqslant 2$، بنابه بسط دوجمله‌ای نیوتن داریم.

$$\sqrt[n]{n}=x_n+1\Longrightarrow n=(x_n+1)^n=1+nx_n+\frac{n(n-1)}{2!}x_n^2+\dots+x_n^n$$
$$\geqslant\frac{n(n-1)}{2}x_n^2$$

و درنتیجه. $0\leqslant x_n^2\leqslant\frac{2}{n-1}$ یا $0\leqslant x_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}$

و چون $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{2}{n-1}}=0$ لذا $x_n\to 0$ یا $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}-1)=0$

بنابراین $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=۱$ و به‌همین ترتیب ثابت می‌شود $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=۱$، بـه‌عنوان تمرین آنرا ثابت کنید.

همچنین ثابت کنید بازاء $n\geqslant ۳$، دنباله $a_n=\sqrt[n]{n}$ یك دنباله اکیداً نزولی است.

$$\sqrt[۳]{۳}>\sqrt[۴]{۴}>\sqrt[۵]{۵}\dots>\sqrt[n]{n}$$

۳ـ۵. دنباله تصاعد عددی

عدد ثابت $a_۱$ وعدد ثابت $d\neq ۰$ را درنظر می‌گیریم و دنباله‌ای از اعـداد چنان می‌سازیم که جمله اول آن $a_۱$ وجمله‌های بعدی هریك از اضافه‌کردن عدد d به‌جمله‌ماقبل آن بدست آید چنین دنباله‌ای را یك تصاعد عددی یاحسابی می‌نامیم.

$$a_۱ ،a_۱+d ،a_۱+۲d ،a_۱+۳d ، \dots$$

وبرای محاسبه جمله عمومی گوئیم ضریب d، یك واحد ازشماره جمله کمتر است

پس، $$\boxed{a_n=a_۱+(n-۱)d}$$

که در آن $a_۱$ جمله اول، d قدر نسبت و n شماره جمله و a_n، جمله n ام یا جمله عمومی است.

مثلاً درتصاعد، $۳ ،۷ ،۱۱ ، \dots$

جمله اول ۳ وقدر نسبت ۴ است پس جمله n ام، $a_n=۳+(n-۱)۴$ یا $a_n=۴n-۱$

هرگاه درتصاعد حسابی $d>۰$، تصاعد صعودی واگر $d<۰$ تصاعد نزولی است.

خواص تصاعد عددی

۱. درهر تصاعد عددی تفاضل هرجمله ازجمله ماقبل آن مقداری ثابت و برابر قدرنسبت است. $\forall n:\quad a_n-a_{n-۱}=d$

۲. اگر a و b و c سه جمله متوالی یك تصاعد حسابی باشند شرط لازم وکافی است که

$$۲b=a+c$$

اثبات به‌سادگی باجای‌گذاری بدست می‌آید

نتیجه: سه جمله متوالی یك تصاعد عددی را می‌توان به‌صورت زیرنشان داد.

$$x-d\ ,\ x\ ,\ x+d$$

مثال ۲. چه رابطه‌ای بین اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای برقرار باشد تا سه ضلع تشکیل تصاعد عددی دهند.

حل. اگرضلع متوسط را b بنامیم، اضلاع $b+d$، b و $b-d$ می‌باشند که بنا به‌رابطه فیثاغورث

$$(b+d)^۲=b^۲+(b-d)^۲\Longrightarrow b=۴d$$

ولذا اضلاع به‌ترتیب $۳d$ و $۴d$ و $۵d$ می‌باشند. $a=۵d$ و $b=۴d$ و $c=۳d$.

نتیجه : می‌دانیم درهرمثلث قائم‌الزاویه $S=\frac{bc}{۲}$ اگر r شعاع دایره محاطی داخلی باشد داریم:

$$r=\frac{S}{P}=\frac{۶d^۲}{۶d}=d \text{ و } S=۶d^۲$$

یعنی شعاع دایره محاطی داخلی برابرقدرنسبت است.

۳. درهرتصاعد عددی حاصلجمع جمله‌های متساوی‌البعد ازطرفین برابر واگرتصاعد جمله وسط داشته باشد، دوبرابر جمله وسطی است. هرگاه تعداد جمله‌ها فرد باشد، تصاعد جمله وسط دارد واگرتصاعدی n جمله داشته باشدکه n فرد است، جمله وسطی، جمله $\frac{n+۱}{۲}$ ام است

$$a_۱+a_n=a_۲+a_{n-۱}=\cdots\cdot=۲a_۱+(n-۱)d$$

واگر n فرد باشد و a_K جمله وسطی، این تساوی برابر $۲a_K$ نیز می‌باشد.

۴. مجموع n جمله اول

هرگاه مجموع n جمله اول تصاعد عددی را به S_n نشان دهیم، بنا به خاصیت ۳. فرض‌کنیم n زوج باشد دراین‌صورت $\frac{n}{۲}$ ، ازدسته‌های دوتائی داریم‌که حاصل هرکدام از دسته‌ها $a_۱+a_n$ است پس، $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$ درحالت n فرد نیزمی‌توان‌آنرا به‌سادگی اثبات کردکافیست ابتدا جمله وسطی را درنظر نگیریم وبعد آنرا به‌حاصل اضافه‌کنیم،

پس درهر صورت،

$$\boxed{S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)} \quad \text{یا} \quad \boxed{S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]}$$

نتیجه: هرگاه n فرد باشد $a_۱+a_n=۲a_K$ که a_K جمله وسطی است

دراین صورت $\boxed{S_n=na_K}$

مثال ۳. اگر دریك تصاعد عددی $S_m=S_n$. ثابت کنید $S_{m+n}=۰$

S_m ، S_n به‌ترتیب مجموع m و n جمله اول تصاعد هستند $(m\neq n)$

حل. $S_m=S_n \Longrightarrow m[۲a_۱+(m-۱)d]=n[۲a_۱+(n-۱)d] \Longrightarrow$

$۲a_۱(m-n)+d(m^۲-n^۲)-d(m-n)=۰ \Longrightarrow$

$$(m-n)[۲a_۱+(m+n-۱)d]=۰ \Longrightarrow ۲a_۱+(m+n-۱)d=۰$$

$$S_{m+n}=\frac{m+n}{۲}[۲a_۱+(m+n-۱)d]=۰$$

مثال ۴. مجموع n عدد طبیعی شروع ازیك را پیدا کنید،

حل. $S_n=۱+۲+\dots+n=\frac{n}{۲}(n+۱)=\frac{n(n+۱)}{۲}$

همچنین مجموع اعداد فرد از ۱ تا $۲K-۱$، K عدد فرد متوالی برابر است با

$$S_K=\frac{K}{۲}(۱+۲K-۱)=K^۲$$

به‌همین ترتیب مجموع اعداد زوج از ۲ تا $۲K$، K عدد زوج متوالی برابر است با

$$S'_K=\frac{K}{۲}(۲+۲K)=K(K+۱)$$

۵. هرگاه a_m و a_n و a_r و a_k، چهار جمله یك تصاعد حسابی باشند:

اگر $m+n=k+r$ ، آنگاه $a_m+a_n=a_k+a_r$

واگر $m+n$ زوج باشد ، $a_m+a_n=۲a_{\frac{m+n}{۲}}$

باجای‌گذاری به‌آسانی روابط فوق ثابت می‌شوند.

مثال ۵. دریك تصاعد عددی $a_{۲۳}+a_{۴۱}=۲۰۰$، مجموع ۶۳ جمله اول وجمله سی‌دوم این تصاعد را پیدا کنید.

حل. $$S_{۶۳}=\frac{۶۳}{۲}(a_۱+a_{۶۳})=\frac{۶۳}{۲}(a_{۲۳}+a_{۴۱})=۶۳\times ۱۰۰=۶۳۰۰$$

$$۲a_{۳۲}=a_{۲۳}+a_{۴۱}=۲۰۰ \Longrightarrow a_{۳۲}=۱۰۰$$

۶. رابطه بین جمله n ام و m ام یك تصاعد عددی،

از a_n و a_m به‌ترتیب جمله‌های n ام و m ام یك تصاعد عددی باشند،

$$\begin{cases} a_n=a_۱+(n-۱)d \\ a_m=a_۱+(m-۱)d \end{cases} \Longrightarrow \boxed{a_n-a_m=(n-m)d}$$

یا $$\boxed{d=\frac{a_n-a_m}{n-m}}$$

مثال ۶. اگر دریك تصاعد عددی، $a_p=a$ و $a_q=b$ و $a_r=c$،

ثابت‌کنید: $$A=(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=۰$$

حل. باتوجه به‌خاصیت (۶) $q-r=\frac{b-c}{d}$ و . . . . لذا

$$A=\frac{(b-c)a}{d}+\frac{(c-a)b}{d}+\frac{(a-b)c}{d}=$$

$$\frac{۱}{d}(ab-ac+bc-ab+ac-bc)=۰$$

۷. رابطه بین $S_{۲n}$ و S_n

$$S_{۲n}=a_۱+a_۱+d+\cdots+[a_۱+(n-۱)d]+a_۱+nd+a_۱+(n+۱)d$$
$$+\cdots+a_۱+(۲n-۱)d=S_n+S_n+n^۲d \Longrightarrow$$

$$S_{۲n}-۲S_n=n^۲d$$ یا $$\boxed{d=\frac{S_{۲n}-۲S_n}{n^۲}}$$

مثال ۷. دریك تصاعد عددی $S_{۲۰}=۶۱۰$ و $S_{۱۰}=۱۵۵$ قدرنسبت کدام است.

حل. $n=۱۰$،
$$d=\frac{۶۱۰-۲\times ۱۵۵}{(۱۰)^{۲}}=۳$$

۸. درج واسطه‌های حسابی بین دوعدد.

اگر a و b دوعدد مفروض باشند، می‌توان m عدد بین a و b پیداکردکه با این‌دو عدد تشکیل تصاعد حسابی دهند، این m عدد را واسطه‌های حسابی بین a و b می‌نامیم.

بنابراین تصاعدی حسابی خواهیم داشت‌که جمله اول آن a وجمله آخر آن b، یا برعکس وتعداد جمله‌ها $m+۲$ است لذا،

$$b=a+(m+۲-۱)d \Longrightarrow \boxed{d=\frac{b-a}{m+۱}} \quad \text{یا} \quad d=\frac{a-b}{m+۱}$$

البته دراکثر کتابها قرارداد می‌کنندکه هرگاه‌گوئیم m واسطه عددی بین a و b جمله اول a وجمله آخر b باشد، یعنی آن‌که اول ذکر شود جملهٔ اول است .

مثال ۸. جمله اول و هفتم تصاعد عددی ۱۱ و ۳۵ است بین اعداد ۳۸، ۱۳ چند واسطه عددی می‌توان درج نمود تا جمله چهارم این دوتصاعد برابر شوند.

حل.
$$d_{۱}=\frac{۳۵-۱۱}{۷-۱}=۴ \text{ و } a_{۴}=a'_{۴} \Longrightarrow$$

$$۱۱+(۴-۱)\times ۴=۳۸+(۴-۱)d_{۲} \Longrightarrow d_{۲}=-۵ \Longrightarrow$$

$$-۵=\frac{۱۳-۳۸}{m+۱} \Longrightarrow m=۴$$

مثال ۹. اگر $a_{۱}$، $a_{۲}$، . . . ، a_n تشکیل تصاعد عددی باقدرنسبت d بدهند حاصل‌عبارت زیررا پیداکنید (برحسب $a_{۱}$ و d)

$$S=\frac{۱}{\sqrt{a_{۲}}+\sqrt{a_{۱}}}+\frac{۱}{\sqrt{a_{۳}}+\sqrt{a_{۲}}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n-۱}}}$$

حل.
$$S=\frac{\sqrt{a_{۲}}-\sqrt{a_{۱}}}{d}+\frac{\sqrt{a_{۳}}-\sqrt{a_{۲}}}{d}+\cdots+\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-۱}}}{d}$$

$$=\frac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{۱}}}{d}=\frac{\sqrt{a_{۱}+(n-۱)d}-\sqrt{a_{۱}}}{d}$$

مثال ۱۰. اگر اعدادگویای، x و y و z و t چهارجمله متوالی یك تصاعد عددی باشند، ثابت‌کنید $S=\sqrt{xyzt+(z-y)^{۴}}$، گویا است

حل. فرض می‌کنیم $y=a-b$ آنگاه $z=a+b$ و $x=a-۳b$ و $t=a+۳b$ و دراین صورت

$$S=\sqrt{(a^{۲}-b^{۲})(a^{۲}-۹b^{۲})+(۲b)^{۴}}$$
$$=\sqrt{a^{۴}-۱۰a^{۲}b^{۲}+۲۵b^{۴}}=\sqrt{(a^{۲}-۵b^{۲})^{۲}}=|a^{۲}-۵b^{۲}|$$

۵-۴. دنباله تصاعد هندسی Geometric Progressions

عدد ثابت $a_{۱}\neq ۰$ وعدد ثابت r، ($r\neq ۰$ ، ± ۱) در نظر می‌گیریم و دنباله‌ای از اعداد چنان می‌سازیم که جمله اول آن $a_{۱}$ وجمله‌هـای بعدی هریك از ضرب r، درجمله ماقبل آن بدست آید. چنین دنباله را یك تصاعد هندسی می‌نامیم،

$$a_{۱}\ ،a_{۱}r\ ،a_{۱}r^{۲}\ ،a_{۱}r^{۳}\ ،\ldots$$

شماره هرجمله ازتوان r، یك واحدکمتر است. پس:

$$\boxed{a_{n}=a_{۱}r^{n-۱}}$$

که a_{n} را جمله n ام یا عمومی و r را قدرنسبت می‌نامیم.

اگر درتصاعد هندسی $a_{۱}=۰$، آنگاه جمله‌ها صفرمی‌باشند.

همچنین اگر $r=۰$ ازجمله اول‌به‌بعد همگی صفر واگر $r=۱$، همه جمله‌هامساوی واگر $r=-۱$ آنگاه جمله‌ها ازنظر قدرمطلق مساوی ویك درمیان مثبت ومنفی‌اند.

هرگاه در تصاعد هندسی ، $|r|>۱$، تصاعد را صعودی و اگر $|r|<۱$ تصاعد را نزولی می‌نامیم.

در تصاعـد هندسی برای محاسبه قدرنسبت وقتی جمله n ام و اول معلومند داریم،

$r^{n-۱}=\dfrac{a_{n}}{a_{۱}}$ که اگر n زوج باشد، $n-۱$ فرداست و $r=\sqrt[n-۱]{\dfrac{a_{n}}{a_{۱}}}$

واگر n فرد باشد، $n-۱$ زوج و باشرط $a_{n}a_{۱}>۰$، $r=\pm\sqrt[n-۱]{\dfrac{a_{n}}{a_{۱}}}$

خواص تصاعد هندسی

۱. درهر تصاعد هندسی، نسبت هرجمله به جمله قبل از آن مقداری است ثابت و برابر قدر نسبت.

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\dots=\frac{a_2}{a_1}=r$$

۲. اگر a و b و c، سه جمله متوالی یك تصاعد هندسی باشند. شرط لازم وکافی است که

$$b^2=ac$$

نتیجه: سه جمله متوالی یك تصاعد هندسی را می‌توان به‌صورت، $\frac{x}{r}$، x، xr نشان داد.

مثال ۱۱. اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تصاعد هندسی تشکیل دهند، قدرنسبت کدام است؟

حل. یك ضلع زاویه قائمه را a فرض می‌کنیم پس اضلاع $\frac{a}{r}$ و a و ar می‌باشند در نتیجه، $a^2r^2=a^2+\frac{a^2}{r^2}$ ولذا $r^4-r^2-1=0$ که از آن $r^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $r=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (جوابهای منفی درمثلث قابل قبول نیست.)

همچنین می‌توان چهار جمله متوالی یك تصاعد هندسی را به‌صورت، xr^3، xr، $\frac{x}{r}$ و $\frac{x}{r^3}$، نشان داد که قدرنسبت r^2 است

۳. درهرتصاعد هندسی حاصلضرب جمله‌های متساوی‌البعد از طرفین برابر، واگر تصاعد جمله وسط داشته باشد، برابر مجذور جمله وسطی است.

$$a_1a_n=a_2a_{n-1}=\dots=a_1{}^2r^{n-1}$$

اگر n فرد باشد این تساوی‌ها برابر $a^2_{\frac{n+1}{2}}$ است‌که $a_{\frac{n+1}{2}}$ جمله وسطی است.

۴. حاصلضرب n جمله اول تصاعد هندسی.

اگر این حاصلضرب را به P_n نشان دهیم، بنا به‌خاصیت ۳. فرض‌کنیم n زوج باشد در این صورت $\frac{n}{2}$ از دسته‌های دوتائی داریم که حاصل هردسته برابر a_1a_n است درنتیجه،

$$P_n=(a_1a_n)^{\frac{n}{2}}$$

لذا،

$$\boxed{|P_n|=\sqrt{(a_1a_n)^n}=\sqrt{(a_1^2r^{n-1})^n}}$$

درحالت n فرد نیز به‌سادگی فرمول فوق بدست می‌آید،

درحالتی‌که n فرد باشد. فرمول ساده‌تر نیزخواهد شد اگر a_k جمله وسطی باشد آنگاه $a_1a_n=a_k^2$ و داریم،

$$|P_n|=\sqrt{(a_k^2)^n}=|a_k^n|$$

۵. اگر a_n و a_m و a_r و a_s، چهارجمله یك تصاعد هندسی باشند به‌طوری‌که $m+n=r+s$ آنگاه،

$$\boxed{a_m\cdot a_n=a_r\cdot a_s}$$

اثبات باجای‌گذاری به‌سادگی بدست می‌آید.

درحالتی‌که $m+n$ زوج باشد، $a_m\cdot a_n=a^2_{\frac{m+n}{2}}$

تذکر. اکثرفرمولهای تصاعد هندسی را از فرمول نظیرش در تصاعد عددی می‌توان بدست آورد، کافیست درتصاعد عددی تفاضل را به‌تقسیم، جمع را به‌ضرب، ضرب را به‌توان وتقسیم را به‌ریشه تبدیل‌کنیم. در پنج خاصیت فوق آنرا تحقیق کنید

۶. رابطه بین جمله n ام و m ام یك تصاعد هندسی.

اگر a_n و a_m به ترتیب جمله‌های nام و m ام یك تصاعد هندسی باشند،

$$\begin{cases}a_n=a_1r^{n-1}\\ a_m=a_1r^{m-1}\end{cases}\Rightarrow \frac{a_n}{a_m}=r^{n-m}\Rightarrow \boxed{r=\sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}}$$

اگر $n-m$ زوج و $a_n\cdot a_m>0$، مثبت ومنفی لازم است.

۷. مجموع n جمله اول، S_n

$$S_n=a_1+a_1r+a_1r^2+\dots+a_1r^{n-1}$$

اگر دوطرف رابطه فوق را در r ضرب‌کرده ودورابطه را ازهم کم‌کنیم،

$$rS_n = a_۱ r + a_۱ r^۲ + \cdots + a_۱ r^n \qquad \Longrightarrow$$

$$S_n - rS_n = a_۱ - a_۱ r^n \Longrightarrow \boxed{S_n = a_۱\left(\frac{۱-r^n}{۱-r}\right)}$$ یا

$$S_n = a_۱\left(\frac{r^n-۱}{r-۱}\right)$$

می‌توان فرمولهای فوق را به‌صورت زیر نیز نشان داد

$$S_n = \frac{a_۱ - a_۱ r^{n-۱}.r}{۱-r} = \frac{a_۱ - a_n r}{۱-r}$$

مثال ۱۲. اگر

$$۱+a+a^۲+\cdots+a^{n-۱} = (۱+a)(۱+a^۲)(۱+a^۴)(۱+a^۸)(۱+a^{۱۶})$$

مقدار n کدام است.

حل. طرف چپ مجموع n جمله اول تصاعد هندسی باقدر نسبت a و جمله اول یك است لذا،

$$\frac{۱-a^n}{۱-a} = (۱+a)\cdots(۱+a^{۱۶}) \Longrightarrow$$

$$۱-a^n = (۱-a)(۱+a)\cdots(۱+a^{۱۶}) = ۱-a^{۳۲} \Longrightarrow$$

$$a^n = a^{۳۲} \Longrightarrow n = ۳۲$$

مثال ۱۳. در یك تصاعد هندسی $a_۴ a_{۱۰} = \frac{۱}{۶۴}$، حاصلضرب سیزده جمله اولیه را پیدا کنید همچنین جمله هفتم را پیدا کنید

حل. $$P_{۱۳} = \sqrt{(a_۱ a_{۱۳})^{۱۳}} = \sqrt{(a_۴ a_{۱۰})^{۱۳}} = \sqrt{\left(\frac{۱}{۶۴}\right)^{۱۳}} = \frac{۱}{۸^{۱۳}}$$

$$a_۷^۲ = a_۴ a_{۱۰} = \frac{۱}{۶۴} \Longrightarrow a_۷ = \frac{۱}{۸}$$

مثال ۱۴. دریك تصاعد هندسی $a_۵ = ۱۶۲$ و $a_۸ = ۴۳۷۴$، $a_۳$ را پیدا کنید

حل. $$r = \sqrt[۸-۵]{\frac{۴۳۷۴}{۱۶۲}} = \sqrt[۳]{۲۷} = ۳ \text{ و } a_۱ r^۴ = ۱۶۲ \Longrightarrow$$

$$a_1 \times ۳^۴ = ۱۶۲ \Longrightarrow a_1 = ۲ \Longrightarrow a_۳ = ۲ \times ۳^۲ = ۱۸$$

مثال ۱۵. دریك میلیون جمله اول دوتصاعد زیرچند جمله مشترك بین آنها وجود دارد؟

۱ ،۵ ،۹ ،۱۳ ،...

۱ ،۳ ،۹ ،۲۷ ،...

حل. اگر جمله n ام تصاعد حسابی باجمله m ام تصاعد هندسی برابر باشد داریم:

$$۱+(n-۱)۴ = ۱ \times ۳^{m-۱} \Longrightarrow ۴n-۳ = ۳^{m-۱}$$ یا

$$۴n = ۳(۳^{m-۲}+۱)$$

عدد $۱+۳^k$ وقتی بر $۱+۳=۴$ بحش‌پذیر است که k یعنی $m-۲$ فرد باشد ودرنتیجه $m-۱$ زوج است.

ازطرف دیگر داریم.

$$n \leqslant ۱۰^۶ \Longrightarrow ۳^{m-۱} < ۴ \times ۱۰^۶ - ۳$$

اما $۳^{۱۴} > ۳ - ۱۰^۶ \times ۴ > ۳^{۱۳}$ پس بزرگترین‌جمله تصاعد هندسی‌که درتصاعدحسابی مشترك باشد از $۳^{۱۳}$ بزرگترنیست. بنابراین جمله‌های مشترك در دوتصاعـد دریك میلیون جمله اول عبارتند از،

$۳^۰$ ، $۳^۲$ ، $۳^۴$ ، $۳^۶$ ، $۳^۸$ ، $۳^{۱۰}$ ، $۳^{۱۲}$

۸. رابطه بین S_n و $S_{۲n}$ وبطورکلی S_m و S_n

$$\frac{S_{۲n}}{S_n} = \frac{a_1\dfrac{۱-r^{۲n}}{۱-r}}{a_1\dfrac{۱-r^n}{۱-r}} = \frac{(۱-r^{۲n})}{۱-r^n} = \frac{(۱-r^n)(۱+r^n)}{۱-r^n} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{S_{۲n}}{S_n} = ۱+r^n}$$

$$\frac{S_n}{S_m} = \frac{a_1\dfrac{۱-r^n}{۱-r}}{a_1\dfrac{۱-r^m}{۱-r}} = \frac{۱-r^n}{۱-r^m}$$

مثال ۱۶. دریك تصاعد هندسی $S_۳=۹$ و $S_۶=-۶۳$ ، $S_{۱۰}$ را پیدا کنید.

حل:
$$\frac{S_۶}{S_۳}=\frac{-۶۳}{۹}\Longrightarrow ۱+r^۳=-۷\Longrightarrow r=-۲$$

$$S_۳=۹\Longrightarrow a_۱\,\frac{r^۳-۱}{r-۱}=۹\Longrightarrow a_۱=۳\Longrightarrow S_{۱۰}=۳\times\frac{(-۲)^{۱۰}-۱}{(-۲)-۱}$$
$$=-۱۰۲۳$$

مثال ۱۷. مجموع n جمله از دنباله زیررا پیدا کنید

$$S=۹+۹۹+۹۹۹-\cdots+\underbrace{۹۹۹\ldots۹}_{n\text{ رقم}}$$

حل.
$$S=(۱۰-۱)+(۱۰^۲-۱)+(۱۰^۳-۱)+\ldots+(۱۰^n-۱)$$
$$=۱۰+۱۰^۲+۱۰^۳+\ldots+۱۰^n-n=۱۰\,\frac{۱۰^n-۱}{۱۰-۱}-n$$
$$=\frac{۱۰}{۹}(۱۰^n-۱)-n$$

۹. حد مجموع جمله‌ها دریك تصاعد هندسی نامحدود (نامتناهی)

هر گاه دریك تصاعد تعداد جمله‌ها نامتناهی باشد آنرا نامحدود می‌نامیم.

هر گاه دریك تصاعد هندسی‌نامتناهی $|r|>۱$، دراین حالت وقتی n به‌سمت بی‌نهایت‌میل کند $|r^n|$ نیز به‌سمت بی‌نهایت میل‌کرده ولذا جمله آخر به‌سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند. (بستگی به‌علامت r و $a_۱$ دارد) ودراین‌حالت مجموع جمله‌ها نیزبه‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

اما اگر در یك تصاعد هندسی نامتناهی $|r|<۱$، دراین‌صورت $|r|^n$ و لذا a_n وقتی n به سمت $+\infty$ میل‌کند (تعداد جمله‌ها به سمت بی‌نهایت میل‌کند) به‌سمت صفر میل می‌کند و دراین حالت حد مجموع جمله‌ها یعنی S برابر است با:

$$S=\lim_{n\to+\infty}S_n=a_۱\frac{۱-۰}{۱-r}=\frac{a_۱}{۱-r}$$

$$\boxed{S=\frac{a_۱}{۱-r}}$$

لازم به تذکر است که فرمول فوق را وقتی هدف پیدا کردن مجموع نامتناهی ازجمله‌ها باشد به‌کار می‌بریم ، اگر هدف مجموع تعداد متناهی از جمله‌ها در یك تصاعد هندسی نزولی باشد، همان فرمولهای کلی S_n را به‌کار می بریم.

مثال ۱۸. دریك تصاعد هندسی نزولی مجموع n جمله اول برابر است با حد مجموع سایر جمله‌ها قدرنسبت کدام است؟

حل: حد مجموع سایر جمله‌ها یعنی‌حد مجموع تمام جمله‌ها منهای مجموع n جمله‌اول بنابراین.

$$S_n = S - S_n \Longrightarrow 2S_n = S \Longrightarrow 2a_1\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$$

$$\Longrightarrow 2 - 2r^n = 1 \Longrightarrow r^n = \frac{1}{2} \quad \text{یا} \quad r = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

مثال ۱۹. اگر $ab>0$، مجموع زیررا پیدا کنید

$$S = \sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\ldots}}}}}}$$

وقتی تعداد رادیکالها بی‌نهایت شود.

حل. روش اول به‌کمك حد مجموع تصاعد هندسی نزولی،

$$S = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{12}} b^{\frac{1}{36}} \cdot a^{\frac{1}{72}} \cdot b^{\frac{1}{216}} \ldots\ldots$$

$$= \left(a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{72}+\cdots}\right)\left(b^{\frac{1}{6}+\frac{1}{36}+\cdots}\right) = \left(a^{\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{6}}}\right)\left(b^{\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}}\right)$$

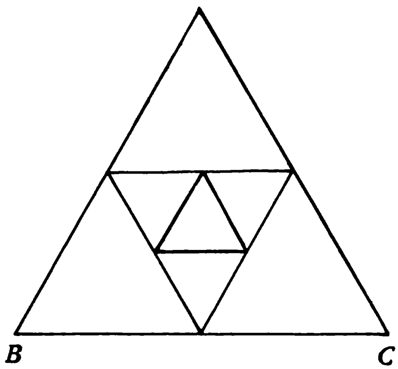
$$= a^{\frac{3}{5}} \cdot b^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{a^3 b}$$

روش دوم. دوطرف رابطه را به‌توان ۶ می‌رسانیم،

$$S^6 = a^3 b\sqrt{a\sqrt[3]{b\sqrt{a\sqrt[3]{b\ldots}}}} = a^3 bS$$

چون $S \neq 0$، لذا $S^5 = a^3 b$ یا $S = \sqrt[5]{a^3 b}$

مثال ۲۰. مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌ضلع a مفروض است.
وسطهای اضلاع آن را به‌هم وصل می‌کنیم، دوباره وسطهای اضلاع مثلث متساوی‌الاضلاع حاصل را به‌هم وصل می‌کنیم و این عمل را به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم اگر تعداد مثلثها به سمت بی‌نهایت میل کند حد مجموع مساحتها ومحیطها وارتفاعها را پیدا کنید.



حل. می‌دانیم اگر وسطهای اضلاع هرمثلث رابه‌هم وصل کنیم مثلثی‌حاصل می‌شودکه هر ضلع آن نصف هرضلع مثلث اصلی و درنتیجه محیط آن $\frac{1}{2}$محیط مثلث اصلی‌ومساحت آن $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث اصلی است لذا محیطها تصاعد هندسی نزولی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ومساحتها تصاعد هندسی نزولی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ و ارتفاعها نیز با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ تشکیل تصاعد هندسی نزولی می‌دهند پس اگر حد مجموع مساحتها را به S و ازمحیطها وارتفاعها را به‌ترتیب به p و h نشان دهیم، داریم.

$$S = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \quad \text{و} \quad p = \frac{3a}{1-\frac{1}{2}} = 6a$$

$$h=\frac{\frac{a\sqrt{۳}}{۲}}{۱-\frac{۱}{۲}}=a\sqrt{۳}$$

۱۰. توان kام جمله‌های یك تصاعد هندسی

هرگاه هر یك ازجمله‌های یك تصاعد هندسی را به توان k برسانیم جمله های حاصل نیز تشکیل یك تصاعد هندسی می‌دهند که جمله اول آن $a_۱^k$ وقدرنسبت آن r^k است و درنتیجه $a_n=a_۱^k r^{k(n-۱)}$ و $S_n=a_۱^k\frac{۱-r^{nk}}{۱-r^k}$ واگر تصاعد هندسی نزولی باشد حد مجموع توانهای kام جمله‌ها برابراست با:

$$S=\frac{a_۱^k}{۱-r^k}$$

مثال ۲۱. مجموع زیررا پیداکنید

$$S=\frac{۳}{۷}+\frac{۴}{۷^۲}+\frac{۳}{۷^۳}+\frac{۴}{۷^۴}+\cdots\cdots$$

حل. این مجموع حاصل‌جمع دوتصاعد هندسی نزولی به‌قدرنسبتهای $\frac{۱}{۷^۲}$ می‌باشد.

$$S=۳\left(\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۷^۳}+\cdots\right)+۴\left(\frac{۱}{۷^۲}+\frac{۱}{۷^۴}+\cdots\right)$$

$$=۳\,\frac{\frac{۱}{۷}}{۱-\frac{۱}{۴۹}}+۴\,\frac{\frac{۱}{۴۹}}{۱-\frac{۱}{۴۹}}=\frac{۱۱}{۱۶}$$

۱۱. درج واسطه‌های هندسی بین دوعدد

هرگاه دوعدد a و b مفروض باشند، تعداد اعدادی راکه بین a و b بوده وبا aو b تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند، واسطه‌های هندسی بین a و b می‌نامیم . پس اگر بخواهیم m واسطه هندسی بین a و b درج کنیم باید قدرنسبت تصاعدی را پیداکنیم که جمله اول

آن a وجمله آخر آن b باشد و تعداد جمله‌ها $m+2$ است درنتیجه داریم.

$$b=ar^{m+2-1} \Longrightarrow r^{m+1}=\frac{b}{a}$$

اگر m زوج باشد، $m+1$ فرد است و درنتیجه:

$$r=\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

اگر m فرد باشد، $m+1$ زوج است، به‌شرطی‌که $\frac{b}{a}>0$ ، داریم:

$$r=\pm\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

اگر $\frac{b}{a}<0$ باشد، برای r جوابی نداریم؛

این جوابها درحالتی هستند که منظور از درج m واسطه بین a و b این باشد که جمله اول a وجمله آخر b باشد درغیراین‌صورت $r=\sqrt[m+1]{\frac{a}{b}}$ یا $r=\pm\sqrt[m+1]{\frac{a}{b}}$ نیز جوابند.

مثال ۲۲. بین دوعدد ۱۶ و $\frac{1}{64}$ ، ۹ واسطه هندسی درج کرده‌ایم قدرنسبت کدام‌است.

حل.

$$m=9 \Longrightarrow r=\pm\sqrt[10]{\frac{\frac{1}{64}}{16}}=\pm\sqrt[10]{\frac{\frac{1}{2^6}}{\frac{1}{2^4}}}=\pm\sqrt[10]{\frac{1}{2^{10}}}=\pm\frac{1}{2}$$

که هردوجواب قابل‌قبول می‌باشند.

مثال ۲۳. بین دوعدد a^5، a^{12} چه تعداد واسطه هندسی با قدرنسبت $\sqrt{a}$ می‌توان درج کرد. $(a>0)$

حل.

$$\sqrt{a}=\sqrt[m+1]{\frac{a^{12}}{a^{5}}}=\sqrt[m+1]{a^{7}} \Rightarrow a^{m+1}=a^{14} \Rightarrow m+1=14 \Rightarrow m=13$$

طرفین را به‌توان $2(m+1)$ رسانده‌ایم.

۶ـ۵. تعیین کسر مولد کسر اعشاری متناوب

هرگاه k عددی n رقمی باشد، $k = abc\ldots l$ ، دراین صورت عدد اعشاری $0/kk\ldots$ یا $0/\overline{k}$ راکه درآن عدد k بی‌نهایت مرتبه تکرار می‌شود کسر متناوب ساده می‌نامیم و k را یك دوره‌گردش گوئیم که تعداد ارقام آن n است واگرعدد به صورت $x/y\overline{k}$ باشدآن راکسر متناوب مرکب گوئیم که در آن x/y، دوره غیرـگردش و k دورهٔ گردش است. مانند $0/333000=0/\overline{3}$ که کسرمتناوب ساده با دورگردش ۳ است و $3/25\overline{164}$ یك کسرمتناوب مرکب با دورهٔ گردش ۱۶۴ و دورهٔ غیر گردش ۳/۲۵ است.

برای‌تعیین کسر مولد، یك‌کسرمتناوب ساده اگر کسر $0/\overline{k}$ دارای دورهٔ گردش n رقمی باشد داریم،

$$0/\overline{k}=0/k+0/\underbrace{\ldots}_{n\ \text{صفر}}k+\ldots=\frac{k}{10^{n}}+\frac{k}{10^{2n}}+\frac{k}{10^{3n}}+\ldots$$

$$=k\left(\frac{1}{10^{n}}+\frac{1}{10^{2n}}+\ldots\right)=k\cdot\frac{\frac{1}{10^{n}}}{1-\frac{1}{10^{n}}}=\frac{k}{10^{n}-1}=\frac{k}{\underbrace{999\ldots9}_{n\ \text{مرتبه}}}$$

(داخل پرانتز یك تصاعد هندسی نزولی نا محدود با جمله اول $\frac{1}{10^{n}}$ وقدر نسبت $\frac{1}{10^{n}}$ است.)

مثال ۲۴. کسرمولد کسر اعشاری $0/\overline{12}=0/121212000$ را پیدا کنید.

حل. $0/\overline{12}=0/12+0/0012+0/000012+\cdots=$

$$\frac{12}{100}+\frac{12}{10000}+\cdots=12\times\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}$$

نتیجه. برای تعیین کسر مولد یك کسر اعشاری ساده، آنرا به‌صورت کسری می‌نویسیم که صورت آن یك دورهٔ گردش ومخرج آن به‌تعداد ارقام دورهٔ گردش ۹ باشد،

$$0/\overline{12}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33} \quad \text{یا} \quad 0/\overline{123}=\frac{123}{999}=\frac{41}{333}$$

اگر کسر به‌صورت کسر اعشاری متناوب مرکب باشد، وفرض کنیم تعداد رقمهای y برابر m باشد، آنگاه،

$$x/y\bar{k}=x+\frac{y}{10^m}+k\left(\frac{1}{10^{n+m}}+\frac{1}{10^{m+2n}}+\cdots\right)=$$

$$x+\frac{y}{10^m}+\left(\frac{k}{10^m(10^n-1)}\right)=x+\frac{y(10^n-1)+k}{10^m(10^n-1)}=x+\frac{yk-y}{\underbrace{99\cdots9}_{n}\underbrace{0000}_{m}}$$

(داخل پرانتز تصاعد هندسی نزولی با قدرنسبت $\frac{1}{10^n}$ و جمله اول $\frac{1}{10^{n+m}}$ است.)

نتیجه. برای تعیین کسر مولد کسر اعشاری متناوب مرکب $x/y\bar{k}$ که x/y دورهٔ غیر گردش و k دورهٔ گردش است ابتدا x را کنار می‌گذاریم وکسری می‌نویسیم که درصورت آن یك دورهٔ غیر گردش و گردش با هم نوشته شده و دورهٔ غیر گردش از آن کم شده باشد و درمخرج به‌تعداد ارقام دورهٔ گردش ۹ و به‌تعداد ارقام دورهٔ غیر گردش صفر گذاشته شده باشد، سپس مقدار x را به‌آن اضافه می‌کنیم کسر مولد مشخص می‌شود.

مثال ۲۵. کسرمولد، کسراعشاری $3/21\overline{35}$ را پیداکنید

حل. $$3/21\overline{35}=3+\frac{2135-21}{9900}=3+\frac{2114}{9900}=3+\frac{1057}{4950}$$

$$=\frac{3\times4950+1057}{4950}=\frac{15907}{4950}$$

۵ـ۷. دنباله تصاعد توافقی

هرگاه جملات یك تصاعد عددی را معکوس کنیم یك دنباله بدست می‌آید که آنرا دنباله تصاعد توافقی می‌نامیم. بنابراین دنباله زیر یك دنباله تصاعد توافقی است.

$$\frac{۱}{a}،\frac{۱}{a+d}،\frac{۱}{a+۲d}،\cdots،\frac{۱}{a_۱+(n-۱)d}$$

خواصی از تصاعد توافقی

۱. اگر H واسطه توافقی بین a و b باشد، یعنی a و H و b تشکیل تصاعد توافقی‌دهند آنگاه $\frac{۱}{b}$ و $\frac{۱}{H}$ و $\frac{۱}{a}$ تشکیل تصاعد عددی می‌دهند، بنابراین، $\frac{۱}{H}-\frac{۱}{a}=\frac{۱}{b}-\frac{۱}{H}$ یا

$$\boxed{\frac{۲}{H}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$$

همچنین،

$$H=\frac{۲ab}{a+b}$$

۲. اگر A و G و H به‌ترتیب واسطه‌های حسابی، هندسی وتوافقی بین b و a باشد،

$$A=\frac{a+b}{۲}،\quad G=\sqrt{ab}\quad و\quad H=\frac{۲ab}{a+b}$$

درنتیجه داریم: $A.H=G^۲$ یعنی G واسطه هندسی بین A و H نیز می‌باشد.

۳. برای درج m واسطـه توافقـی بین دو عدد a و b کافی است m واسطـه عددی بین $\frac{۱}{a}$ و $\frac{۱}{b}$ درج کنیم.

مثال ۲۶. بین دوعدد $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۳۵}$ تعداد ۷ واسطه توافقی درج کنید.

حل. ابتدا بین ۳ و ۳۵ تعداد ۷ واسطه عددی درج می کنیم

$$d=\frac{۳۵-۳}{۸}=۴\implies$$

$$\frac{۱}{۳}،\frac{۱}{۷}،\frac{۱}{۱۱}،\frac{۱}{۱۵}،\frac{۱}{۱۹}،\frac{۱}{۲۳}،\frac{۱}{۲۷}،\frac{۱}{۳۱}،\frac{۱}{۳۵}$$

۸ـ۵. دنباله تفاضلات متناهی

فرض‌کنیم a_1، a_2، a_3، ... a_n ، دنباله‌ای ازاعداد باشد. آنگاه دنباله زیر را یك دنباله تفاضلات متناهی دنباله فوق یا مجموعه تفاضلات متناهی دنباله فوق می‌نامیم.

$$a_2-a_1 ، a_3-a_2 ، a_4-a_3 ، \ldots . a_n-a_{n-1} ، \ldots ،$$

دنباله تصاعد عددی همواره دارای یك دنباله تفاضلات متناهی است که مجموعه تفاضلات متناهی آن یك دنباله ثابت است.

$$a_1 ، a_1+d ، a_1+2d , a_1+3d , \ldots$$

که دنباله تفاضلات متناهی آن دنباله ثابت زیراست

$$d ، d ، d ، \ldots .$$

بطورکلی دنباله تفاضلات متناهی، دنباله‌ای‌که جمله‌های آن ازیك چندجمله‌ای درجه اول بدست‌آید یعنی جمله عمومی آن نسبت به n از درجه اول باشد ($an+b$) هموارهٔ دنباله تفاضلات متناهی‌آن ، یك دنباله ثابت است. اما اگر دنباله‌ای‌که جمله‌هایش ازیك چندجمله‌ای درجه دوم حاصل می‌شود را درنظـربگیریم، اولین مجموعه تفاضلات متناهی آن دنباله ثابتی نیست اما دومین مجموعهٔ تفاضلات متناهی‌آن دنباله‌ای ثابت‌است.

در واقع اولین دنباله تفاضلات متناهی‌آن تشکیل تصاعد عددی می‌دهند به عنوان مثال رابطه n^2+2n+2 را درنظر می‌گیریم دنباله‌ای راکه این رابطه تولید می‌کند به صورت زیراست

۵ ،۱۰ ،۱۷ ،۲۶ ،۳۷ ،۵۰ ، . . .

اولین مجموعه تفاضلات متناهی این دنباله عبارت‌است از:

۵ ،۷ ،۹ ،۱۱ ،۱۳ ، . . .

که یـك دنباله تصاعد عددی است، دومین مجموعه تفاضلات متناهی آن به صورت زیراست

۲ ،۲ ،۲ ،. . . .

اگریك دنباله ، مجموعه‌ای از تفاضلات متناهی ثابت به وجود آورد می‌توان جمله مولد یا جمله عمومی این دنباله را مشخص‌کرد.

درمورد دنباله‌های‌درجه اول $an+b$، چون‌خود دنباله تصاعد عددی است(ضریب n، قدرنسبت است) به‌سادگی جمله عمومی یا مولد مشخص می‌شود

اگر جمله مولد، چندجمله‌ای درجه دوم، $an^{2}+bn+c$ باشد این‌چندجمله‌ای دنباله زیر را تولید می کند.

$$K\ :\ a+b+c\ ،\ ۴a+۲b+c\ ،\ ۹a+۳b+c\ ،\ \ldots$$

اولین دنباله تفاضلات متناهی آن دنباله زیراست.

$$K_{۱}\ :\ ۳a+b\ ،\ ۵a+b\ ،\ \ldots$$

دومین دنباله تفاضلات متناهی آن دنباله زیراست.

$$K_{۲}\ :\ ۲a\ ،\ ۲a\ ،\ ۲a\ ،\ \ldots$$

بنابراین اولین‌جمله دنباله،که با $an^{2}+bn+c$ تولیدمی‌شود $a+b+c$، واولین جملهٔ مجموعه تفاضلات مرتبه اول یعنی $K_{۱}$ برابر $۳a+b$ و اولین جمله مجموعه تفاضلات مرتبه دوم یعنی $K_{۲}$ برابر $۲a$ می‌باشد، لذا می‌توانیم جمله مولد را پیداکنیم.

مثال ۲۷. جمله عمومی یا مولد دنباله زیررا مشخص کنید.

$$۰\ ،\ ۶\ ،\ ۱۴\ ،\ ۲۴\ ،\ ۳۶\ ،\ \ldots$$

حل. تفاضلات متناهی مرتبه اول:

$$۶\ ،\ ۸\ ،\ ۱۰\ ،\ ۱۲\ ،\ \ldots$$

تفاضلات متناهی مرتبه دوم:

$$۲\ ،\ ۲\ ،\ ۲\ ،\ \ldots$$

بنابراین:

$$\begin{cases} ۲a=۲ \\ ۳a+b=۶ \\ a+b+c=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a=۱ \\ b=۳ \\ c=-۴ \end{cases} \Longrightarrow a_{n}=n^{۲}+۳n-۴$$

مثال ۲۸. در دنباله، ... ، ۱۷ ، ۱۰ و۵ ، ۲ جمله بیستم کدام است؟

حل.

$$K_{۱}\ :\ ۳\ ،\ ۵\ ،\ ۷\ ،\ \ldots$$

$$K_{۲}\ :\ ۲\ ،\ ۲\ ،\ ۲\ ،\ \ldots$$

درنتیجه:

$$\begin{cases} a+b+c=۲ \\ ۳a+b=۳ \\ ۲a=۲ \end{cases}$$

که $a=۲$ و $b=۰$ و $c=۱$ پس $a_n=n^۲+۱$ درنتیجه $a_{۲۰}=۲۰^۲+۱=۴۰۱$
به‌همین‌ترتیب اگر جمله مولد چندجمله‌ای درجه سوم $an^۳+bn^۲+cn+d$ باشد جمله اول‌دنباله $a+b+c+d$ وجمله‌اول $K_۱$، دنباله تفاضلات‌متناهی‌مرتبه اول $۷a+۳b+c$ وجمله‌اول $K_۲$، $۱۲a+۲b$ وجمله اول $K_۳$، $۶a$ می‌باشد.

۵ـ۹. دنباله‌های تراجعی یا استقرایی

روش دیگری برای تعریف دنباله‌ها وجود دارد، وآن تعریف به‌استقراء است. به این‌ترتیب‌که، ابتدا k جمله اول دنباله را تعیین وسپس قاعده‌ای را بیان می‌کنیم که جمله $a_{k+۱}$ را برحسب $a_۱$، . . . .، a_k ویا احیاناً n، محاسبه می‌کند . این قاعده را رابطه تراجعی یا استقرایی می‌نامیم.

به‌عنوان مثال، اگر $a_۱=۰$ و به‌ازاء $n\geqslant ۱$، $a_{n+۱}=۵a_n$ در این‌صورت دنباله $\{a_n\}$ یا $f(n)$ به‌ازای هرعدد طبیعی n تعریف شده است برای محاسبه جمله nام یا جمله عمومی داریم،

$$\frac{a_۲}{a_۱}=۵ ،\frac{a_۳}{a_۲}=۵ ، . . . \frac{a_k}{a_{k-۱}}=۵$$

اگراین تساوی‌ها را درهم ضرب‌کنیم داریم،

$$\frac{a_۲}{a_۱}\cdot\frac{a_۳}{a_۲}\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{a_k}{a_{k-۱}}=۵^{k-۱}\Longrightarrow\frac{a_k}{a_۱}=۵^{k-۱}$$

ولذا $a_k=۱۰\times ۵^{k-۱}=۲\times ۵^k$ یا جمله عمومی دنباله $a_n=۲\times ۵^n$ است.

مثال ۲۹. هرگاه دنباله $f(n)$. با رابطه $f(n+۱)=\frac{۵f(n)+۱}{۵}$ بازاء $n\geqslant ۱$ و $f(۱)=۲$ تعریف شده باشد جمله عمومی، $f(n)$ را پیداکنید.

حل. رابطه فوق را می‌توان به‌صورت $f(n+۱)-f(n)=\frac{۱}{۵}$ نوشت حال اگر به ترتیب از $n=۱$ شروع‌کرده و در رابطه قراردهیم چنین داریم:

$$n=1 ،f(2)-f(1)=\frac{1}{5}$$

$$n=2 ،f(3)-f(2)=\frac{1}{5}$$

$$\cdots\cdots \qquad \Longrightarrow f(k)-f(1)=(k-1)\cdot\frac{1}{5}$$

$$n=k-1 ،f(k)-f(k-1)=\frac{1}{5}$$

وچون $2=f(1)$، لذا $f(k)=2+(k-1)\cdot\frac{1}{5}$ و درنتیجه $f(n)=\frac{n}{5}+\frac{9}{5}$

با کمی دقت مشاهده می‌کنیم که این دنباله چون تفاضل هر جمله‌اش ازجمله ماقبل آن مقداری است ثابت پس یك دنباله تصاعد عددی با قدرنسبت $\frac{1}{5}$ و جمله اول $a_1=f(1)=2$ است پس،

$$f(n)=\frac{n}{5}+\frac{9}{5} \text{ یا } f(n)=a_n=2+(n-1)\frac{1}{5}$$

مثال ۳۰. هر گاه به‌ازاء هر دو عدد طبیعی m و n، $f(n+m)=f(n)+f(m)$، اگر $f(1)\neq 0$ باشد، $\frac{f(n)}{f(1)}$ را پیدا کنید.

حل. اگر $m=1$ قرار دهیم، $f(n+1)=f(n)+f(1)$ یا $f(n+1)-f(n)=f(1)$ که یك دنباله تصاعد عددی با قدرنسبت $f(1)$ است پس $f(n)=f(1)+(n-1)f(1)$ یا $f(n)=nf(1)$ و لذا $\frac{f(n)}{f(1)}=n$

با توجه به‌مثالهای فوق درمی‌یابیم که دنباله‌های تصاعد عددی وهندسی را می‌توان با روابط تراجعی تعریف کرد

دنباله تصاعد عددی با قدرنسبت d وجمله اول a، چنین تعریف می‌شود.

$$a_1=a \text{ و } a_n=a_{n-1}+d \quad (n\geqslant 2)$$

یا $f(1)=a$ و بازاء هر $n\geqslant 2$ ، $f(n)=f(n-1)+d$

دنباله تصاعد هندسی با قدرنسبت r وجمله اول a، چنین تعریف می‌شود.

$$a_1=a \text{ و } a_n=a_{n-1}r \text{ ، } n\geqslant 2$$

یا

$$f(n)=rf(n-1) \text{ ، } n\geqslant 2 \text{ وبازاء هر } f(1)=a$$

در دنباله‌ای که به استقراء تعریف شده است، گاه می‌تـوان جمله‌ی دارای اندیس n یعنی a_n ازدنباله‌را برحسب n بیان‌کردکه درمثال‌های فوق چند نمونه از آنها را مشاهده کردیم.

مثال ۳۱. اگر $f(1)=1$ وبازاء هر $n\geqslant 2$، $f(n+1)=f(n)+a^n$ $(a\neq 0,\pm 1)$ $f(n)$ را پیداکنید.

حل. $f(n+1)-f(n)=a^n$ ولذا:

$$\begin{cases} n=1 \text{ ، } f(2)-f(1)=a \\ n=2 \text{ ، } f(3)-f(2)=a^2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ n=k-1 \text{ ، } f(k)-f(k-1)=a^{k-1} \end{cases}$$

بنابرایـن، $f(k)=1+a+a^2+\dots+a^{k-1}$ که طرف راست، مجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی است درنتیجه، $f(n)=\dfrac{a^n-1}{a-1}$ باکمی‌دقت‌مشاهده می‌کنیم‌که این دنباله، دنباله مجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی با قدرنسبت a و جمله اول یك است.

مثال ۳۲. در دنباله $a_n=n^2$ ، S_2 مجموع n جمله اول را پیداکنید.

حل.

$$S_2=1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2$$

اتحاد زیر را درنظرمی‌گیریم،

$$(i+1)^3=i^3+3i^2+3i+1$$

ومقادیر i را ازیك تا n قرار داده تساوی‌ها را با هم جمع می‌کنیم

$$\begin{aligned} &i=1 \text{ ، } 2^3=1^3+3\times 1^2+3\times 1+1 \\ &i=2 \text{ ، } 3^3=2^3+3\times 2^2+3\times 2+1 \\ &i=3 \text{ ، } 4^3=3^3+3\times 3^2+3\times 3+1 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &i=n \text{ ، } (n+1)^3=n^3+3\times n^2+3\times n+1 \end{aligned}$$

$$(n+۱)^۳=۳S_۲+۳\cdot\frac{n(n+۱)}{۲}+n+۱ \Longrightarrow S_۲=\frac{۱}{۶}n(n+۱)(۲n+۱)$$

مجموع اعداد طبیعی ازیك تا n را به $S_۱$ نشان می‌دهیم، $S_۱=\frac{n(n+۱)}{۲}$ مجموع
توان دوم‌های اعداد طبیعی ازیك تا n را به $S_۲$ نشان می‌دهیم،

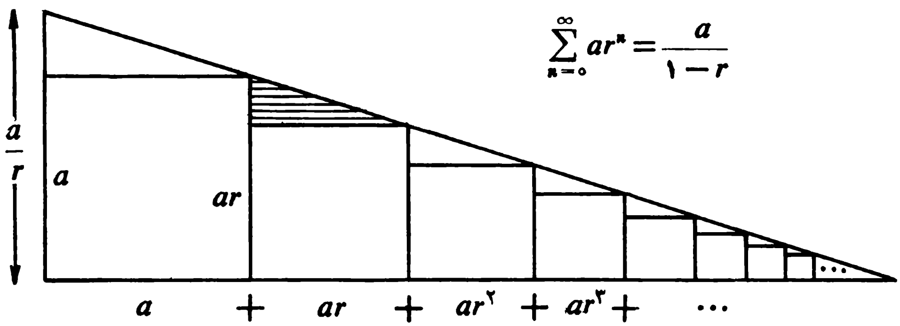
$$S_۲=۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲=\frac{۱}{۶}n\,(n+۱)\,(۲n+۱)$$

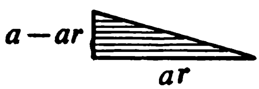
اگرمجموع توان سوم‌های اعداد طبیعی را به $S_۳$ نشان دهیم با استفاده از اتحاد $(i+۱)^۴=i^۴+۴i^۳+۶i^۲+۴i+۱$ ثابت کنید،

$$S_۳=۱^۳+۲^۳+۳^۳+\cdots\cdots+n^۳=\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)^۲=S_۱^۲$$

اثبات بدون توضیح:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n=\frac{a}{۱-r}$$





$$\frac{a-ar}{ar}=\frac{\frac{a}{r}}{a+ar+ar^۲+ar^۳+\cdots} \Longrightarrow$$

$$a+ar+ar^۲+ar^۳+\cdots=\frac{a}{۱-r}$$

مسائل دنباله‌ها (فصل پنجم)

۱ـ اگر a_m و a_n و a_p به‌ترتیب جملات mام و nام و pام یك تصاعد هندسی باشند ثابت کنید.

$$a_m^{n-p} \cdot a_n^{p-m} \cdot a_p^{m-n} = ۱$$

۲ـ مجموع زیررا حساب کنید

$$S = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{۲} + \left(x^{۲} - \frac{1}{x^{۲}}\right)^{۲} + \dots + \left(x^{n} - \frac{1}{x^{n}}\right)^{۲}$$

۳ـ مجموع چهارجمله متوالی یك تصاعد عددی ۲۲ وحاصلضرب آنها ۲۸۰ است قدر نسبت را پیدا کنید.

۴ـ مجموع n جمله از دنباله زیر را پیداکنید

$$S = ۳ + ۳۳ + ۳۳۳ + \dots$$

۵ـ اگر a و b و c و d جملات متوالی یك تصاعد هندسی باشند ثابت کنید

$$(b-c)^{۲} + (c-a)^{۲} + (d-b)^{۲} = (a-d)^{۲}$$

۶ـ اگر $|ar| < ۱$، حد مجموع زیررا پیداکنید

$$S = ۱ + (۱+a)r + (۱+a+a^{۲})r^{۲} + (۱+a+a^{۲}+a^{۳})r^{۳} + \dots$$

۷ـ اگر $p^{۲}$ و $q^{۲}$ و $r^{۲}$ تشکیل تصاعد عددی دهند ثابت کنید $\frac{۱}{p+q}$ ، $\frac{۱}{r+p}$ ، $\frac{۱}{q+r}$ نیز تصاعد عددی تشکیل می‌دهند

۹ـ ثابت کنید اگر در یك تصاعد عددی $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^{۲}}{n^{۲}}$ باشد آنگاه $\frac{a_m}{a_n} = \frac{۲m-۱}{۲n-۱}$

۱۰ـ حدمجموع جملات یك تصاعد هندسی نزولی ۴ و حد مجموع مکعبات جملات آن ۱۹۲ است این تصاعد را مشخص کنید.

۱۱ـ جمله nام وسپس جمله صدم دنباله زیررا پیداکنید

۱، ۴، ۱۰، ۲۰، ۳۵، . . .

۱۲ـ اگر اضلاع مربعی را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم واز نقاط تقسیم خطهائی به موازات اضلاع رسم کنیم (صفحه شطرنجی) تعداد مربعهای حاصل را پیداکنید

۱۳ـ درسری تصاعد هندسی $S=۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۹}+\ldots$ به ازاء چه مقدار n تفاضل S_n از S کمتراز ۰/۰۰۰۰۱ است.

۱۴ـ با استفاده از رابطه $\frac{۱}{k(k+۱)}=\frac{۱}{k}-\frac{۱}{k+۱}$ حاصل زیررا پیداکنید

$$S=\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۲\times ۳}+\frac{۱}{۳\times ۴}+\ldots+\frac{۱}{n(n+۱)}$$

۱۵ـ حاصل عبارت زیررا محاسبه کنید

$$A=۱!+۲\cdot ۲!+۳\cdot ۳!+\ldots+n\cdot n!$$

۱۶ـ اگر $|p|<۱$ و $|r|<۱$ و

$$\begin{cases} S=۱+p+p^۲+\ldots \\ S'=۱+r+r^۲+\ldots \\ K=۱+pr+p^۲r^۲+\ldots \end{cases}$$

ثابت کنید: $$K=\frac{SS'}{S+S'-۱}$$

۱۷ـ اگر $S_۱$ و $S_۲$ و . . . S_p به‌ترتیب حد مجموع بی‌نهایت جمله از تصاعدهای هندسی باشند که جمله اول آنها به‌ترتیب ۱، ۲، ۳، . . .، p وقدرنسبت آنها به‌ترتیب $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، . . .، $\frac{۱}{p+۱}$ ثابت کنید:

$$S_۱+S_۲+S_۳+\ldots+S_p=\frac{p(p+۳)}{۲}$$

۱۸ـ اگر $S_n=a+ar+ar^۲+\ldots+ar^{n-۱}$ مطلوبست محاسبه

$$S=S_۱+S_۲+\ldots+S_n$$

۱۹ـ ثابت کنید $$\frac{۰}{۱!}+\frac{۱}{۲!}+\frac{۲}{۳!}+\ldots+\frac{n-۱}{n!}=۱-\frac{۱}{n!}$$

تستهای دنباله

۱ــ دریك تصاعد عددی، مجموع n جملــه اول برابراست با نصف مجموع n جمله بعد از آنها، نسبت مجموع $۳n$ جمله اول، $S_{۳n}$ به n جمله اول S_n کدام است.

الف ــ به n بستگی دارد ب ــ ۳ ج ــ ۶ د ــ $\frac{۱}{۳}$

۲ــ اگر $\frac{۱}{b-a}$ و $\frac{۱}{۲b}$ و $\frac{۱}{b-c}$ تشکیل تصاعد عددی دهند کدام درست است.

الف ــ a و b و c نیز تصاعد عددی تشکیل می‌دهند

ب ــ $b=a+c$

ج ــ a و b و c تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند

د ــ $b^{۲}=ab+ac$

۳ــ اگر $S=\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳\ldots}}}$ وقتی تعداد رادیکالها بی‌نهایت باشد S برابراست با؟

الف ــ $\frac{۱}{۳}$ ب ــ ۱ ج ــ $\frac{۱}{۲}$ د ــ ۳

۴ــ مربعی به‌ضلع a مفروض است وسطهای اضلاع آنرا متوالیاً بهم وصل می‌کنیم واین عمل را به‌همین تــرتیب ادامه می‌دهیــم اگر تعداد مربعها به سمت بی‌نهایت میل کند کدام درست‌است .

الف ــ حدمجدوع محیطها $۴a(۲+\sqrt{۲})$ است

ب ــ حدمجموع مساحتها $۲a^{۲}$ است

ج ــ حدمجموع قطرها $۲a(\sqrt{۲}+۱)$ است د ــ هرسه

۵ـ دریك تصاعد هندسی با جمله اول a وقدرنسبت r، هرجملـه را ازجمله بعدی آن کم می‌کنیم دنباله‌ای که حاصل می‌شود چگونه است؟

الف ـ تصاعدی عددی با قدرنسبت $r-1$

ب ـ تصاعدی هندسی با قدرنسبت $r(r-1)$

ج ـ تصاعدی هندسی با قدرنسبت r

د ـ تصاعدی هندسی با قدرنسبت $r-1$

۶ـ دریك تصاعد هندسی $a_n=\sqrt{7^n}$ اگرجمله اول‌وقدرنسبت برابر باشند قدرنسبت برابر است با

الف ـ ۷ ب ـ $\sqrt{7}$ ج ـ ۴۹ د ـ $\frac{1}{\sqrt{7}}$

۷ـ دریك تصاعد حسابی $S_n=n^2+5n$، a_{10} برابراست با

الف ـ ۲۶ ب ـ ۲۴ ج ـ ۱۹ د ـ ۲۱

۸ـ دهمین جمله از دنباله $2^2+6^2+10^2+\ldots$

الف ـ 40^2 ب ـ 38^2 ج ـ 42^2 د ـ 37^2

۹ـ در دنباله ...، ۱۵، ۱۰، ۶، ۳، ۱ جمله بیستم کدام است

الف ـ ۲۱۰ ب ـ ۲۰۰ ج ـ ۲۱۰۰ د ـ ۱۰۵

۱۰ـ در دنباله ...، $\frac{17}{5}$، $\frac{14}{4}$، $\frac{11}{3}$، ۴، ۵ جمله چهلم برابراست با:

الف ـ $\frac{61}{20}$ ب ـ ۳۰ ج ـ $\frac{121}{40}$ د ـ $\frac{61}{40}$

۱۱ـ دریك تصاعد حسابی مجموع سه جمله متوالی ۱۵ وحاصلضرب آنها ۸۰ است قدر نسبت کدام است.

الف ـ ۵ ب ـ ۳ ج ـ ۳− د ـ ۳±

۱۲ـ اگر $(x+y+z)(x-y+z)=x^2+y^2+z^2$ کدام درست است.

الف ـ x و y و z متوالی‌اند ب ـ x و y و z به‌تصاعد هندسی‌می‌باشند

ج ـ x وy وz به‌تصاعد عددی‌اند د ـ x وy وz اعدادی مجذورکامل می‌باشند

۱۳ـ دریك تصاعد عددی که ۲۳ جمله دارد جمله وسطی ۳۲ است مجموع جمله‌ها کدام است.

الف ـ ۷۳۶ ب ـ ۷۰۴ ج ـ ۱۴۷۲ د ـ ۷۹۸

۱۴ـ بین دوعدد $a^{۷}$ و $a^{۲۰}$ ($a>۰$) ۲۵ واسطه هندسی درج کرده‌ایم قدرنسبت کدام است.

الف ـ a ب ـ $\sqrt{a}$ ج ـ $\sqrt[۳]{a}$ د ـ $a^{۲}$

۱۵ـ دریك تصاعد عددی مجموع جملات، $S_n=۳n^{۲}-۴n$ است قدرنسبت برابراست با؟

الف ـ ۶ ب ـ ۵ ج ـ ۴ د ـ ۳

۱۶ـ دریك تصاعد هندسی نامحدود هرجمله برابراست با حد مجموع سایرجمله‌های بعد از آن قدرنسبت کدام است؟

الف ـ ۳ ب ـ $\frac{۱}{۲}$ ج ـ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ د ـ $\frac{۱}{۴}$

۱۷ـ کسرمولد عدد اعشاری متناوب $۰/۵۸\overline{۳}$ کدام است.

الف ـ $\frac{۵۸۳}{۱۰۰۰}$ ب ـ $\frac{۵۲۵}{۹۹۰}$ ج ـ $\frac{۷}{۱۲}$ د ـ $\frac{۳۵}{۳۶}$

۱۸ـ دریك تصاعد عددی $a_{۷}=۲۰$، حاصل $a_{۳}+a_{۱۱}+a_{۶}+a_{۸}$ برابراست با:

الف ـ ۲۰ ب ـ ۴۰ ج ـ ۸۰ د ـ ۶۰

۱۹ـ دریك تصاعد هندسی نامتناهی هرجمله سه‌برابرمجموع جملات بعد ازخودش‌است قدرنسبت برابراست با؟

الف ـ $\frac{۱}{۲}$ ب ـ $\frac{۱}{۳}$ ج ـ $\frac{۱}{۴}$ د ـ $\frac{۳}{۴}$

۲۰ـ دوتصاعد حسابی درجمله اول مشترکند و قدرنسبت دومی مجـذور قدرنسبت اولی است تفاوت جمله‌های nام این دوتصاعد کدام است؟

الف ـ $(n-۱)d^{۲}$ ب ـ $(n-۱)(d^{۲}-d)$

ج ـ $nd^{۲}$ د ـ $nd(d-۱)$

۲۱ـ دریـك تصاعد عددی داریم، $a_{۱}+a_{۲}+a_{۳}=۱۵$ و $a_{۶}+a_{۷}+a_{۸}=۶۰$ جمله $a_{۱۲}$ برابراست با.

الف ـ ۱۰۵ ب ـ ۱۲۰ ج ـ ۶۰ د ـ ۳۵

۲۲ـ اگر $A=۲۰^۲-۱۹^۲+۱۸^۲-۱۷^۲+\dots+۱^۲-۲^۲$ آنگاه A کدام‌است؟

الف ـ ۲۰۰ ب ـ ۲۱۰ ج ـ ۴۲۰ د ـ ۲۲۰

۲۳ـ مجموع $۲n+۱$ جمله تصاعد حسابی ۱۴۳ وجمله وسط ۱۳ است ، تعداد جملات برابراست با:

الف ـ ۳ ب ـ ۴ ج ـ ۵ د ـ ۶

۲۴ـ اگر $F(۱)=F(۲)=F(۳)=۱$ و $F(n+۱)=\dfrac{F(n)\,F(n-۱)+۱}{F(n-۲)}$

برای $n\geqslant ۳$، آنگاه $F(۶)$ برابراست با:

الف ـ ۷ ب ـ ۱۱ ج ـ ۳ د ـ ۲۶

۲۵ـ دریك تصاعد عددی $a_{۵n-۳}=\frac{۵}{۳}(۲n-۱)$ جمله هفدهم کدام است.

الف ـ ۱۲ ب ـ $\frac{۳۵}{۳}$ ج ـ $\frac{۳۴}{۳}$ د ـ ۱۱

۲۶ـ دریك تصاعد عددی مجموع جمله‌های چهارم وششم وپانزدهم وهفدهم برابر ۱۹۲ است $S_{۲۰}$ کدام است.

الف ـ ۹۶۰ ب ـ ۱۹۲۰ ج ـ ۴۸۰ د ـ ۷۲۰

۲۷ـ دریك تصاعد عددی، $S_n-S_{n-۱}=۳n-۲$ مجموع ۲۵ جمله اولیه‌کدام‌است.

الف ـ ۹۲۵ ب ـ ۱۸۵۰ ج ـ ۹۰۰ د ـ ۸۲۵

۲۸ـ دریك تصاعد هندسی نزولی $a_۱=۳$ وحد مجموع جمله‌ها $\frac{۷}{۲}$ است حد مجموع مربعات جمله‌هاکدام است.

الف ـ $\frac{۴۹}{۴}$ ب ـ $\frac{۱۴۷}{۱۶}$ ج ـ $\frac{۱۶}{۱۴۷}$ د ـ $\frac{۱۴۱}{۱۶}$

۲۹ـ اگر a و b و c سه جمله متوالی یك تصاعد هندسی باشند حاصل عبارت $a^۲b^۲c^۲\left(\frac{۱}{a^۳}+\frac{۱}{b^۳}+\frac{۱}{c^۳}\right)$ برابراست با؟

الف ـ $b^۳$ ب ـ $a^۳+b^۳+c^۳$

ج ـ $b^۳+c^۳$ د ـ ۱

۳۰ـ درمعادله $x^2 - mx + 2 = 0$ ، ۴ و $x' + x''$ و $x'x''$ تشکیل تصاعد عددی می‌دهند m برابر است با؟

الف ـ ۳ ب ـ ۴ ج ـ ۶ د ـ ۹

۳۱ـ دریك تصاعد هندسی با $(r > 0)$، $S_{12} = 65 S_6$ قدر نسبت کدام است

الف ـ $\sqrt[3]{2}$ ب ـ $\sqrt[4]{8}$ ج ـ $\sqrt[3]{4}$ د ـ ۲

۳۲ـ دریك تصاعد هندسی نزولی نسبت مجموع چهار جمله اول به حد مجموع جمله‌ها برابر $\frac{80}{81}$ است قدر نسبت کدام است.

الف ـ $\frac{1}{9}$ ب ـ $\frac{1}{3}$ ج ـ $\pm\frac{1}{3}$ د ـ $\pm\frac{1}{9}$

۳۳ـ بین دوعدد ۱/۱ و ۱/۹ ـ تعداد $2n+1$ واسطه حسابی درج کرده‌ایم جمله‌وسطی این واسطه‌ها برابر است با؟

الف ـ $\frac{3}{n+1}$ ب ـ ۰/۸ ج ـ $\frac{3}{n-1}$ د ـ ۰/۴

۳۴ـ دنباله‌ای ازمثلثهای متساوی‌الاضلاع چنان می‌سازیم که رأسهای هریك بر وسطهای دیگری واقع باشد کدام درست است؟

الف ـ حدمجموع محیطها $6a$ است

ب ـ حد مجموع مساحتها $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$ است.

ج ـ الف و ب و د

د ـ حد مجموع ارتفاعها $a\sqrt{3}$ است

۳۵ـ حاصل، $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)$ برابراست با.

الف ـ $\frac{1}{n}$ ب ـ $\frac{2}{n}$

ج ـ $\frac{2(n-1)}{n}$ د ـ $\frac{2}{n(n+1)}$

۳۶- در دنباله $x+a$ و $x^{۲}+۲a$ و $x^{۳}+۳a$ و ... مجموع نه‌جمله اول برابر است با:

الف- $\frac{x^{۱۱}-x}{x-۱}+۴۵a$ ب- $۴۵a+\frac{x^{۱۰}-x}{x-۱}$

ج- $\frac{۴۵a+x-x^{۱۰}}{۱-x}$ د- $\frac{x^{۱۰}-۴۵a}{x-۱}$

۳۷- اگر $S=۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}-\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۳۲}+\frac{۱}{۶۴}-\frac{۱}{۱۲۸}-\dots$ ، وقتی تعداد جمله‌ها به بی‌نهایت میل کند S برابر است با:

الف- صفر ب- $\frac{۲}{۷}$ ج- ۲ د- $\frac{-۲}{۷}$

۳۸- اگر $\log_x^a$ و $\log_x^b$ و $\log_x^c$ به‌تصاعد عددی باشند کدام درست است؟

الف- $a+c=۲b$ ب- $ac=b^{۲}$

ج- $abc=۱$ د- $a^{۲}=bc$

۳۹- حاصل $A=\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\dots}}}$ برابر است با:

الف- $\sqrt{۳}$ ب- ۲ ج- $۲\sqrt{۲}$ د- $+\infty$

۴۰- چند عدد مربع کامل، سه‌رقمی وجود دارد؟

الف- ۳۱ ب- ۳۲ ج- ۲۲ د- ۲۱

۴۱- در رشته $t_۱=۵$ و به‌ازاء $n\geqslant ۱$، $t_{n+۱}=۴t_n$، جمله nام کدام است
(کنکور ریاضی ۶۷)

الف- $n+۴$ ب- $۳n+۲$

ج - $۵\times ۴^{n-۱}$ د- $۵\times ۴^{۲n-۲}$

۴۲- اگر a و b و c سه جمله متوالی یك تصاعد عددی و $a>b>c>۰$ کدام درست است؟

الف- $a^{۲}+c^{۲}<۲b^{۲}$ ب- $a^{۲}+c^{۲}>۲b^{۲}$

ج - $a^{۲}+c^{۲}=۲b^{۲}$ د- $a^{۲}+c^{۲}\geqslant ۲b^{۲}$

۴۳ـ جمله عمومی یك تصاعد هندسی $(n \geqslant ۱)$ $a_n = ۲ \left(-\frac{۱}{۲}\right)^n$ است حد مجموع کدام است؟ (کنکور تجربی ۶۵)

الف ـ -۲ ب ـ $\frac{-۲}{۳}$ ج ـ $\frac{۲}{۳}$ د ـ $+۲$

۴۴ـ دریك تصاعد عددی مجموع جمله‌های دوم وچهارم ونهم برابر۳۳ است جمله پنجم کدام است؟

الف ـ ۱۰ ب ـ ۱۱ ج ـ ۱۲ د ـ ۳

فصل ششم

۶. معادلات و نامعادلات

درفصل اول معادله ونامعادله یک‌مجهولی درجه اول را موردبررسی قراردادیم اکنون در این فصل معادلات و نامعادلات درجه دوم وسپس درحالتهای کلـی‌تری بعضـی از انواع معادلات ونامعادلات را بررسی خواهیم کرد.

۱ـ۶. معادله یک‌مجهولی درجه دوم

معادله بصورت، $ax^۲+bx+c=۰$ راکه a و b و c اعداد حقیقی هستند با شرط $a\neq ۰$، معادله یک‌مجهولی درجه دوم یا به‌اختصار معادله درجه دوم می‌نامیم.

الف. اگر $b=۰$، معادله بصورت، $ax^۲+c=۰$، است که با شرط $a\neq ۰$ ومختلف‌العلامت بودن a و c دارای دوجواب قرینه، $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$می‌باشد. اگر a و c مختلف‌العلامت نباشند جواب ندارد.

دراین‌حالت اگر $c=۰$، آنگاه معادله ریشه مضاعف $x=۰$ دارد.

مثال ۱. معادله $۳x^۲+۴=۰$ دارای ریشه حقیقی نیست.

معادله $\sqrt[۴]{۸}-\sqrt{۲}x^۲=۰$ دارای دو ریشه قرینه $x=\pm\frac{\sqrt[۴]{۸}}{\sqrt{۲}}$ یا $x=\pm\sqrt[۴]{۲}$، است.

ب. اگر $c=\text{۰}$، معادله بصورت، $ax^{\text{۲}}+bx=\text{۰}$، است که با شرط $a\neq\text{۰}$، همواره دارای دوجواب $x=\text{۰}$ و $x=-\frac{b}{a}$، است. مانند:

$$\text{۱۲}x^{\text{۲}}+\text{۴}x=\text{۰} \Longrightarrow \text{۴}x(\text{۳}x+\text{۱})=\text{۰} \Longrightarrow x=\text{۰} \text{ یا } x=-\frac{\text{۱}}{\text{۳}}$$

ج. فرض کنیم a و b و c هرسه مخالف صفر باشند، طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم.

$$x^{\text{۲}}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=\text{۰} \Longrightarrow \left(x+\frac{b}{\text{۲}a}\right)^{\text{۲}}=\frac{b^{\text{۲}}-\text{۴}ac}{\text{۴}a^{\text{۲}}}$$

اکنون اگر $b^{\text{۲}}-\text{۴}ac\geqslant\text{۰}$، آنگاه، $x+\frac{b}{\text{۲}a}=\pm\frac{\sqrt{b^{\text{۲}}-\text{۴}ac}}{\text{۲}a}$ یا

$\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{\text{۲}}-\text{۴}ac}}{\text{۲}a}}$ ، ریشه‌های معادله می‌باشند، $b^{\text{۲}}-\text{۴}ac$ را به Δ نشان داد و دلتای معادله می‌نامیم.

اگر $\Delta=b^{\text{۲}}-\text{۴}ac>\text{۰}$، معادله همواره دارای دو ریشهٔ متمایز $x_{\text{۱}}$ و $x_{\text{۲}}$ می‌باشد.

اگر $\Delta=b^{\text{۲}}-\text{۴}ac=\text{۰}$ آنگاه معادله دارای ریشه مضاعف است.

$$\boxed{x_{\text{۱}}=x_{\text{۲}}=-\frac{b}{\text{۲}a}}$$

اگر $\Delta=b^{\text{۲}}-\text{۴}ac<\text{۰}$، معادله دارای ریشه حقیقی نیست.

مثال ۲. درمعادله $x^{\text{۲}}-\text{۲}(m-\text{۱})x+(m^{\text{۲}}-\text{۳})=\text{۰}$، حدود m را چنان تعیین کنید که معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد ، بازاء چه مقادیر m معادله ریشه مضاعف دارد آن ریشه را پیدا کنید.

حل. برای آنکه معادله دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد باید، $\Delta>\text{۰}$، لذا.

$$\text{۴}(m-\text{۱})^{\text{۲}}-\text{۴}(m^{\text{۲}}-\text{۳})>\text{۰} \Longrightarrow$$

$$-\text{۲}m+\text{۴}>\text{۰} \Longrightarrow m<\text{۲}$$

برای آنکه معادلهٔ ریشه مضاعف داشتهٔ باشد باید $\Delta=\text{۰}$

$$\Delta=0 \Longrightarrow -2m+4=0 \Longrightarrow m=2$$

$$x_1=x_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2(m-1)}{2}=m-1 \quad و$$

$$m=2 \Longrightarrow x_1=x_2=1$$

تذکر. هرگاه درمعادله درجه‌دوم b، ضریب x عددی‌زوج باشد، فرض می‌کنیم $b=2b'$ درنتیجه ریشه‌های معادله از دستورساده‌تری بدست می‌آیند که آنرا دستور b' می‌نامیم دراین‌حالت دلتای معادله نیز به‌صورت ساده‌تر Δ' تبدیل می‌شود.

$b=2b'$ درنتیجه:

$$x=\frac{-2b'\pm\sqrt{4b'^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b'\pm2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

$$\text{یا} \quad \boxed{x=\frac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}} \quad ، \quad \Delta'=b'^2-ac$$

۲ـ۶. روابط بین ریشه‌ها درمعادله درجه دوم

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشند

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ و $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ اگر این دو ریشه را با هم جمع کنیم. وحاصلجمع را به S نشان دهیم، داریم:

$$S=x_1+x_2=-\frac{b}{2a}$$

به‌همین ترتیب اگر این دو ریشه را درهم ضرب کنیم، داریم:

$$P=x_1\,x_2=\frac{c}{a}$$

P را حاصلضرب دوریشه می‌نامیم.

وبالاخره اگراین دو ریشه را ازهم کم کرده وقدرمطلق آنرا D بنامیم،

$$D=|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

مثال ۳. درمعادله $x^2 - px + q = 0$، بین p و q چه رابطه‌ای برقرار باشد تا ریشه‌های معادله دوعدد متوالی باشند.

حل. اگر x_1 و x_2 دوریشه این معادله باشند و $x_1 > x_2$، $x_1 - x_2 = 1$ ولذا

$$1 = \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{1} \quad \text{یا} \quad p^2 - 4q = 1$$

۳-۶. بحث‌در وجود وعلامت‌ریشه‌های‌معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$

فرض‌کنیم x_1 و x_2 ریشه‌های معادله فوق باشند، چنین‌داریم:

1) $\Delta > 0$ معادله دو ریشه دارد
- $\frac{c}{a} > 0$ دو ریشه هم‌علامت‌اند
  - $-\frac{b}{a} > 0$، دو ریشه مثبت
  - $-\frac{b}{a} < 0$، دو ریشه منفی
- $\frac{c}{a} < 0$ دو ریشه مختلف‌العلامت‌اند $x_1 < 0 < x_2$
  - $-\frac{b}{a} > 0$، $|x_2| > |x_1|$
  - $-\frac{b}{a} < 0$، $|x_1| > |x_2|$

2) $\Delta = 0$ معادله ریشه مضاعف‌دارد، $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$

3) $\Delta < 0$ معادله ریشه حقیقی ندارد

نتایج:

۱. هرگاه درمعادله $ax^2 + bx + c = 0$، $a = 0$ آنگاه یك ریشه به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

۲. اگر $c = 0$، یك ریشه معادله صفر و ریشه دیگر برابر $-\frac{b}{a}$ است.

۳. اگر $b = 0$ با شرط مختلف‌العلامت بودن a و c معادله دو ریشه قرینه‌دارد.

۴. اگر درمعادله $ax^2 + bx + c = 0$، $a = b = c = 0$، آنگاه معادله بی‌شمار جواب

دارد یعنی به‌اتحاد تبدیل‌می‌شود.

۵. اگر $a+b+c=0$، یك ریشه معادله $x_1=1$ و ریشه دیگر $x_2=\frac{c}{a}$ است،و برعکس.

۶. اگر $b=a+c$ ، یك ریشهٔ معادله $x_1=-1$ و ریشه دیگر $x_2=-\frac{c}{a}$ است ، و برعکس.

۷. هرگاه درمعادله، $ax^2+bx+c=0$، a و c مختلف‌العلامت باشند معادله همواره دو ریشه مختلف‌العلامت دارد ونیازی به تشکیل Δ نمی‌باشد زیرا با این شرط همواره ، $\Delta>0$ همچنین باید در نظر داشته باشیم که اگر درمعادله فوق a و c مختلف‌العلامت نباشند دلیل برنداشتن ریشه نیست. دراین‌حالت Δ را تشکیل می‌دهیم.

۸. هرگاه درمعادله $ax^2+bx+c=0$ ، $a=c$ یعنی $\frac{c}{a}=1$، دو ریشه معادلهٔ عکس یکدیگرند.

مثال ۴. بازاء چه مقادیر m ، معادله $3x^2-5mx+m^2-4=0$ دو ریشه مختلف‌العلامت دارد.

حل.
$$\frac{c}{a}<0\Longrightarrow\frac{m^2-4}{3}<0\Longrightarrow m^2<4$$
یا $-2<m<2$

۴ـ۶. تعیین علامت عبارت $A=ax^2+bx+c$

الف. اگرمعادله $A=0$ ، دارای دو ریشه باشد آنگاه $A=a\,(x-x_1)\,(x-x_2)$ در اینصورت، اگر $x_1<x<x_2$، آنگاه $(x-x_1)(x-x_2)<0$ و در حالتی که $a>0$، $A<0$ و اگر $a<0$، $A>0$ پس علامت مخالف علامت a است اگر $x<x_1<x_2$ یا $x_1<x_2<x$ یعنی x خارج‌دوریشه‌باشد $(x-x_1)(x-x_2)>0$ واگر $a>0$. آنگاه $A>0$ واگر $a<0$ آنگاه $A<0$ یعنی علامت موافق‌علامت a است.

ب. اگرمعادله $A=0$، دارای‌ریشه مضاعف باشدآنگاه $A=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=a(x-x_1)^2$

و $A \geqslant ۰$ $a > ۰ \Longrightarrow$ و $A \leqslant ۰$ $a < ۰ \Longrightarrow$ یعنی علامت همواره موافق علامت a است. دراین‌حالت عبارت به‌مربع کامل تبدیل می‌شود.

ج . اگر معادله $A = ۰$ ریشه نداشته باشد یعنی $b^۲ - ۴ac < ۰$ آنگاه چون $A = a\left[\left(x + \frac{b}{۲a}\right)^۲ - \frac{b^۲ - ۴ac}{۴a^۲}\right]$، پس عبارت داخل کروشه همواره مثبت وعلامت بستگی به‌علامت a دارد. دراین‌حالت عبارت را می‌توان به‌صورت‌حاصل جمع دوعبارت مربع نوشت.

خلاصه بحث:

۱) $b^۲ - ۴ac > ۰$

بین دو ریشه علامت مخالف علامت a وخارج دو ریشه موافق.

$$x_۱ < x < x_۲ : \begin{cases} a > ۰ \Longrightarrow A < ۰ \\ a < ۰ \Longrightarrow A > ۰ \end{cases}$$

$$x_۱ < x_۲ < x \text{ یا } x < x_۱ < x_۲ : \begin{cases} a > ۰ \Longrightarrow A > ۰ \\ a < ۰ \Longrightarrow A < ۰ \end{cases}$$

$$۲)\ b^۲ - ۴ac = ۰ \text{ ، } \begin{cases} a > ۰ \Longrightarrow A \geqslant ۰ \\ a < ۰ \Longrightarrow A \leqslant ۰ \end{cases}$$

$$۳)\ b^۲ - ۴ac < ۰ \text{ ، } \begin{cases} a > ۰ \Longrightarrow A > ۰ \\ a < ۰ \Longrightarrow A < ۰ \end{cases}$$

مثال ۵. حدود m را چنان تعیین کنید تا عبارت زیر همواره مثبت باشد.

$$A = mx^۲ - ۲(m - ۲)\, x + ۱$$

حل. برای آنکه یك عبارت درجه دوم $A = ax^۲ + bx + c$ همواره یك علامت داشته باشد یعنی همیشه مثبت یا همیشه منفی باشد باید معادله $A = ۰$ ریشه نداشته باشد.

$$\Delta < ۰ \text{ , } a > ۰ \Longrightarrow A > ۰$$

$$\Delta < ۰ \text{ ، } a < ۰ \Longrightarrow A < ۰$$

بنا بر این:

$$\begin{cases}\Delta' = (m-۲)^۲ - m < ۰ \\ m > ۰\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} m^۲ - ۵m + ۴ < ۰ \\ m > ۰\end{cases}$$

$$m^۲ - ۵m + ۴ = ۰ \Longrightarrow m = ۱ \;,\; m = ۴$$

لذا باید $\begin{cases} ۱ < m < ۴ \\ m > ۰ \end{cases}$ که جواب $۱ < m < ۴$ است

مثال ۶. بازاء چه مقادیر a معادله $x^۲ - ۲ax + a + ۶ = ۰$ دارای دو ریشه منفی متمایز است.

حل. اولا باید $\Delta' > ۰$، ثانیاً $-\frac{b}{a} < ۰$ و $\frac{c}{a} > ۰$

$$\Delta' = a^۲ - a - ۶ \,,\; \Delta' = ۰ \Longrightarrow a = -۲ \;،۳$$

$$\Delta' > ۰ \Longrightarrow a < -۲ \text{ یا } a > ۳$$

$$\begin{cases} a + ۶ > ۰ \\ ۲\,a < ۰ \end{cases} \Longrightarrow -۶ < a < ۰$$

$$a \in [(-\infty, -۲) \cup (۳, +\infty)] \cap (۰, -۶) = (-۶, -۲)$$

مثال ۷. بازاء چه مقدار m عبارت $A = x^۲ - ۲\,(m+۲)x + ۱۲ + m^۲$ مجذور کامل است.

حل. برای آنکه یك عبارت درجه دوم، $B = ax^۲ + bx + c$ مربع کامل باشد باید، ریشه مضاعف داشته باشد یعنی Δ یا Δ' برابر صفر باشد.

$$\Delta' = (m+۲)^۲ - ۱۲ - m^۲ = ۴m - ۸ = ۰ \Longrightarrow m = ۲$$

۶-۵. کاربردهای روابط بین ریشه‌ها درمعادله درجه دوم

۱. تشکیل معادله درجه دومی که دو ریشه آن معلوم باشند.

چون درمعادله درجه دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$، $a \neq ۰$، اگر طرفین را بر a تقسیم

کنیم چنین داریم:

$$x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Longrightarrow \boxed{x^{2}-Sx+p=0} \quad (1)$$

$$\text{یا} \quad \boxed{(x-x_{1})(x-x_{2})=0} \quad (2)$$

حال اگر α و β دو ریشه معادله درجه دوم باشند $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$ درنتیجه مقادیر S و P را در رابطه (۱) قرارمی‌دهیم آن معادله مشخص می‌شود. یا هر ریشه را درمعادله (۲) قرارداده وساده‌می‌کنیم معادله بدست می‌آید.

مثال ۸. اگر $\sqrt{5}+\sqrt{5-\sqrt{3}}$ و $\sqrt{5}-\sqrt{5-\sqrt{3}}$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند،آن معادله را مشخص کنید.

حل.

$$S=\sqrt{5}+\sqrt{5-\sqrt{3}}+\sqrt{5}-\sqrt{5-\sqrt{3}}=2\sqrt{5}$$

$$P=(\sqrt{5}+\sqrt{5-\sqrt{3}})\ (\sqrt{5}-\sqrt{5-\sqrt{3}})=\sqrt{3}$$

و درنتیجه

$$x^{2}-2\sqrt{5}x+\sqrt{3}=0$$

مثال ۹. حدود a را چنان پیداکنیدکه دستگاه $\begin{cases} x+y=4a \\ xy=8a \end{cases}$ دارای جواب باشد.

حل. اگر x و y را ریشه‌های یک معادله درجه دوم فرض کنیم آن معادله بصورت $z^{2}-4az+8a=0$ است، دستگاه فوق به‌شرطی جواب داردکه این معادله‌دارای جواب باشد، لذا:

$$\Delta'=4a^{2}-8a\geqslant 0\ ,\ 4a^{2}-8a=0 \Longrightarrow a=0\ ,\ a=2$$

$$\Longrightarrow a\geqslant 2 \text{ یا } a\leqslant 0 \qquad (\text{باید خارج دو ریشه باشد } a)$$

۲. تعیین دوعددکه‌حاصلضرب وحاصلجمع آن دومعلوم‌اند.

اگر آن‌دوعدد را x_1 وx_2 بنامیم چون $S=x_1+x_2$ و $P=x_1x_2$ معلوم‌اند معادله درجه دوم را تشکیل می‌دهیم ازحل آن، دوعدد مشخص می‌شوند

مثال ۱۰. حاصلضرب دوعدد ۱ — وحاصلجمع آن دو ۴ است،آنها را پیدا کنید.

حل. آن دوعدد ریشه‌های معادله $x^{۲}-۴x-۱=۰$ می‌باشند.

$$x=۲\pm\sqrt{۴+۱} \Longrightarrow x_{۱}=۲+\sqrt{۵}\ ,\ x_{۲}=۲-\sqrt{۵}$$

۳. محاسبه عبارتهای متقارن برحسب ریشه‌های معادله درجه‌دوم بدون حل معادله.

درفصل اول عبارتهای متقارن را بررسی کردیم وهمچنین عبارتهای متقارن اصلی نسبت به n متغیر را بیان کردیم. دراین قسمت حاصل عبارتهای متقارن نسبت به ریشه‌های معادله درجه دوم را پیدا می‌کنیم.

مشخص است که عبارتهای متقارن اصلی نسبت به‌دومتغیر منحصر به $P_{۱}$ و $P_{۲}$ است که در معادله درجه دوم آنها را به S و P نشان می‌دهیم یعنی $S=x_{۱}+x_{۲}$ و $P=x_{۱}x_{۲}$ ، در نتیجه هرعبارتی را که نسبت به ریشه‌های معادله درجه دوم متقارن باشد می‌توان برحسب S و P بیان کرد . در ذیل عبارتهای متقارن مهمی را کـه برحسب ریشه‌های معادله درجه دوم متقارن می‌باشند. برحسب S و P محاسبه می‌کنیم،

$$x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}=(x_{۱}+x_{۲})^{۲}-۲x_{۱}x_{۲}=S^{۲}-۲P$$

$$x_{۱}^{۳}+x_{۲}^{۳}=(x_{۱}+x_{۲})(x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}-x_{۱}x_{۲})=S(S^{۲}-۳P)=S^{۳}-۳PS$$

$$x_{۱}^{۴}+x_{۲}^{۴}=(x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲})^{۲}-۲x_{۱}^{۲}x_{۲}^{۲}=(S^{۲}-۲P)^{۲}-۲P^{۲}$$

$$\frac{۱}{x_{۱}^{۳}}+\frac{۱}{x_{۲}^{۳}}=\frac{x_{۱}^{۳}+x_{۲}^{۳}}{x_{۱}^{۳}x_{۲}^{۳}}=\frac{S^{۳}-۳PS}{P^{۳}}$$

$$\frac{x_{۱}}{x_{۲}}+\frac{x_{۲}}{x_{۱}}=\frac{x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}}{x_{۱}x_{۲}}=\frac{S^{۲}-۲P}{P}$$

مشخص است که $x_{۱}-x_{۲}$ متقارن نیست اما $D=|x_{۱}-x_{۲}|$ متقارن است و برای محاسبه آن برحسب S و P طرفین را به‌توان دو می‌رسانیم.

$$\begin{cases} D=|x_{۱}-x_{۲}| \Longrightarrow D^{۲}=x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}-۲x_{۱}x_{۲}=S^{۲}-۴P \\ D\geqslant ۰ \end{cases}$$

درنتیجه $D=\sqrt{S^{۲}-۴P}$.

همچنین عبارت $x_{۱}^{۴}-x_{۲}^{۴}$ نیزمتقارن نیست‌اما عبارت $\dfrac{x_{۱}^{۴}-x_{۲}^{۴}}{x_{۱}-x_{۲}}$ بـا شـرط $x_{۱}\neq x_{۲}$ متقارن است.

$$\frac{x_1^4-x_2^4}{x_1-x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)}{x_1-x_2}=(x_1+x_2)(x_1^2+x_2^2)$$

$$=S\,(S^2-2P)=S^3-2PS$$

بطور کلی اگر درمعادله درجه دوم، ریشه‌ها x_1 و x_2 باشند تعریف می‌کنیم، $S_k=x_1^k+x_2^k$، مانند $S_2=x_1^2+x_2^2$ یا . . .

بنابراین می‌توانیم مجموع هرتوان متشابه از ریشه‌ها را پیدا کنیم. اگر فرض کنیم $x_1x_2=P$ و $S_1=x_1+x_2=q$ آنگاه $x^2-qx+P=0$، وچون x_1 و x_2 ریشه‌های معادله می‌باشند لذا درمعادله صدق می‌کنند یعنی:

$$\begin{cases} x_1^2-qx_1+P=0 & (1)\\ x_2^2-qx_2+P=0 & (2)\end{cases}$$

طرفین رابطه (۱) را در $x_1{}^{k-2}$ وطرفین رابطـه (۲) را در $x_2{}^{k-2}$ ضرب کرده با هم جمع می‌کنیم، داریم:

$$x_1^k+x_2^k-q(x_1{}^{k-1}+x_2{}^{k-1})+P(x_1{}^{k-2}+x_2{}^{k-2})=0$$

یعنی،

$$\boxed{S_k=qS_{k-1}-PS_{k-2}}$$

مانند:

$$S_2=qS_1-PS_0=q^2-2P$$

$$S_0=x_1^0+x_2^0=1+1=2$$

$$S_3=qS_2-PS_1=q(q^2-2P)-Pq=q^3-3Pq$$

واین همان نتایجی است که قبلاً نیز محاسبه کرده‌ایم.

بنابراین به‌ترتیب می‌توانیم مجموع هرتوانی از ریشه‌هارا پیداکنیم.

مثال ۱۱. درمعادله $x^2+3x+1=0$، حاصل عبارت $A=\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}+\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}$ را پیدا کنید.

حل. این رابطه به‌شرطی دارای معنی است که زیررادیکالها مثبت باشند کـه با توجه به

معادله فوق چنین شرطی برقراراست، زیرا هردو ریشه معادله منفی هستند

$$A^۲=\frac{x_۱}{x_۲}+\frac{x_۲}{x_۱}+۲=\frac{x_۱^۲+x_۲^۲}{x_۱x_۲}+۲=\frac{S^۲-۲P}{P}+۲$$

$$=\frac{S^۲}{P}=\frac{۹}{۱}=۹ \qquad \Longrightarrow A=۳$$

مثال ۱۲. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲-Sx+p=۰$ باشند و $x_۱>x_۲$، حاصل عبارت $mx_۱^۲+nx_۲^۲$ را پیدا کنید. $(S^۲-۴P\geqslant ۰)$

حل.

$$mx_۱^۲+nx_۲^۲=\left(\frac{m+n}{۲}\right)\left(x_۱^۲+x_۲^۲\right)+\left(\frac{m-n}{۲}\right)\left(x_۱^۲-x_۲^۲\right)$$

$$=\left(\frac{m+n}{۲}\right)\left(S^۲-۲P\right)+\left(\frac{m-n}{۲}\right)S\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$=\frac{۱}{۲}(m+n)(S^۲-۲P)+\frac{۱}{۲}(m-n)S\sqrt{S^۲-۴P}$$

مثال ۱۳. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله $x^۲+۵x-۱=۰$ باشند حاصل عبارت $B=\frac{x_۱^۳x_۲+x_۱x_۲^۳}{(x_۱^۲+۶x_۱+۳)(x_۲^۲+۶x_۲+۳)}$ را پیدا کنید.

حل. چون $x_۱$ و $x_۲$ درمعادله صدق می‌کنند لذا $x_۱^۲+۵x_۱=۱$ و $x_۲^۲+۵x_۲=۱$ درنتیجه،

$$B=\frac{x_۱x_۲(x_۱^۲+x_۲^۲)}{(x_۱+۴)(x_۲+۴)}=\frac{P(S^۲-۲P)}{P+۴S+۱۶}=$$

$$\frac{(-۱)(۲۵+۲)}{-۱-۲۰+۱۶}=\frac{۲۷}{۵}$$

مثال ۱۴. معادله درجه دومی تشکیل دهید که بین ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases}x_۱^۲+x_۲^۲-x_۱x_۲=۷\\(x_۱+۲)(x_۲+۲)=۲۰\end{cases}$$

حل. هرگاه روابطی متقارن بین ریشه‌های یك معادله درجه دوم داشته باشیم و بخواهیم آن معادله را مشخص کنیم، ابتدا آن عبارتهای متقارن را برحسب S و P می‌نویسیم سپس از دستگاه حاصل S و P را پیداکرده معادله را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases} S^۲-۲P-P=۷ \\ P+۲S+۴=۲۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} S^۲-۳P=۷ \\ P=۱۶-۲S \end{cases} \Longrightarrow$$

$$S^۲+۶S-۵۵=۰ \Longrightarrow S=۵ \text{ یا } S=-۱۱ \text{ و } P=۶ \text{ یا } P=۳۸$$

لذا:

$$x^۲-۵x+۶=۰ \text{ و } x^۲+۱۱x+۳۸=۰$$

معادلـه $x^۲+۱۱x+۳۸=۰$ دارای جـواب حقیقـی نیست و درنتیجه معـادله $x^۲-۵x+۶=۰$ معادله مطلوب است.

۴. تشکیل معادله درجه دومی‌که بین هریك از ریشه‌های‌آن و ریشه‌های معادله درجه دوم مفروضی رابطهٔ خاصی برقرارباشد. مثلاً هرریشه آن n واحـد کمتریا بیشتر ازمعادله مفروض باشد. یا هرریشه‌آن مربع هرریشه معادله مفروض باشد، یا . . . .

برای حل مسائل نظیرمسائل فوق دو روش بیان می‌کنیم.

الف. روش اول، با استفاده از روابط بین ریشه‌ها می‌باشد، به‌این صـورت که ریشه‌های معادله مفروض‌را $x_۱$ و $x_۲$ و ریشه‌های معادله مطلوب را $x'_۱$ و $x'_۲$ فرض می‌کنیم وبا توجـه به‌رابطه داده شده، مجمـوع وحاصلضـرب ریشه‌های معادله مطلوب را حساب می‌کنیم. آنگاه از معادله $x^۲-S'x+P'=۰$ ، معادله مطلـوب مشخص می‌شود.

مثال ۱۵. معاداله درجـه دومی تشکیـل دهید کـه هر ریشه آن مکعـب هر ریشه معادله $x^۲-۲x-۱=۰$ باشد.

حل. بنابه رابطه بین ریشه‌های دومعادله اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های‌معادله فوق و $x'_۱$ و $x'_۲$ ریشه‌های معادله مطلوب باشند، $x'_۱=x_۱^۳$ و $x'_۲=x_۲^۳$ درنتیجه؛

$$S'=x'_۱+x'_۲=x_۱^۳+x_۲^۳=S^۳-۳PS=(۲)^۳-۳(-۱)(۲)=۱۴$$

$$P'=x'_۱\cdot x'_۲=x_۱^۳\cdot x_۲^۳=P^۳=(-۱)^۳=-۱$$

بنابراین، $x^۲-۱۴x-۱=۰$ معادله مطلوب است.

ب. روش دوم، دراین‌روش هرریشه معادله مفـروض را x وهرریشه معادله مطلوب را y فرض می‌کنیم. سپس رابطه بین x و y را نوشته از آن x را برحسب y پیدا کرده درمعادله مفروض قرار می‌دهیم پس ازساده کردن معادله مطلوب برحسب y بدست می‌آید. می‌توانیم دراین معادله y را به x تبدیل‌کنیم تا مجهول معادله برحسب x شود. اگرمعادلـه درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$، را درنظر بگیـریم برای تعیین معادله درجه دومی‌که هرریشه آن، n برابر هرریشه معادله فوق باشد. اگرهر ریشه معادلـه فوق را x و هر ریشه معادلـه مطلـوب را y فـرض کنیـم ، $y=nx$ یـا $x=\frac{y}{n}$ که درنتیجه $a.\frac{y^۲}{n^۲}+b.\frac{y}{n}+c=۰$ یا $ay^۲+bny+cn^۲=۰$ که با تبدیل y به x معادله به‌صورت $ax^۲+bnx+cn^۲=۰$، می‌باشد.

مثال ۱۶. معادله درجه دومی تشکیل دهیدکه هرریشه آن از۳ برابر هریك از ریشه‌های معادله زیر ۴ واحدکمتر باشد.

$$x^۲-mx-۱=۰$$

حل. بنابه آنچه درفوق بیـان شد ، $y=۳x-۴$ که در نتیجه $x=\frac{y+۴}{۳}$ و لذا چنین داریم:

$$\frac{(y+۴)^۲}{۹}-m\left(\frac{y+۴}{۳}\right)-۱=۰ \implies y^۲-(۳m-۸)y-۱۲m+۷=۰$$

یا $x^۲-(۳m-۸)\,x-۱۲m+۷=۰$

مثال ۱۷. معادله درجه دومی تشکیل دهید کـه هر ریشه‌اش مجـذور هر ریشه معادلـه ، $mx^۲-x+۲=۰$ باشد.

حل. $y=x^۲$ یا $x=\pm\sqrt{y}$ درنتیجه x را به $\pm\sqrt{x}$ تبدیل می‌کنیم،

$$m(\pm\sqrt{x})^۲-(\pm\sqrt{x})+۲=۰ \implies mx+۲=\pm\sqrt{x}$$

که اگرطرفین را به‌توان دوبرسانیم داریم؛

$$m^۲x^۲+۴+۴mx=x \implies m^۲x^۲+(۴m-۱)x+۴=۰$$

می‌توان برای‌هریك ازمثالهای فوق یا نظیر آن‌فرمولهای‌کلی نیز بیان‌کرد ولی بهتر است، به‌همان شیوه‌های مثالهای فوق این‌مسائل را حل‌کنیم. در ذیل بعضی ازاین‌حالتهای

کلی را بیان می‌کنیم.

۱. معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش عکس هرریشه معادلـه $ax^2+bx+c=0$ باشد ، به‌صورت $cx^2+bx+a=0$ است. $(x\neq 0)$

زیرا اگر x را به $\frac{1}{x}$ تبدیل کنیم، داریم،

$$\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c=0 \implies a+bx+cx^2=0$$

۲. معادله درجه دومی که هر ریشه‌اش قرینه هر ریشه معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد، به صورت $ax^2-bx+c=0$ است. کافی است x را به $-x$ تبدیل کنیم.

۳. معادله درجه دومی کـه هرریشه‌اش n برابر هرریشه معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد به‌صورت $ax^2+bnx+cn^2=0$ است.

حاصل‌جمع n برابر وحاصلضرب n^2 برابر شده است.

۴. معادله درجه دومی که هرریشه‌اش m واحد بیشتراز هرریشه معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد به‌صورت زیراست؛

$$ax^2+(b-2am)x+am^2-bm+c=0$$

زیرا $y=x+m$ یا $x=y-m$ که با تبدیل x به $x-m$ معادله فوق به دست می‌آید.

۵. معادله درجه دومی که هرریشه‌اش مجذور هرریشه معادلـه $ax^2+bx+c=0$ باشد به‌صورت $a^2x^2+(2ac-b^2)x+c^2=0$ است.

با تبدیل x به $\sqrt{x}$ مانند مثال (۱۷) بدست می‌آید.

مثال ۱۸. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2-mx+1=0$ باشند معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\alpha=x_1+\frac{1}{x_1}$ و $\beta=x_2+\frac{1}{x_2}$ باشند.

حل. اگرمعادله مطلوب را $x^2-S'x+P'=0$ فرض کنیم داریم،

$$S'=\alpha+\beta=(x_1+x_2)+\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)=S+\frac{S}{P}=\frac{S(P+1)}{P}$$

$$\Longrightarrow S' = \frac{m(1+1)}{1} = 2m$$

$$P' = \alpha\beta = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = \left(x_1 x_2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{x_1\, x_2}\right)$$

$$= \left(P + \frac{1}{P} + \frac{S^2 - 2P}{P}\right) = \frac{P^2 + S^2 - 2P + 1}{P} = \frac{m^2}{1} = m^2$$

بنابراین معادله مطلوب به‌صورت $x^2 - 2mx + m^2 = 0$ است

تمرین: مثال فوق را درحالت‌کلی حل کنید جواب به‌صورت زیراست:

$$acx^2 + (bc + ab)x + (a - c)^2 + b^2 = 0$$

مثال ۱۹. اگرهریك از ریشه‌های معادله $x^2 - mx + m - 4 = 0$، (۱) نصف هریك از ریشه‌های معادله $x^2 - (k+2)\, x - k = 0$، (۲) باشد k و m را پیدا کنید.

حل. روش اول. با داشتن یکی ازمعادلات مثلاً معادله (۲) معادله دیگری تشکیل‌می‌دهیم که هرریشه‌اش نصف هریك از ریشه‌های معادله (۲) باشد، این معادله همان معادله (۱) است که از برابری ضرائب k و m محاسبه می‌شوند.

برای تشکیل معادله فوق، باید $y = \frac{x}{2}$ یا $x = 2y$ یعنی درمعادلـه (۲) باید x را به $2x$ تبدیل کنیم دراین‌صورت چنین داریم.

$$4x^2 - 2(k+2)x - k = 0 \quad \text{یا} \quad x^2 - \frac{(k+2)}{2}\, x - \frac{k}{4} = 0 \quad (3)$$

معادله (۳) همان معادله (۱) است پس برابری‌های زیررا داریم؛

$$\begin{cases} m = \dfrac{k+2}{2} \\ \dfrac{-k}{4} = m - 4 \end{cases} \Longrightarrow \frac{k+2}{2} - 4 = -\frac{k}{4} \Longrightarrow k = 4 \text{ و } m = 3$$

روش دوم؛ چون هر ریشه معادلـه (۲) دوبرابر هر ریشه معادله (۱) است پس‌حاصلجمع ریشه‌های معادله (۲) ، دو برابر حاصل‌جمـع ریشه‌های معادله (۱) وحاصلضرب ریشه‌های معادله (۲)، ۴ برابرحاصلضرب ریشه‌های معادله (۱) است. بنا براین؛

$$\begin{cases} k+۲=۲m \\ -k=۴(m-۴) \end{cases} \Longrightarrow k=۴\ ,\ m=۳$$

۵. معادله درجه دومی که بین دو ریشه آن رابطه خاصی وجود داشته باشد مثلاً یك ریشه‌اش مجذور یا مکعب یا جذر ریشه دیگر باشد، یا یك ریشه آن n برابر ریشه دیگر باشد، یا یك ریشه آن n واحد از ریشه دیگر بیشتر یا کمتر باشد، . . .

معمولاً برای حل مسائل نظیر فوق روابط بین ریشه‌ها را درمعادله مفروض نوشته‌و با رابطه داده شده، سه رابطه خواهیم داشت. که ازحذف $x_۱$ و $x_۲$ (ریشه‌های معادله) بین سه رابطه فوق، شرط موردنظرحاصل می‌شود.

مثال ۲۰. چه رابطه‌ای بین a و b و c برقرار باشد تا یك ریشه معادله $ax^۲+bx+c=۰$، n برابر ریشه دیگر آن باشد.

حل. اگر ریشه‌های معادله فـوق را به $x_۱$ و $x_۲$ نشان دهیـم، $x_۱=nx_۲$ و با استفاده از روابط بین ریشه‌ها چنین داریم؛

$$\begin{cases} x_۱+x_۲=-\dfrac{b}{a} \\ x_۱x_۲=\dfrac{c}{a} \\ x_۱=nx_۲ \end{cases} \Longrightarrow (n+۱)\,x_۲=-\frac{b}{a} \Longrightarrow x_۲=-\frac{b}{a\,(n+۱)}$$

و درنتیجه $x_۱=-\dfrac{nb}{a\,(n+۱)}$

اگرمقادیر $x_۱$ و $x_۲$ را در رابطه دوم یعنی حاصلضرب ریشه‌ها قراردهیم؛

$$\frac{nb^۲}{a^۲\,(n+۱)^۲}=\frac{c}{a} \Longrightarrow \boxed{\frac{b^۲}{ac}=\frac{(n+۱)^۲}{n}}$$

مثال ۲۱. بازاء چه مقدار m یکی از ریشه‌های معادله $۲x^۲-mx-۱=۰$ هشت برابر قرینه ریشه دیگراست.

حل: با توجه به رابطه مثال قبل داریم،

$$x_1=-8x_2 \Longrightarrow \frac{m^2}{-2}=\frac{(-8+1)^2}{-8} \Longrightarrow m^2=\frac{49}{4} \text{ یا } m=\pm\frac{7}{2}$$

مثال ۲۲. به‌ازاء چه مقدار m یکی از ریشه‌های معادله $x^2-mx+16=0$، مکعب ریشه دیگر است.

حل. اگر ریشه‌های معادلـه را به x_1 و x_2 نشان دهیم، $x_1=x_2^3$ لـذا اگر روابط بین ریشه‌ها را بنویسیم چنین داریم:

$$\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=16 \\ x_1=x_2^3 \end{cases} \Longrightarrow x_2^4=16 \Longrightarrow x_2=\pm 2 \text{ و } x_1=\pm 8$$

که باقراردادن x_1 و x_2 در رابطه مجموع ریشه‌ها یا درمعادله، $m=\pm 10$ بدست می‌آید.

۶ـ۶. مقایسه یك عدد با ریشه‌های معادله درجه دوم

فرض کنیم معادله درجه دوم $f(x)=ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشه حقیقی ومتمایز x_1 و x_2 باشد. دراین صـورت علامت $f(x)$ به‌ازاء مقادیر بین دو ریشه مخالف علامت a است. یعنی اگر α عددی بین دو ریشه باشد a و $f(\alpha)$ دارای علامتهای‌مخالف می‌باشند ولذا $af(\alpha)<0$، وبه‌عکس اگر $af(\alpha)<0$ آنگاه α بین دو ریشه معادله‌است ومعادله همواره دو ریشه دارد. (α با هیچ یك از ریشه‌ها مساوی نیست)

و به همین‌ترتیب اگـر $af(\alpha)>0$ آنگاه α خارج دو ریشه است در این حالت اگر $\alpha+\frac{b}{2a}>0$ آنگاه α ازهر دو ریشه بزرگتر است واگر $\alpha+\frac{b}{2a}<0$ آنگاه α از هردو ریشه کوچکتر است.

زیرا، $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$ واگر $x_1<x_2$ آنگاه

$$-\infty<x_1<\frac{x_1+x_2}{2}<x_2<+\infty$$

پس اگر α خارج دو ریشه و $\alpha<-\frac{b}{2a}=\frac{x_1+x_2}{2}$ آنگـاه α در فـاصلـه

$(x_1 , -\infty)$ قرار دارد و اگر α خارج دو ریشه و $\alpha > -\frac{b}{2a}$ آنگاه α در فاصله $(x_2 , +\infty)$ واقع است.

بنابراین به‌طور خلاصه اگر درمعادله درجه دوم $f(x) = ax^2+bx+c = 0$ و $\Delta > 0$ یعنی معادله همواره دوریشه متمایز داشته باشد و α عددی حقیقی ومتمایز ازریشه‌ها باشد چنین داریم:

α بین دو ریشه است	$af(\alpha) < 0$
α خارج دو ریشه و ازهر دو بزرگتراست $\alpha + \frac{b}{2a} > 0$	$af(\alpha) > 0$ α خارج دوریشه است
α خارج دو ریشه و ازهر دوکوچکتراست. $\alpha + \frac{b}{2a} < 0$	

مثال ۲۳. حدود m را چنان پیدا کنید که عدد یک بین‌دوریشه معادله $mx^2 - 2x - 1 = 0$ باشد.

حل. برای آن‌که معادله دارای ریشه حقیقی باشد باید، $1+m \geqslant 0$ یا $m \geqslant -1$ اکنون اگرعدد یک بین‌دو ریشه باشد باید، $mf(1) < 0$ یا $m(m-3) < 0$ که درنتیجه $0 < m < 3$ وبا توجه به‌شرط جواب یعنی $m \geqslant -1$، حدود m ، فاصله $(0 , 3)$ است.

۷ـ۶. مقایسه دوعدد با ریشه‌های معادله درجه دوم

فرض‌کنیم معادله $f(x) = ax^2+bx+c = 0$، دارای دو ریشه حقیقی ومتمایز x_1 و x_2 باشد، $x_1 < x_2$.

اگر α و β دوعدد حقیقی مفروض و $\alpha < \beta$. برای مقایسه ریشه‌های معادله با دو عدد α و β مانندآن چه درقسمت ۶ـ۶. بیان شد چنین داریم؛

۱. اگر $af(\alpha) < 0$، $af(\beta) < 0$، آنگاه α و β بین‌دوریشه می‌باشند. $x_1 < \alpha < \beta < x_2$.

۲. اگر $af(\alpha) < 0$ ، $af(\beta) > 0$ آنگاه α بین دو ریشه و β خارج دو ریشه است.

$x_1<\alpha<x_2<\beta$.

دراین حالت اگر $af(\alpha)>0$ و $af(\beta)<0$ آنگاه $\alpha<x_1<\beta<x_2$ یعنی β بین و α خارج دو ریشه است.

نتیجه. برای آن‌که یك ریشهٔ معادله $f(x)=ax^2+bx+c=0$ بین دوعدد حقیقی α و β باشد لازم وکافی است که $a^2f(\alpha)\,f(\beta)<0$ یا $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

تذکر. با برقراری شرط فوق نیازی به تشکیل Δ نیست، یعنی معادله همواره ریشه‌دارد.

۳. اگر $af(\alpha)>0$، $af(\beta)>0$ آنگاه α و β ازهر دو ریشه بزرگتر یاکوچکتراند . یا α ازهردوکوچکتر و β ازهردوبزرگتراست. بنابراین حالات زیررا داریم:

a) $\alpha<\beta<x_1<x_2$، واین وقتی است که $\beta<-\frac{b}{2a}$.

b) $x_1<x_2<\alpha<\beta$، واین وقتی است که $\alpha>-\frac{b}{2a}$.

c) $\alpha<x_1<x_2<\beta$، واین وقتی است که $\alpha<-\frac{b}{2a}<\beta$.

مثال ۲۴. به‌ازاء چه مقادیر m ، یکی از ریشه‌های معادلـه $x^2-(m-1)x+2=0$ بین دوعدد ۲ و ۱ــ است.

حل. با توجه به‌نتیجه قسمت (۲) باید $f(2)f(-1)<0$ که درنتیجه،

$$(8-2m)(m+2)<0 \quad \text{یا} \quad 2(m-4)(m+2)>0$$ لذا،

$$m>4 \quad \text{یا} \quad m<-2$$

واضح است که دراین‌حالت نیازی به‌تشکیل Δ نیست.

۸ـ۶. معادلات چندجمله‌ای

تعریف. فرض‌کنیم ، $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ یك چندجمله‌ای درجه n باشد. $(a_n\neq 0$ و $n\geqslant 1)$ دراین‌صورت‌گزاره‌نمای $p(x)=0$ را یك‌معادله چندجمله‌ای درجه n می‌نامیم. همچنین فرض می‌کنیم a_iها حقیقی باشند. $(n\in N)$

اگر $n=1$ آنگاه معادله ، $a_1x+a_0=0$ و اگر $n=2$ معادله، $a_2x^2+a_1x+a_0=0$ را داریم که قبلاً بررسی کردیم.

اکنون مطالب مختصری درمورد معادلات فوق درحالت کلی بیان می‌کنیم که در مورد تعداد وعلامت ریشه‌های حقیقی این‌معادلات دربعضی حالات خاص می‌باشد.

هرمعادله چندجمله‌ای از درجه n، دقیقاً n ریشه دارد که دربعضی معادلات همهٔ حقیقی‌اند و دربعضی همه غیرحقیقی (موهومی). و دربعضی معادلات تعدادی حقیقی و تعدادی موهومی که درمجموع تعدادآنها برابر n است.

دراین‌قسمت بحث ماکلاً درمورد ریشه‌های حقیقی می‌باشد و اگر درجائی هم‌ذکر نشود منظورهمان ریشه‌های حقیقی است.

۰۱ معادله چند جمله‌ای $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0=0$ دارای n ریشه حقیقی یا موهومی است. اگراین n ریشه را به x_1 ، x_2 ، . . . ، x_n نشان دهیم، به‌ازاء هر i، $p(x_i)=0$ و درنتیجه،

$$p(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

لذا ازبرابری، $a_nx^n+\dots+a_0=a_n(x-x_1)\dots(x-x_n)$

ومتحد قراردادن‌آنها با یکدیگر روابط زیر را داریم‌که به روابط بین ریشه‌ها معروف می‌باشند.

$$p_1=x_1+x_2+\dots+x_n=\sum_{i=1}^{n}x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$p_2=x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_1x_n+\dots=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$p_3=x_1x_2x_3+\dots=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k=-\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

. . . .

. . . .

$$p_n=x_1x_2x_3\dots x_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

این روابط درمعادله درجه دوم بیان شد، به‌طورمثال درمعادله درجه سوم ، $a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$ اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌ها باشند چنین داریم:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_2}{a_3}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a_1}{a_3}$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

تذکر ۱. روابط بین ریشه‌ها در معادله چندجمله‌ای از درجهٔ n روابطی متقارن برحسب n متغیر می‌باشند که همان عبارتهای متقارن اصلی هستند.

تذکر ۲. گاهی برای سادگی درضرائب به‌جای a_i همان حروف a و b و c و . . . را به‌کار می‌بریم.

مثال ۲۵. درمعادله چندجمله‌ای $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots+kx+l=0$ اگر x_1 و x_2 و . . . x_n ریشه‌های آن باشند حاصل عبارت زیر را پیدا کنید.

$$S=\sum_{i=1}^{n} x_i^2=x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$$

حل.

$$S=(x_1+x_2+\dots+x_n)^2-2(x_1x_2+\dots+x_1x_n+\dots)$$

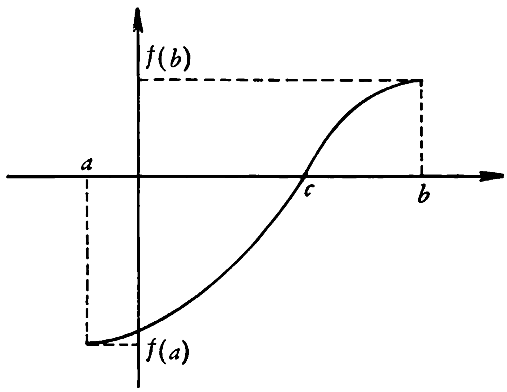
$$=\left(\frac{-b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)=\frac{b^2-2ac}{a^2}=p_1^2-2p_2$$

۲. هرگاه درمعادله چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0=0$ ، دو عدد α و β وجود داشته باشند به‌طوری‌که $f(\alpha)\,f(\beta)<0$ آنگاه معادله حداقل یك ریشه حقیقی بین α و β دارد. حکم فوق نتیجه‌ای است ازقضیه‌ای به‌نام قضیه بولتزانو درمورد توابع پیوسته. این قضیه چنین است.

قضیه بولتزانو: فرض‌کنیم تابع f درفاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)\cdot f(b)<0$ دراین‌صورت عددی مانند c بین a و b وجود داردکه $f(c)=0$.

این بدان معنی‌است‌که نمودار تابع درفاصله $[a,b]$ حداقل دریك نقطه محور xها را قطع می‌کند. یا معادله $f(x)=0$ حداقل یك ریشه حقیقی بین a و b دارد.

تذکر ۱. منظور از ریشه‌های حقیقی معادله $f(x)=0$، همان محل تلاقی نمودار تابع $y=f(x)$ با محور xها یعنی خط $y=0$ است پس اگر بتوانیم مشخص کنیم نمودار تابع f محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند، ریشه‌های حقیقی معادله



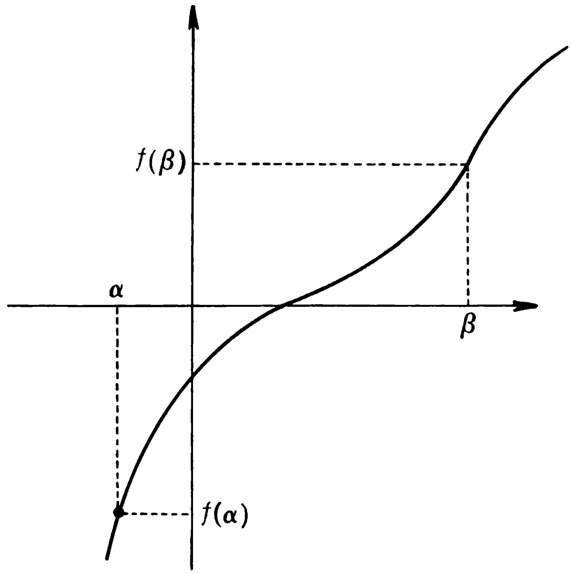
(تعبیرهندسی قضیه بولتزانو)

$f(x)=0$ مشخص می‌شوند.

تذکر ۲. هرگاه درقضیه بولتزانو بتوانیم ثابت کنیـم تابـع f درفاصله $[a,b]$، اکیداً یکنوا است. (اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی) آنگاه فقـط وفقط یك‌عدد c وجود دارد که $f(c)=0$ یعنی معادله $f(x)=0$ بین a و b فقط وفقط یك ریشه حقیقی دارد. بنابراین درمعادلـه چندجملـه‌ای $f(x)=a_nx^n+\dots+a_0=0$ اگر $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ و f در فاصله $[\alpha,\beta]$ اکیداً یکـنوا باشد معادله فقط و فقط یك ریشه حقیقی بین β و α دارد.

۳. درهرمعادله چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+\dots+a_0=0$ اگر n عددی طبیعی وفرد باشد معادله حداقل یك ریشه حقیقی دارد.

فرض‌کنیم $a_n>0$، دراین‌صورت $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (n فرد است) پس‌عددی منفی مانند α وجود دارد‌که $f(\alpha)<0$. همچنین $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ پس‌عـددی مثبت مانند β وجود دارد‌که $f(\beta)>0$ درنتیجه $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ وبنابه‌قضیه بولتزانومعادله، $f(x)=0$ حداقل یك ریشه حقیقی دارد. دراین‌حالت نیزاگـر $f(x)$ اکیداً یکنوا باشد معادله $f(x)=0$ فقط و فقط یك ریشه دارد. در حالت $a_n<0$ نیز اثبات مانند فوق است.



مثال ۲۶. معادله $x^9+5x^7+4x^3+x-10=0$ چند ریشه حقیقی دارد.

حل. چون معادله از درجه فرد است پس حداقل یك ریشه حقیقی دارد، اگر تابع $f(x)=x^9+5x^7+4x^3+x-10$ را در نظر بگیریم

$$f'(x)=9x^8+35x^6+12x^2+1$$

و همواره $f'(x)>0$ (زیرا توان xها زوج وهمگی با هم جمع شده‌اند و حاصل با عدد مثبت یك نیز جمع شده ولذا همواره مثبت است) یعنی نمودار $f(x)$ اکیداً صعودی و در نتیجه معادله فقط وفقط یك ریشه دارد.

۴. درمعادله چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0=0$ اگر $a_0a_n<0$، معادله $f(x)=0$ حداقل یك ریشه مثبت دارد. (a_0 و a_n مختلف‌العلامت باشند)

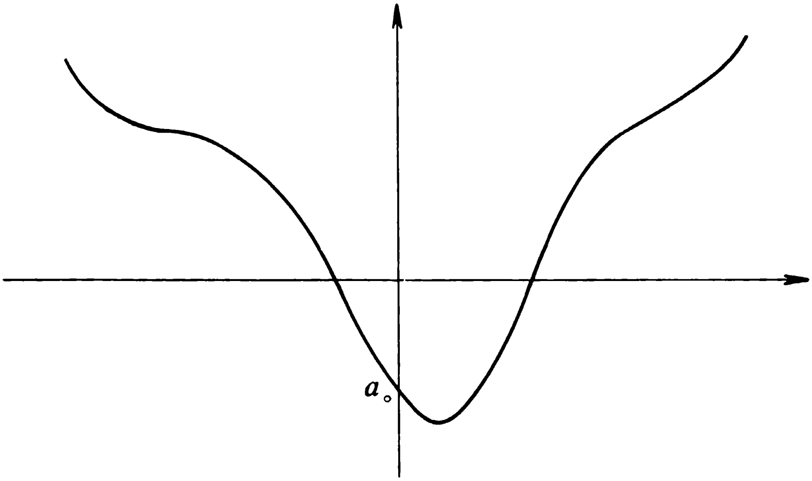
بدون آنکه دراثبات تأثیری داشته باشد فرض می‌کنیم $a_n>0$ و $a_0<0$، چون $a_n>0$ پس $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ولذا عددی حقیقی ومثبت مانند β وجود دارد به‌طوری که $f(\beta)>0$ وچون $f(0)=a_0<0$ بنابراین $f(\beta)f(0)<0$ و درنتیجه معادله حداقل یك ریشه مثبت درفاصله $]0, +\infty[$ دارد.

دراین‌حالت نیزاگر $f(x)$ درفاصله $]0, +\infty[$ اکیداً یکنوا باشد، معادله $f(x)=0$

درفاصله فوق فقط وفقط یك ریشه مثبت دارد.

نتیجه. هر گاه در معادله ، چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+\dots+a_0=0$ ، n زوج و $a_0a_n<0$، معادله حداقل یك ریشه مثبت وحداقل یك ریشه منفی دارد.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \text{ و } f(0)=a_0<0 \text{ و } \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$



مثال ۲۷. ثابت کنید معادلهٔ $3x^{20}+x^{10}+2x^4-10=0$ فقط وفقط دو ریشه حقیقی قرینه دارد.

حل. اولاً n زوج و $(3)(-10)<0$ ، پس معادله حداقل یك ریشه مثبت و یك ریشه منفی دارد ، اما $f'(x)=2x^3(30x^{16}+5x^6+8)$ ، و اگر $x\geqslant 0$، آنگاه $f'(x)\geqslant 0$ ولذا معادله درفاصله $[0,+\infty)$ فقط وفقط یك‌ریشه مثبت دارد.(تابع بازاء هر $x\geqslant 0$، اکیداً صعودی است)

ثانیاً، تابع $f(x)=3x^{20}+x^{10}+2x^4-10$ تابعی‌زوج‌است $f(-x)=f(x)$ پس اگر $x_1>0$ یك ریشه $f(x)=0$ باشد آنگاه $-x_1$ نیزمتعلق به‌دامنه تابع است و $f(-x_1)=f(x_1)=0$ یعنی $-x_1$ نیزیك ریشه معادله است و درنتیجه معادله فقط دو ریشه قرینه دارد.

مثال ۲۸. بازاء چه مقادیر m یك ریشه معادله $f(x)=x^5+mx^3+x^2-4=0$ بین ۱ و ۱ — قراردارد.

حل. $f(1)f(-1)<0 \implies (m-2)(-m-2)<0$ یا

$$(m^2-4)>0 \implies |m|>2$$

۵. اگر a و b و . . . و l اعدادی حقیقی مثبت و m و n و . . . k اعدادی طبیعی باشند معادلهٔ

$$f(x)=ax^{2m+1}+bx^{2n+1}+ \dots +lx^{2k+1}+A=0$$

فقط وفقط یك ریشه حقیقی دارد.

اگر $A<0$، این ریشه مثبت واگر $A>0$، این ریشه منفی است.

اثبات: به‌سادگی بدست می‌آید. چون معادله از درجه فرد است پس حداقل یك ریشه حقیقی دارد. از طرف دیگر،

$$f'(x)=a(2m+1)x^{2m}+ \dots +l(2k+1)x^{2k} \geqslant 0$$

زیرا ضرائب همگی مثبت و توان xها زوج است ، لذا تابع f اکیداً صعودی و درنتیجه معادله فقط وفقط یك ریشه دارد.

مثال ۲۹. تعداد ریشه‌های معادله زیر را مشخص کنید.

$$x^{11}+2x^9+5x^5+3x-11=0$$

حل. تمام توانها فرد وضرائب xها مثبت هستند، پس معادله فقط وفقط یك ریشه داردکه چون $-11<0$ لذا این ریشه مثبت است.

همچنین مجموع ضرائب صفراست پس $x=1$ تنها ریشه معادله است.

۶. مشخص است که اگرضرائب، دریك معادله چندجمله‌ای اعدادی گویا باشند، می‌توان با ضرب‌معادله درکوچکترین مضرب مشترك مخرج‌های ضرائب، معادله را به‌معادله‌ای با ضرائب صحیح تبدیل کرد . مثلاً درمعادله $5x^6-\frac{1}{3}x^5+\frac{4}{5}x^2+x-\frac{1}{2}=0$ با ضرب طرفین معادلـه در ۳۰ داریم، $150x^6-10x^5+24x^2+30x-15=0$ که تمام ضرائب درآن صحیح می‌باشند.

بنا براین هرمعادله چندجملـه‌ای با ضرائب گویا را می‌توان به معادله‌ای با ضرائب صحیح تبدیل کرد. با مقدمه فوق قضیه مهم ذیل را داریم.

قضیه. اگر p و q نسبت بهم اول باشند $(p, q)=1$ ، و $x=\frac{p}{q}$ یك ریشه‌گویای، معادلهٔ

$f(x)=a_n x^n+\cdots+a_1x+a_0=0$ با ضرائب **صحیح** باشد آنگاه $p|a_0$ و $q|a_n$. یعنی a_0 بر p و a_n بر q بخش‌پذیرند.

اثبات. از اینکه $f\left(\frac{p}{q}\right)=0$ نتیجه می‌گیریم؛

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}q+\cdots+a_1pq^{n-1}+a_0q^n=0$$

از تساوی فوق مشخص است که p همه جملـه‌ها را می‌شمارد پس باید $p|a_0q^n$ و چون $(p \text{ و } q^n)=1$ پس $p|a_0$ بـه‌همین تـرتیب q همه جمله‌ها را می‌شمارد پس بایـد $q|a_np^n$ کـه چون $(q \text{ و } p^n)=1$ لذا $q|a_n$. بنابراین با تعداد معینـی آزمایش می‌توان همه ریشه‌های گویای معادله فوق را پیدا کرد.

مثال ۳۰. معادله $4x^4+4x^3+3x^2-x-1=0$ چند ریشه‌گویا دارد؟

حل. $\frac{a_0}{a_4}=-\frac{1}{4}$ بنابراین اگر معادله دارای ریشهٔ گویا باشد این ریشه دربین اعداد ±1، $\pm\frac{1}{2}$، $\pm\frac{1}{4}$ است که با امتحان کردن آنها درمعادله مشاهده می‌کنیم که $\pm\frac{1}{2}$ در معادله صدق می‌کنند پس این معادله دو ریشه‌گویا دارد $+\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}$.

از تقسیم معادله بر $x^2-\frac{1}{4}$ مشاهده می‌کنیم کـه خارج قسمت برابر x^2+x+1 است بنابراین:

$$4x^4+4x^3+3x^2-x-1=(4x^2-1)(x^2+x+1)=0$$

که معادله $x^2+x+1=0$ ریشهٔ حقیقی ندارد یعنی این معـادله بیش از این دو ریشه حقیقی ندارد.

نتیجه. هرگاه در معادله چندجمله‌ای $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$، با ضرائب صحیح، $|a_n|=1$، معادله را تکین می‌نامیم دراین صـورت $q=\pm1$ و درنتیجه $x=\pm p$ عددی صحیح می‌باشد بنابراین ریشه‌های صحیح معادله

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

مقسوم‌علیه‌های a_0 می‌باشند که با تعداد معینی آزمایش می‌توان آنها را پیدا کرد.

مثال ۳۱. ریشه‌های صحیح معادله $x^{۳}+۳x^{۲}+x-۲=۰$ را در صورت وجود پیدا کنید.

حل. اگر معادله دارای ریشه صحیح باشد این ریشه عضو مجموعه $\{\pm ۱،\pm ۲\}$ می‌باشد که با امتحان‌کردن مشاهده می‌کنیم که $x=-۲$ در آن صدق می‌کند و ریشه صحیح معادله است.

از تقسیم معادله بر $x+۲$ به معادله $x^{۲}+x-۱=۰$ می‌رسیم که دارای دو ریشه حقیقی می‌باشد لذا معادله فوق سه ریشه حقیقی دارد که یکی از آنها صحیح است.

۷. قاعدهٔ علامات دکارت

قضیهٔ زیر که برای تعیین تعداد ریشه‌های حقیقی یك معادله چند جمله‌ای مفید است، به‌قانون علامات دکارت معروف است.

فرض کنیم $f(x)=a_n x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+a_۰=۰$ یك‌معادله چندجمله‌ای باشد، اگر m تعداد تغییرعلامت درجملات متوالی‌رشتهٔ $a_۰$، $a_۱$، . . . ، a_n باشد و p تعداد ریشه‌های مثبت $f(x)=۰$ آنگاه $p\leqslant m$ و $m-p=۲k$ کـهٔ $k\geqslant ۰$. یعنی تعداد ریشه‌های مثبت معادله $f(x)=۰$، حداکثر به‌تعداد تغییرعلامت ضرائب a_n، . . . ، $a_۰$ است و تفاضل تعداد تغییرعلامت‌ها و ریشه‌های مثبت همواره زوج است.

نتیجه. چون تعداد ریشه‌های منفی معادلـه $f(x)=۰$ برابر عده ریشه‌های مثبت معادلـه $f(-x)=۰$ است، بنابراین اگر r تعداد تغییرعلامت درجملات متوالی رشتهٔ ضرائب $f(-x)=۰$ باشد و s تعداد ریشه‌های منفی $f(x)=۰$ آنگاه

$$s\leqslant r \text{ و } r-s=۲k' \text{ که } k'\geqslant ۰.$$

یعنی تعداد ریشه‌های منفی $f(x)=۰$، حداکثر برابر تعداد تغییرعلامت در رشته ضرائب متوالی $f(-x)=۰$ است و تفاضل تعداد تغییرعلامت‌ها و ریشه‌های منفی همواره زوج است.

دراین‌صورت تعداد ریشه‌های حقیقی معادلـه $f(x)=۰$ برابر $P+s$ و تعداد ریشه‌های غیرحقیقی برابر $n-(p+s)$ است.

مثال ۳۲. معادلهٔ $f(x)=x^{۵}-x^{۴}-۶x^{۳}+x^{۲}-x-۶=۰$ مفروض است. با استفاده از قاعده علامات دکارت حداکثر تعداد ریشه‌های مثبت ومنفی معادلهٔ فوق‌را پیدا کنید.

حل. تعداد تغییر علامت در ضرایب متوالی $f(x)$ برابر $m=3$ است و چون $p=2K-3$ پس $p=1$ یعنی معادله حداکثر یك ریشهٔ حقیقی مثبت دارد وچون $(1)(-6)<0$ پس حداقل یك ریشه حقیقی مثبت نیز دارد درنتیجه این معادله دقیقاً یك ریشه مثبت دارد.

$f(-x)=-x^5-x^4+6x^3+x^2+x-6$، لذا تعداد تغییر علامت ضرایب متوالی $f(-x)$ برابر $r=2$ است. (ازسمت راست، منفی به مثبت ومثبت به‌منفی) در نتیجه $S=2K'-2$ یعنی $S=0$ یا $S=2$ یعنی معادله دارای ۲ یاصفر ریشه منفی‌است.

قاعده علامات دکارت اطلاعات بیشتری از ریشه‌های معادله فوق نمی‌دهد. اما مشاهده می‌کنیم که در $f(-x)=0$ مجموع ضرائب صفراست پس $x=1$ یك ریشه‌آن و درنتیجه $x=-1$ ریشه معادله $f(x)=0$ است،و با توجه به اینکه تعداد ریشه‌های منفی صفر یا ۲ است پس تعداد ریشه‌های منفی این معادله دقیقاً برابر ۲ است و لذا معادله فوق یك ریشه مثبت و دو ریشه منفی دارد.

۸. ریشه مکررمعادلات

تعریف: هرگاه، $f(x)=(x-\alpha)^r q(x)=0$ و $q(\alpha)\neq 0$ آنگاه $x=\alpha$ رایك ریشه مکرر از مرتبه r، معادله $f(x)=0$ می‌نامیم.

یعنی معادله $f(x)=0$ دارای r ریشه مساوی α، می‌باشد.

ریشه مکرر از مرتبه ۲ را ریشهٔ مضاعف می‌نامیم.

قضیه. اگر معادلهٔ چند جمله‌ای، $f(x)=0$ دارای ریشه مکرر $x=\alpha$ از مرتبه r باشد، آنگاه معادله $f'(x)=0$ (مشتق $f(x)$) نیز دارای ریشه مکرر $x=\alpha$ از مرتبه حداقل $r-1$ است.

زیرا، $$f'(x)=r(x-\alpha)^{r-1}q(x)+q'(x)(x-\alpha)^r$$

یا، $$f'(x)=(x-\alpha)^{r-1}[rq(x)+q'(x)(x-\alpha)]$$

ودر نتیجه، $$f'(x)=(x-\alpha)^{r-1}.g(x)$$

پس $x=\alpha$ ریشه مکرر از مرتبه $r-1$، $f'(x)=0$ می‌باشد.

نتیجه. اگر به همین‌ترتیب مشتقات بعدی $f(x)$ راحساب‌کنیم مشاهده می‌کنیم که $x=\alpha$ ریشه تا مشتق $(r-1)$ام؛ $f(x)$ نیزمی‌باشد.

مثلا اگر $x=\alpha$ ریشه مکرر مرتبه سوم معادله $f(x)=0$ باشدآنگاه، $f'(\alpha)=0$

و $f''(\alpha)=\circ$

مثال ۳۳. بازاء چه مقدار m معادله $f(x)=x^{\text{۳}}+\text{۳}x^{\text{۲}}+m-\text{۱}=\circ$ ریشه مضاعف دارد؟

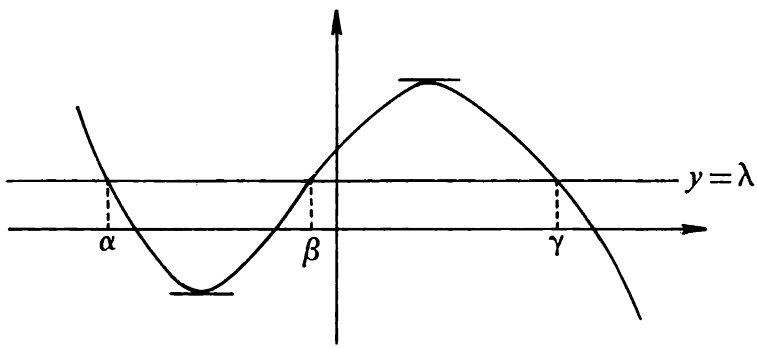
حل. چون ریشه مضاعف، ریشه مکرر مرتبه دوم است پس این ریشه باید ریشه مشتق اول معادله فوق نیز باشد.

$$f'(x)=\text{۳}x^{\text{۲}}+\text{۶}x=\circ \Longrightarrow x=\circ \text{ یا } x=-\text{۲}$$

$$\begin{cases} x=\circ \Longrightarrow m-\text{۱}=\circ \text{ یا } m=\text{۱} \\ x=-\text{۲} \Longrightarrow -\text{۸}+\text{۱۲}+m-\text{۱}=\circ \text{ یا } m=-\text{۳} \end{cases}$$

۹. قضیه رل (درمورد چند جمله‌ایها)

فرض کنیم α و β $(-\infty \leqslant \alpha < \beta \leqslant +\infty)$ و چند جمله‌ای $f(x)$ با ضرایب حقیقی مفروض باشند. دراین‌صورت، اگر $f(\alpha)=f(\beta)=\lambda$ آنگاه معادله، $f'(x)=\circ$ (مشتق $f(x)$) حداقل یك ریشه حقیقی بین α و β دارد.



باتوجه به نمودار مشاهده می‌کنیم که هرگاه $f(\alpha)=f(\beta)$ باشد چون f تابعی پیوسته است، لذا نمودار تـابع حداقل در دو نقطه خط $y=\lambda$ را قطع می‌کند پس نمودار آن حداقل در یك نقطه ماکزیمم یا مینیمم نسبی دارد و چون مشتق موجود است. پس در این نقطه برابر صفراست.

اثبات این قضیه درچند حالت می‌باشد:

۱) $\lambda=\circ$ یعنی $f(\alpha)=f(\beta)=\circ$

۲) $\lambda \neq 0$

۳) از α و β یکی برابر $-\infty$ ودیگری برابر $+\infty$ باشد.

(۱) فرض‌کنیم $f(\alpha)=f(\beta)=0$ یعنی α و β دوریشه معادله $f(x)=0$ باشند وفرض می‌کنیم این دوریشه متوالی باشند دراین‌صورت داریم:

$$f(x)=(x-\alpha)^n(x-\beta)^m g(x) \qquad (1)$$

که n و m مرتبه تکرار α و β می‌باشند. و واضح است‌که $g(\alpha)\neq 0$ و $g(\beta)\neq 0$ و $g(x)$ ریشه‌ای بین α و β ندارد و درنتیجه $g(\alpha)g(\beta)>0$ با مشتق‌گیری از دو طرف معادله (۱) داریم؛

$$f'(x)=(x-\alpha)^{n-1}.(x-\beta)^{m-1}h(x)$$

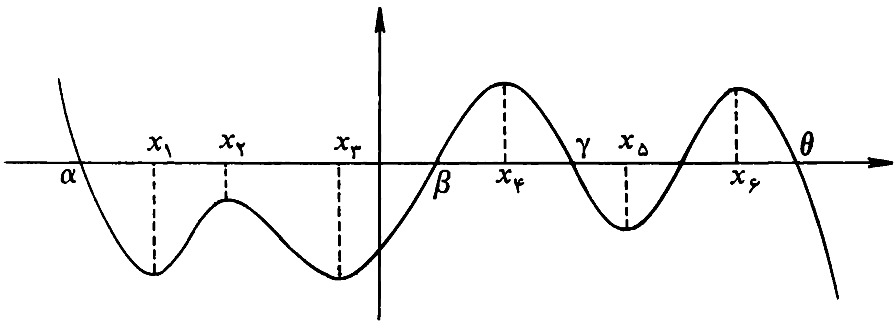
که
$$h(x)=n(x-\beta)g(x)+m(x-\alpha)g(x)+g'(x)(x-\alpha)(x-\beta)$$

پس، $h(\alpha)=n(\alpha-\beta)g(\alpha)$ و $h(\beta)=m(\beta-\alpha)g(\beta)$ لذا، $h(\alpha)h(\beta)=-mn(\alpha-\beta)^2g(\alpha)g(\beta)<0$. بنابراین عددی مانند C وجود داردکه $\alpha<C<\beta$ و $h(C)=0$ ویعنی $f'(C)=0$

(۲) برای حالت دوم تابع کمکی $G(x)=f(x)-\lambda(x)$ را در نظر بگیرید، دراین صورت $G(\alpha)=G(\beta)=0$ وچون $G'(x)=f'(x)$ لذابنابه‌قسمت (۱)قضیه‌ثابت‌است.

درحالت سوم نیزاثبات به سادگی بدست می‌آید.

نتیجه ۱. از قضیه فوق نتیجه می‌گیریم‌که بین هردوریشه معادله چندجمله‌ای $f(x)=0$ حداقل یك‌ریشه $f'(x)=0$ وجود دارد.



$$f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)=f(\theta)=0$$
$$f'(x_1)=f'(x_2)=\cdots=f'(x_6)=0$$

نتیجه ۲. فرض‌کنیم $f(x)=0$ معادله‌ای چند جمله‌ای باشد اگر α و β $(\alpha<\beta)$ دو ریشه متوالی معادله $f'(x)=0$ باشند؛

الف) اگر $f(\alpha)f(\beta)<0$ آنگاه معادله $f(x)=0$ فقط یك ریشه بین α و β دارد.

ب) اگر $f(\alpha)f(\beta)>0$ آنگاه معادله $f(x)=0$ ریشه‌ای بین α و β ندارد.

۱۰. معادلات به فرم، $f(x)=x^n+px+q=0$

تعداد ریشه‌های معادلات به‌صورت فوق با توجه به مطالبی که بیان شد به سادگی امکان‌پذیر است ودرحالتی که n فرد باشد می‌توانیم علامت ریشه‌ها را نیز تعیین کنیم.

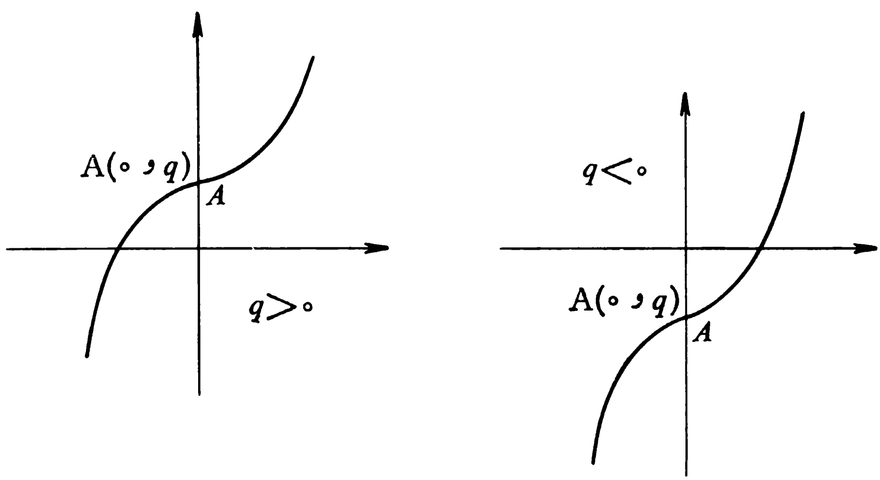
برای حل معادلات فوق دوحالت درنظرمی‌گیریم:

الف. n عددی فرد است

بنابراین معادلهٔ حداقل یك ریشه حقیقی دارد.

مشتق تابع $f(x)$ به صورت $f'(x)=nx^{n-1}+P$ می‌باشد حالتهای زیررادرنظر می‌گیریم.

a) $P\geqslant 0$، دراین حالت چون $n-1$ زوج است لذا مشتق ریشه نداشته وهمواره، $f'(x)>0$ یعنی تابع اکیداً صعودی است ودرنتیجه معادله فقط یك ریشه دارد.



اگرمشتق دوم‌تابع راپیداکنیم، $x=0$ ریشه مشتق دوم تابع وطول نقطه عطف‌است یعنی $A(0$ و $q)$ نقطه عطف تابع است و با توجه به دو شکل فوق مشخص است‌که اگر

$q>0$، آنگاه ریشه معادله منفی و اگر $q<0$ ریشه معادله مثبت است.

اگر $q=0$ آنگاه، $x=0$ ریشه معادله می‌باشد که مکرر از مرتبه n است.

b) $P<0$، دراین‌حالت $x=\pm\sqrt[n-1]{-\frac{P}{n}}=\pm\alpha$ ریشه‌های مشتق

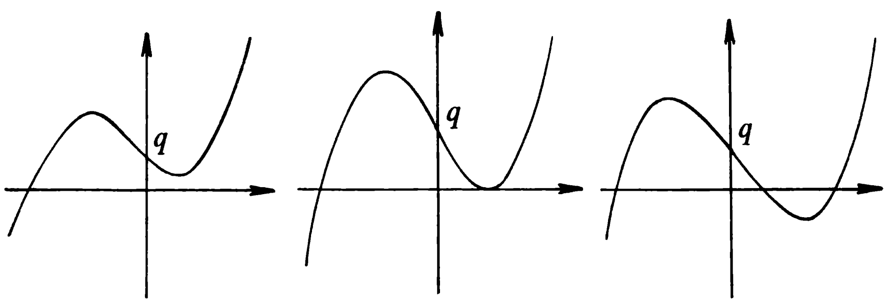
می‌باشند و نمودار تابع $y=f(x)$، یک ماکزیمم و یک مینیمم دارد.

برای تعیین تعداد ریشه‌ها با استفاده از نتیجه (۲) قضیه رل $f(-\alpha)f(\alpha)$ را تشکیل می‌دهیم و آنرا به Δ نشان داده حاصلضرب ماکزیمم درمینیمم می‌نامیم.

$$\Delta=y_{Max}\cdot y_{Min}=f(-\alpha)\cdot f(\alpha)$$

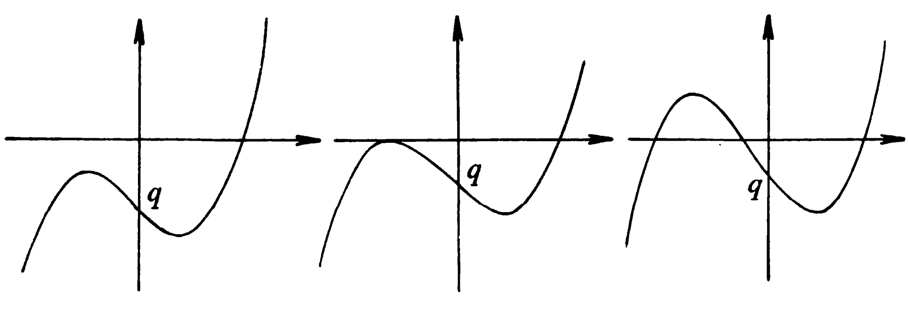
برحسب علامت Δ حالتهای ذیل را داریم.

$q>0$



(۱) (۲) (۳)

$q<0$



(۱) (۲) (۳)

۱. $\Delta > 0$، دراین حالت ماکزیمم ومینیمم هردویا بالایا پائین محور xها می‌باشند ولذا معادله فقط یك ریشه حقیقی‌دارد شکل‌های (۱). باتوجه به نقطه عطف‌که $A(0 \text{ و } q)$ است اگر $q > 0$، یك ریشه منفی واگر $q < 0$ یك ریشه مثبت داریم.

۲. $\Delta = 0$، در این حالت عرض ماکزیمم یا عرض مینیمم برابرصفراست. در نتیجه نمودار تابع برمحور xها مماس است. لذا معادله یك ریشه مضاعف ویك ریشه ساده‌دارد شکل‌های (۲) مشخص است‌که اگر $q > 0$، ریشه ساده منفی وریشه مضاعف مثبت است.و اگر $q < 0$، ریشه ساده مثبت وریشه مضاعف منفی است.

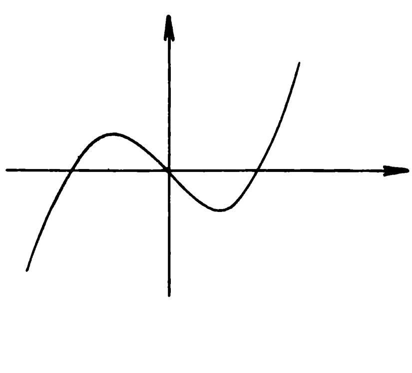
۳. $\Delta < 0$، دراین حالت ماکزیمم‌ومینیمم دردوطرف محور xها می‌باشند لذامعادله سه ریشه دارد شکل‌های (۳).

اگر $q > 0$، دوریشه مثبت ویك ریشه منفی دارد؛

اگر $q < 0$، دوریشه منفی ویك ریشه مثبت دارد.

تذکر ۱. اگردرحالت (b) یعنی حالتی‌که $P < 0$، داشته باشیم $q = 0$، آنگاه یك ریشه معادله $x = 0$ ودو ریشه دیگرآن قرینه می‌باشند.

$$x^n + Px = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm \sqrt[n-1]{-P} \end{cases}$$



خلاصه بحث دروجود وعلامت ریشه‌های معادله $f(x) = x^n + Px + q = 0$ وقتی n عددی فرد باشد. به‌صورت زیراست:

- $P \geqslant ۰$ ، معادله یك ریشه دارد:
  - $q < ۰$ ریشه مثبت
  - $q > ۰$ ریشه منفی
- $p < ۰$:
  - $\Delta > ۰$ ، یك ریشه دارد:
    - $q < ۰$ ریشه مثبت
    - $q > ۰$ ریشه منفی
  - $\Delta = ۰$ ، یك ریشه ساده و یك ریشه‌مضاعف:
    - $q < ۰$ ریشه ساده مثبت مضاعف منفی
    - $q > ۰$ ریشه ساده منفی ومضاعف مثبت
  - $\Delta < ۰$ ، سه ریشه دارد:
    - $q < ۰$ یك ریشه مثبت ودوریشه منفی
    - $q > ۰$ یك ریشه منفی ودوریشه مثبت

$q = ۰ \Longrightarrow$
- $P \geqslant ۰$ ، $x = ۰$ ریشه معادله است
- $P < ۰$ ، $x = ۰$ و $x = \pm\sqrt[n-۱]{-P}$ ریشه معادله‌اند

تذکر۲. بـا توجه بـه حالات فوق مشاهده می‌کنیم که همواره علامت یك ریشه معادله، $x^n + Px + q = ۰$ مخالف علامت q است.

مثال ۳۴. تعداد وعلامت ریشه‌های معادله زیررا مشخص کنید.

$$-\frac{۱}{۲}x^{۵} + ۴۰x - ۱۰ = ۰$$

حل. باضرب طرفین معادله در ۲ــ داریم،

$$x^{۵} - ۸۰x + ۲۰ = ۰$$

$P < ۰$، لذا اگر تابع $f(x) = x^{۵} - ۸۰x + ۲۰$ را درنظر بگیریم، $f'(x) = ۵x^{۴} - ۸۰$ درنتیجه $x^{۴} = ۱۶$ یا $x = \pm ۲$ ریشه‌های مشتق می‌باشند.

$$\Delta = f(-۲)f(۲) = (۱۴۸)(-۱۰۸) < ۰$$

چون $P < ۰$ و $\Delta < ۰$ لذامعادله سه ریشه حقیقی دارد، $q > ۰$ پس‌یك ریشه‌معادله منفی‌ودوریشه دیگر مثبت هستند.

نتیجه ۱. بحثی راکه درفوق بیان شد می‌توان برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله درجه سوم $x^{۳}+px+q=۰$ به‌کار برد. در این حالت خاص Δ بــه سادگی محاسبه می‌شود اگر $x_{۱}=\sqrt[۳]{-\frac{P}{۳}}$ و $x_{۲}=-\sqrt[۳]{-\frac{P}{۳}}$ ریشه‌های مشتق را در رابطه $f(x)=x^{۳}+Px+q$ قرار دهیم $y_{Max}\cdot y_{Min}=\Delta=۴P^{۳}+۲۷q^{۲}$ ودرنتیجه بحث به سادگی صورت می‌گیرد.

همچنین اگرمعادله درجه سوم $x^{۳}+Px+q=۰$ دارای ریشه مضاعف باشد یعنی $\Delta=۴P^{۳}+۲۷q^{۲}=۰$ آنگاه این ریشه مضاعف ازفرمول: $x_{۱}=x_{۲}=\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}}$ و ریشه ساده معادله از فرمول: $x_{۳}=-۲\sqrt[۳]{\frac{q}{۲}}$ محاسبه می‌شود.

مثال ۳۵. در معادله $x^{۳}-۱۲kx+۱۶=۰$ برحسب k در وجود و علامت ریشه‌های معادله بحث‌کنید و سپس مقدار k را چنان پیدا کنید که معـادله ریشه مضاعف داشته باشد وآن ریشه را پیدا کنید.

حل. $\Delta=۴P^{۳}+۲۷q^{۲}=-۴\times۱۲^{۳}k^{۳}+۲۷\times۱۶^{۲}=۲۷\times۱۶^{۲}(۱-k^{۳})$

۱) $k\leqslant۰$، بنابراین $P\geqslant۰$ ومعادله فقط یك ریشه منفی دارد. $(q>۰)$

۲) $k>۰$، دراین حالت $P<۰$ ولذا باید برحسب علامت Δ بحث کنیم.

الف) $۱-k^{۳}>۰$ یا $۰<k<۱$ دراین‌صورت $\Delta>۰$ ومعادله یك‌ریشه منفی‌دارد.

ب) $۱-k^{۳}=۰$ یا $k=۱$، در این صورت $\Delta=۰$ و معادله ریشه مضاعف دارد، $x^{۳}-۱۲x+۱۶=۰$، این ریشه مضاعف برابراست با $x_{۱}=x_{۲}=\sqrt[۳]{\frac{۱۶}{۲}}=۲$ وریشه ساده برابراست با $x_{۳}=-۴$

ج) $۱-k^{۳}<۰$ یا $k>۱$ در این حالت، $\Delta<۰$ و معادله سه ریشه دارد. چون $q>۰$، یك ریشه منفی ودوریشه مثبت است.

تذکر ۱. درهرمعادله چندجمله‌ای $f(x)=ax^{n}+bx^{n-۱}+\ldots+l=۰$ اگر تغییر متغیر، $x=X-\frac{b}{na}$ را به‌کار ببریم به معادله چندجمله‌ای ازدرجه n می‌رسیم که

که فاقد جمله bx^{n-1} است یعنی جمله‌ای که درجه‌اش یك واحد از درجه معادله کمتر است حذف می‌شود.

بنابراین اگر در معادله درجه سوم کامل $ax^{3}+bx^{2}+cx+d=0$ تبدیل $x=X-\frac{b}{3a}$ را انجام دهیم، $b=0$ و معادله به صورت $X^{3}+PX+q=0$ تبدیل می‌شود که می‌توانیم در تعداد ریشه‌های آن بحث کنیم.

تذکر ۲. بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادله $(1).\ ax^{n}+bx^{n-1}+c=0$

هرگاه در معادله فوق تغییر متغیر $x=\frac{1}{X}$ را به کار بریم داریم.

$$a\cdot\frac{1}{X^{n}}+\frac{b}{X^{n-1}}+c=0$$

که با شرط $X\neq0$، از ضرب دو طرف معادله در X^{n} معادله (۱) به صورت $cX^{n}+bX+a=0$ (۲) درمی‌آید با این تفاوت که هر ریشه معادله (۲) عکس هر ریشه معادله (۱) است ولذا تعداد وعلامت ریشه‌های معادله (۲) همان تعداد وعلامت ریشه‌های معادله (۱) است و بحث به سادگی صورت می‌گیرد. اگر طرفین را بر c نیز تقسیم کنیم داریم، $X^{n}+\frac{b}{c}X+\frac{a}{c}=0$ یا $X^{n}+PX+q=0$

مثال ۳۶. تعداد وعلامت ریشه‌های معادله $25x^{45}+45x^{44}-1=0$ را مشخص کنید.

حل. با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ داریم،

$$\frac{25}{x^{45}}+\frac{45}{x^{44}}-1=0\Longrightarrow25+45x-x^{45}=0\Longrightarrow$$

$$f(x)=x^{45}-45x-25=0 \text{ و } f'(x)=0\Longrightarrow45x^{44}-45=0$$

$\Longrightarrow x=\pm1$ ریشه‌های مشتق

چون $P<0$، لذا Δ را تشکیل می‌دهیم.

$$\Delta=f(1)\cdot f(-1)=(-69)(19)<0$$

یعنی معادله $x^{45}-45x-25=0$ دارای سه ریشه است، چون $q<0$ یك ریشه مثبت

ودوریشه منفی دارد درنتیجه معادله $۲۵x^{۴۵}+۴۵x^{۴۴}-۱=۰$ نیزدارای یك ریشه مثبت ودوریشه منفی است (درمعکوس‌کردن یك عدد علامت تغییر نمی‌کند).

مثال ۳۷. بازاء چه مقدار m معادله $x^۳+mx^۲+۴=۰$ ریشه مضاعف دارد. و آنرا پیدا کنید.

حل. باتبدیل x به $\frac{۱}{x}$ داریم $۴x^۳+mx+۱=۰$ یا $x^۳+\frac{m}{۴}x+\frac{۱}{۴}=۰$ (۲)

برای آنکه معادله(۲)ریشه مضاعف‌داشته باشدباید $\Delta=۴\times\frac{m^۳}{۶۴}+۲۷\times\frac{۱}{۱۶}=۰$

یا $m=-۳$ واین ریشه مضاعف برابراست با $x_۱=x_۲=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۸}}=\frac{۱}{۲}$ وریشهٔ ساده معادله (۲) برابر $x_۳=-۱$ است لذا ریشه مضاعف معادله فوق $x'=x''=۲$ وریشه ساده آن $x'''=-۱$ است.

مسئله فوق را به‌روش دیگربا استفاده از قسمت (۸) نیزمی‌توان حل‌کرد.

اگرمعادله $x^۳+mx^۲+۴=۰$ دارای ریشه مضاعف باشد این ریشه، ریشه مشتق اول $f(x)=x^۳+mx^۲+۴=۰$ نیزمی‌باشد.

$$f'(x)=۰\Longrightarrow ۳x^۲+۲mx=۰\Longrightarrow x=۰ \text{ یا } x=-\frac{۲}{۳}m$$

از $x=۰$، جوابی بدست نمی‌آید اما اگر $x=-\frac{۲}{۳}m$ را درمعادله قراردهیم، m بدست می‌آید.

$$-\frac{۸}{۲۷}m^۳+\frac{۴}{۹}m^۳+۴=۰\Longrightarrow ۴m^۳+۴\times ۲۷=۰\Longrightarrow m=-۳$$

تذکر۳. اگرمعادله درجه سوم $ax^۳+bx^۲+cx+d=۰$ دارای سه ریشه حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ باشد مانند آنچه قبلا بیان شد چنین داریم.

$$P_۱=x_۱+x_۲+x_۳=-\frac{b}{a}$$

$$P_۲=x_۱x_۲+x_۲x_۳+x_۱x_۳=\frac{c}{a}$$

$$P_3=x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

مثال ۳۸. اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^3-3x-1=0$ باشند حاصل عبارت $S=(\alpha\beta)^3+(\alpha\gamma)^3+(\beta\gamma)^3$ را پیدا کنید.

حل. عبارت فوق برحسب ریشه‌های معادله متقارن است.

$$S=\alpha^3\beta^3+\alpha^3\gamma^3+\beta^3\gamma^3=$$

$$(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)[\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta\gamma-\beta^2\alpha\gamma-\gamma^2\alpha\beta]+3a^2\beta^2\gamma^2$$

$$=P_2[\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2-\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)]+3p_3^2=$$

$$P_2[(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2-3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)]+3p_3^2=P_2(P_2^2-3P_1P_3)+3p_3^2$$

اما، $P_1=0$ و $P_2=-3$ و $P_3=1$ درنتیجه:

$$S=-3(9-0)+4=-24$$

مثال ۳۹. اگر ریشه‌های معادله $x^3-7x^2+14x-8=0$ تشکیل تصاعد هندسی دهند آنها را پیدا کنید.

حل. $\alpha\gamma=\beta^2$ و $\alpha\beta\gamma=8$ درنتیجه، $\beta^3=8$ یا $\beta=2$.

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=7\\ \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=14\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\alpha+\gamma=5\\ \alpha\gamma+2(\alpha+\gamma)=14\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=5\\ \alpha\gamma=4\end{cases}\Longrightarrow \alpha=1 \text{ و } \gamma=4$$

مثال ۴۰. اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^3-3x+2m=0$ باشند m را چنان پیدا کنید که $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=3$ باشد.

حل.

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-3}{-2m}=3\Longrightarrow m=\frac{1}{2}$$

مثال ۴۱. در معادله $x^{3}-3x+k=0$ اگر بین ریشه‌های آن α و β و γ رابطه $\alpha^{2}(1+\alpha)+\beta^{2}(1+\beta)+\gamma^{2}(1+\gamma)=12$ برقرار باشد k کدام است؟

حل. عبارت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\alpha^{3}+\beta^{3}+\gamma^{3}+\alpha^{2}+\beta^{2}+\gamma^{2}=12$$

امادرمعادله فوق $\alpha+\beta+\gamma=0$ لذا $\alpha^{3}+\beta^{3}+\gamma^{3}=3\alpha\beta\gamma=-3k$

همچنین، $\alpha^{2}+\beta^{2}+\gamma=P_{1}^{2}-2P_{2}=0-2(-3)=6$

درنتیجه، $-3k+6=12$ یا $k=-2$

مثال ۴۲. اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $mx^{3}-3mx^{2}+2=0$ باشد، m را چنان تعیین کنیدکه رابطه $\alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}=9$ بین ریشه‌ها برقرار باشد.

حل.
$$\frac{1}{\alpha^{2}}+\frac{1}{\beta^{2}}+\frac{1}{\gamma^{2}}=\frac{\beta^{2}\gamma^{2}+\alpha^{2}\beta^{2}+\alpha^{2}\gamma^{2}}{\alpha^{2}\beta^{2}\gamma^{2}}=$$

$$\frac{(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^{2}-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(P_{3})^{2}}=\frac{P_{2}^{2}-2P_{1}P_{3}}{P_{3}^{2}}=$$

$$\frac{0-2(3)\left(-\frac{2}{m}\right)}{\frac{4}{m^{2}}}=3m=9\Longrightarrow m=3$$

نتیجه ۲. بحث درو جود ریشه‌های معادله $x^{n}+Px+q=0$ (n فرد) رامی‌توان درمورد معادله درجه سوم کامل $ax^{3}+bx^{2}+cx+d=0$ نیز به‌کار برد بدون آنکه به‌حالت خاص تبدیل شودامانعیین علامت ریشه‌ها دراین‌حالت به‌سادگی حالت خاص نمی‌باشدوتفاوت دیگر آن است که درمعادله $x^{3}+Px+q=0$ حاصلضرب ماکزیمم در مینیمم یعنی Δ به سادگی محاسبه می‌شود ولی در این حالت باید مستقیماً و با جای‌گذاری در معادله آن را پیداکنیم. همچنین از ضرایب نیزابتدا نمی‌توانیم استفاده چندانی داشته باشیم.

مثال ۴۳. تعداد ریشه‌های معادله $f(x)=2x^{3}-3x^{2}-12x-5=0$ را تعیین کنید.

حل.

$f'(x)=6x^2-6x-12$ و $f'(x)=0 \Longrightarrow x^2-x-2=0 \Longrightarrow x=-1$ یا $x=2$

ریشه‌های مشتق $\quad \Delta=f(-1)\cdot f(2)=(1)(-45)<0$

بنابراین معادله سه ریشه حقیقی دارد.

چون $(2)(-5)<0$ پس لااقل یك ریشه این معادله مثبت است وباتوجه به‌قانون علامات دکارت چون تعداد تغییرعلامت ضرایب $f(x)$ فقط یکی‌است پس معادله حداکثر یك ریشه مثبت دارد لذا این معادله یك ریشه مثبت ودوریشه منفی دارد.

روش کلی بحث درمعادله درجه سوم کامل

به‌طور کلی برای تعیین تعداد ریشه‌های‌معادله؛

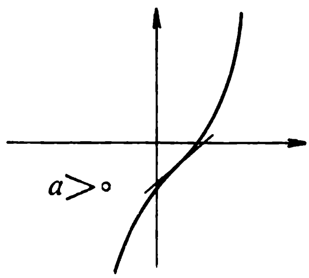
$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=0$$

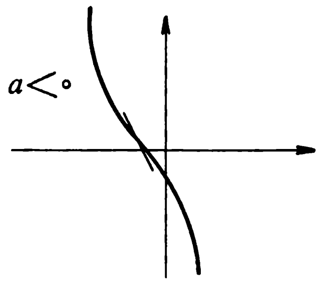
اگرمشتق آن را پیداکنیم داریم:

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

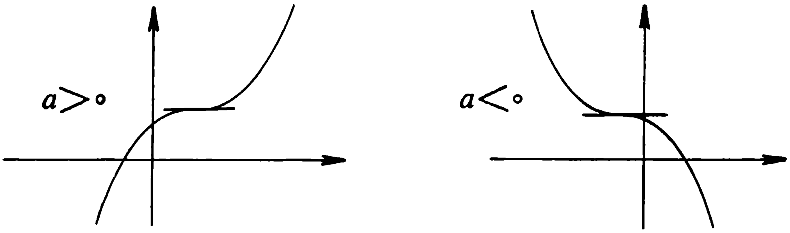
درمعادله $f'(x)=0$، $\Delta'=b^2-3ac$ ولذا حالات زیر راداریم:

۱) $\Delta'<0$ یعنی، $b^2<3ac$، در این حالت مشتق ریشه نداشته و علامت مشتق بستگی به علامت a دارد یعنی یا همواره مثبت یا همواره منفی است درنتیجه تابع اکیداً یکنوا می‌باشد پس معادله $ax^3+bx^2+cx+d=0$ فقط یك ریشه دارد.



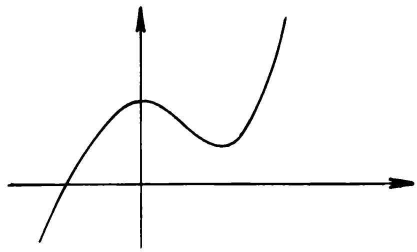


۲) $\Delta'=0$ یعنی، $b^2=3ac$، دراین حالت نیزمشتق ریشه مضاعف داشته وعلامت همواره مثبت یا همواره منفی است (به علامت a بستگی دارد) پس در این حالت معادله سه ریشه مساوی یایك ریشه دارد.

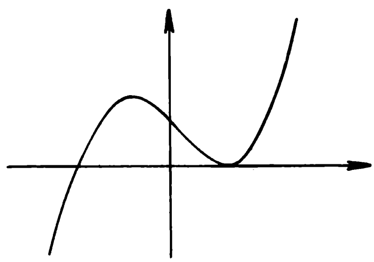


۳) $\Delta'>0$ یعنی، $b^2>3ac$، در این حالت مشتق دو ریشه دارد و تـابع یك ماکزیمم ویك مینیمم دارد برای تعیین تعداد ریشه‌ها دراین‌حالت احتیاج بـه حاصلضرب ماکزیمم درمینیمم داریم که باید آنرا با جای‌گذاری درمعادله پیدا کنیم.

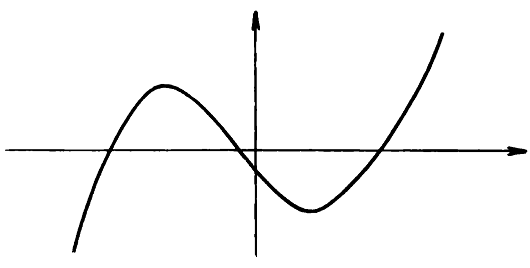
الف) $\Delta=y_{Max}\cdot y_{Min}>0$، درنتیجه معادله فقط یك ریشه دارد.



ب) $\Delta=y_{Max}\cdot y_{Min}=0$، معادله یك ریشه مضاعف ویك ریشه ساده دارد.



ج) $\Delta=y_{max}\cdot y_{min}<0$، معادله سه ریشه حقیقی دارد.



مثال ۴۴. معادله درجه سوم $x^۳+ax^۲+bx+c=۰$ دارای سه ریشهٔ حقیقی است. ثابت کنید $a^۲-۳b\geqslant ۰$.

حل. فرض کنیم α، β و γ سه ریشه معادله باشند به‌طوری که $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$. در این صورت، $\alpha+\beta+\gamma=-a$، $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=b$ لذا

$$a^۲-۳b=(\alpha+\beta+\gamma)^۲-۳(\alpha\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma)$$

$$=\frac{۱}{۲}[(\alpha-\beta)^۲+(\beta-\gamma)^۲+(\gamma-\alpha)^۲]\geqslant ۰$$

عکس مطلب فوق همواره برقرار نیست.

تذکر. درحالت کلی به‌کمك اعداد مختلط می‌توان تمام ریشه‌های یك معادله درجه‌سوم را پیدا کرد، ابتدا آن را به حالت خاص $x^۳+Px+q=۰$ تبدیل می‌کنیم. اما درحالتی که $\Delta=۴P^۳+۲۷q^۲>۰$ باشد می‌توان یك ریشه معادله را ازفرمول زیر که به فرمول کاردان، معروف است پیدا کرد.

$$x=\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}+\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{P^۳}{۲۷}}}+\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}-\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{P^۳}{۲۷}}}$$

ودرحالتی که $\Delta=۰$ باشد معادله ریشه مضاعف و یك ریشه ساده دارد که ریشه ساده برابر است با:

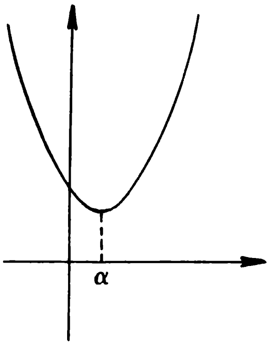
$$x=۲\sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}}$$

ب) تعیین تعداد وعلامت ریشه‌های معادله $f(x)=x^n+Px+q=۰$ درحالتی که n زوج باشد.

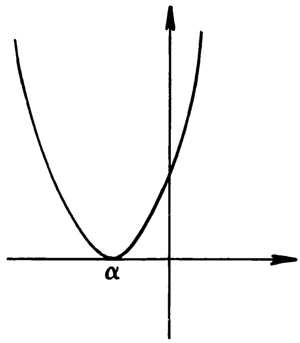
$f'(x)=nx^{n-۱}+P$ و چون $n-۱$ فـرد است مشتق همواره یك ریشه دارد و تابع دارای یك مینیمم است.

$$x=-\sqrt[n-۱]{\frac{P}{n}}$$

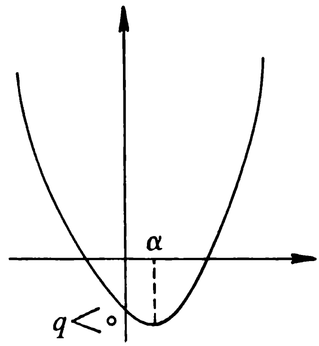
و $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$ لذا نمودار تابع $f(x)=x^n+Px+q$ به یکی ازسه صورت زیر است.



(۱)



(۲)



(۳)

برای بحث در مورد تعداد ریشه‌ها عرض مینیمم یعنی $f(\alpha)$ را مشخص می‌کنیم سه سه حالت زیر را داریم.

۱) $f(\alpha)>0$، دراین‌صورت معادله ریشه حقیقی ندارد. شکل (۱)

۲) $f(\alpha)=0$، دراین‌صورت معادله یك ریشه مضاعف داردکه همان ریشه مشتق یعنی

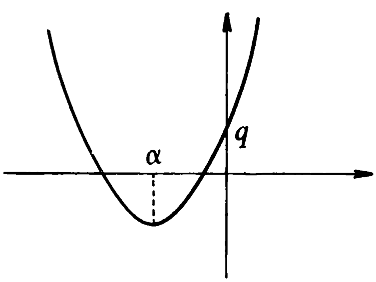
$$x'=x''=-\sqrt[n-1]{\frac{P}{n}}$$

است. شکل (۲)

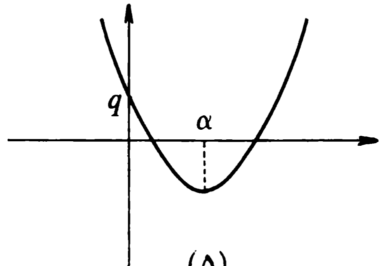
۳) $f(\alpha)<0$، دراین‌صورت معادله دوریشه حقیقی دارد. شکل (۳)

دراین حالت اگر $q<0$، نمودار تابع محور yها را در نقطه‌ای زیر محور xها قطع می‌کند ولذامعادله یك ریشه مثبت ویك ریشه منفی دارد. شکل (۳)

اگر $q>0$، آنگاه، هردوریشه معادله مثبت یاهردومنفی‌هستند.



(۴)



(۵)

چون ریشه مشتق بین این دوریشه قراردارد درنتیجه اگر ریشه مشتق مثبت باشد هر دوریشه معادله مثبت هستند شکل (۴) واگرریشه مشتق منفی باشد هــردو ریشه معادله منفی

هستند، شکل (۵) هرگاه در معادلـه فوق $q=0$ بـاشد یك ریشه معادله $x_1=0$ و ریشه دیگـر $x_2=-\sqrt[n-1]{P}$ است.

اگر $p=0$ باشد، به‌شرطی‌که $q<0$ معادله دوریشه قرینه دارد.

اما اگر $q>0$ آنگاه معادله ریشه حقیقی‌ندارد.

تذکر ۱. با توجه به‌بحث‌های‌فوق هرگاه درمعادله $x^n+px+q=0$، (n زوج) $q<0$ باشد معادله دوریشه مختلف العلامت دارد.

تذکر ۲. حالت خاص این‌معادله یعنی $n=2$ معادلهٔ درجه دوم است‌که قبلا بررسی شده است.

مثال ۴۵. درتعداد وعلامت ریشه‌های‌معادله $20x^6-192x^5+1=0$ (۱) بحث‌کنید.

حل. با تبدیل x به‌$\frac{1}{x}$ معادله‌به‌صورت $f(x)=x^6-192x+20=0$ (۲) است که $f'(x)=6x^5-192=0$ یا $x^5=32$ درنتیجه $x=2$ ریشه مشتق است.

$$f(2)=64-384+20=-300<0$$

لذا معادله (۲) دوریشه دارد. و درنتیجه معادله (۱) نیز دوریشه داردکه هـرکدام عکس هرریشه معادله (۲) است.

برای تعیین علامت ریشه‌ها، چون $q>0$ است پس هر دوریشه مثبت یا هردوریشه منفی‌اند اما ریشه مشتق $x=2$ عددی مثبت است لذا هـر دوریشه معادله (۲) مثبت می‌باشند پس‌هردوریشه معادله (۱) نیز مثبت‌اند.

۱۱. معادلات به‌فرم $ax^{mn}+bx^m+c=0$ یا $ax^K+bx^m+c=0$ وقتی k بر m بخش‌پذیر است.

با فرض $y=x^m$ می‌توان معادله‌فوق‌را به‌صورت $ay^n+by+c=0$ یا $y^n+py+q=0$ تبدیل‌کردکه با توجه به‌قسمت ۱۰. می‌توان تعداد و علامت ریشه‌های آنرا مشخص‌کرد.

مثال ۴۶. تعدادوعلامت ریشه‌های معادله $\frac{1}{3}x^{60}-5x^4+4=0$ را مشخص‌کنید.

حل. فرض می‌کنیم $y=x^4$ آنگاه $\frac{1}{3}y^{15}-5y+4=0$ یا $y^{15}-15y+12=0$.

دراین‌معادله $p<0$ و $f'(y)=15y^{14}-15$ که $y=\pm 1$ ریشه‌های مشتق هستندو $f(1)f(-1)=(-2)(26)<0$ و $q>0$ لذا معادله $y^{15}-15y+12=0$ دارای یک ریشه منفی و دو ریشهٔ مثبت است فرض کنیم این ریشه‌ها y_1 و y_2 و y_3 باشند که $y_2>0$ و y_1 ، $y_3<0$، چون $x^4=y$ پس بەازاء y_1 و y_2 هرکدام دوریشه قرینه برای معادله $\frac{1}{3}x^{60}-5x^4+4=0$ بدست می‌آید و از y_3 جوابی نداریم چون $y_3<0$ بنابراین معادله فوق چهار ریشه داردکه دو ریشه منفی و دو ریشه مثبت‌اند.

نتیجه. معادلات به‌صورت $ax^{2n}+bx^n+c=0$ (۱) حالت خاصی از معادله‌کلی فوق می‌باشند که درحالت $n=2$ آنرا معادله دو مجذوری می‌نامیم، و این نوع معادلات کلاً قابل حل نیز می‌باشند زیرا بافرض $y=x^n$، به معادله درجه دوم؛ $ay^2+by+c=0$ (۲) می‌رسیم که قابل حل است وپس از تعیین y، x نیز بدست‌می‌آید. واضح است که اگر n فرد باشد تعداد وعلامت ریشه‌های معادله(۱) همان تعداد وعلامت ریشه‌های معادله (۲) است.

مثلا درمورد معادله $32x^{10}+17x^5-49=0$ چون a و c مختلف‌العلامت‌هستند پس معادله $32y^2+17y-49=0$ دو ریشه مختلف‌العلامت دارد وچون n فرد است $(n=5)$ پس‌معادله $32x^{10}+17x^5-49=0$ نیز دوریشه‌مختلف‌العلامت دارد.

$$\begin{cases} y_1=1 \\ y_2=-\frac{49}{32} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^5=1 \\ x_2^5=-\frac{49}{32} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-\frac{\sqrt[5]{49}}{2} \end{cases}$$

همچنین درحالتی که n زوج است اگرهردوریشه معادله (۲) مثبت باشند معادله (۱) چهار ریشه دارد واگر دوریشه معادله (۲) مختلف‌العلامت باشند معادله (۱) دوریشه دارد و اگر هردوریشهٔ معادله (۲) منفی باشند معادله (۱) ریشه ندارد.

مثال ۴۷. اگر x_1 و x_2 ریشه‌های حقیقی معادله $ax^4+bx^2+c=0$ باشند، حاصل $S=x_1^4+x_2^4$ را پیداکنید.

حل. بافرض $y=x^2$ معادله درجه دوم $ay^2+by+c=0$ را داریم‌که درآن اگر y_1 و y_2 ریشه‌ها باشند، $y_1=x_1^2$ و $y_2=x_2^2$ درنتیجه؛

$$S=x_1^4+x_2^4=y_1^2+y_2^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=(-\frac{b}{a})^2-2\frac{c}{a}$$

$$=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

مثال۴۸. به‌ازاء چه‌مقادیر m معادله $x^8-2mx^4+m+2=0$ چهار ریشه‌حقیقی‌متمایز دارد.

حل. باید در معادله $y^2-2my+m+2=0$ هر دو ریشه مثبت باشند؛

$$\begin{cases}\Delta'=m^2-m-2>0\\ \frac{c}{a}=m+2>0\\ -\frac{b}{a}=2m>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m>2 \text{ یا } <-1\\ m>-2\\ m>0\end{cases}\Rightarrow\boxed{m>2}$$

جواب مشترك هرسه $m>2$ است.

۱۲. معادلات معکوسه

معادله به‌صورت زیررا یك معادله معکوسه می‌نامیم؛

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+cx^2+bx+a=0$$

که در آن ضریب هردوجمله متساوی‌الفاصله از طرفین مساویند این معادلات دارای این خاصیت می‌باشندکه اگر α ریشه آن باشد $\frac{1}{\alpha}$ نیز ریشه آن است و همواره $x\neq 0$ است زیرا دراین صورت $a=0$ و درجه معادله یکی کم می‌شود.

برای حل این معادلات اگر n زوج باشد $(n=2k)$ آنگاه طرفین را بر x^k تقسیم می‌کنیم وبا انتخاب مجهول معاون $y=x+\frac{1}{x}$ معادله حل می‌شود (اگرقابل حل باشد).

اگر n فرد باشد، $x=-1$ یك ریشه معادله است، باتقسیم آن بر $x+1$ ، معادله معکوسه از درجه زوج بدست می‌آیدکه مانند قبل اگرقابل حل باشد سایر ریشه‌های آن مشخص می‌شوند.

مثال ۴۹. معادله زیررا حل کنید $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$.

حل. n زوج است باتقسیم معادله بر $x^۲$ چنین داریم.

$$x^۲-۲x-۱-\frac{۲}{x}+\frac{۱}{x^۲}=۰\Longrightarrow x^۲+\frac{۱}{x^۲}-۲(x+\frac{۱}{x})-۱=۰$$

$$\Longrightarrow (x+\frac{۱}{x})^۲-۲-۲(x+\frac{۱}{x})-۱=۰$$

بافرض $y=x+\frac{۱}{x}$ داریم $y^۲-۲y-۳=۰$ که از آن $y=-۱$ و $y=۳$ بدست‌می‌آید.

$$x+\frac{۱}{x}=-۱\Longrightarrow x^۲+x+۱=۰ \quad \text{ریشه ندارد}$$

$$x+\frac{۱}{x}=۳\Longrightarrow x^۲-۳x+۱=۰ \quad \text{یا} \quad x=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

$$x_۱ \text{ و } x_۲=\frac{۳\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

۹ـ۶. تشکیل معادلات

منظور از این قسمت تشکیل معادله‌ای است‌که هرریشه آن باهر ریشه معادلهٔ چند جمله‌ای $f(x)=۰$ رابطه خاصی داشته باشد. حل این‌مسائل مانند آنچه درمورد معادله درجه دوم بیان شد می‌باشد. بنابراین دراین قسمت برخی را به‌طور مختصر بیان و مثالهائی نیزحل می‌کنیم.

۱. ضرب ریشه‌های معادله دریك عدد. یعنی تشکیل معادله درجه n می که هر ریشه‌اش k برابر هرریشه معادله $f(x)=۰$ باشد.

$$y=kx \Longrightarrow x=\frac{y}{k}$$

پس کافیست x را به $\frac{x}{k}$ تبدیل‌کنیم یعنی معادله $f(\frac{x}{k})=۰$

یا $ax^n+bkx^{n-۱}+\ldots+lk^n=۰$

۲. معادله‌درجه n می که هرریشه‌اش قرینه هرریشه معادله $f(x)=۰$ باشد برابراست با $f(-x)=۰$.

۳. معادله درجه n می که هرریشه‌اش عکس هرریشه معادله $f(x)=0$ باشد برابر است با $f(\frac{1}{x})=0$.

۴. معادله درجه n می که هرریشه‌اش k واحد از هرریشه معادله $f(x)=0$ بیشتر باشد برابر است با $f(x-k)=0$.

مثال ۵۰. اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $f(x)=x^3+mx-1=0$ باشند معادله درجه سومی بنویسید که هرریشه‌اش مکعب هرریشه معادله فوق باشد، یعنی α^3 و β^3 و γ^3 باشد.

حل. اگرهرریشه معادله مفروض را x واز معادله مطلوب را y فرض کنیم

$$y=x^3 \implies x=\sqrt[3]{y}$$

پس باید در معادله فوق x را به $\sqrt[3]{x}$ تبدیل کنیم، $f(\sqrt[3]{x})=0$

درنتیجه:

$$x+m\sqrt[3]{x}-1=0 \implies x-1=-m\sqrt[3]{x}$$

طرفین این معادله را به‌توان سه می‌رسانیم معادله مطلوب است.

$$x^3-3x^2+3x-1+m^3x=0 \implies$$

$$x^3-3x^2+(m^3+3)x-1=0$$

مثال ۵۱. اگر x_1 و x_2 و x_3 ریشه‌های معادله $x^3-3mx-1=0$ باشند حاصل عبارت $S=\frac{1}{x_1-1}+\frac{1}{x_2-1}+\frac{1}{x_3-1}$ را پیدا کنید.

حل. ابتدا معادله درجه سومی تشکیل می‌دهیم که هریك از ریشه‌هایش x_1-1 و x_2-1 و x_3-1 باشد یعنی هرریشه‌اش یك واحد از هرریشه معادله فوق کمتر باشد.

$$y=x-1 \implies x=y+1$$

x را به $x+1$ تبدیل می‌کنیم.

$$(x+1)^3-3m(x+1)-1=0 \implies x^3+3x^2+3(1-m)x-$$
$$3m-1=0 \quad (1)$$

اکنون معادله درجه سومی تشکیل می‌دهیم که هر ریشه‌اش عکس هر ریشه معادله(۱) باشد ، کافیست x را به $\frac{1}{x}$ تبدیل کنیم. مجموع ریشه‌های معادله‌حاصل‌همان S است.

$$(3m+1)x^3-3(1-m)x^2-3x-1=0$$

بنابراین،
$$S=\frac{3(1-m)}{3m+1}$$

مثال ۵۲. اگر بین اعداد a و b و c رابطه‌های $a^3+ap+q=0$ و $b^3+bp+q=0$ و $c^3+cp+q=0$ برقرار باشد حاصل‌عبارت $S=ab+ac+bc$ را پیدا کنید.

حل. از روابط فوق مشخص است که a و b و c ریشه‌های معادلـه $x^3+px+q=0$ می‌باشند و درنتیجه

$$a+b+c=0 \quad \text{و} \quad S=+p \quad \text{و} \quad abc=-q$$

مثال ۵۳. اگر α و β و γ ریشه‌های معادلـه $x^3-6x^2+2=0$ باشند، معادله درجه سومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $\alpha\beta$ و $\alpha\gamma$ و $\beta\gamma$ باشد.

حل. فرض‌کنیم‌معادله‌مطلوب $x^3+px^2+qx+r=0$ باشد، ضرایب p و q و r راپیدا می‌کنیم.

$$p=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=0$$
$$q=\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\alpha\gamma+\gamma^2\alpha\beta=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=-2(6)=-12$$
$$r=(\alpha\beta\gamma)^2=(-2)^2=4$$

بنابراین $x^3-12x+4=0$ معادله مطلوب است.

مثال ۵۴. درمثال قبل حاصل $A=(\alpha\beta)^3+(\alpha\gamma)^3+(\beta\gamma)^3$ را پیدا کنید.

حل. باتوجه به مثال قبل A برابر مجموع توان سوم‌های ریشه‌هـای معادله $x^3-12x+4=0$ است به دو روش می‌توان حاصل این عبارت پیداکرد. روش اول آن که معادله درجه سومی‌تشکیل دهیم که هر ریشه‌اش مکعب هر ریشه معادله $x^3-12x+4=0$ باشد، آنگاه مجموع ریشه‌های‌آن برابر A است. روش دوم دراین‌مثال به‌سادگی بدست می‌آید زیرا درمعادله $x^3-12x+4=0$ مجموع ریشه‌ها صفر

است ($\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\circ$) درنتیجه؛

$$A=(\alpha\beta)^{۳}+(\alpha\gamma)^{۳}+(\beta\gamma)^{۳}=۳(\alpha\beta\gamma)^{۲}=۳(-۴)^{۲}=۴۸$$

روش سومی نیز وجود داردکه مانند مثال (۳۸) آنرا محاسبه کنیم.

۱۰ـ۶. معادلات هم‌ارز در میدان اعداد حقیقی

دومعادله $f(x)=\circ$ و $g(x)=\circ$ را هم‌ارز گویند هرگاه مجموعه ریشه‌های آنها منطبق برهم باشند. یعنی هر ریشه‌ای ازمعادله $f(x)=\circ$ درمعادله $g(x)=\circ$ صدق کند و برعکس همچنین مرتبه تکرار یك ریشه درهردو نیز مساوی باشد، بنابراین هردومعادله‌ای را که مجموعه ریشه‌های آنها تهی است نیز هم‌ارزمی‌نامیم.

برای حل معادلات می‌توان هرمعادله را به‌معادله هم‌ارز آن تبدیل کرد.

هرگاه هرریشه معادلـه $f(x)=\circ$، ریشه‌ای از معادلـه $f_{۱}(x)=\circ$ باشد آنگاه معادله $f_{۱}(x)=\circ$ رانتیجه معادله $f(x)=\circ$ می‌نامیم فرض کنیم A مجموعه‌همه‌جوابهای معادله $f(x)=\circ$ و B مجموعـه همه جوابهای معادله $f_{۱}(x)=\circ$ باشد ، اگـر معادله $f_{۱}(x)=\circ$ نتیجه‌معادله $f(x)=\circ$ باشد، آنگاه $A\subset B$ یعنی ممکن‌است مجموعه B از مجموعه A وسیع‌تر باشد دراین حالت معادله $f_{۱}(x)=\circ$ ریشه‌هائی داردکه در معادلـه $f(x)=\circ$ صدق نمی‌کنند چنین‌ریشه‌هائی‌را ریشه‌های خارجی‌معادله $f(x)=\circ$ می‌نامیم.

مثال ۵۵. دومعادله $x^{۲}+۱=\circ$ و $x^{۶}+۱=\circ$ هم‌ارزندزیرا مجموعه ریشه‌های‌حقیقی هردو تهی است.

دومعادله $\sqrt{x}-۱=\circ$ و $\log x=\circ$ هم‌ارزند زیرا هردوفقط دارای ریشه $x=۱$ می‌باشند.

دو معادله $x^{۲}+\sqrt{x}=\sqrt{x}+۱$ و $x^{۲}=۱$ هم‌ارز نیستند زیـرا $x=-۱$ ریشه معادله دوم است درحالی‌که ریشه معادله اول نیست.

دومعادله $\sqrt{x-۲}\,\sqrt{x+۲}=\sqrt{۵}$ و $\sqrt{x^{۲}-۴}=\sqrt{۵}$ هم‌ارزنیستند زیرا ریشه معادلـه اول منحصر به $x=۳$ است (-۳ صدق نمی‌کند) درحالـی‌که $x=۳$ و $x=-۳$ هردو ریشه‌های معادله دوم می‌باشند.

معادله $\sqrt{x^{۲}-۴}=\sqrt{۵}$ یك نتیجه معادله $\sqrt{x-۲}\,\sqrt{x+۲}=\sqrt{۵}$ است. ولذا $x=-۳$ یك جواب خارجی برای معادله $\sqrt{x-۲}\sqrt{x+۲}=\sqrt{۵}$ است.

همچنین‌معادله $x^{۲}-۴=۵$ یا $x^{۲}=۹$ یك‌نتیجه معادله $\sqrt{x-۲}\sqrt{x+۲}=\sqrt{۵}$ است.

بنابراین با توجه به‌مثالهای فوق مشاهده می‌کنیم که برای حل بعضی ازمعادلات آنها را به معادلاتی تبدیل می‌کنیم که نتیجه آنها باشند زیرا حل‌معادله امکان‌پذیرمی‌گردد. دراین‌صورت ممکن است جوابهای خارجی به‌وجود آید که آنها را باامتحان کردن مشخص می‌کنیم. مثلا برای معادله $\sqrt{x}+x=0$ یا $\sqrt{x}=-x$ طرفین را به توان دو می‌رسانیم معادله $x=x^2$ نتیجه‌می‌شود. که ریشه‌های آن $x=0$ و $x=1$ است، اما $x=1$ درمعادلهٔ اولیه یعنی $\sqrt{x}+x=0$ صدق‌نمی‌کندیعنی‌ریشه‌خارجی است پس ریشه معادله فوق همان $x=0$ است.

گاهی برای حل‌چنین معادلاتی از همان ابتدا شرط معادله یاحوزه تعریف آنرا مشخص می‌کنیم، درحل معادله مفید است. در معادله $\sqrt{x}=-x$ اولا بایدہ $x\geqslant 0$ باشد تا رادیکال دارای معنی‌باشد ثانیاً چون طرف اول‌نامنفی است پس‌بایدطرف دوم نیز نامنفی باشد یعنی $-x\geqslant 0$ یا $x\leqslant 0$ لذا حوزهٔ تعریف‌معادلهٔ فقط مجموعه $\{0\}$ است که درمعادله نیز صدق می‌کند.

قضیه۱. اگر تابع یا رابطه $g(x)$ به ازاء هر x از دامنه معادله $f(x)=0$ تعریف شده یامعین‌باشد آنگاه‌می‌توان آنرا به‌دوطرف‌معادله $f(x)=0$ اضافه کرد. یعنی‌دومعادله $f(x)=0$ و $f(x)+g(x)=g(x)$ هم‌ارزند.

مثلا معادله $x^2-3x+\log x=\log x+4$ هم ارز معادله $x^2-3x-4=0$ نمی‌باشد زیرا حوزه تعریف معادله $x^2-3x-4=0$ همه اعداد حقیقی است اما حوزهٔ تعریف $\log x$، تمام x های مثبت‌است پس‌برای حل‌معادله‌فوق، $x=-1$ و $x=4$ را در آن امتحان می‌کنیم‌فقط $x=4$ قابل قبول‌است. یامعادله $x^2-3x-4=0$ را باشرط $x>0$ حل می‌کنیم.

قضیه۲. هرگاه $f(x)=g(x)$ را در تابع $h(x)$ ضرب یا تقسیم‌کنیم، به‌شرطی که $h(x)$ به‌ازاء هر x از دامنه $f(x)=g(x)$ تعریف شده و مخالف صفر باشد آنگاه به معادلات $f(x)\cdot h(x)=g(x)\cdot h(x)$ و $\dfrac{f(x)}{h(x)}=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ می‌رسیم که بامعادله $f(x)=g(x)$ هم‌ارزند.

مثلا درمعادله $4(9-x)=x(\sqrt{x}+3)$ اگر طرفین معادله را بر $\sqrt{x}+3$ تقسیم کنیم‌معادله $x=4(3-\sqrt{x})$ بدست می‌آیدکه با معادله اولی هم‌ارز است زیرا $\sqrt{x}+3$ در دامنه معادله تعریف شده ومخالف صفر نیز می‌باشد. حوزهٔ تعریف یا دامنه معادله فوق، $0\leqslant x\leqslant 9$ است.

اکنون برای حل معادله $4\sqrt{x}=x-12$ طرفین را به‌توان دو می‌رسانیم معادله $x^{2}-40x+144=0$ بدست می‌آید که ریشه‌های آن $x=4$ و $x=36$ می‌باشند اما $x=36$ ریشه خارجی است، که از به‌توان دو رساندن معادله فوق حاصل‌شده است.

حال اگر معادله $x(\sqrt{x}-2)=x-4$ را در نظر بگیریم با تقسیم طرفین معادله بر $\sqrt{x}-2$ به معادله $x=\sqrt{x}+2$ می‌رسیم که هم‌ارز معادله اولی نمی‌باشد زیرا به‌ازاء $x=4$، عبارت $\sqrt{x}-2$ برابر صفر می‌شود با وجود آنکه عبارت $\sqrt{x}-2$ به‌ازاء هر x از دامنه معادله تعریف شده است. بنابراین برای حل معادلات مانند فوق می‌توان به‌دو روش زیر عمل کرد. یك روش به‌این صورت است که همه را به یك طرف برده وعبارت را تجزیه کنیم.

$$(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)-x(\sqrt{x}-2)=0\Longrightarrow(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2-x)=0$$

بنابراین $\sqrt{x}-2=0$ یا $\sqrt{x}+2-x=0$ که از اولی ریشه $x=4$ بدست می‌آید که قابل قبول نیز می‌باشد برای حل معادله دوم آن را به‌صورت $\sqrt{x}=x-2$ نوشته طرفین را به‌توان دو می‌رسانیم داریم $x^{2}-5x+4=0$ که ریشه‌های آن $x=1$ و $x=4$ می‌باشند و $x=1$ قابل قبول نمی‌باشد، ریشه خارجی است. زیرا درمعادله $\sqrt{x}=x-2$ چون طرف اول نامنفی است باید طرف دوم نیز نامنفی باشد $x-2\geqslant 0$ یا $x\geqslant 2$.

نتیجه۱. از قضیه (۲) نتیجه می‌گیریم که می‌توان دوطرف یك معادله را در هر عدد حقیقی مخالف صفر ضرب یا تقسیم کرد.

نتیجه۲. هرگاه طرفین معادله $\frac{f(x)}{f_{1}(x)}=\frac{g(x)}{g_{1}(x)}$ (۱) را معکوس کنیم به معادله $\frac{f_{1}(x)}{f(x)}=\frac{g_{1}(x)}{g(x)}$ (۲) می‌رسیم که علاوه برمعین بودن $f(x)$ و $g(x)$ و $f_{1}(x)$ و $g_{1}(x)$ برای معادله (۱) باید $f_{1}(x)\neq 0$ و $g_{1}(x)\neq 0$ و برای معادله (۲) باید $f(x)\neq 0$ و $g(x)\neq 0$ و ممکن‌است دومعادله (۱) و (۲) هم‌ارز نباشند.

مثلا بامعکوس کردن طرفین معادله $\frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{|x|}$ به‌معادله $x^{2}=|x|$ می‌رسیم که سه ریشهٔ دارد، $x=0$، $x=1$ و $x=-1$ اما $x=0$ ریشه معادله $\frac{1}{x^{2}}=\frac{1}{|x|}$ نیست

والذا درمعاله هم ارز نیستند.

قضیه۳. اگر n عددی طبیعی وفرد باشد دومعادله $f(x)=g(x)$ و $(f(x))^n=(g(x))^n$ هم ارزند.

$$f(x)=g(x) \iff (f(x))^n=(g(x))^n : n \text{ فرد}$$

قضیه۴. اگر n عددی طبیعی و به‌ازاء هر x از دامنه معادله $f(x)=g(x)$، داشته باشیم $f(x)\cdot g(x)\geqslant 0$ آنگاه دومعادله $f(x)=g(x)$ و $(f(x))^n=(g(x))^n$ هم ارز می باشند.

اگرمعادله $x-6=\sqrt{x}$ را درنظر بگیریم با به توان رساندن آن به معادله $(\sqrt{x})^2=(x-6)^2$ می‌رسیم که نمی توان گفت این دومعادله هم ارز می باشند زیرا دو طرف معادله فوق هم علامت نیستند از به توان رساندن بمعادله $x^2-13x+36=0$ می‌رسیم که ریشه‌های آن ۹ و ۴ می باشند اما $x=4$ ریشه خارجی معادله $x-6=\sqrt{x}$ است و درنتیجه $x=9$ ریشه معادله است.

۱۱ـ۶. روشهائی درحل معادلات اصم یا گنگ

روشهای کلی درحل معادلات اصم وجود ندارد، اما بعضی روشها می توانند درحل معادلات اصم کمك کنند که به‌اختصار بامثالهائی آنها را توضیح مـی‌دهیم، آنچه درمعادلات اصم اهمیت دارد یکی تعیین حوزه تعریف و دیگر خارج کـردن معادله ازحالت اصم است که با به‌توان رساندن طرفین معادله انجام می گیرد.

۱. برای حل معادلات گنگ با فـرجه زوج ابتدا حوزۀ تعریف معادلـه را مشخص می کنیم (در بعضی حالات خاص بوسیله حوزۀ تعریف می‌توان ریشه‌های معادله را مشخص کرد یا اینکه مشخص کردکه معادله جواب ندارد.) سپس با به‌توان رساندن، معادله‌ای را نتیجه می گیریم، که اگر قابل حل باشد آن ریشه‌هائی از این معادله‌که در حوزۀ تعریف معادله اولیه باشند، ریشه‌های آن هستند.

می توان بدون مشخص‌کردن حوزۀ تعریف معادله نیز آنرا به‌معادله‌هائی کـه نتیجه آن هستند تبدیل‌کرد و پس ازحل معادلـه نتیجه، جوابهای‌آن را در معادلـه اولیه امتحان می کنیم هرکدام صدق کند ریشه معادله است.

مثال ۵۶. معادله زیررا حل کنید. $|x|+\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{x^2}$

حل. حوزه تعریف معادله‌را مشخص می‌کنیم، چون رادیکال بافرجه‌زوج وجود دارد باید $x^2-1\geqslant 0$ یا $|x|\geqslant 1$ و همچنین در طرف راست باید $x\neq 0$ باشدکه با شرط $|x|\geqslant 1$ این شرط برقرار است اکنون گوئیم اگر $|x|\geqslant 1$ آنگاه طرف چپ معادله همواره بزرگتر یامساوی یك است و در طرف راست چون $x^2\geqslant 1$ لذا $\frac{1}{x^2}\leqslant 1$ یعنی طرف راست همواره کوچکتر یا مساوی یك است. در نتیجه فقط حالتی باقی‌می‌ماندکه هردوطرف مساوی یك باشند واین‌وقتی برقراراست‌که $x=1$ یا $x=-1$ باشد یعنی فقط $x=1$ و $x=-1$ ریشه معادله هستند.

مثال ۵۷. ثابت‌کنید معادله $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}=x-4$ ریشه حقیقی ندارد.

حل. برای تعیین‌حوزه تعریف معادله‌گوئیم، $x-1\geqslant 0$ و $2-x\geqslant 0$ که نتیجه می‌شود، $1\leqslant x\leqslant 2$ لذا فاصله $[1 و 2]$ حوزه تعریف معادله است، اما مشاهده می‌کنیم‌که طرف‌چپ‌معادله چون جمع دو رادیکال بافرجه زوج است لذا همواره مثبت‌است پس باید طرف راست معادله نیز همواره مثبت باشد یعنی $x-4>0$ یا $x>4$ اما باشرط $1\leqslant x\leqslant 2$ طرف‌راست همواره منفی است واین‌ممکن نیست یعنی‌معادله جواب ندارد.

۲. حل معادلات اصم باتغییر متغیر

دراین روش زیررادیکال یاقسمتی اززیر رادیکال یاکلا رادیکال را برابر متغیر جدیدی می‌گیریم، معادله به‌معادلات ساده‌تر وگاهی به‌معادلات درجه‌دوم، قابل حل تبدیل‌می‌شود.

مثال ۵۸. معادله زیر را حل‌کنید. $2x^2+3x-5\sqrt{2x^2+3x+9}+3=0$

حل. معادله را به صورت $2x^2+3x+9-5\sqrt{2x^2+3x+9}-6=0$ می‌نویسیم که با انتخاب تغییر متغیر $\sqrt{2x^2+3x+9}=t$ داریم:

$t^2-5t-6=0$ که‌ریشه‌های آن $t_1=-1$ و $t_2=6$ است جواب $t_1=-1$ قابل قبول نیست زیرا $t\geqslant 0$ از جواب $t_2=4$ داریم ، $2x^2+3x+9=36$ یا $2x^2+3x-27=0$ که $x_1=3$ و $x_2=-\frac{9}{2}$ ریشه‌های آن می‌باشند.

مثال ۵۹. معادله $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$ را حل کنید.

حل. با انتخاب $\sqrt[4]{x^3+8}=t$ داریم،

$$t^2+t-6=0 \Longrightarrow t_1=-3 \text{ و } t_2=2$$

$$\sqrt[4]{x^3+8}=2 \Longrightarrow x^3+8=16 \Longrightarrow x=2$$

$t_1=-3$ قابل قبول نیست زیرا $t\geqslant 0$ است.

۳. حل معادلات اصم با به‌توان رساندن طرفین

برای حل معادلات اصم با این روش بدون مقدمه طرفین را به‌توان می‌رسانیم سپس جوابهای بدست آمده را امتحان می‌کنیم تا جوابهای معادله مشخص شوند.

می‌توانیم از ابتدا حوزه تعریف معادله را مشخص کنیم وسپس بعد از حل معادله هر جواب را که درحوزه تعریف قرار ندارد حذف کنیم.

مثال ۶۰. معادله زیر چند جواب دارد؟ $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$

حل. طرفین معادله را به‌توان دو می‌رسانیم:

$$x+2\sqrt{x-1}+x-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-4(x-1)}=4 \Longrightarrow$$

$$2x+2|x-2|=4 \text{ یا } x\pm(x-2)=2$$

که باعلامت مثبت $x=2$ جواب معادله است و باعلامت منفی معادله بی‌شمار جواب دارد.

برای بهترمشخص کردن جوابها گوئیم اگر $x\geqslant 2$ آنگاه $|x-2|=x-2$ و $2x+2x-4=4$ یا $x=2$. اگر $x<2$ آنگاه $|x-2|=2-x$ و با توجه به‌شرط جواب معادله‌که $x\geqslant 1$ است هر x که در فاصله [۲ و ۱] قرار دارد در معادله صدق می‌کند، $2x-2x+4=4$ یعنی معادله درفاصله [۲ و ۱] بی‌شمار جواب دارد.

مثال ۶۱. معادله $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$ چند ریشه دارد؟

حل. اگر طرفین را به‌توان دوبرسانیم داریم، $\sqrt{6x^2+1}=x^2+1$ دوبارهٔ طرفین این معادله را نیز به‌توان دو می‌رسانیم داریم، $6x^2+1=x^4+2x^2+1$ یا

$x^۲(x^۲-۴)=۰$ که ریشه‌های آن $x_۱=۰$ و $x_۲=۲$ و $x_۳=-۲$ می‌باشند اما $x=-۲$ درمعادله اصلی صدق نمی‌کند پس ۰ و ۲ جواب معادله می‌باشند.

۴. حل معادلات به‌کمك اتحاد اویلر

دربخش اتحادها ثابت کردیم که اگر $a+b+c=۰$ آنگاه $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc$ از این اتحاد درحل بعضی معادلات اصم وغیر اصم می‌توان استفاده کرد.

به طورکلی معادلات به صورت $\sqrt[۳]{ax+b}+\sqrt[۳]{cx+d}+\sqrt[۳]{ex+f}=۰$ را می‌توان با استفاده از اتحاد فوق به‌یك معادله حداکثر از درجه سوم تبدیل‌کرد اگر این معادله بدست آمده قابل‌حل باشد معادله فوق نیز قابل حل است.

$$(a+c+e)x+(b+d+f)=۳\sqrt[۳]{(ax+b)(ex+d)(cx+f)}$$

که با به‌توان سه رساندن این معادله نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

مثال ۶۲. معادله زیر را حل‌کنید. $\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x-۲}+\sqrt[۳]{x+۵}=۰$

حل. باتوجه به‌اتحاد فوق داریم؛

$$x+x-۲+x+۵=۳\sqrt[۳]{x(x-۲)(x+۵)}$$

یا

$$x+۱=\sqrt[۳]{x(x^۲+۳x-۱۰)}$$

طرفین معادله فوق را به‌توان سه می‌رسانیم.

$$x^۳+۳x^۲+۳x+۱=x^۳+۳x^۲-۱۰x \implies ۱۳x=-۱ \implies$$

$$x=-\frac{۱}{۱۳}$$

از اتحاد فوق درحل معادلات به‌صورت ذیل نیز می‌توان استفاده کرد. هرگاه در معادله $(f(x))^۳+(g(x))^۳+(h(x))^۳=۰$ داشته باشیم $f(x)+g(x)+h(x)=۰$ آنگاه،

$$(f(x))^۳+(g(x))^۳+(h(x))^۳=۳f(x).\,g(x).\,h(x)=۰$$

وحل معادله منجر به‌حل سه معادله $f(x)=۰$ یا $g(x)=۰$ یا $h(x)=۰$ خواهد شد.

همچنین درحالت خاصی که سه تابع فوق خطی باشند جواب به‌سادگی بدست می‌آید.
اگر در معادله $(ax+b)^3+(cx+d)^3+(ex+f)^3=0$ رابطه
$(ax+b)+(cx+d)+(ex+f)=0$ برقرار باشد آنگاه،

$3(ax+b)(cx+d)(ex+f)=0$ و $x_1=-\frac{b}{a}$ ، $x_2=-\frac{d}{c}$ ، $x_3=-\frac{f}{e}$

ریشه‌های معادله می‌باشند.

مثال ۶۳. معادله زیر را حل کنید $(2x-3)^3-27(x-2)^3-(3-x)^3=0$

حل. معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم،

$$(2x-3)^3+(6-3x)^3+(x-3)^3=0$$

چون $2x-3+6-3x+x-3=0$ لذا $(2x-3)(6-3x)(x-3)=0$ و

$x_1=\frac{3}{2}$ و $x_2=2$ و $x_3=3$ ریشه‌های معادله‌اند.

۵. اگر A مجموعه ریشه‌های معادله $f(x)=0$ و B مجموعه ریشه‌های معادله $g(x)=0$ باشند آنگاه $A\cap B$ مجموعه ریشه‌هـای معادله‌های ذیل می‌باشد.

$$(f(x))^{2n}+(g(x))^{2m}=0 \quad ، \quad |f(x)|+|g(x)|=0$$

$$(m,n\in N) \quad \sqrt[2n]{f(x)}+\sqrt[2m]{g(x)}=0$$

یا ترکیب‌هایی از معادله‌های فوق مانند؛

$$|f(x)|+\sqrt[2n]{g(x)}+(f(x))^{2m}=0$$

یعنی توانها وفرجه‌ها باید زوج باشند مگر درحالت قدرمطلق.

زیرا برای حل معادلات فوق گوئیم هرکدام ازپرانتزها یا رادیکالها یا قـدرمطلقها بزرگتر یا مساوی صفرمی‌باشند چون حاصل جمع آنها برابرصفر است پس باید هرکدام برابر صفر باشند ازمساوی صفر قراردادن آنها ریشه‌های معادله $f(x)=0$ و $g(x)=0$ بدست می‌آیند اما ریشه‌ای قابل قبول است که درعین حـال هردوی $f(x)$ و $g(x)$ را با هم صفر کند. یعنی اشتراك ریشه‌های آنها مجموعه ریشه‌های معادله‌های فوق است.

روش ساده‌تر برای حل معادلات فوق آن است که فقط یکی از $f(x)$ یا $g(x)$ را

مساوی صفرقراردهیم (معمولامعادله ساده‌تررا حل می‌کنیم) وسپس ریشه‌های آنرا دردیگر معادلات امتحان‌کنیم هرکدام که صدق کند ریشه معادله است.

مثال ۶۴. ریشه‌های معادله زیررا مشخص‌کنید.

$$(x^{4}-13x^{2}+36)^{4}+|x^{2}+x-6|+\sqrt{x^{3}-7x+6}=0$$

حل. از حل معادله $x^{2}+x-6=0$ جوابهای $x_{1}=2$ و $x_{2}=-3$ بدست می‌آید که اگر در دومعادله دیگر قرار دهیم صدق می‌کنند پس معادله دوجواب دارد.

درمعادله‌های نظیر فوق حتی می‌توانند هریك از عبارتها برحسب متغیرهای متفاوت نیز باشند.

مثال ۶۵. از معادله $\sqrt{x^{3}-3}+(x^{9}-y^{2}-23)^{10}+\sqrt[4]{y+z}=0$ مقدار z را پیداکنید.

حل. ازمعادله $x^{3}-3=0$ داریم $x^{3}=3$ اگراین‌مقدار رادرمعادله $x^{9}-y^{2}-23=0$ قراردهیم، $y^{2}=4$ یا $y=\pm 2$ وچون باید $y+z=0$ باشد پس $z=\mp 2$

۶: اگر A مجموعه ریشه‌های معادله $f(x)=0$ و B مجموعه ریشه‌های‌معادله $g(x)=0$ باشدآنگاه $A\cup B$ مجموعه ریشه‌های معادله $f(x)\cdot g(x)=0$ است. درحالتی‌که $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای نباشند. باید ریشه‌های از یکی‌که دیگری به‌ازاء آن نامعین‌باشد را از $A\cup B$ حذف‌کنیم، زیرا درحوزه تعریف معادله قرار ندارد.

مثال ۶۵. ریشه‌های‌معادله $(x^{2}+3x-4)^{3}|x^{2}-1|\sqrt{x^{2}-x-6}=0$ راپیداکنید.

حل. هریك از عبارتها را مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x^{2}+3x-4=0 \implies x=1 \text{ و } -4 \\ x^{2}-1=0 \implies x=\pm 1 \\ x^{2}-x-6=0 \implies x=-2 \text{ و } 3 \end{cases}$$

پس‌اجتماع ریشه‌ها $\{-4, 3, -2, 1, -1\}$ است اما چون فرجه رادیکال زوج است و به‌ازاء $x=-1$ و $x=1$ زیر رادیکال منفی می‌شود لذا این دو عدد ریشهٔ معادله نیستند درنتیجهٔ مجموعه ریشه‌های معادله فوق $\{3, -2, -4\}$ است یعنی معادله

سه ریشه دارد.

۷. اگر A مجموعه‌ریشه‌های معادله $f(x)=0$ و B مجموعه ریشه‌های معادله $g(x)=0$ باشد آنگاه $A\cap B$ ریشه‌هائی ازمعادله $mf(x)\pm kg(x)=0$ است. البته معادله‌های فوق‌می‌توانند ریشه‌های دیگری نیز به‌جز $A\cap B$ داشته‌باشند (m و k دوعددحقیقی دلخواه هستند).

نتیجه. $A\cap B$ ریشه‌هائی از هر ترکیب خطی‌دومعادله می‌باشد مثلا $x=2$ ریشه‌مشترک دومعادله $x^2-4x+4=0$ و $x^2+3x-10=0$ می‌باشد اگر دو معادله را با هم جمع‌کنیم؛ $2x^2-x-6=0$ که $x=2$ ریشهٔ آن است اما این معادله ریشه دیگری نیز دارد همچنین‌اگردومعادله را از هم کم‌کنیم داریم $7x-14=0$ که ریشه آن فقط $x=2$ است اگر این دومعادله را درهر دوعدد حقیقی دلخواه ضرب یا تقسیم‌کرده و باهم جمع یاتفریق‌کنیم $x=2$ ریشه همه این‌معادله‌ها می‌باشد. از بحث فوق می‌توانیم. نتیجه مهمی در تعیین ریشه یاریشه‌های مشترك دومعادله بگیریم.

۱۲-۶. ریشه مشترك معادلات

تعریف. $x=\alpha$ را ریشه مشترك دومعادله $f(x)=0$ و $g(x)=0$ گوئیم هرگاه، $f(\alpha)=0$ و $g(\alpha)=0$.

هرگاه دومعادله درتمام ریشه‌ها مشترك باشند آنگاه هم‌ارز هستند و دراین حالت اگر دومعادله چند جمله‌ای $f(x)=0$ و $g(x)=0$ که هم درجه می‌باشند تمام ریشه‌های آنها مشترك باشند ضرایب جمله‌های هم درجه متناسبند.

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\dots+e=0$$

و

$$g(x)=a'x^n+b'x^{n-1}+\dots+e'=0$$

برای آنکه تمام ریشه‌های $f(x)=0$ و $g(x)=0$ مشترك باشند لازم وکافیست که؛

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\dots=\frac{e}{e'}$$

اما اگر دومعادله درتعدادی ریشه مشترك باشند آنگاه ریشه‌های مشترك دومعادله ریشه‌های هرترکیب خطی‌ازدومعادله می‌باشند، بنابراین یك روش‌درتعیین‌ریشه یاریشه‌های مشترك دومعادله آن است که ساده‌ترین ترکیب خطی از دومعادله را تشکیل می‌دهیم و

ریشه‌های آن‌را مشخص می‌کنیم، سپس ریشه‌های مشترك دومعادله در بین این ریشه‌هامی باشند که با امتحان کردن مشخص می‌شوند.

به‌این‌دلیل ساده‌ترین ترکیب‌خطی را انتخاب می‌کنیم که حل‌معادله حاصل‌ساده‌باشد مثلاً اگر دومعادله درجه‌دوم یك‌ریشه مشترك داشته‌باشند، کافیست ترکیب‌خطی‌از دومعادله را تشکیل‌دهیم که ازدرجه اول‌باشد یعنی‌جمله‌های درجه‌دوم‌را حذف می‌کنیم، ریشه‌بدست آمده ریشه‌مشرك دومعادله است وچون یك‌ریشه است نیازی به امتحان‌کردن ندارد.

مثال ۶۷. ریشه یا ریشه‌های مشترك دومعادله زیررا مشخص‌کنید.

$$(1)\quad x^3+5x^2+3x-4=0$$

$$(2)\quad x^3+2x^2-9x-4=0$$

حل. چون‌ضرایب متناسب‌نیستند پس‌دومعادله‌حداکثر در دوریشه می‌توانند مشترك باشندلذا ترکیب خطی‌از دومعادله را تشکیل می‌دهیم‌که از درجه دوم باشد یعنی کافیست دومعادله را از هم کم کنیم. ازکـم‌کردن دو معادله داریم $3x^2+12x=0$ کـه ریشه‌هـای آن $x_1=0$ و $x_2=-4$ است. اما $x_1=0$ ریشه‌دومعادله نیست ولی $x_2=-4$ در هردو معادله‌صدق می‌کند و ریشه‌مشترك‌آنها است.

مثال ۶۸. بازاء چه‌مقدار a دومعادله $x^2-3x+4a=0$ و $x^2-2x+a=0$ یـك ریشه مشترك دارند.

حل. روش اولـ دومعادله‌را ازهم‌کم می‌کنیم ریشه مشترك برحسب a بدست‌می‌آیدکـه با قراردادن‌آن دریکی ازمعادلات a مشخص می‌شود.

$$\begin{cases}x^2-3x+4a=0\\-x^2+2x-a=0\end{cases}\Longrightarrow\quad -x+3a=0 \text{ یا } x=3a$$

$x=3a$ را درمعادله $x^2-2x+a=0$ قرار می‌دهیم.

$$9a^2-6a+a=0\Longrightarrow a=0 \text{ یا } a=\frac{5}{9}$$

که ریشه مشترك یا $x=0$ یا $x=\frac{5}{3}$ است.

گاهی درمسائل یا تستها شرایط a را طوری قرار می‌دهندکه یك جواب قابل قبول

باشد مثلاً اگر درمثال فوق شرط $a\neq ۰$ قائل‌شویم $a=\frac{۵}{۹}$ قابل‌قبول‌است و بازاء آن ریشه مشترک $\frac{۵}{۳}$ بدست می‌آید.

روش دوم- دراین‌روش اگر به‌سادگی ممکن‌باشد پارامتر a را بین‌دومعادله حذف‌می‌کنیم ریشه مشترک بدست می‌آید.

برای‌این منظور معادله دوم‌را در ۴- ضرب‌کرده با معادله اول‌جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases} x^{۲}-۳x+۴a=۰ \\ -۴x^{۲}+۸x-۴a=۰ \end{cases} \Longrightarrow -۳x^{۲}+۵x=۰ \Longrightarrow$$

$$x=۰ \quad \text{یا} \quad x=\frac{۵}{۳}$$

$x=۰$ یا $x=\frac{۵}{۳}$ را دریکی از معادلات قرار می‌دهیم مقدار a، نظیر آن ریشه مشخص می‌شود.

روش دیگری در تعیین ریشه مشترک دو معادله.

با توجه به‌بحث‌قبلی‌اگر $x=\alpha$ ریشه مشترک‌دومعادله $f(x)=۰$ و $g(x)=۰$ باشد، $f(x)=(x-\alpha)f_{۱}(x)$ و $g(x)=(x-\alpha)g_{۱}(x)$ ولذا اگر $D(x)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک $f(x)$ و $g(x)$ باشد آنگاه $D(x)=(x-\alpha)D_{۱}(x)$ یعنی $x=\alpha$ ریشه بزرگترین مقسوم علیه‌مشترک دوعبارت $f(x)$ و $g(x)$ است و برعکس.

بنابراین برای‌تعیین‌ریشه مشترک دومعادله بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک $f(x)$و$g(x)$ را (درصورت وجود) پیدامی‌کنیم و آن‌را مساوی‌صفر قرارمی‌دهیم ریشه یاریشه‌های‌مشترک دومعادله بدست می‌آیند. اگر دوعبارت نسبت‌به هم‌اول باشند ریشه مشترک ندارند.

مثال۶۹. معادله $x^{۳}-۳x-۱=۰$ و عبارت $f(x)=x^{۴}-۳x^{۲}-۲x+۲$ مفروض است اگر $x_{۱}$ و $x_{۲}$ و $x_{۳}$ ریشه‌های معادله‌فوق‌باشند؛

معادله درجه‌سومی تشکیل دهید که ریشه‌های‌آن $f(x_{۱})$ و $f(x_{۲})$ و $f(x_{۳})$ باشند.

حل. اگر هرریشه معادله $x^{۳}-۳x-۱=۰$ را به x و هرریشه معادله مطلوب را به X نشان‌دهیم آنگاه $X=x^{۴}-۳x^{۲}-۲x+۲$ یعنی باید دومعادله زیر دارای ریشه مشترک باشند.

$$\begin{cases} x^3-3x-1=0 & (1) \\ x^4-3x^2-2x+2-X=0 & (2) \end{cases}$$

بنابراین باید باقیمانده عبارت (۲) برعبارت (۱) برابر صفر شود

می‌توان عبارت (۲) را به‌صورت ، $x(x^3-3x-1)-x+2-X$ نوشت که باقیمانده آن برعبارت x^3-3x-1 برابراست با $-x+2-X$ در نتیجه باید ؛ $x=2-X$ که با قراردادن درمعادله $x^3-3x-1=0$ معادله مطلوب بدست می‌آید.

$$(2-X)^3-3(2-X)-1=0 \implies x^3-6x^2+9x-1=0$$

مثال ۷۰. ریشه مشترك دومعادله زیررا درصورت وجود پیدا کنید.

$$(1)\quad x^3-3x^2+5x-6=0$$

$$(2)\quad x^3-x^2-x-2=0$$

حل. عبارت(۱) را برعبارت(۲) تقسیم‌می‌کنیم باقیمانده برابر $-2x^2+6x-4$ (۳) است. عبارت(۲) را برعبارت (۳) تقسیم می‌کنیم باقیمانده برابر $3x-6$ است. عبارت (۳) را بر $3x-6$ تقسیم می‌کنیم باقیمانده صفراست یعنی $3x-6$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترك دوعبارت(۱) و (۲) است و ریشه آن $x=2$ می‌باشد. پس $x=2$ ریشه مشترك دو معادله است.

تذکر. از مورداستفاده ریشه‌مشترك تعیین‌ریشه مضاعف معادلات است. می‌دانیم اگر معادله $f(x)=0$ دارای‌ریشه مضاعف $x=\alpha$ باشد آنگاه $x=\alpha$ ریشه معادله $f'(x)=0$ نیز می‌باشد پس دومعادله $f(x)=0$ و $f'(x)=0$ دارای‌ریشه مشترك می‌باشند.

لذا می‌توانیم باتوجه به‌روشهای فوق‌این ریشه مضاعف یا شرایط‌آن را پیداکنیم.

تمرین. شرط‌ریشه مضاعف‌را درمعادله $x^3+px+q=0$ با روش‌فوق بدست‌آورید.

مثال ۷۱. ثابت‌کنید اگر معادلات $x^3+px+q=0$ و $x^3+p'x+q'=0$ دارای یك‌ریشه مشترك باشند آنگاه ؛

$$(q-q')^3=(pq'-qp')\,(p-p')^2$$

حل. چون دومعادله درجه‌سوم ناقص می‌باشند، اگر ترکیب‌خطی درجه‌اولی بین‌دومعادله تشکیل‌دهیم ریشه‌آن ریشه‌مشترك دومعادله است که با قراردادن آن دریکی‌از معادلات‌شرط

مطلوب حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} x^3+px+q=0 \\ x^3+p'x+q'=0 \end{cases} \implies (p-p')x+q-q'=0 \quad \text{یا} \quad x=-\frac{q-q'}{p-p'}$$

با قراردادن مقدار x یعنی ریشه مشترك درمعادلهٔ اول داریم؛

$$-\frac{(q-q')^3}{(p-p')^3}-p\left(\frac{q-q'}{p-p'}\right)+q=0 \implies$$

$$(q-q')^3+p(q-q')(p-p')^2-q(p-p')^3=0 \implies$$

$$(q-q')^3+(p-p')^2(pq-pq'-pq+qp')=0 \implies$$

$$(q-q')^3-(p-p')^2(pq'-qp')=0$$

به‌عنوان تمرین ثابت کنید اگر دومعادله $x^2+ax+b=0$ و $x^2+a'x+b'=0$ دارای یك ریشه مشترك باشند این ریشه برابراست با $x=-\frac{b-b'}{a-a'}$ و مانند مثال فوق ثابت کنید رابطه زیر بین ضرایب برقرار است،

$$(b-b')^2=(a-a')(ba'-ab')$$

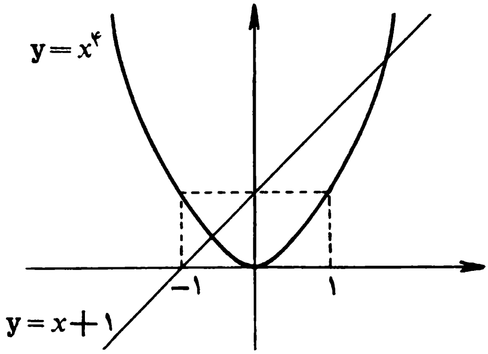
۱۳ـ۶. حل معادلات به‌روش ترسیم

یك روش حل معادلات یا تعیین تعداد ریشه‌های یك معادله به‌کمك روش ترسیم است. معادله $f(x)=g(x)$ را درنظر می‌گیریم ریشه‌های معادله فوق همان نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع $y=f(x)$ و $y=g(x)$ می‌باشند. بنابراین ابتدا نمودارهای دوتابع فوق را رسم کرده و سپس نقاط تلاقی را مشخص می‌کنیم، البته با این روش نمی‌توانیم ریشه‌را بـه‌طور دقیق مشخص کنیم، روشهای وجـود داردکـه به‌کمك آنها می‌توانیم بـا تقریب مشخصی ریشه‌های معادله‌را پیداکنیم.

در این روش ازضریب زاویه خط مماس در نقطه تلاقی نیزگاهی استفاده می‌شود.

مثال ۷۲. تعداد ریشه‌های معادله $x^4-x-1=0$ را تعیین کنید.

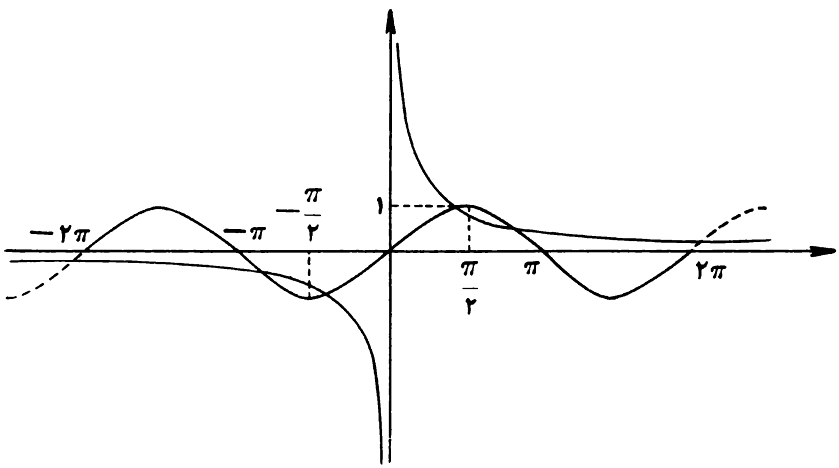
حل. ریشه‌های معادله فوق نقاط تلاقی نمودار دوتابع $y=x^4$ و $y=x+1$ می‌باشند. نمودار دوتابع درشکل زیر رسم‌شده است.



با توجه به شکل مشاهده می‌کنیم که دو نمودار در دو نقطه یکدیگر را قطع کرده‌اند یعنی معادله دو ریشه حقیقی دارد. این دو ریشه مختلف العلامت می‌باشند و یکی از ریشه‌ها بین صفر و ۱− و ریشه دیگر بزرگتر از یك است. می‌توان به کمك قضیه بولتزانو نیز حدود ریشه‌ها را مشخص کرد. مثلا در معادله $f(x) = x^۴ - x - ۱ = ۰$، داریم، $f(۰)f(-۱) < ۰$ یعنی یك ریشه بین صفر و ۱− است.
همچنین. $f(۱).f(۲) = (-۱)(۱۳) < ۰$ یعنی ریشهٔ دیگر معادله بین ۱ و ۲ است. می‌توان مرتباً این حدود را کاهش داده تا به مقدار تقریبی ریشه‌ها برسیم.

مثال ۷۳. تعداد ریشه‌های معادله $x\sin x - ۱ = ۰$ را که بین -۲π و ۲π می‌باشد تعیین کنید.

حل. ریشه‌های این معادله محل تلاقی نمودار تابعهای $y = \sin x$ و $y = \frac{۱}{x}$ است که در زیر رسم شده‌اند باشرط $x \neq ۰$، که ریشه معادله نیست.



با توجه به‌شکل مشاهده می کنیم که‌در فاصله $[-\pi, \pi]$ نمودار دوتابع درچهار نقطه متقاطع اند. برای آنکه مطمئن شویم که مثلاً درفاصله $[0 \text{ و } \pi]$ دونمودار یکدیگر راقطع می کنند اگر $x=\frac{\pi}{2}$ را درتابع $y=sinx$ قرار دهیم $y_1=1$ واگر آنرا در تابع $y=\frac{1}{x}$ قرار دهیم $y_2=\frac{2}{\pi}$ بدست می‌آید که معلوم است $y_1>y_2$ یعنی در همسایگی $\frac{\pi}{2}$ نمودار $sinx$ بالای نمودار $y=\frac{1}{x}$ قرار دارد و این نشان می‌دهد که‌در این‌فاصله معادله دوریشه‌دارد به‌روش دیگرنیز می‌توان آنرا تحقیق کرد. اگر تابع $f(x)=xsinx-1$ رادرنظر بگیریم؛ $f(0).f\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)\left(\frac{\pi}{2}-1\right)<0$ پس‌معادله‌بین صفر و $\frac{\pi}{2}$ حداقل یك‌ریشه دارد که باتوجه به نمودار فقط یك ریشه دراین فاصله است.

همچنین، $f\left(\frac{\pi}{2}\right)f(\pi)=\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(-1)<0$ پس‌معادله $f(x)=0$ بین $\frac{\pi}{2}$ و π نیز با توجه به‌شکل فقط یك‌ریشه دارد. وچون تابع‌های $y=sinx$ و $y=\frac{1}{x}$ نسبت به مبدا تقارن دارند پس، معادله دوریشه دیگر بین صفرو $-\pi$ دارد. این معادله درحالت کلی بی‌شمار ریشه دارد زیرا نمودار دوتابع را اگردر R رسم کنیم دربی‌شمار نقطه متقاطعند.

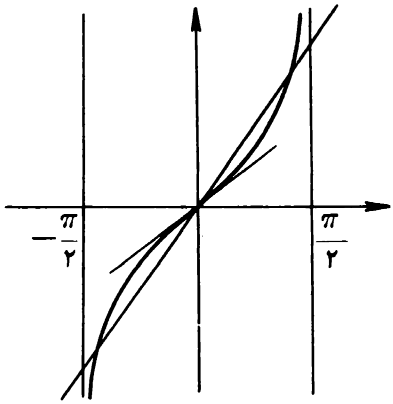
مثال ۷۴. تعداد ریشه‌های معادله $\sqrt{3}x=\mathrm{tg}x$ را درفاصله $\left(-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$ مشخص کنید.

حل. ریشه‌های این معادله محل تلاقی نمودارهای توابع $y=\mathrm{tg}x$ و $y=\sqrt{3}x$ است. معلوم است که این دونمودار درمبدأ یکدیگر را قطع می کنند زیرا $x=0$ ریشه معادله است، اکنون برای تعیین نقاط تلاقی دیگر ازضریب زاویه مماس درمبدا کمك‌می گیریم.

مشتق تابع $y=\mathrm{tg}x$ برابر $y'=1+\mathrm{tg}^2x$ است و ضریب زاویه خط مماس درمبدأ برنمودار این‌تابع $m=1$ است ولی‌ضریب زاویه خط $y=\sqrt{3}x$ برابر $m'=\sqrt{3}$ است یعنی مماس برمنحنی با محور xها زاویه 45° وخط $y=\sqrt{3}x$ زاویه 60° می‌سازد.

وچون نموار $y=\mathrm{tg}x$ در فاصله $\left(-\frac{\pi}{2} \text{ و } \frac{\pi}{2}\right)$ از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند لذا خط $y=\sqrt{3}x$ نمودار $y=\mathrm{tg}x$ را در دونقطه دیگرنیز دراین فاصله قطع‌می کند یعنی‌معادله

در فاصله $\left(-\frac{\pi}{۲}\text{و}\frac{\pi}{۲}\right)$ سه‌ریشه دارد. این معادله درحالت‌کلی بی‌شمار ریشه دارد.



تمرین. اگر معادله را به‌صورت $x=\sqrt{۳}\,\mathrm{tg}\,x$ درنظر بگیریم درفاصله $\left(-\frac{\pi}{۲}\text{و}\frac{\pi}{۲}\right)$ چند ریشه دارد؟

۱۴-۶. دستگاه معادلات (SYSTEM OF EQUATIONS)

۱. دستگاه دومعادله دو مجهولی درجه اول.

صورت کلی این‌دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ است.

برای حل این دستگاه روشهای متفاوتی وجود دارد.

الف. یکی از مجهولات را برحسب دیگری از یکی از معادلات پیدا کرده در دیگری قرار می‌دهیم، یکی ازمجهولات بدست می‌آید.

ب. دومعادله را دراعداد مناسبی ضرب‌کرده وآنها را باهم جمع‌یا ازهم کم می‌کنیم‌یکی ازمجهولات حذف شده ومجهول دیگر مشخص می‌شود.

ج. فرمولی‌که‌به دستورکرامر معروف است.

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'} \quad \text{و} \quad y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

بحث. ۱. اگر $\frac{a'}{a} \neq \frac{b'}{b}$ آنگاه دستگاه جواب دارد.

۲. اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ دستگاهٔ غیرممکن است وجواب ندارد.

۳. اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

مثال ۷۵. بازاء چه‌مقادیر m دستگاه، $\begin{cases} mx + ۲y = ۴ \\ x + (m+۱)y = ۱ \end{cases}$ دارای جواب است.

حل. باید $\frac{m}{۱} \neq \frac{+۲}{m+۱}$ یا $m^۲ + m - ۲ \neq ۰$ که درنتیجه $m \neq ۱$ و $m \neq -۲$

۲. دستگاه سه‌معادله سه مجهولی درجه اول

صورت کلی این دستگاه، $\begin{cases} a_۱x + b_۱y + c_۱z = d_۱ \\ a_۲x + b_۲y + c_۲z = d_۲ \\ a_۳x + b_۳y + c_۳y = d_۳ \end{cases}$ است.

که برای حل آن می‌توان روشهائی‌راکه برای دستگاه دومعادله دومجهولی بیان شد به کار برد.

مثال ۷۶. معادله زیررا حل کنید $\begin{cases} ۵x - ۲y + z = ۰ \\ x + y - ۳z = ۶ \\ ۲x - y - z = ۱ \end{cases}$

حل. ابتدا دستگاه را به دستگاه دومعادله دومجهولی تبدیل می‌کنیم ازجمع معادله‌های دوم وسوم داریم $۳x - ۴z = ۷$.

معادله دوم را در۲ ضرب کرده با معادله اول جمع می‌کنیم. داریم، $۷x - ۵z = ۱۲$.

اکنون دستگاه $\begin{cases} ۳x - ۴z = ۷ \\ ۷x - ۵z = ۱۲ \end{cases}$ را داریم که برای حل آن معادله اول را در۷ و معادله دوم را در ۳ــ ضرب کرده با هم جمع می‌کنیم. $-۲۸z + ۱۵z = ۴۹ - ۳۶$

درنتیجه $z = -۱$ و $۷x + ۵ = ۱۲$ یا $x = ۱$ ولذا $y = ۲$.

۳. دستگاههائی که به دستگاههای درجه اول قابل تبدیل‌اند.

دستگاههائی مانند
$$\begin{cases} \dfrac{a}{bx+c}+\dfrac{a'}{b'y+c'}=\mathrm{k} \\ \dfrac{e}{bx+c}+\dfrac{e'}{b'y+c'}=\mathrm{k}' \end{cases}$$
یا بطـور کلی

$$\begin{cases} \dfrac{a}{a_۱x+b_۱y+c_۱}+\dfrac{a'}{a_۲x+b_۲y+c_۲}=\mathrm{k} \\ \dfrac{b}{a_۱x+b_۱y+c_۱}+\dfrac{b'}{a_۲x+b_۲y+c_۲}=k' \end{cases}$$

که با تغییر متغییر به دستگاه دومعادله دومجهولی درجه اول تبدیل می‌شوند.

مثال ۷۷. دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} \dfrac{۱}{x+y}+\dfrac{۱}{x-y}=۲ \\ \dfrac{۳}{x+y}+\dfrac{۴}{x-y}=۷ \end{cases}$$

حل. با انتخاب $a=\dfrac{۱}{x+y}$ و $b=\dfrac{۱}{x-y}$ داریم؛ $\begin{cases} a+b=۲ \\ ۳a+۴b=۷ \end{cases}$ که از آن $a=۱$ و $b=۱$ بدست می‌آید درنتیجه:

$$\begin{cases} \dfrac{۱}{x-y}=۱ \\ \dfrac{۱}{x+y}=۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=۱ \\ x+y=۱ \end{cases} \Rightarrow x=۱ \text{ و } \mathrm{y}=۰$$

مثال ۷۸. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\frac{۳xy}{x+y}=۲،\ \frac{۴xz}{x+z}=۳،\ \frac{۵yz}{y+z}=۶$$

حل. هریك ازمعادلات را معکوس کرده وسپس همه را با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=\frac{۳}{۲}\\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{z}=\frac{۴}{۳}\Longrightarrow\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=\frac{۱۱}{۵}\\ \frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=\frac{۵}{۶}\end{cases}$$

بنا براین $\frac{۱۱}{۶}=\frac{۱}{z}+\frac{۳}{۲}$ یا $\frac{۱}{z}=\frac{۱}{۳}$ یا $z=۳$ وبه همین‌ترتیب $y=۲$ و $x=۱$

۴. دستگاههای به صورت
$$\begin{cases}\frac{ax+b}{m}=\frac{cy+d}{n}=\frac{ez+f}{k}\\ \alpha x+\beta y+\gamma z=l\end{cases}$$

در معادلات اول می‌تـوانند مجهولات در مخرج نیز باشند و معادله دوم نیز به‌صورت $\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{z}=l$ نیزمی‌تواند باشد.

برای حل‌دستگاههای فوق مقدارمشترك معادلات اول را t فرض‌کرده هریك رابرحسب t پیدا می‌کنیم و درمعادله دوم قرارمی‌دهیم، t بدست می‌آید سپس هریك از x و y و z محاسبه می‌شود.

مثال ۷۹. دستگاه زیررا حل‌کنید.

$$\begin{cases}\frac{x-۱}{۲}=\frac{y-۲}{۳}=\frac{z-۳}{۴}\\ ۴x+۳y+۲z=-۹\end{cases}$$

حل. مقدارمشترك معادلات اول را t فرض‌کنیم بنابراین؛

$x=۲t+۱$، $y=۳t+۲$ و $z=۴t+۳$ این مقادیررا درمعادله دوم‌قرارمی‌دهیم-

$$۸t+۴+۹t+۶+۸t+۶=-۹\Longrightarrow ۲۵t=-۲۵\Longrightarrow t=-۱$$

بنا براین:

$$x=y=z=-۱$$

مثال ۸۰. دستگاه زیررا حل‌کنید.

$$\begin{cases} ax=by=cz \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=k \end{cases}$$

حل. $ax=by=cz=t \Longrightarrow x=\frac{t}{a}$ و $y=\frac{t}{b}$ و $z=\frac{t}{c}$

بنا براین:

$$\frac{a}{t}+\frac{b}{t}+\frac{c}{t}=k \Longrightarrow t=\frac{a+b+c}{k} \Longrightarrow$$

$$x=\frac{a+b+c}{ak} \text{ و } y=\frac{a+b+c}{bk} \text{ و } z=\frac{a+b+c}{ck}$$

۵. دستگاههای متقارن

هرگاه هریك ازمعادلات دستگاه نسبت به تمام متغیرها متقارن باشند دستگاه را متقارن می‌نامیم. هردستگاه متقارن نسبت به چند متغییر قابل تبدیل به دستگاهی‌است که معادلات آن برحسب عبارتهای متقارن اصلی نسبت به آن چند متغیر می‌باشند.

مثلاتمام دستگاههای متقارن نسبت به دومتغیر قابل تبدیل به $S=x+y$ و $p=xy$ می‌باشند.

مثال۸۱. دستگاه زیررا حل کنید.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

حل. دستگاه نسبت به x و y متقارن است. هریك ازمعادلات را ساده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \frac{x^3+y^3}{xy}=12 \\ \frac{x+y}{xy}=\frac{1}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \frac{S^3-3PS}{P}=12 \\ \frac{S}{P}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

درمعادله اول $P=3S$ قرار می‌دهیم؛

$$S^3-9S^2=36S \Longrightarrow S(S^2-9S-36)=0$$

$S\neq 0$ زیرا دراین‌صورت $x=0$ و $y=0$ که جزء حوزه تعریف دستگاه نیست.

درنتیجه $S^{2}-9S-36=0$ بنابراین $S=-3$ یا $S=12$ لذا $P=-9$ یا $P=36$. پس دو دستگاه زیر را داریم.

$$(1)\begin{cases}x+y=-3\\ xy=-9\end{cases}\quad ,\quad (2)\begin{cases}x+y=12\\ xy=36\end{cases}$$

که برای حل این دستگاهها از معادله درجه دوم می‌توانیم استفاده کنیم.

$$(1)\quad t^{2}+3t-9=0 \implies t_1=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2},\ t_2=\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$$

$$\implies\begin{cases}x=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}\\ y=\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}\end{cases}\quad \text{یا}\quad \begin{cases}x=\dfrac{-3-3\sqrt{5}}{2}\\ y=\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

$$(2)\quad t^{2}-12t+36=0 \implies t_1 \text{ و } t_2=6 \implies x=y=6$$

تذکر. در دستگاههای متقارن اگر $x=\alpha$ و $y=\beta$ یك دسته جواب دستگاه باشند آنگاه $x=\beta$ و $y=\alpha$ نیز یك دسته جواب دستگاه می‌باشد.

مثال ۸۲. دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3\\ \dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{xz}=3\\ \dfrac{1}{xyz}=1\end{cases}$$

حل. دستگاه نسبت به سه متغیر متقارن است.

$$\begin{cases}\dfrac{xy+xz+yz}{xyz}=3\\ \dfrac{x+y+z}{xyz}=3\\ xyz=1\end{cases}\implies\begin{cases}x+y+z=3\\ xy+xz+yz=3\\ xyz=1\end{cases}\implies$$

$$t^3-3t^2+3t-1=0 \implies (t-1)^3=0 \implies t=1 \implies$$
$$x=y=z=1$$

بعضی از دستگاههای متقارن به‌کمک معادله درجه دوم یا روابط بین ریشه‌ها به‌سادگی قابل حل می‌باشند مثلا برای حل دستگاه، $\begin{cases} x^n+y^n=a \\ xy=b \end{cases}$

معادله دوم را به‌توان n می‌رسانیم $\begin{cases} x^n+y^n=a \\ x^n y^n=b^n \end{cases}$ ودر نتیجه x^n و y^n ریشه‌های معادله $t^2-at+b^n=0$ می‌باشند.

مثال۸۳. ریشه‌های دستگاه $\begin{cases} x^4+y^4=8 \\ xy=2 \end{cases}$ را پیدا کنید.

حل.
$$\begin{cases} x^4+y^4=8 \\ x^4y^4=16 \end{cases} \implies t^2-8t+16=0 \implies t=4$$
$$x^4=4 \implies x=\pm\sqrt{2} \text{ و } y^4=4 \implies y=\pm\sqrt{2}$$

$(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ و $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ریشه‌های دستگاه می‌باشند.

به طور کلی دستگاه نامتقارن $\begin{cases} ax^n+by^n=c \\ xy=k (k\neq 0) \end{cases}$ را می‌توان حل کرد. اگر $y=\dfrac{k}{x}$ را درمعادله اول قراردهیم به معادله قابل‌حل، $ax^{2n}-cx^n+bk^n=0$ می‌رسیم.

مثال۸۴. بازاء چه مقادیر a دستگاه $\begin{cases} 4x^2+y^2=8 \\ xy=a \end{cases}$ دارای جواب است.

حل. برای آنکه دستگاه فوق دارای جواب باشد باید معادله $4x^2+\dfrac{a^2}{x^2}=8$ یا $4x^4-8x^2+a^2=0$ دارای جواب باشد. یعنی معادله $4t^2-8t+a^2=0$ دارای دو ریشه مثبت یا صفر باشد. در این معادله $S=2>0$ و $P=\dfrac{a^2}{4}>0$ پس کافیست ،

$\circ \geqslant \Delta' = ۱۶ - ۴a^۲$ یا $a^۲ \leqslant ۴$ درنتیجه $|a| \leqslant ۲$.

۶. دستگاههای متجانس نسبت به مجهولات

دستگاهی‌را نسبت به مجهولات خود متجانس گوئیم که تمام جملات شامل‌مجهول‌در آن از یك درجه باشند.

مثلا دستگاه، $\begin{cases} ax^۲+by^۲+cxy=d \\ a'x^۲+b'y^۲+c'xy=d' \end{cases}$ نسبت به x و y متجانس ازدرجه دوم است.

برای حل دستگاه متجانس، $m=\dfrac{y}{x}$ فرض می‌کنیم و در دومعادله $y=mx$ قرار می‌دهیم هر دومعادله برحسب x می‌شوند که ازتقسیم آنها بریکدیگر x حذف شده و m بدست می‌آید. سپس x و y مشخص می‌شوند.

مثال ۸۵. دستگاه زیررا حل‌کنید. $\begin{cases} x^۲+y^۲-xy=۳ \\ y^۲-x^۲=۳ \end{cases}$

حل. دستگاه نسبت به x و y متجانس ازدرجه دوم است پس اگر $y=mx$ فرض‌کنیم داریم:

$$\begin{cases} x^۲+m^۲x^۲-mx^۲=۳ \\ m^۲x^۲-x^۲=۳ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^۲(۱+m^۲-m)=۳ \\ x^۲(m^۲-۱)=۳ \end{cases} \qquad (۱)$$

اگر دو معادله را برهم تقسیم‌کنیم، $۱=\dfrac{۱+m^۲-m}{m^۲-۱}$ یا $m=۲$ ودرنتیجه $y=۲x$

اکنون مقدار m را در یکی ازمعادلات (۱) قرار می‌دهیم x وسپس y محاسبه می‌شود.

$$m=۲ \Longrightarrow ۳x^۲=۳ \Longrightarrow x=\pm۱ \text{ و } y=\pm۲$$

پس (۱و۲) و (۲ــ و ۱ــ) جوابهای دستگاه می‌باشند.

۶-۱۵. نامعادلات (INEQUALITIES)

نامعادلات درجه اول و بعضی‌نامعادلات لگاریتمی‌وتوانی را درفصل‌های قبل بررسی

کردیم. اکنون نامعادلات درجه دوم و بالاتر و همچنین بعضی نامعادلات اصم را مورد بررسی قرار خواهیم داد. در ابتدا چند قضیه کلی را درمورد نامعادلات بیان می‌کنیم و با چند مثال این قسمت را ادامه می‌دهیم.

۱. نامعادله جبری یک مجهولی، وقتی که همه جمله‌های آنرا به سمت چپ منتقل کنیم به صورت $f(x)>0$ یا $f(x)<0$ درمی‌آید، ممکن است $f(x)$ برابر صفر نیز باشد. هرگاه $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد می‌توان آن را به حاصلضرب عوامل خطی و سه‌جمله‌ای‌های درجه دوم مثبت (با ریشه‌های غیر حقیقی) تجزیه کرد:

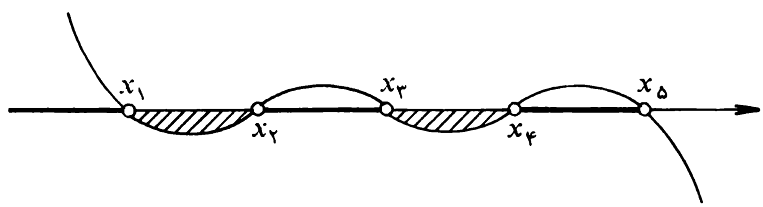
$$f(x)=a(x-x_1)^n\cdots(x-x_k)^m(x^2+p_1x+q_1)^\alpha\cdots(x^2+p_rx+q_r)^\gamma>0(<0)$$

که این نامعادله هم‌ارز نامعادله زیر است:

$$P(x)=a(x-x_1)^n\cdots(x-x_k)^m>0(<0)$$

بنابراین برای حل نامعادله فوق ریشه‌های $P(x)=0$ را پیدا می‌کنیم و آنها را به ترتیب صعودی از چپ به راست می‌نویسیم سپس برای تعیین علامت عبارت، عدد حقیقی β را بین دو ریشه متوالی مثلا (x_i و x_{i+1}) انتخاب کرده و $P(\beta)$ یا $f(\beta)$ را پیدا می‌کنیم علامت آن، همان علامت $f(x)$ بین x_{i+1} و x_i است آنگاه درهر ریشه به شرطی که آن ریشه مکرر از مرتبه زوج نباشد علامت عبارت تغییر می‌کند.

تعبیر هندسی. نامعادله $f(x)>0$ در فواصلی برقرار است که نمودار تابع $y=f(x)$ در بالای محور xها قرار دارد.



مثال ۸۶. نامعادله زیر را حل کنید.

$$f(x)=(x^3-3x^2-x+3)(x^3-1)>0$$

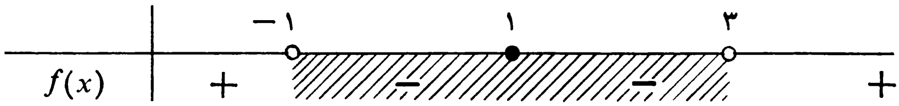
حل. ابتدا عبارت را به عاملهای ساده‌تر تجزیه می‌کنیم.

$$f(x)=[x^2(x-3)-(x-3)]\ (x-1)(x^2+x+1)$$ یا

$$f(x)=(x-۳)(x-۱)^۲(x+۱)(x^۲+x+۱)$$

عبارت $x^۲+x+۱$ دارای ریشه حقیقی نیست وچون ضریب $x^۲$ مثبت است پس $x^۲+x+۱>۰$.

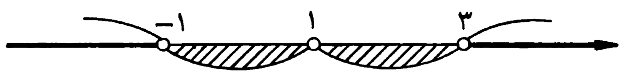
ریشه‌های معادله $f(x)=۰$ عبارتند از $x_۳=۳$ و $x_۲=۱$ و $x_۱=-۱$ که در آن $x_۲=۱$ ریشه مضاعف است



صفر بین ۱ و ۱− است و $f(۰)=-۳<۰$ پس درفاصله (۱ و ۱−)، $f(x)<۰$ اما $x=۱$ ریشه مضاعف است لذا در فاصله (۳ و ۱) نیز $f(x)<۰$ یعنی در $x=۱$ علامت تغییر نمی‌کند. همچنین در فاصله (∞+ و ۳) ، $f(x)>۰$ و در فاصله (۱− و ∞−)، $f(x)>۰$.

درنتیجه جواب نامعادله (∞+ و ۳) $\cup$ (۱− و ∞−) است.

تذکر . می‌توانیم یك نمودار فرضی نیز برای $f(x)$ رسم کنیم وجواب را بـه کمك آن مشخص کنیم.



نامعادلات گویا

تابع $f(x)=\dfrac{A(x-a_۱)^{n_۱}\dots(x-a_k)^{n_k}}{B(x-b_۱)^{m_۱}\dots(x-b_r)^{m_r}}$ راکه در آن $n_۱$ ،...، n_k و $m_۱$،...، m_r اعدادی طبیعی و $a_۱$،...، a_k و $b_۱$ و ... b_r اعداد حقیقی متمایز می‌باشند درنظرمی‌گیریم، نامعادله $f(x)>۰$ یا $f(x)<۰$ را یك نامعادله گویا می‌نامیم. $x=a_i$ ($i=۱$ و ۲ و..k) را ریشه $f(x)=۰$ و $x=b_i$ ($i=۱$ و ۲ و... r) را نقطه انفصال $f(x)$ می‌نامیم.

برای حل نامعادلات فوق نیز تمام a_iها و b_iها را به ترتیب صعودی ازچپ به راست می‌نویسیم ومانند قسمت (۱) عمل می‌کنیم با این تفاوت که درقسمت (۱) بـازاء ریشه‌های

$f(x)=0$ عبارت برابر صفر است اما در نامعادلات گویا به ازاء ریشه‌های مخرج یعنی b_iها کسر تعریف نشده است.

مثال ۸۷. نامعادله $\frac{(x-1)^3(x+2)^4(x-3)^5(x+6)}{x^2(x-7)^3}\leqslant 0$ را حل کنید.

حل. ریشه‌های صورت عبارت‌اند از ۱ و ۲ـ و ۳ و ۶ـ و ریشه‌های مخرج یا نقاط انفصال ۷ و ۰ می‌باشند و $x=-2$ و $x=0$ ریشه‌های مضاعف هستند.

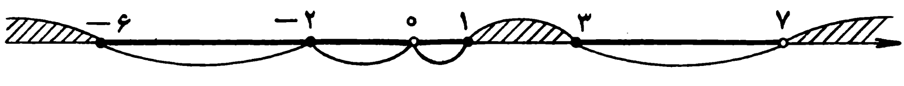
$$f(-1)=\frac{(-2)^3(1)^4(-4)^5(5)}{(-8)^3}<0$$

x		-6		-2		0		1		3		7	
$f(x)$	+		−		−	‖	−		+		−	‖	+

در نتیجه مجموعه جواب به صورت زیر است.

$$[-6,0)\cup(0,1]\cup[3,7)$$

می‌توان با نمودار فرضی به صورت زیر نیز جواب را مشخص کرد.



چون $x=0$ و $x=-2$ ریشه مضاعف هستند علامت در این دو نقطه تغییر نکرده است

۳. دستگاه نامعادلات

دستگاه متشکل از نامعادلات $f_1(x)>g_1(x)$ و $f_2(x)>g_2(x)$ را یک دستگاه نامعادلات یک مجهولی شامل دو نامعادله می‌نامیم.

ممکن است دستگاه شامل بیش از دو معادله نیز باشد.

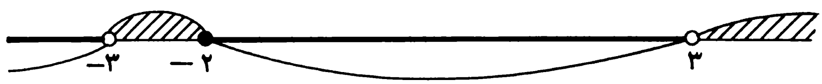
برای حل دستگاههای نظیر فوق ابتدا هریک از نامعادلات را جداگانه حل می‌کنیم تا جواب آن مشخص شود سپس اشتراک جوابهای بدست آمده را پیدا می‌کنیم جواب دستگاه می‌باشد.

مثال ۸۸. دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9} \leqslant 0 \\[2ex] \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8} \geqslant 0 \end{cases}$$

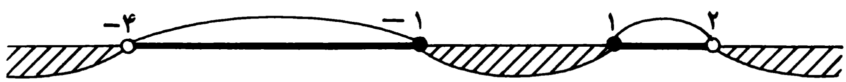
حل. ابتدا نامعادله اول را حل می‌کنیم، عبارت x^2-3x+8 ریشه ندارد و لذا همواره $x^2-3x+8>0$ بنا براین، $\dfrac{x+2}{(x-3)(x+3)} \leqslant 0$ که جواب آن به صورت زیر است،

$$f(0) = -\frac{2}{9} < 0$$



$$\boxed{x<-3 \ \text{یا} \ -2 \leqslant x < 3}$$

و برای حل نامعادله دوم یعنی $\dfrac{(1-x)(1+x)}{(x-2)(x+4)} \geqslant 0$ داریم؛ $f(0) = -\dfrac{8}{1} < 0$



$$\boxed{-4<x\leqslant -1 \ \text{یا} \ 1 \leqslant x < 2}$$

و درنتیجه اشتراك دوجواب فوق جواب دستگاه است.

$$((-\infty,-2)\cup[-2,3))\cap((-4,-1]\cup[1,2))=$$

$$(-4,-3)\cup[-2,-1]\cup(1,2)$$

از دستگاه نامعادلات در تعیین دامنه توابـع و تعیین ریشه‌هـای معادله‌ها می‌توان استفاده کرد.

مثال ۸۹. دامنه تابع $f(x)=\sqrt{\frac{x-۲}{x+۲}}+\sqrt[۴]{\frac{x^۲(۹-x^۲)}{|x-۲|}}$ را پیدا کنید.

حل. شرایط زیر باید برقرار باشند.

$$\begin{cases}\frac{x-۲}{x+۲}\geqslant ۰ \text{ و } x\neq -۲\\ \frac{x^۲(۹-x^۲)}{|x-۲|}\geqslant ۰ \text{ و } x\neq ۲\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x\geqslant ۲ \text{ یا } x<-۲\\ ۹-x^۲\geqslant ۰ \text{ و } x\neq ۲\end{cases}$$

زیرا $۰\leqslant|x-۲|$ و $۰\leqslant x^۲$ بنابراین جواب نامعادله اول $۲\leqslant x$ یا $x<-۲$ و جواب نامعادله دوم $x\neq ۲$ و $x^۲\leqslant ۹$ یا $-۳\leqslant x\leqslant ۳$ و $x\neq ۲$ است که اشتراک آنها $۲<x\leqslant ۳$ یا $-۳\leqslant x<-۲$ است لذا دامنه تابع فاصله $[-۳, -۲)\cup(۲, ۳]$ است.

مثال ۹۰. بازاء چه مقادیر a هردو ریشه معادله زیر مثبت‌اند.

$$(a-۳)x^۲-۲ax+۶a=۰$$

حل. برای آنکه معادله دوریشه داشته باشد باید $\Delta'\geqslant ۰$ یا $a^۲-۶a(a-۳)\geqslant ۰$ که معادل نامساوی $۵a^۲-۱۸a\leqslant ۰$ می‌باشد.

همچنین برای آنکه دو ریشه معادله هردومثبت باشند بایـد حاصلضرب وحاصلجمع ریشه‌هـا هـر دو مثبت بـاشند یعنـی، $\frac{۶a}{a-۳}>۰$ و $\frac{۲a}{a-۳}>۰$ که هر دو معادل نامساوی $\frac{a}{a-۳}>۰$ است بنابراین دستگاه نامعادلات زیر را داریم که از حل آن حدود a مشخص می‌شود.

$$\begin{cases}\frac{a}{a-۳}>۰\\ a(۵a-۱۸)\leqslant ۰\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a<۰ \text{ یا } a>۳\\ ۰\leqslant a\leqslant\frac{۱۸}{۵}\end{cases}\Longrightarrow ۳<a\leqslant\frac{۱۸}{۵}$$

مثال ۹۱. بازاء چه مقادیر a نامعادله زیر همواره برقرار است؟

$$\left|\frac{x^۲+ax+۱}{x^۲+x+۱}\right|<۳$$

حل. با توجه به‌قدر مطلق، $-۳<\frac{x^۲+ax+۱}{x^۲+x+۱}<۳$ وچون $x^۲+x+۱>۰$

بنابراین، $-3x^2-3x-3<x^2+ax+1<3x^2+3x+3$ و درنتیجه باید دونامعادله زیر برقرار باشند.

$$\begin{cases}2x^2+(3-a)x+2>0\\4x^2+(a+3)x+4>0\end{cases}$$

برای آنکه هریك ازنامعادلات فوق همواره برقرار باشندباید هریك ازعبارتهای فوق ریشه نداشته باشند. لذا:

$$\begin{cases}(3-a)^2-16<0\\(a+3)^2-64<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-4<3-a<4\\-8<a+3<8\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}-7<-a<1\\-11<a<5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-1<a<7\\-11<a<5\end{cases}$$

که جواب مشترك $-1<a<5$ است.

۴. نامعادلات گنگ (اصم)

هرنامعادله به صورت $\sqrt[n]{f(x)}>g(x)$ یا $\sqrt[n]{f(x)}<g(x)$ را یك نامعادله اصم می‌نامیم. درحالتی‌که n فردباشد با به توان n رساندن نامعادله حل‌می‌شود. اما اگر n زوج باشد نامعادله احتیاج به بحث بیشتری دارد. بنابراین حالتی راکه n زوج باشد و آن هم درحالت $n=2$، این‌نامعادلات را بررسی می‌کنیم.

برای‌حل‌نامعادله $\sqrt{f(x)}<g(x)$، باید درنظرداشته باشیم‌که $f(x)\geqslant 0$ و هم‌چنین $g(x)>0$ زیرا $0\leqslant\sqrt{f(x)}<g(x)$ وسپس‌برای حل‌طرفین نامعادله را به‌توان دو می‌رسانیم بنابراین نامعادله $\sqrt{f(x)}<g(x)$ هم ارز نامعادلات زیراست.

$$\begin{cases}f(x)\geqslant 0\\g(x)>0\\f(x)<(g(x))^2\end{cases}$$

واگر $\sqrt{f(x)}\leqslant g(x)$ باشد آنگاه $f(x)\geqslant 0$ و $g(x)\geqslant 0$ و $f(x)\leqslant(g(x))^2$.

حال اگر نامعادله به صورت $\sqrt{f(x)}>g(x)$ باشد در این حالت $g(x)$ می‌تواند مثبت یا منفی یا صفر باشد بنابراین اگر $g(x)<0$، آنگاه هر x که بازاء آن $\sqrt{f(x)}$ بامعنی باشد جواب نامعادله است یعنی هر x که بازاء آن $f(x)\geqslant 0$.

اما اگر $g(x)\geqslant 0$، آنگاه نامعادله $\sqrt{f(x)}>g(x)$ هم‌ارز نامعادلات $f(x)\geqslant 0$ و $f(x)>(g(x))^2$ است.

لذا به طور خلاصه نامعادله $\sqrt{f(x)}>g(x)$ هم‌ارز دو دستگاه نامعادلات زیر است.

$$1)\quad \begin{cases} g(x)<0 \\ f(x)\geqslant 0 \end{cases} \qquad\qquad 2)\quad \begin{cases} g(x)\geqslant 0 \\ f(x)\geqslant 0 \\ f(x)>(g(x))^2 \end{cases}$$

بنابراین باید هریک ازنامعادلات فوق را در هر دستگاه حل کنیم وسپس اشتراک جوابها درهر دستگاه جواب آن دستگاه است. آنگاه جواب کلی نامعادله اجتماع جوابهای دو دستگاه (۱) و (۲) است.

مثال ۹۲. نامعادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{\frac{x+3}{4-x}}\geqslant 2$$

حل. نامعادله فوق هم‌ارز نامعادلات زیر است:

$$\begin{cases} \dfrac{x+3}{4-x}\geqslant 4 \\ \dfrac{x+3}{4-x}\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3\leqslant x<4 & (\text{باید بین دوریشه باشد } x) \\ \dfrac{5x-13}{4-x}\leqslant 0 \text{ یا } \dfrac{13}{5}\leqslant x<4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \frac{13}{5}\leqslant x<4$$

مثال ۹۳. جواب نامعادله $\sqrt{(x+2)(x-1)}\geqslant 2(x+2)$ را مشخص کنید.

حل. نامعادله فوق هم‌ارز دو دستگاه نامعادلات زیر است.

$$1)\quad \begin{cases}(x+2)<0\\ (x+2)(x-1)\geqslant 0\end{cases} \qquad\qquad 2)\quad \begin{cases}x+2\geqslant 0\\ (x+2)(x-1)\geqslant 0\\ (x+2)(x-1)\geqslant 4(x+2)^2\end{cases}$$

از دستگاه اول داریم، $x<-2$ و درمورد دستگاه دوم داریم؛

$$\begin{cases}x\geqslant -2\\ x\leqslant -2 \text{ یا } x\geqslant 1\\ x-1\geqslant 4x+8\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}x=-2 \text{ یا } x\geqslant 1\\ x\leqslant -3\end{cases} \Longrightarrow x=-2$$

لذا اجتماع جوابهای دو دستگاه (۱) و (۲)، $\{-2\}\cup(-\infty,-2)$ یا $(-\infty,-2]$ جواب دستگاه است.

مثال ۹۴. نامعادله $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\leqslant 1$ را حل کنید.

حل. اولا باید $x-2\geqslant 0$ و $x+1\geqslant 0$ که درنتیجه $x\geqslant 2$.
ثانیاً اگر طرفین نامعادله را به توان دو برسانیم داریم؛

$$x+1+x-2-2\sqrt{x^2-x-2}\leqslant 1 \Longrightarrow x-1\leqslant\sqrt{x^2-x-2}$$

چون $x\geqslant 2$ لذا $x-1>0$ پس اگر طرفین نامعادله فوق را به توان دو برسانیم بدست می‌آید $x\geqslant 3$.
لذا جواب نامعادله $[3,+\infty)$ است.

۱۶-۶. معادلات و نامعادلات جزء صحیح

تعریف. به ازاء هرعدد حقیقی x، عددی صحیح مانند n وعددی حقیقی مانند P که $0\leqslant P<1$ وجود دارند به‌طوری که $x=n+p$ دراین‌صورت عدد صحیح n را جزء صحیح x می‌نامیم و با نماد $[x]$ یا $\mathrm{E}(x)$ نشان می‌دهیم. مانند $x=5/27$ که $x=5+0/27$ ولذا $[5/27]=5$ یا $x=-7/4$ که $x=-7-0/4$ اما P باید مثبت یا صفر باشد لذا $x=-8+1-0/4$ یا $x=-8+0/6$ در نتیجه، $[-7/4]=-8$. همچنین $[\pi]=3$.

بنابراین جزء صحیح یک عدد بزرگترین عدد صحیحی است که در آن عدد وجود دارد.

لذا اگر $n=[x]$ آنگاه، $n\leqslant x<n+1$ و $x=[x]+p$ که $0\leqslant p<1$ عدد

حقیقی p را جزء کسری x می‌نامیم و آنرا با نماد $\{x\}$ نشان می‌دهیم یعنی $p=\{x\}$ یا $p=x-[x]$.

خواص جزء صحیح

۱) $x-1<[x]\leqslant x$ ۲) $[x]\leqslant x<[x]+1$

۳) $x\geqslant n \Leftrightarrow [x]\geqslant n$ $(n\in z)$

۴) $0\leqslant x-[x]<1$

۵) $[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & x\in z \\ -1 & x\notin z \end{cases}$

اثبات:

$$\begin{cases} x-1<[x]\leqslant x \\ -x-1<[-x]\leqslant -x \end{cases} \Longrightarrow -2<[x]+[-x]\leqslant 0 \Longrightarrow$$

$$[x]+[-x]=0 \text{ یا } [x]+[-x]=-1$$

بنابراین:

$$x\in z \Longrightarrow [x]+[-x]=0$$

$$x\notin z \Longrightarrow [x]+[-x]=-1$$

نتیجه:

$$x\in z \Longrightarrow [-x]=-[x]$$

$$x\notin z \Longrightarrow [-x]=-[x]-1$$

مثال ۹۵. اگر $y=x-n\left[\frac{x}{n}\right]$ حدود y را مشخص کنید.

حل. $y=n\left(\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]\right)$ با توجه به خاصیت (۴) $0\leqslant\frac{x}{n}-\left[\frac{x}{n}\right]<1$

بنابراین $0\leqslant y<n$

۶) $[x+n]=[x]+n$ ، $n\in z$ و $x\in R$

اثبات: اگر $k=[x]$ آنگاه $k\leqslant x<k+1$ ، $k\in z$ ،

بنابراین $(k+n)\leqslant x+n<(k+n)+1$ و در نتیجه

$$[x+n]=k+n=[x]+n$$

مثال ۹۶. معادله زیر را حل کنید.

$$\left[\frac{2x+1}{x}\right]=3$$

حل. $\left[\frac{2x+1}{x}\right]=\left[2+\frac{1}{x}\right]=2+\left[\frac{1}{x}\right]=3 \Rightarrow$

$$\left[\frac{1}{x}\right]=1\Rightarrow 1\leqslant\frac{1}{x}<2\Rightarrow \frac{1}{2}<x\leqslant 1$$

۷) $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{[x]}{n}\right]$ $\qquad$ $n\in N$ و $x\in R$

اثبات: $\left[\frac{x}{n}\right]=k$ فرض می‌کنیم پس $k\leqslant\frac{x}{n}<k+1$ اگر طرفین این نامساوی را در عدد صحیح و مثبت n ضرب کنیم، $nk\leqslant x<n(k+1)$ و لذا $nk\leqslant[x]<n(k+1)$ (خاصیت ۳) و از آنجا $k\leqslant\frac{[x]}{n}<k+1$ و بنا به تعریف جزء صحیح، $\left[\frac{[x]}{n}\right]=k$

مانند: $\left[\frac{\sqrt{150}}{5}\right]=\left[\frac{[\sqrt{150}]}{5}\right]=\left[\frac{12}{5}\right]=2$

۸) $[x+y]\geqslant[x]+[y]$ یا

$$[x+y]=\begin{cases}[x]+[y] & 0\leqslant p+q<1\\ [x]+[y]+1 & 1\leqslant p+q<2\end{cases}$$

که p و q جزءهای کسری x و y می‌باشند، $P=\{x\}$ و $q=\{y\}$

اثبات:

$$\begin{cases}x=[x]+p & 0\leqslant p<1\\ y=[y]+q & 0\leqslant q<1\end{cases} \quad \text{و}\ 0\leqslant p+q<2$$

$$x+y=[x]+[y]+p+q \Rightarrow [x+y]=[x]+[y]+[p+q]$$

$$\begin{cases}0\leqslant p+q<1 \Rightarrow [p+q]=0 \Rightarrow [x+y]=[x]+[y]\\ 1\leqslant p+q<2 \Rightarrow [p+q]=1 \Rightarrow [x+y]=[x]+[y]+1\end{cases}$$

مثال ۹۷. ثابت کنید $\left[x+\frac{۱}{۲}\right]+[x]=[۲x]$.

حل. $۰\leqslant p<۱ \implies n=[x]$ ، $x=n+p$

$$\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=\left[n+p+\frac{۱}{۲}\right]=n+\left[p+\frac{۱}{۲}\right]$$

و $[۲x]=[۲n+۲p]=۲n+[۲p]$

بنا براین باید ثابت کنیم $۲n+[۲p]=n+n+\left[p+\frac{۱}{۲}\right]$ یا

$[۲p]=\left[p+\frac{۱}{۲}\right]$.

اگر $۰\leqslant p<\frac{۱}{۲}$ آنگاه، $۰=[۲p]$ و $۰=\left[p+\frac{۱}{۲}\right]$ واگر $\frac{۱}{۲}\leqslant p<۱$

آنگاه، $۱=[۲p]$ و $۱=\left[p+\frac{۱}{۲}\right]$ و لذا درهرصورت تساوی برقرار است.

رابطه فوق را می‌توان درحالت کلی تعمیم داده وآنرا ثابت کرد.

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{۱}{n}\right]+\left[x+\frac{۲}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-۱}{n}\right] \quad (۹$$

نتیجه: هر گاه درمثال فوق ازرابطه $[x]=x-\{x\}$ استفاده‌کنیم به رابطه زیرمی‌رسیم؛

$$۲x-\{۲x\}=x-\{x\}+x+\frac{۱}{۲}-\left\{x+\frac{۱}{۲}\right\} \implies$$

$$\{x\}+\left\{x+\frac{۱}{۲}\right\}=\{۲x\}+\frac{۱}{۲}$$

$$۱۰)\ [\sqrt{n^۲}]=[\sqrt{n^۲+۱}]=[\sqrt{n^۲+۲}]=\cdots=[\sqrt{(n+۱)^۲-۱}]=n$$

اثبات به سادگی مشخص است زیرا $\sqrt{(n+۱)^۲-۱}<\sqrt{(n+۱)^۲}=n+۱$

نتیجه:

$$[\sqrt{n^۲}]+[\sqrt{n^۲+۱}]+\cdots+[\sqrt{(n+۱)^۲-۱}]=n(۲n+۱)$$

زیرا تعداد جزء صحیح‌ها برابر $۲n+۱$ است.

مثال ۹۸. حاصل عبارت زیررا پیداکنید.

$$S=[\sqrt{۶۴}]+[\sqrt{۶۵}]+[\sqrt{۶۶}]+\cdots+[\sqrt{۸۰}]$$

حل. $[\sqrt{۶۴}]=[\sqrt{۶۵}]=\cdots=[\sqrt{۸۰}]=۸$ و تعداد جزء صحیح‌ها برابر $۸۰-۶۴+۱=۱۷$ است یا $n=۸$ و تعداد $۲\times ۸-۱=۱۷$ است بنابراین:

$$S=۸\times ۱۷=۱۳۶$$

مثال ۹۹. معادله زیر را حل کنید.

$$x^{۲}-۴[x]+۳=۰$$

حل. $x^{۲}+۳=۴[x]$ بنابراین اگر $[x]=n$ فرض کنیم، $n\geqslant ۰$ و $n\in z$. اکنون با توجه به نامساوی $n\leqslant x<n+۱$ داریم: $n^{۲}\leqslant x^{۲}<(n+۱)^{۲}$ و لذا:
$n^{۲}+۳\leqslant x^{۲}+۳<n^{۲}+۲n+۴$ بنابراین $n^{۲}+۳\leqslant ۴n<n^{۲}+۲n+۴$ که این نامساوی معادل دستگاه زیر است؛

$$\begin{cases} n^{۲}-۴n+۳\leqslant ۰ \\ n^{۲}-۲n+۴>۰ \end{cases}$$

از دستگاه اول $۱\leqslant n\leqslant ۳$ و دستگاه دوم همواره برقرار است پس اشتراک دو جواب همان $۱\leqslant n\leqslant ۳$ است وچون $n\in z$ لذا $n=۱$ و ۲ و ۳ که با قرار دادن در معادله داریم؛ $x^{۲}=۱$ و ۵ و ۹ که چون $x\geqslant ۰$ بنابراین؛ $x=۱$ و $\sqrt{۵}$ و ۳ ریشه‌های معادله می‌باشند.

مثال ۱۰۰. معادله $nx-(n+۱)[x]=۰$ را حل کنید.

حل. اگر فرض کنیم $x=[x]+p$ آنگاه $n[x]+np-(n+۱)[x]=۰$ یا $np=[x]$، و $۰\leqslant p<۱$ بنابراین $۰\leqslant np<n$ ولذا $۰\leqslant [x]<n$.

بنابراین $[x]=k$ که $k\in z$ و $k=۰\,,\,۱$ و ۲ و $\ldots$ و $n-۱$ وچون $np=[x]$ پس $p=\frac{k}{n}$ و $x=k+\frac{k}{n}$ یا $x=k\left(\frac{n-۱}{n}\right)$ ریشه معادله است که $k=۰$ و ۱ و ۲ و $\ldots$ و $n-۱$ یعنی معادله n ریشه دارد.

مسائل معادلات

۱. اگر a و b ریشه‌های معادلـه $x^۲-۵x-۱=۰$ باشد مقدار عبارت $\frac{a^۲}{b+۱}+\frac{b^۲}{a+۱}$ را پیدا کنید.

۲. اگر a و b و c اضلاع مثلثی باشند ثابت کنید عبارت: $A=b^۲x^۲+(b^۲+c^۲-a^۲)x+c^۲$ همواره مثبت است.

۳. اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های معادله $x^۲-۴x-۲=۰$ باشند حاصل عبارت

$$A=\frac{x_۱^۴x_۲+x_۱x_۲^۴-۳x_۱x_۲}{(x_۱^۳-۴x_۱^۲+۳)(x_۲^۳-۴x_۲^۲+۳)}$$ را پیدا کنید.

۴. اگـر a، b، c، p، q، r، اعـداد حقیقـی مثبت بـاشند و بـازاء هـر x حقیقـی $ax^۲+۲bx+c\geqslant ۰$ و $px^۲+۲qx+r\geqslant ۰$ ثـابت کنیـد بـازاء هـر x حقیقـی، $apx^۲+۲bqx+cr\geqslant ۰$.

۵. رابطه مستقل از k بین ریشه‌های معادله زیر را پیدا کنید.

$$(k-۳)x^۲+(۴k+۵)x+۲-k=۰$$

۶. حاصل عبارت $A=(۴-\sqrt{۱۵})^۴+(۴+\sqrt{۱۵})^۴$ را پیدا کنید.

۷. ثابت کنید اگر ریشه‌های معادله $x^۴+px^۲+q=۰$ تشکیل تصاعد عددی دهند آنگاه،

$$\sqrt{q}=\frac{۳}{۱۰}p$$

۸. معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x+۳-۴\sqrt{x-۱}}+\sqrt{x+۸-۶\sqrt{x-۱}}=۱$$

۹. معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$$

۱۰. معادله $x^۳+px^۲+qx+r=۰$ را درهریك ازحالات زیر حل کنید.

الف- ریشه‌ها تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند.

ب- $x_۱=x_۲+x_۳$ ($x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ سه ریشه معادله‌اند)

۱۱. اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^۳-۵x^۲+۶x-۱=۰$ باشند آنگاه حاصل عبارت

$S=(\alpha+3)^2+(\beta+3)^2+(\gamma+3)^2$ را پیدا کنید.

۱۲. اگر α ریشه معادله $x^3+x^2-2x-1=0$ باشدآنگاه دو ریشه دیگرمعادله را بر حسب کثیرالجمله‌ای با ضرائب گویا برحسب α بدست آورید.

(مرحله اول ششمین مسابقه ریاضی دانش‌آموزان بهمن۶۷)

۱۳. ریشه‌های حقیقی معادله زیررا پیداکنید. $(x>0)$

$$\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\cdots+2\sqrt{x+2\sqrt{3x}}}}}}_{n}=x$$

۱۴. ثابت کنید اگر تمام ریشه‌های معادله چند جمله‌ای، $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+rx^2+kx+l=0$ حقیقی باشند بازاء هر i، $\frac{l^2}{k^2-2rl}<x_i^2<\frac{b^2-2ac}{a^2}$ (x_i ریشه معادله است)

۱۵. درمعادله $x^3+4x^2-11x-30=0$ حدود ریشه‌ها را مشخص کنید.

راهنمائی: ازمسئله قبل کمك بگیرید.

۱۶. ثابت کنید معادله $x^5=x^4+x^3+x^2+x+1$ فقط یك ریشه حقیقی دارد.

۱۷. فرض کنیم $f(x)$ یك چندجمله‌ای و a و b دوعدد حقیقی باشند دراین صورت عددی حقیقی مانند c بین a و b وجود داردکه $f(a)-f(b)=(a-b)f'(c)$ (قضیه مقدار متوسط برای چندجمله‌ای‌ها)

راهنمائی: ازقضیه رل استفاده کنید.

۱۸. معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt[n]{17\sqrt{5}+38}+\sqrt[n]{17\sqrt{5}-38}=\sqrt{20}\quad (n\in N)$$

۱۹. بازاء چه مقادیر a نامساوی $x^3-x^2-ax+1\geqslant 0$ برای $x\geqslant 0$ برقـرار است.

۲۰. اگردومعادله $x^n-x^2-2=0$ و $x^n-4x+2=0$ دارای ریشه مشترك باشند n را پیدا کنید.

۲۱. معادله $x^3-6x+4=0$ وعبارت، $f(x)=x^4-6x^2+5x-1$ مفروض است اگر α و β و γ ریشه‌های معادله درجه سوم فوق باشند معادله‌ای تشکیل دهیدکه ریشه‌هایش

$f(\alpha)$، $f(\beta)$، $f(\gamma)$ باشد.

۲۲. a و b را چنان پیداکنیدکه معادله زیر دارای دو ریشه مضاعف باشد واین دو ریشه را پیداکنید.

$$x^{4}-6x^{3}+12x^{2}+ax+b=0$$

دستگاههای زیررا حل کنید.

۲۳. $\begin{cases} xy(x+y)=20 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4} \end{cases}$ ۲۴. $\begin{cases} xy+xz=-4 \\ yz+xy=-1 \\ zx+zy=-9 \end{cases}$

۲۵. $\begin{cases} x^{3}+x^{3}y^{3}+y^{3}=17 \\ x+xy+y=5 \end{cases}$ ۲۶. $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{4}{y}=2 \\ \dfrac{18}{x}+\dfrac{y}{2}=5 \end{cases}$

۲۷. $\begin{cases} x+y+z+u=12 \\ x^{2}+y^{2}+z^{2}+u^{2}=50 \\ x^{3}+y^{3}+z^{3}+u^{3}=252 \\ xu=yz \end{cases}$ ۲۸. $\begin{cases} ax+y=a^{2} \\ x+ay=1 \end{cases}$

۲۹. بازاء چه مقدارa دستگاه زیر دارای جواب است؟

$$\begin{cases} x^{2}+y^{2}=2(1+a) \\ (x+y)^{2}=14 \end{cases}$$

۳۰. بازاء چه مقدار a نامعادله $\dfrac{x^{2}+3x+a}{x^{2}+x+1}<2$ همواره برقرار است؟

نامعادلات زیررا حل کنید.

۳۱. $x^{2}+5x+4<5\sqrt{x^{2}+5x+28}$ ۳۲. $\sqrt{x^{2}-x-12}<x$

۳۳. $\sqrt{x^{2}-4x}>x-3$ ۳۴. $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}\geqslant 2$

۳۵. $(16-x^{2})(x^{2}+4)(x^{2}+x+1)(x^{2}-x-2)(x^{2}-4x+4)\leqslant 0$

دستگاه نامعادلات زیر را حل کنید.

۳۶. $$\left.\begin{matrix} x^2-5x+6>0 \\ \dfrac{3x-21}{x^2+x+4}<0 \end{matrix}\right\}$$

۳۷. $$\begin{cases} x^2-5x+8\leqslant 0 \\ x^2-3x+6<0 \\ x^2<1 \end{cases}$$

۳۸. معادله $x^2-8[x]+7=0$ را حل کنید.

۳۹. نامعادله $[x]-[x^2]\geqslant 0$ را حل کنید.

۴۰ ثابت کنید بازاء هردوعدد حقیقی x و y، $[2x]+[2y]\geqslant[x]+[y]+[x+y]$

۴۱. حاصل $T=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{625}]$ را پیدا کنید.

۴۲. معادله $\dfrac{1}{x^2+2x}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}$ را حل کنید.

۴۳. معادله $\sqrt{x-1}+\sqrt{x}=\dfrac{1}{x^4}$ را حل کنید.

۴۴. اگر $ab^2+1=0$ و $abc\neq 0$ معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{x^3}{c}+\frac{x^2}{b}+\frac{x}{a}=bc$$

۴۵. بازاء چه مقادیر x تابع $y=\sqrt{x}+\sqrt{3-x}+\sqrt{x^2-4x}$ تعریف شده است.

۴۶ معادله زیر را حل کنید.

$$|x^4-3x^2-4|+\sqrt[4]{x^3-x^2-4x+4}+\sqrt{xy^2-2xy+2}=0$$

۴۷. ثابت کنید اگر ضرائب معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ اعدادی فرد باشند، آنگاه ریشه‌های این معادله نمی‌توانند گویا باشند.

تستهای معادلات

۱. بهازاء چه مقادیر a معادله $x^{۲}-۲ax+a=۰$ دو ریشه متمایز مثبت دارد؟

الف- $a>۱$ یا $a<۰$ ب- $a>۱$

ج- $a<۰$ د - $۰<a<۱$

۲. معادله $x^{۲}-۲(a+۲)x+a^{۲}+۴=۰$ مفروض است کدام درست است؟

الف- معادله همواره دو ریشه حقیقی مثبت دارد

ب - معادله ریشه حقیقی ندارد

ج - اگر $a>۰$ معادله دو ریشه مثبت دارد

د - اگر $a>-۲$ دو ریشه مثبت دارد

۳. دومعادله $x^{۲}+p_{۱}x+q_{۱}=۰$ و $x^{۲}+p_{۲}x+q_{۲}=۰$ مفروضند اگر $p_{۱}p_{۲}=۲(q_{۱}+q_{۲})$، کدام همواره درست است؟

الف- هردومعادله همواره ریشه مضاعف دارند

ب - هردومعادله همواره دو ریشه دارند

ج - حداقل یکی‌از دومعادله فوق همواره ریشه دارد

د - ممکن است یکی از آنها دارای ریشه باشد

۴. درمعادله $x^{۲}-۵x+۱=۰$ حاصل $A=|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|$ برابراست با؟

الف- ۳ ب- $\sqrt{۳}$

ج - ۷ د - -۳

۵. هرگاه بازاء هر x، $f(x)=ax^۲+۲bx+c\geqslant ۰$ کدام همواره درست است؟

الف- $ac-b^۲\geqslant ۰$ ب- $a\geqslant ۰$

ج - $c\geqslant ۰$ د - هرسه صحیح است.

۶. هرگاه، $f(x)=ax^۲+۲bx+c$ و $ac-b^۲\geqslant ۰$ کدام همواره درست‌است؟

الف- $f(x)\geqslant ۰$ ب- $f(x)\leqslant ۰$

ج - $af(x)\geqslant ۰$ د - $af(x)\leqslant ۰$

۷. اگر α و β ریشه‌های معادله $۲x^۲-۴x-۱=۰$ باشند حاصل $(\alpha^۳-۲\alpha^۲)(\beta^۳-۲\beta^۲)$ برابراست با؟

الف- $\frac{۱}{۸}$ ب - $-\frac{۱}{۸}$ ج- $-\frac{۱}{۴}$ د- $\frac{۱}{۴}$

۸. هرگاه درمعادله درجه دوم $x^۲-x-m^۲=۰$، $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌ها و $x_۱^۲+x_۱x_۲=۵$، آنگاه m برابراست با؟

الف- $\pm۲\sqrt{۵}$ ب- $\pm\sqrt{۳۰}$ ج- $\sqrt{۵}$ د- ۵

۹. بازاء چه مقادیر a، یك ریشه معادله $x^۲-ax+۱=۰$ چهار برابر ریشه دیگراست؟

الف- ±۵ ب- فقط $+\frac{۵}{۲}$

ج- $\frac{\pm\sqrt{۵}}{۲}$ د- $\pm\frac{۵}{۲}$

۱۰. اگر بین x' و x'' ریشه‌های معادله درجه دومی روابط
$$\begin{cases}(x'+۱)\,(x''+۱)=۴\\ \frac{۱}{x'}+\frac{۱}{x''}=۲\end{cases}$$
برقرار باشد آن معادله کدام است؟

الف- $x^۲-۲x-۱=۰$ ب- $x^۲+x-۲=۰$

ج - $x^۲-۲x+۱=۰$ د - $x^۲+۲x+۱=۰$

۱۱. درمعادله $x^۲-۳x+m+۱=۰$ اگر $x'^۲+x'x''=۳$ باشد m برابراست با؟

الف- ۱ ب- ۱- ج- ۳- د- ۵-

۱۲. اگر $|b|<\sqrt{۲}$ معادله $(x^{۲}-b)(۵x^{۲}-۶bx+۴)=۰$ چند ریشه حقیقی‌دارد؟

الف- ۴ ریشه		ب- دو ریشه

ج- حداکثر دو ریشه		د- هیچ ریشه ندارد

۱۳. معادله درجه دوم $x^{۲}-mx-m^{۲}=۰$ مفروض است اگرریشه‌های آن $x_{۱}$ و $x_{۲}$ باشند معادله درجه دومی‌که ریشه‌های آن $\frac{x_{۱}}{x_{۲}}$ و $\frac{x_{۲}}{x_{۱}}$ باشندکدام است ؟

الف- $x^{۲}+۳x+۱$		ب- $x^{۲}-۳m^{۲}x+۱$

ج- $x^{۲}-۳mx+۱$		د- $x^{۲}-۳x+۱$

۱۴. به ازاء چه مقدار m یکی‌از ریشه‌های معادله $x^{۲}-۳mx-۱=۰$ چهار برابر قرینه ریشه دیگراست؟

الف- $\pm\frac{۱}{۲}$		ب- $\pm\frac{۳}{۲}$

ج- $\frac{۹}{۴}$		د- $\frac{۳}{۲}$ و $\frac{۱}{۲}$

۱۵. بـه ازاء چه مقدار m یك ریشه معادله $x^{۲}-۴mx+۲۷=۰$ مربع ریشه دیگر است؟

الف- $\sqrt{۳}$		ب- -۳

ج- ۳		د- ۹

۱۶. اگرمعادله $ax^{۲}+۲bx+c=۰$ دارای دوریشه عکس یکدیگر باشدکدام درست است؟

الف- $a=-c$		ب- $b=c$

ج- $|b|\geqslant|a|$		د- $|b|\leqslant|a|$

۱۷. درمعادله $۲x^{۲}+x-m=۰$ ، عددیك خارج دوریشه است حدود m کدام است؟

الف- $m<۳$		ب- $m>۳$

ج- $-\frac{۱}{۸}<m<۳$		د- $-\frac{۱}{۸}<m<۲$

۱۸. بازاء چه مقداری از m یك ریشه معادله $(۲m-۱)x^{۲}-۲x+m-۳=۰$، بین دوعدد ۱ و ۱- قرارمی‌گیرد؟

الف- همه مقادیر m ب- $1<m<3$

ج- $-1<m<2$ د- $\frac{2}{3}<m<2$

۱۹. عبارت $A=(5-a)x^2+2(a-1)x+2-2a$ همواره منفی است حدود a کدام است؟

الف- $5<a<9$ ب- $a>9$

ج- $a<1$ د- $a\geqslant 9$

۲۰. در معادله $x^2-x-3=0$ اگر α و β ریشه‌های آن باشند حاصل $(\alpha-2)^{-2}+(\beta-2)^{-2}$ برابر است با؟

الف- ۱۱ ب- ۱۱-

ج- $\frac{19}{9}$ د- ۷

۲۱. اگر Δ در دومعادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ و $mx^2+nx+k=0$ مساوی باشد کدام رابطه برقرار است؟

الف- $amx=bny$ ب- $(2ax+b)^2=(2mx+n)^2$

ج- $(2bx+a)^2=(2nx+m)^2$ د- $(a^2-c^2)b=(m^2-k^2)n$

۲۲. معادله $4x^2-4ax+(a^2-b^2)=0$ وقتی ریشه دارد که؟

الف- $|a|\geqslant|b|$ ب- همواره دوریشه دارد

ج- $\sqrt{2}|a|\geqslant|b|$ د- $\sqrt{2}|a|<|b|$

۲۳. اگرمعادله $ax^2+2x+a^2=0$ دارای دوریشه منفی باشد حدود a کدام است؟

الف- $a<1$ ب- $a>1$

ج- $a<0$ د- $0<a<1$

۲۴. معادله $x^7+5x^5+3x^3+x-1=0$ چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

الف- یك ریشه ب- حداقل یك ریشه

ج- ۷ ریشه د- یك ریشه صحیح دارد

۲۵. معادله $x^{۳۵}+۷x^{۵}-۴=۰$ مفروض است کدام همواره درست است؟

الف- حداقل یك ریشه مثبت دارد ب- فقط یك ریشه مثبت دارد

ج- فقط یك ریشه منفی دارد د- فقط یك ریشه صحیح ومثبت دارد

۲۶. معادله $x^{۳}-۷x+۶=۰$ چند ریشه حقیقی دارد؟

الف- ۱ ب- ۲

ج- ۳ د- یك ریشه ساده ویك ریشه مضاعف

۲۷. معادله $۴x^{۴}+x^{۳}-۳x^{۲}-x-۱=۰$ چند ریشه گویا دارد؟

الف ۰ ب- ۱ (کنکور تجربی۶۷)

ج- ۲ د- ۴

۲۸. معادله درجه دومی که ریشه‌هایش به ترتیب، ۵ واحد بیشتر از قرینه ریشه‌های معادله $mx^{۲}-۲x+۱=۰$ باشد، کدام است؟

الف- $mx^{۲}-۲(۱+۴m)x+۱۱=۰$

ب- $mx^{۲}-۲(۱+۵m)x+۲۵m+۱۱=۰$

ج- $mx^{۲}+۲(۱+۴m)x-۹=۰$

د- $mx^{۲}+۲(۱-۵m)x+۲۵m-۹=۰$

۲۹. بازاء چه مقادیر m یکی ازریشه‌های معادله $x^{۳}+mx^{۲}-x-۳=۰$ بین ۱ و۲ قرار دارد؟

الف- $-\frac{۳}{۴}<m<۳$ ب- $\frac{۳}{۴}<m<۳$

ج- $\frac{۴}{۳}<m<۵$ د- $m<-\frac{۳}{۴}$ یا $m>۳$

۳۰. معادله، $(x-۱)^{۵}+(x-۲)^{۵}+\ldots+(x-۱۲۵)^{۵}=۰$

الف- پنج ریشه حقیقی دارد ب- حداکثر یك ریشه مثبت دارد

ج- فقط یك ریشه مثبت دارد د- فقط یك ریشه منفی دارد

۳۱. معادله $x^{۷}-۷x-۵=۰$ مفروض است.

الف- یك ریشه منفی دارد ب- یك ریشه مثبت دارد

ج- یك ریشه منفی و دوریشه مثبت دارد

د- یك ریشه مثبت و دوریشه منفی دارد

۳۲. معادله $x^{625}+25x-125=0$،

الف- یك ریشه منفی دارد

ب- یك ریشه مثبت و دوریشه منفی دارد

ج- یك ریشه مثبت دارد

د- یك ریشه مضاعف منفی و یك ریشه مثبت دارد

۳۳. بازاء چه مقدار k ریشه‌های معادله $x^3-3kx^2+k^2x+27=0$ تشکیل تصاعد حسابی می‌دهند؟

الف- ۳ ب- ۳-

ج- ۲ د- ۱ و ۳

۳۴. بازاء چه مقدار m معادله $x^3-3x+m=0$ سه ریشه ساده دارد؟

الف- $|m|>2$ ب- $|m|<2$

ج- $0\leqslant m<2$ د- هیچ مقدار m

۳۵. هرگاه درمعادله $x^3-3x+m=0$ بین‌ریشه‌ها رابطه $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=6\alpha\beta\gamma$ برقرار باشد m کدام است؟

الف- ۱ ب- ۲

ج- ۱- د- ۳

۳۶. اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^3-2x+m=0$ باشند بازاء چه مقدار m رابطه $\alpha(\alpha^2+1)+\beta(\beta^2+1)+\gamma(\gamma^2+1)=-3$ برقراراست؟

الف- ۱ ب- ۱-

ج- ۳ د- ۳-

۳۷. اگر a و b و c سه ریشه ناصفر معادله $x^3-bx^2+bx-3bc=0$ باشند، مقدار b کدام است؟ (کنکور فنی ۶۸)

الف- ۷ ب- ۱

ج- ۵- د- ۹-

۳۸. معادله $۲x^۴+۴x^۳-۱=۰$،

الف- دوریشه منفی دارد　　ب- دوریشه مختلف‌العلامت دارد

ج- دوریشه مثبت دارد　　د- فقط یك ریشه مثبت دارد

۳۹. معادله $(۳x-۵)^۳-۸(x+۲)^۳-(x-۹)^۳=۰$ چند ریشه حقیقی دارد؟

الف- ۰　　ب- ۱

ج- ۲　　د- ۳

۴۰. اگرمعادله $x^۳+ax^۲+۳x-۱=۰$ یك ریشه داشته باشد حدود a کدام است؟

الف- $|a|\geqslant ۳$　　ب- $۰<a\leqslant ۳$

ج- $|a|>۳$　　د- $|a|<۳$

۴۱. معادله $x^۳+۶x^۲+۱۲x+۲۰=۰$ چند ریشه دارد؟

الف- یك ریشه مثبت　　ب- ۳ ریشه

ج- یك ریشه مضاعف　　د- یك ریشه منفی

۴۲. کدامیك ریشه معادله $x^۳+۳x^۲+۳x-۱=۰$ است.

الف- $-\sqrt[۳]{۲}+۱$　　ب- $\sqrt[۳]{۲}+۱$

ج- $\sqrt[۳]{۲}-۱$　　د- $-\sqrt[۳]{۲}-۱$

۴۳. اگریکی از ریشه‌های معادله درجه دومی با ضرائب‌گویا $x=\sqrt{۷-\sqrt{۴۸}}$ باشد آن معادله‌کدام است.

الف- $x^۲-۴x+۱=۰$　　ب- $x^۲-۴x-۱=۰$

ج- $x^۲+۴x+۱=۰$　　د- $x^۲-۷x+۱=۰$

۴۴. بازاء چهٔ مقادیر m معادله $x^۳-۳x^۲+m-۲=۰$ ریشه مضاعف دارد

الف- ۰ و۲　　ب- ۲ و۴

ج- ۶ و۲　　د- ۰ و ۱

۴۵. معادله $x^۲+x+x^{-۱}+x^{-۲}=۴$ چند ریشه دارد؟

الف- ۱　　ب- ۲

ج- ۳　　د- ۴

۴۶. درمعادله $x^{۳}-۴x-۳=۰$ مجموع مکعبات ریشه‌ها برابر است با ؟

الف- ۹-　　　ب- ۳

ج- ۳-　　　د- ۹

۴۷. معادله $\log x^{۲}+|x|=۱+۲\log x$ چند ریشه دارد؟

الف- ۰　　　ب- ۱

ج- ۲　　　د- بی‌شمار

۴۸. کدامیك از دومعادله زیر هم‌ارزند (معادل) ؟

الف- $x^{۳}+x=۰$ و $\frac{x^{۳}+x}{x}=۰$

ب- $\frac{x^{۲}-۱}{x}=۰$ و $x^{۲}-۱=۰$

ج- $-۷x^{۲}=۲x$ و $۲\sqrt{x}-۷x^{۲}=۲x+۲\sqrt{x}$

د- $\log(x-۳)=۲$ و $\log(x-۳)^{۲}=۴$

۴۹. معادله $\sqrt{x-۱}+\sqrt{۲-x}=\sqrt{x-۴}$ چند ریشه دارد؟

الف- ۰　　　ب- ۱

ج- ۲　　　د- ۳

۵۰. معادله $\sqrt{x^{۲}+۱}+\sqrt{x^{۴}+۱}=۲$ چند ریشه دارد؟

الف- ۰　　　ب- ۱

ج- ۲　　　د- ۳

۵۱ معادله $x+\sqrt[۳]{x}-۲=۰$ چند ریشه دارد؟

الف- ۰　　　ب- ۱

ج- ۲　　　د- ۳

۵۲. معادله $\sqrt{۱-\sqrt{x^{۴}-۴x^{۲}}}=x-۱$ چند ریشه دارد؟

الف- ۴　　　ب- ۲

ج- ۱　　　د- ۰

۵۳. معادله $\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۲\sqrt{x-۱}}=۱$ چند ریشه دارد؟

الف- بی‌شمار　　ب- ۱　　ج- ۲　　د- ۰

۵۴. کدامیك ریشه معادله $\sqrt[۴]{\frac{۲-x}{۳+x}}+\sqrt[۴]{\frac{۳+x}{۲-x}}=۲$ است؟

الف- $\frac{۳}{۲}$　　ب- ۲　　ج- $\frac{۱}{۲}$　　د- $-\frac{۱}{۲}$

۵۵. معادله $x^۲+\sqrt{x-۲}=۶-x$ چند ریشه دارد؟

الف- ۰　　ب- ۱　　ج- ۲　　د- ۳

۵۶. معادله $\sqrt{x^۲-۱}+\sqrt[۴]{x-۴}+\sqrt[۵]{x-۳}=۰$ چند ریشه دارد؟

الف- ۰　　ب- ۱　　ج- ۲　　د- ۳

۵۷. مقدار y ازمعادله $\sqrt[۶]{(x^۵-۲)}+|x^{۱۰}+y+۵|=۰$ کدام است؟

الف- ۹　　ب- ۹-　　ج- ۳　　د- ۱-

۵۸. معادله $\sqrt{x^۲-x-۶}+\sqrt{x^۳-۵x^۲-۲x+۲۴}=۰$ چند جواب دارد؟
(کنکور تجربی ۶۵)

الف- ۰　　ب- ۱　　ج- ۲　　د- ۳

۵۹. معادله زیر چند ریشه دارد؟

$$\sqrt{x^۲+۲x-۳}\log_۳(x^۲-۱)=۰$$

الف- ۳　　ب- ۱　　ج- ۲　　د- ۴

۶۰. اگر $a>۰$ و دومعادله $x^۲+۲x+a=۰$ و $x^۲-x-۲a=۰$ دارای یك ریشه مشترك باشند، آن‌گاه این ریشه مشترك کدام است؟ (کنکور ریاضی ۶۴)

الف- ۲-　　ب- ۱-　　ج- ۱　　د- ۲

۶۱. اگر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ ریشه‌های معادله $x^۳-۳mx+۱=۰$ باشند و $x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲=۶$ ، m کدام است؟ (کنکور ریاضی فنی ۶۴)

الف- -۳ ب- -۱ ج- ۱ د- ۳

۶۲. اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^{۳}-۳mx-۱=۰$ باشند معادله درجه سومی که ریشه‌های آن $۲\alpha+\beta+\gamma$ و $\alpha+۲\beta+\gamma$ و $\alpha+\beta+۲\gamma$ باشند کدام است؟

الف- $x^{۳}+۳mx-۱=۰$ ب- $x^{۳}-۳mx-۱=۰$

ج- $x^{۳}-۳mx+۱=۰$ د- $x^{۳}-x^{۲}+m=۰$

۶۳. اگر بازاء همه مقادیر m ، $۴x^{۲}-۲mx+۴m^{۲}\geqslant ۰$ باشد، آن‌گاه حدود m کدام است؟ (کنکور فنی ۶۵)

الف- R ب- $\varnothing$ ج- $|m|\leqslant ۲$ د- $|m|\geqslant ۲$

۶۴. کدام یك ازمعادلات (۱) $۲\sqrt{۳x-۶}+\sqrt{x^{۲}-۲x}=۰$
(۲) $\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۳}=۰$ (۳) $۲+\sqrt{x-۴}=۰$ دارای ریشه حقیقی است؟ (کنکور فنی ۶۷)

الف- (۱) ب- (۲) ج- (۱) و (۲) د- (۳)

۶۵. به ازاء چه مقدار a دومعادله $x^{۲}+ax+۱=۰$ و $x^{۲}+x+a=۰$ یك ریشه مشترك دارند؟

الف- ۱ ب- -۱ ج- -۲ د- ۲

۶۶. بازاء چه مقدار a یك ریشه معادله زیر به سمت ∞ میل می‌کند؟

$$(a^{۴}-۱)x^{۲}-(a-۱)x+a+۱=۰$$

الف- ۱ ب- ± ۱ ج- -۱ د- هیچ مقدار a

۶۷. اگرمعادله $(a+b)x^{۲}+ax+۱=۰$ دارای ریشه مضاعف $x=۱$ باشد $a+b$ برابر است با ؟

الف- ۰ ب- ۱ ج- -۱ د- ۵

۶۸. معادله $x^{۲}+۲mx+m-۴=۰$ مفروض است کدام درست است؟

الف- اگر $m>۴$ معادله دو ریشه منفی دارد.

ب- اگر $m<۴$ معادله دو ریشه دارد.

ج- معادله همواره دوریشه مختلف‌العلامت دارد.

د- اگر $m<4$ معادله دوریشه مختلف‌العلامت دارد.

۶۹. معادله $(a+b+c)x^2-2(b+c)x-a+b+c=0$ مفروض است، کدام درست است؟

الف- معادله همواره دو ریشه متمایز دارد.

ب- معادله ریشه حقیقی ندارد.

ج- اگر $a\neq 0$ ، معادله دو ریشه متمایز دارد.

د- معادله ریشه مضاعف دارد.

۷۰. بازاء چند مقدار a معادله، $(x^4-5x^2+4)(x-a)=0$ ریشه مضاعف دارد.

الف- ۰ ب- ۱ ج- ۲ د- ۴

۷۱. برای آنکه معادلهٔ $(a^2+1)x+a^4-1=\sqrt{f(x)}$ دارای ریشه حقیقی باشد لازم است که:

الف- $x\geqslant 1-a^2$ ب- $x\leqslant 1-a^2$

ج- $x=1-a^2$ د- $x\geqslant a^2-1$

۷۲. به ازاء چه مقدار a، مجموع مربعات ریشه‌های معادله؛ $x^3+(a-2)x^2+x-1=0$ می‌نیمم است؟

الف- ۱− ب- ۱ ج- ۲− د- ۲

۷۳. به ازاء چهٔ مقدار a دومعادلهٔ $x^2+ax-3=0$ و $x^2-3x+a=0$ دارای یك ریشه مشترك می‌باشند.

الف- ۲ ب- ۲− ج- ۱ د- ۱−

۷۴. به ازاء چند مقدار m معادله $(x^3-3mx-2)(x^2-1)=0$ ریشه مضاعف دارد

الف- هیچ مقدار ب- یك مقدار ج- دومقدار د- سه مقدار

۷۵. معادله $\cos x-x^2=0$ چند ریشه دارد.

الف- هیچ ب- ۱ ج- ۲ د- بی‌شمار

۷۶. معادله $\sqrt{3}x-3\sin x=0$ چند ریشه دارد.

الف- هیچ ب- ۱ ج- ۲ د- ۳

۷۷. معادله $\frac{\sin x}{x}=x^{۲}-\pi^{۲}$:

الف- سه ریشه دارد　　ب- دو ریشه دارد

ج- دو ریشه مثبت دارد　　د- دو ریشهٔ منفی دارد

۷۸. معادلات $x^{۳}+۷x+۱=۰$ و $x^{۴}+x^{۲}-۱=۰$ چند ریشه مشترك دارند؟

الف- ۱　　ب- هیچ　　ج- ۲　　د- ۳

۷۹. بازاء چه مقادیر m دستگاه $\begin{cases}(m^{۲}+۱)x+my=۳m+۴\\(m-۱)x+y=۲m+۱\end{cases}$ جواب ندارد؟

الف- $\{۰ \text{ و } -۱\}$　　ب- $\{۱ \text{ و } -۱\}$

ج- هیچ مقدار m　　د- -۱

۸۰. بازاء چه مقادیر a دستگاه $\begin{cases}(a+۱)x+۸y=۴a\\ax+(a+۳)y=۳a-۱\end{cases}$ بی‌شمارجواب دارد؟

الف- $a=۱$　　ب- ۳ و $a=۱$

ج- هیچ مقدار a　　د- $a=۳$

۸۱. در دستگاه $\begin{cases}\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}=\frac{z}{۴}\\\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=\frac{۱۳}{۲۴}\end{cases}$ ، $x+y+z$ کدام است؟

الف- ۱۸　　ب- ۹　　ج- ۲۴　　د- ۱۳

۸۲. اگر $x+y+z=۳۸$ و $\frac{x}{۲}=\frac{y}{۳}$ و $\frac{y}{۲}=\frac{z}{۳}$ آنگاه y کدام است؟

الف- ۲　　ب- ۶　　ج- ۱۲　　د- ۱۸

۸۳. اگر $\frac{۱}{a}=\frac{۲xy}{x+y}$ ، $\frac{۱}{b}=\frac{۲xz}{x+z}$ و $\frac{۱}{c}=\frac{۲yz}{y+z}$ آنگاه x برابر است با ؟

الف- $a+b-c$　　ب- $\frac{۱}{a+b-c}$

ج- $a+b$　　د- $\frac{۱}{a+b+c}$

۸۴. دستگاه $\begin{cases} y+z=xyz \\ z+x=xyz \\ x+y=xyz \end{cases}$ چند دسته جواب دارد؟

الف– هیچ　　ب– ۲　　ج– ۳　　د– بی‌شمار

۸۵، اگر $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=2\sqrt{xy} \\ x+y=2 \end{cases}$ آنگاه xy برابر است با ؟

الف– ۱　　ب– $\frac{1}{4}$　　ج– ۱ یا $\frac{1}{4}$　　د– ۱ یا $-\frac{1}{2}$

۸۶. اگر $x+y=7$ ، $y+z=3$ ، $x+z=2$ آنگاه، $2x+3y+5z$ برابر است با ؟

الف– ۱۱　　ب– ۱۵　　ج– ۱۲　　د– ۱۳

۸۷. جواب نامعادله، $\sqrt{(x-3)(x+1)}>3(x+1)$ کدام است؟

الف– $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$　　ب– $(-\infty, -1)$

ج– $(-\infty, -3)$　　د– $(-\infty, -1)\cup(3, +\infty)$

۸۸. جواب نامعادله، $\sqrt{(x+4)(2x-1)}<x+4$ کدام است ؟

الف– $\left[\frac{1}{2}, 5\right)$　　ب– $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

ج– $(-\infty, 5)$　　د– $\left[-4, \frac{1}{2}\right]$

۸۹. کلیه جوابهای نامعادله $\sqrt{9x-20}<x$ کدام است؟

الف – $\left(\frac{20}{9}, 4\right)$　　ب– $(5, +\infty)$

ج– $\left[\frac{20}{9}, +\infty\right)$　　د– $\left[\frac{20}{9}, 4\right)\cup(5, +\infty)$

۹۰. جواب نامعادله $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+2}\leqslant 1$ کدام است؟

الف– R　　ب– $\varnothing$　　ج– $[1, +\infty)$　　د– $[-2, +\infty)$

۹۱. تابع زیر بازاء چه مقادیر x تعریف شده است؟

$$f(x)=\sqrt{\frac{(x-۱)(x^{۲}-x+۱)}{x^{۳}-۱}}+\log_{x^{۲}+۱}(x^{۲}-۴x+۴)$$

الف- $(۰ \text{ و } ۱)\cup(۱ \text{ و } +\infty)$ ب- $R-\{۲\}$

ج- $R-\{۰ \text{ و } ۲\}$ د- $R-\{۰ \text{ و } ۱ \text{ و } ۲\}$

۹۲. برای آنکه معادله $a=\sqrt{x-۲}+\sqrt{x+۲}$ دارای جواب باشد؟

الف- کافی است $a<۰$ باشد ب- لازم است $a>۰$ باشد

ج- لازم و کافی است $a>۰$ باشد د- نه لازم و نه کافی است که $a>۰$ باشد

۹۳. جواب نامعادله $\frac{۱}{۳}<\frac{۱}{x}$ کدام است؟

الف- $(۳ \text{ و } +\infty)$ ب- R

ج- $(-\infty \text{ و } ۰)\cup(۳ \text{ و } +\infty)$ د- $(\frac{۱}{۳} \text{ و } +\infty)$

۹۴. جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases}(x-۱)(x-۲)(x-۳)<۰\\ x^{۲}<۱\end{cases}$ کدام است؟

الف- $(-\infty \text{ و } -۱)$ ب- $(-۱ \text{ و } ۱)$

ج- $(-\infty \text{ و } ۱)\cup(۲ \text{ و } ۳)$ د- $\varnothing$

۹۵. در دستگاه $\begin{cases}x^{۲}+xy=۱۲\\ y^{۲}+xy=۲۴\end{cases}$، $x+y$ برابر است با ؟

الف- ۶ ب- ۶- یا ۲- ج- ۶ یا ۶- د- ۶ یا ۲

۹۶. حاصل $A=[\sqrt{۱}]+[\sqrt{۲}]+[\sqrt{۳}]+\cdots\cdots+[\sqrt{۱۵}]$ برابر است با .

الف- ۳۴ ب- ۲۴ ج- ۳۲ د- ۳۶

۹۷. جواب معادله $[۲x]-[x]=۲$ کدام است؟

الف- $(\frac{۳}{۲} \text{ و } \frac{۵}{۲})$ ب- $[\frac{۳}{۲} \text{ و } \frac{۵}{۲})$ ج- $(۲ \text{ و } \frac{۵}{۳})$ د- $[\frac{۳}{۴} \text{ و } \frac{۵}{۴}]$

۹۸. اگر $۱۹۸=(۱-\sqrt{۲})^۶+(۱+\sqrt{۲})^۶$ ، جزء صحیح عدد $(۱+\sqrt{۲})^۶$ کدام است؟ (کنکور ریاضی ۶۸)

الف- ۱۹۵ ب- ۱۹۶ ج- ۱۹۷ د- ۱۹۸

۹۹. معادله $\frac{۵}{۶}x=[x]$ چند ریشه دارد؟

الف- هیچ ب- ۶ ج- ۵ د- بی‌شمار

۱۰۰. اگر $[۴x]=[(۱+x)^۲]$ آنگاه $[۲(x^۲+۱)]$ برابر است با؟

الف- $[۴x]$ ب- $[x^۲+۱]$ ج- $[۴x]^۲$ د- $\sqrt{[۴x]}$

فصل هفتم

۷. بخش پذیری ـ بسط دو جمله‌ای

۱ـ۷. تقسیم

۱. **قضیه.** بازاء هردو چند جمله‌ای $f(x)$ و $g(x)$ $(g(x)\neq ۰)$ چند جمله‌ای‌های $q(x)$ و $R(x)$ وجود دارند بـه طوری‌که درجه $R(x)$ از درجه $f(x)$ کمتر یا $R(x)=۰$ و:

$$f(x)=g(x)q(x)+R(x)$$

$q(x)$ را خارج‌قسمت و $R(x)$ را باقیمانده می‌نامیم.

نتیجه. اگـر $R(x)=۰$، لازم و کافیست‌که $f(x)$ بـر $g(x)$ بخش‌پذیر باشد یعنی ،

$$f(x)=g(x)q(x)$$

برای تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ برچند جمله‌ای $g(x)$ ابتدا هر دوچند جمله‌ای را برحسب قوای نزولی x مرتب می‌کنیم وسپس اولین جمله مقسوم را بـر اولین جمله مقسوم‌علیه تقسیم‌کرده خارج‌قسمت را مشخص می‌کنیم آنگاه خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب‌کرده ازمقسوم کم می‌کنیم (حاصل‌ضرب را درمنفی ضرب‌کرده با مقسوم جمع می‌کنیم) واین عمل را بـه همین‌ترتیب ادامه می‌دهیم تا اینکه درجـه باقیمانده از درجه مقسوم علیه‌کمتر شود.

مثال ۱. تقسیم زیررا انجام دهید.

$$(x^{۴}+۳x^{۳}-۴x+۲):(x^{۲}+x-۱)$$

حل. اولین جمله مقسوم یعنی x^4 را بـر اولین جمله مقسوم علیه یعنی x^2 تقسیم می‌کنیم خارج قسمت برابر x^2 است ازضرب x^2 درمقسوم علیه عبارت $x^4+x^3-x^2$ به دست می‌آیدکه اگر ازمقسوم کم کنیم باقیمانده $2x^3+x^2-4x+2$ (۱) است. بار دوم $2x^3$ را بر x^2 تقسیم می‌کنیم حاصل برابر $2x$ است کـه از ضرب آن در مقسوم علیه $2x^3+2x^2-2$ بدست می‌آید. ایـن‌عبارت را ازعبارت (۱) کـم می‌کنیم باقیمانده $-x^2-2x+2$ (۲) است. بار سوم $-x^2$ را بـر x^2 تقسیم می‌کنیم خارج قسمت -1 است.

ازضرب -1 درمقسوم علیه $-x^2-x+1$ حاصل می‌شودکه اگر آن را از(۲) کم کنیم باقیمانده $-x+1$ است‌که همان باقیمانده تقسیم است زیرا درجه آن از درجه مقسوم علیه کمتر است.

مراحل فوق در زیر نشان داده شده است.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4+3x^3-4x+2 & x^2+x-1 \\ \cline{2-2}
 & x^2+2x-1 \\
\overset{-}{+}x^4 \overset{-}{+}x^3 \overset{+}{-}x^2 & \\ \cline{1-1}
2x^3+x^2-4x+2 & \\
\overset{-}{+}2x^3 \overset{-}{+}2x^2 \overset{+}{-}2x & \\ \cline{1-1}
-x^2-2x+2 & \\
\overset{+}{-}x^2 \overset{+}{-}x \overset{-}{+}1 & \\ \cline{1-1}
-x+1 &
\end{array}
$$

بنابراین بنا به قضیه تقسیم ؛

$$x^4+3x^3-4x+2=(x^2+x-1)(x^2+2x-1)-x+1$$

۷-۲. بخش پذیری چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$

مانند آنچه در فـوق بیان شد اگـر $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم داریـم ؛ $f(x)=(x-a)g(x)+R$ که باقیمانده یك عدد حقیقی است. این رابطه بازاء هر x حقیقی برقرار است اگر $x=a$ قراردهیم، $f(a)=(a-a)g(a)+R$ یا $R=f(a)$ یعنی باقیمانده $f(x)$ بر $x-a$ برابراست با $f(a)$ بنابراین‌برای تعیین باقیمانده چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$ کافیست $f(a)$ را پیدا کنیم. اگـر

$f(a)=0$ آنگاه $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

مثال۲. باقیمانده $f(x)=x^5+3x^4-3x^2+2x-5$ را بر $x+1$ پیدا کنید.

حل.

$$x+1=0 \implies x=-1 \implies$$

$$R=f(-1)=(-1)^5+3(-1)^4-3(-1)^2+2(-1)-5=$$

$$-1+3-3-2-5=-8$$

مثال۳. a و b را چنان پیدا کنید که چند جمله‌ای x^3+ax^2+bx-2 بر $x-2$ بخش‌پذیر و باقیمانده آن بر $x-1$ برابر -7 باشد،

حل.

$$\begin{cases} f(2)=0 \\ f(1)=-7 \end{cases} \implies \begin{cases} 8+4a+2b-2=0 \\ 1+a+b-2=-7 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} 2a+b=-3 \\ a+b=-6 \end{cases} \implies a=+3 \text{ و } b=-9$$

$$f(x)=x^3+3x^2-9x-2$$

تذکر. برای تعیین باقیمانده چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ کافی است $f\left(-\frac{b}{a}\right)$ را پیدا کنیم. $R=f\left(-\frac{b}{a}\right)$

تعیین خارج‌قسمت تقسیم $f(x)$ بر $x-a$

چند جمله‌ای $f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$ را درنظر می‌گیریم خارج قسمت این چند جمله‌ای بر $x-a$ چند جمله‌ای از درجه $n-1$ می‌باشد، فرض کنیم این چند جمله‌ای به صورت، $g(x)=B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\ldots+B_{n-1}$ باشد می‌خواهیم بدون عمل تقسیم ضرایب B_0 و B_1 و $\ldots$ B_{n-1} را پیدا کنیم که در نتیجه $g(x)$ مشخص می‌شود.

طبق قضیه تقسیم داریم:

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n=$$

$$(x-a)(B_0x^{n-1}+B_1x^{n-2}+\ldots+B_{n-1})+R$$

که R باقیمانده است.

بنابراین پس‌ازضرب و مرتب کردن طرف دوم داریم:

$$A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n\equiv$$

$$B_۰x^n+(B_۱-aB_۰)x^{n-۱}+(B_۲-aB_۱)x^{n-۲}+\cdots+(B_k-aB_{k-۱})x^{n-k}+\cdots-aB_{n-۱}+R$$

ازمساوی هم قرار دادن ضرایب جمله‌های هم‌درجه داریم:

$$A_۰=B_۰ ، A_۱=B_۱-aB_۰ ، \ldots ، A_k=B_k-aB_{k-۱} ، \ldots A_n=R-aB_{n-۱}$$

یا:

$$A_۰=B_۰ ، B_۱=A_۱+aB_۰ ، \ldots ، B_k=A_k+aB_{k-۱} ، \ldots R=A_n+aB_{n-۱}$$

بنابراین ضرایب خارج‌قسمت به ترتیب بدست می‌آیند ابتدا $B_۰$ مشخص می‌شود سپس با جای‌گذاری $B_۰$ در رابطه دوم $B_۱$ بدست می‌آید و به همین ترتیب بقیه ضرایب بدست می‌آیند.

مثال۴. خارج قسمت تقسیم $f(x)=x^۴+۴x^۳-۳x+۲$ را بر $x-۱$ بدون عمل تقسیم پیدا کنید.

حل. $a=۱$ و $R=f(۱)=۴$ و $A_۰=۱$ ، $A_۱=۴$ ، $A_۲=۰$ ، $A_۳=-۳$ ، $A_۴=۲$

بنابراین:

$B_۰=A_۰=۱$ و $B_۱=A_۱+aB_۰=۴+۱=۵$ و $B_۲=A_۲+aB_۱=۰+۵=۵$ و $B_۳=A_۳+aB_۲=-۳+۵=۲$

درنتیجه: $\quad g(x)=x^۳+۵x^۲+۵x+۲$

۳-۷. تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر ax^m+b

برای تعیین باقیمانده $f(x)$ بر ax^m+b ابتدا $f(x)$ را برحسب قوای x^m منظم می‌کنیم و سپس $x^m=-\frac{b}{a}$ قرار می‌دهیم باقیمانده بدست می‌آید.

مثال۵. باقیمانده، $f(x)=x^۷+۳x^۶+۵x^۵-۳x^۳+x^۲-۲x+۳$ را بر $x^۲+۱$ پیدا کنید.

حل. $x^۲=-۱$ و

$$f(x)=x(x^۲)^۳+۳(x^۲)^۳+۵x(x^۲)^۲-۳x(x^۲)+x^۲-۲x+۳$$

بنابراین

$$R(x)=x(-۱)^۳+۳(-۱)^۳+۵x(-۱)^۲-۳x(-۱)+(-۱)-۲x+۳=۵x-۱$$

۴ـ۷. تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $ax^{۲}+bx+c$

برای تعیین باقیمانده $f(x)$ بر $ax^{۲}+bx+c$ چند جمله‌ای $f(x)$ را برحسب قوای $x^{۲}$ مرتب کرده و $x^{۲}=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ قرار می‌دهیم باقیمانده بدست می‌آید

مثال۶. اگر عبارت $f(x)=x^{۴}+۴$ بر $x^{۲}-bx+a$ بخش‌پذیر باشد a و b را حساب کنید.

حل. باقیمانده $f(x)$ را بر $x^{۲}-bx+a$ پیدا کرده آنرا متحد با صفر قرار می‌دهیم.

$$x^{۲}=bx-a \implies R=(bx-a)^{۲}+۴=b^{۲}x^{۲}-۲abx+a^{۲}+۴$$

$$=b^{۲}(bx-a)-۲abx+a^{۲}+۴=(b^{۳}-۲ab)x+a^{۲}-ab^{۲}+۴\equiv ۰$$

برای آنکه باقیمانده برابر صفر شود باید ضریب x و مقدار ثابت برابر صفر شوند.

$$\begin{cases} b^{۳}-۲ab=۰ \implies b=۰ \text{ یا } b^{۲}=۲a \\ a^{۲}-ab^{۲}+۴=۰ \end{cases}$$

اگر $b=۰$ قرار دهیم برای a جوابی نداریم اما اگر در معادله دوم $b^{۲}=۲a$ قرار دهیم، $-a^{۲}+۴=۰$ یا $a=\pm ۲$ که $a=-۲$ قابل قبول نیست زیرا $b^{۲}=۲a\geqslant ۰$ یعنی باید $a\geqslant ۰$. اگر $a=۲$ آنگاه $b=\pm ۲$ بنابراین جواب $a=۲$ و $b=۲$ یا $a=۲$ و $b=-۲$ است.

برای تعیین باقیمانده $f(x)$ بر $ax^{۲}+bx+c$ اگر معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد می‌توان به روش دیگر نیز آنرا محاسبه کرد. اگر α و β دو ریشه آن باشند، $ax^{۲}+bx+c=a\ (x-\alpha)\ (x-\beta)$ در این صورت $f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)g(x)+mx+n$ که در آن $R=mx+n$ اکنون گوئیم $f(\alpha)=m\alpha+n$ و $f(\beta)=m\beta+n$ یعنی m و n از دستگاه زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{cases} m\alpha+n=f(\alpha) \\ m\beta+n=f(\beta) \end{cases}$$

که می‌دانیم $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ به ترتیب باقیمانده‌های $f(x)$ بر $(x-\alpha)$ و $(x-\beta)$ می‌باشند یعنی $f(\alpha)=R_{۱}$ و $f(\beta)=R_{۲}$.

$$m=\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta} \quad \text{و} \quad n=\frac{\alpha f(\beta)-\beta f(\alpha)}{\alpha-\beta}$$

مثال ۷. اگر باقیمانده‌های تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-۱$ و $x+۲$ به ترتیب برابر ۶ و ۳ باشد باقیمانده $f(x)$ بر $x^۲+x-۲$ را پیدا کنید.

حل. چون $x^۲+x-۲=(x-۱)(x+۲)$ و $f(۱)=۶$ و $f(-۲)=۳$ بنابراین با جای‌گذاری درفرمولهای فوق یا دستگاه فوق داریم،

$$\begin{cases} m+n=۶ \\ -۲m+n=۳ \end{cases} \Longrightarrow ۳m=۳ \Longrightarrow m=۱ \text{ و } n=۶-۱=۵$$

پس $R(x)=x+۵$

هرگاه باقیمانده چند جمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ بر $ax^۲+bx+c$ برابر $mx+n$ و $m'x+n'$ باشند برای تعیین باقیمانده $f(x)g(x)$ بر $ax^۲+bx+c$ کافیست باقیمانده $(mx+n)(m'x+n')$ را بر $ax^۲+bx+c$ پیدا کنیم.

مثال ۸. اگر باقیمانده $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^۲-x+۱$ به‌ترتیب $x-۱$ و $x+۱$ باشد باقیمانده $f(x)\,g(x)$ بر $x^۲-x+۱$ را پیدا کنید.

حل. کافی است باقیمانده $x^۲-۱$ را بر $x^۲-x+۱$ پیدا کنیم؛

$$x^۲-x+۱=۰ \Longrightarrow x^۲=x-۱ \Longrightarrow R=x-۱-۱=x-۲$$

۵-۷. بخش‌پذیری $f(x)$ بر $g(x)=x^n+x^{n-۱}+x^{n-۲}+\ldots+x+۱$ باتوجه به اتحاد، $x^{n+۱}-۱=(x-۱)(x^n+x^{n-۱}+\ldots+۱)$ نتیجه می گیریم که اگر $f(x)$ بر $x^{n+۱}-۱$ بخش‌پذیر باشد آنگاه $f(x)$ بر $g(x)$ نیز بخش‌پذیر است. ولی عکس آن درحالت کلی صحیح نیست بنابراین اگر بتوانیم ثابت کنیم $f(x)$ بر $x^{n+۱}-۱$ بخش‌پذیر است آنگاه بخش‌پذیری $f(x)$ بر $g(x)$ نیز ثابت شده است.

مثلاً اگر عبارتی بر $x^۳+۱$ بخش‌پذیر باشدآنگاه بر $x^۲-x+۱$ نیز بخش‌پذیر است.

مثال ۹. اگر n و m و k و r و s اعداد طبیعی باشند ثابت کنید، عبارت $f(x)=x^{۵n+۴}+x^{۵m+۳}+x^{۵k+۲}+x^{۵r+۱}+x^{۵s}$ بر

بخش‌پذیر است. $g(x)=x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1$

حل. کافیست ثابت کنیم $f(x)$ بر $x^{5}-1$ بخش‌پذیر است.

$$f(x)=(x^{5})^{n}x^{4}+(x^{5})^{m}x^{3}+(x^{5})^{k}x^{2}+(x^{5})^{r}x+(x^{5})^{s}$$

$$x^{5}=1 \implies R=(1)^{n}x^{4}+(1)^{m}x^{3}+(1)^{k}x^{2}+(1)^{r}x+(1)^{s}=$$

$$x^{4}+x^{3}+x^{2}+x+1=0 \implies R=0$$

مثال۱۰. به چه شرطی $f(x)=1+x^{2}+x^{4}+\dots+x^{2n}$ بر عبارت $g(x)=1+x+x^{2}+\dots+x^{n}$ بخش‌پذیر است $(n\neq 1)$

حل. $f(x)=\dfrac{x^{2n+2}-1}{x^{2}-1}$ و $g(x)=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (از فرمول مجموع تصاعد هندسی یا از اتحاد $a^{n}-b^{n}$ استفاده کنید)

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x^{2n+2}-1)(x-1)}{(x^{n+1}-1)(x^{2}-1)}=\frac{x^{n+1}+1}{x+1}$$

بنابراین باید $x^{n+1}+1$ بر $x+1$ بخش‌پذیر باشد یعنی، $R=(-1)^{n+1}+1=0$ باشد که درنتیجه باید $n+1$ عددی فرد یا n زوج باشد.

۶ـ۷. بخش پذیری $f(x)$ بر $(x-a)^{n}$

اگر $f(x)$ بر $(x-a)^{n}$ بخش‌پذیر باشد آنگاه، $f(x)=(x-a)^{n}q(x)$ و بنا به آنچه در بخش ریشه مکرر معادلات (فصل‌ششم) بیان شد آنگاه $x=a$ ریشه تا مشتق مرتبه $(n-1)$ ام $f(x)$ نیزمی‌باشد یعنی تا مشتق $(n-1)$ ام $f(x)$ نیز بر $x-a$ بخش‌پذیر است. بنابراین قضیه زیررا داریم:

قضیه: شرط لازم وکافی برای آنکه چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)^{n}$ بخش‌پذیر باشدآن است که $f(x)$ وهمه مشتقات متوالی آن تا مرتبه $(n-1)$ ام بر $(x-a)$ بخش‌پذیر باشند.

مثال ۱۱. بازاء چه مقادیر a و b چند جمله‌ای $f(x)=x^{3}+ax^{2}+bx-4$ بر $(x-2)^{2}$ بخش‌پذیر است .

حل. باید $f(x)$ و $f'(x)$ هر دو بر $(x-2)$ بخش‌پذیر باشند یعنی؛

$$\begin{cases} f(۲)=۰ \\ f'(۲)=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۸+۴a+۲b-۴=۰ \\ ۳\times۴+۴a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۴a+۲b=-۴ \\ ۴a+b=-۱۲ \end{cases} \Rightarrow$$

$b=۸$ و $a=-۵$

۷-۷. بخش‌پذیری $x^n \pm a^n$ بر $x \pm a$

۱. $f(x)=x^n-a^n$ بر $x-a$ همواره بخش‌پذیر است.

$$f(a)=a^n-a^n=۰$$

و لذا؛ $x^n-a^n=(x-a)(x^{n-۱}+ax^{n-۲}+\dots+a^{n-۱})$

۲. $f(x)=x^n-a^n$ بر $x+a$ وقتی بخش‌پذیر است که n زوج باشد.

زیرا: $R=f(-a)=(-a)^n-a^n=۰ \Longrightarrow n=۲k$

لذا؛

$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+\dots+a^{n-۲}x-a^{n-۱})$ ، n زوج

۳. $f(x)=x^n+a^n$ بر $x+a$ وقتی بخش‌پذیر است که n فرد باشد.

زیرا:

$$R=f(-a)=(-a)^n+a^n=۰ \Longrightarrow n=۲k+۱$$

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-۱}-ax^{n-۲}+\dots\dots-a^{n-۲}x+a^{n-۱})$$

۴. $f(x)=x^n+a^n$ بر $x-a$ هرگز بخش‌پذیر نیست.

زیرا $R=f(a)=۲a^n$

مثال ۱۲. $x^{۱۰}-۱$ بر $x-۱$ همواره بخش‌پذیر است.

$x^۶-۶۴$ بر $x+۲$ و $x-۲$ همواره بخش‌پذیر است.

$x^۹+y^{۱۸}$ بر $x+y^۲$ بخش‌پذیر است.

$$R=(-y^۲)^۹+y^{۱۸}=۰$$

۸-۷. بخش‌پذیری $f(x)=x^n \pm a^n$ بر $x^p \pm a^p$ ، (n و $p \in n$)، $(a>۰)$

۱. $f(x)=x^n-a^n$ بر x^p-a^p وقتی بخش‌پذیر است که n بر p قابل قسمت باشد یعنی، $n=pk$

زیرا اگر n را بر q تقسیم کنیم داریم ، $n=pk+r$ و لذا
$f(x)=(x^p)^k x^r-a^{pk+r}$ که اگر $x^p=a^p$ قرار دهیم،

$$R=(a^p)^k x^r-a^{pk+r}=a^{pk}(x^r-a^r)$$

برای آنکه باقیمانده صفرشود باید $x^r-a^r=0$ که چون $x\neq a$ لذا $r=0$ و در نتیجه $n=pk$

۲. $f(x)=x^n-a^n$ بر x^p+a^p وقتی بخش‌پذیر است که $\frac{n}{p}$ زوج باشد، $\frac{n}{p}=2k$ (ثابت کنید)

مثلاً $x^{24}-1$ بر x^6+1 و بر x^4+1 و بر x^3+1 بخش‌پذیر است.

$$\frac{24}{3}=8 ، \frac{24}{6}=6 ، \frac{24}{6}=4$$

۳. $f(x)=x^n+a^n$ بر x^p+a^p وقتی بخش‌پذیر است که $\frac{n}{p}$ عددی فرد باشد.

مثلاً $x^{24}+1$ بر x^8+1 بخش‌پذیر است. $\frac{24}{8}=3$

$x^{24}+1=(x^8)^3+1$ و $x^8=-1$ درنتیجه، $R=(-1)^3+1=0$

۴. $f(x)=x^n+a^n$ بر x^p-a^p بخش‌پذیر نیست.

۹ـ۷. تجزیه کسرهای گویا

تعریف. کسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ را یک کسر گویا می‌نامیم اگر $p(x)$ و $q(x)$ چند جمله‌ای‌هائی از x باشند.

کسرهای گویائی را که به صورتهای زیر باشند کسرهای گویای ساده یا به اختصار کسرهای ساده می‌نامیم.

$$1)\ \frac{A}{(x-a)^k} \qquad 2)\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} ، (p^2-4q<0)$$

A و B و a و p و q اعداد حقیقی و $k\geqslant 1$ عددی صحیح است.

درکسرساده نوع دوم، فرض شده است که مبین مخرج منفی باشد چون درغیر این صورت مخرج حاصلضرب دوعبارت خطی می‌شود.

درکسرهای گویای $\frac{p(x)}{q(x)}$ اگر درجه $p(x)$ بیش از درجه $q(x)$ باشد بنا به قضیه تقسیم چندجمله‌ای‌های $s(x)$ و $r(x)$ وجود دارندبه‌طوری که $p(x)=q(x)s(x)+r(x)$ و درجه $r(x)$ از درجه $q(x)$ کمتر است. و لذا $\frac{p(x)}{q(x)}=s(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$.

بنا براین کسرهای گویائی را درنظر می‌گیریم که درجه صورت از درجه مخرج کمتر باشد و آنها را به کسرهای ساده تبدیل می‌کنیم.

قضیه ۱. اگر a ریشه حقیقی مکرر ازمرتبه n ام مخرج کسر گویای $\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد یعنی $g(x)=(x-a)^n g_1(x)$ و $g_1(a)\neq 0$ آنگاه کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ را می‌توان به به صورت مجموع دوکسرساده زیر نوشت.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^n}+\frac{f_1(x)}{(x-a)^{n-1}g_1(x)}$$

که در آن $A_1\neq 0$ عددی ثابت و درجه $f_1(x)$ از درجه $(x-a)^{n-1}g_1(x)$ کمتر است. اگرقضیه فوق را n مرتبه برای کسر $\frac{f_1(x)}{(x-a)^{n-1}g_1(x)}$ به کار ببریم داریم:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^n}+\frac{A_2}{(x-a)^{n-1}}+\dots+\frac{An}{(x-a)}+\frac{f_n(x)}{g_1(x)}$$

که در آن $\frac{f_n(x)}{g_1(x)}$ کسر گویای تحویل‌ناپذیر است.

اگر $g_1(x)$ ریشه‌های دیگری‌داشته باشد قضیه را برای آن ریشه نیز به کار می‌بریم.

قضیه ۲. اگر $h(x)$ باشدکه در آن $g(x)=(x^2+px+p)^m h(x)$ بر x^2+px+q بخش‌پذیر نباشد آنگاه‌کسر گویای $\frac{f(x)}{g(x)}$ به مجموع دوکسرساده و گویای زیر تجزیه می‌شود:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^m}+\frac{u(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}g_1(x)}$$

که در آن $u(x)$ یك چند جمله‌ای است که درجه آن از درجه چند جمله‌ای $(x^۲+px+q)^{m-۱}g_۱(x)$ کمتر است و $x^۲+px+q=۰$ ریشه ندارد.

و این‌قضیه را می‌توان مانند قضیه (۱) ادامه داد.

اکنون با توجه به قضایای (۱) و (۲) اگر درکسر گویای $\frac{f(x)}{g(x)}$، چند جمله‌ای $g(x)$ قابل‌تجزیه به صورت $g(x)=(x-a)^n\cdots(x^۲+px+q)^m$ باشد با به کار بردن مکرر این قضایا چنین داریم؛

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A_۱}{(x-a)^n}+\frac{A_۲}{(x-a)^{n-۱}}+\cdots+\frac{A_n}{(x-a)}+\cdots+$$

$$\frac{M_۱x+N_۱}{(x^۲+px+q)^m}+\frac{M_۲x+N_۲}{(x^۲+px+q)^{m-۱}}+\cdots+\frac{M_mx+N_m}{x^۲+px+q}$$

این رابطه بازاء هر x حقیقی مخالف ریشه‌های مخرج برقرار است برای محاسبه ضرایب A_i و M_i و N_i روشهای زیر وجود دارد.

۱. بین کسرهای طرف دوم تساوی مخرج مشترك گرفته و صورت‌کسر حاصل را با $f(x)$ متحد قرار می‌دهیم، ضرایب فوق محاسبه می‌شوند.

مثال۱۳. کسر $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۲}{x^۴+x^۲}$ را به کسرهای ساده تبدیل‌کنید.

حل. $$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۲}{x^۲(x^۲+۱)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^۲}+\frac{cx+D}{x^۲+۱}$$

که پس ازمخرج مشترك‌گرفتن ومتحد قراردادن صورتها داریم،

$$x^۲-۲\equiv Ax(x^۲+۱)+B(x^۲+۱)+(cx+D)x^۲ \Longrightarrow$$

$$x^۲-۲\equiv(A+C)x^۳+(B+D)x^۲+Ax+B$$

$$\begin{cases} A+C=۰ \\ B+D=۱ \\ A=۰ \\ B=-۲ \end{cases} \Longrightarrow A=۰ \text{ و } C=۰ \text{ و } B=-۲ \text{ و } D=۳$$

در نتیجه $$\frac{x^۲-۲}{x^۴+x۲}=\frac{-۲}{x^۲}+\frac{۳}{x^۲+۱}$$

۲. چون عبارات فوق نسبت به x اتحاد می‌باشند لذا می‌توانیم به x اعداد دلخواه و

مناسب داده وسپس ضرایب را پیداکنیم.

مثال۱۴. کسر $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{-۷x+۱۳}{(x^۲+x-۲)(x-۱)^۲}$ را به کسرهای گویا تبدیل کنید.

حل. $$\frac{-۷x+۱۳}{(x+۲)(x-۱)^۳}=\frac{A}{x+۲}+\frac{B}{x-۱}+\frac{C}{(x-۱)^۲}+\frac{D}{(x-۱)^۳}$$

که پس‌ازمخرج مشترك گرفتن داریم؛

$$۱۳-۷x\equiv A(x-۱)^۳+B(x+۲)(x-۱)^۲+C(x-۱)(x+۲)+D(x+۲)$$

اگر $x=-۲$ قرار دهیم؛ $-۲۷A=-۲۷$ و لذا $A=-۱$ و اگر $x=۱$ قرار دهیم $۳D=۶$ یا $D=۲$ اما ضریب $x^۳$ برابر است با $A+B$ وباید $A+B=0$ و چون $A=-۱$ پس $B=۱$ وهمچنین برای‌ضرایب‌ثابت‌درعبارت $x=0$ قرارمی‌دهیم $C=-۳$ بدست می‌آید.

نتیجه: این اعداد دلخواه را چنان انتخاب می‌کنیم‌که ضرایب بیشتری را صفرکنند ولذا از ریشه‌های مخرج‌ها نیز استفاده می‌کنیم.

۳. اگرکسرهای‌گویا به صورت زیرباشند؛

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\cdots$$

یعنی مخرج هرکسر دارای یك ریشه و ازمرتبه یك باشد می‌توان با روش ساده‌تری اعداد A و B و C و ... را پیدا کرد.

درموقع مخرج مشترك‌گرفتن $(x-a)$ درتمام صورتهای‌کسرها به جز A ضرب می‌شود پس اگر $x=a$ قرار دهیم صورت طرف اول $f(a)$ وصورت طرف دوم $A(a-b)(a-c)\ldots$ می‌باشد (بقیه صفرمی‌شوند) از برابری این دوصورت A بدست می‌آید. به همین‌ترتیب اگر $x=b$ قرار دهیم صورت طرف اول $f(b)$ و ازطرف دوم، $B(b-a)(b-c)\ldots$ می‌باشدکه از برابری فوق B نیز بدست می‌آید وبه همین‌ترتیب سایرضرایب محاسبه می‌شوند.

مثال۱۵. کسرگویای $\dfrac{۶-۴x}{(x-۱)(x-۲)(x-۳)}$ را به‌کسرهای ساده تبدیل کنید.

حل. $\dfrac{6-4x}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x-2}+\dfrac{C}{x-3}$

اگر $x=1$ قرار دهیم؛ $6-4=A(1-2)(1-3)\Longrightarrow A=1$

اگر $x=2$ قرار دهیم؛ $6-8=B(2-1)(2-3)\Longrightarrow B=2$

اگر $x=3$ قرار دهیم؛ $6-12=C(3-1)(3-2)\Longrightarrow C=-3$

مثال۱۶. اگر $\dfrac{-x^2+3x-8}{(x^2+2)(x+4)}=\dfrac{A-Bx}{x^2+2}-\dfrac{C}{x+4}$، $A+B+C$ را پیدا کنید.

حل. یك روش بـه حالت کلـی است، اما اگـر $x=-1$ در عبارت قـرار دهیم،

$$\frac{-1-3-8}{(3)(-3)}=\frac{A+B}{3}+\frac{C}{3}$$

و درنتیجه $A+B+C=\dfrac{-12}{-3}=4$

۴. کسر ثابت

هرگاه حاصل یك‌کسر با یك یاچند متغیر به‌ازای همه مقادیر متغیر برابر مقدار ثابت (عددی ثابت) باشدآن‌کسر را ثابت می‌نامیم بـرای‌آنکه یك‌کسر برابرمقدار ثابت باشد یعنی مستقل ازمتغیر یا متغیرها باشد، لازم وکافی است کـه ضریب‌های جمله‌های متشابه در صورت و مخرج متناسب باشند.

یعنی اگر $\dfrac{ax^n+bx^{n-1}+\dots+kx+l}{a'x^n+b'x^{n-1}+\dots+k'x+l'}=C$ (C مقدار ثابت است)

آنگاه ؛ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dots=\dfrac{k}{k'}=\dfrac{l}{l'}=C$

۲ـ بسط دوجمله‌ای

درفصل اول حاصل اتحادهای $(a+b)^2$ و $(a+b)^3$ را بیان‌کردیم اکنون دراین قسمت حالت‌کلی $(a+b)^n$ را که به بسط دوجمله‌ای معروف است مـورد بررسی قـرار می‌دهیم با نوشتن حاصل بسط درحالتهای $n=2$ و $n=3$ و $n=4$ و ... با یك روش استقرائی می‌توانیم حاصل بسط را درحالت‌کلی حدس زده وآن را به استقراء ثابت‌کنیم بنابراین حاصل این بسط به صورت زیرمی‌باشد؛

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-۱}b+\frac{n(n-۱)}{۲!}a^{n-۲}b^۲+\dots+$$
$$\frac{n(n-۱)\dots(n-k+۱)}{k!}a^{n-k}b^k+\dots+b^n$$

یك روش برای حفظ کردن این بسط به این ترتیب است که اولاً جمع توانهای a و b درهر جمله برابر و برابر n است. ثانیاً ضریب هرجمله برابر است با حاصلضرب ضریب جمله قبل درتوان حرف a در آن جمله، تقسیم بر تعداد جمله‌هائی که تا آن جمله نوشته شده است.

اکنون برای ساده‌تر نشان‌دادن بسط دوجمله‌ای نماد زیر را که ترکیب k از n می‌باشد معرفی می‌کنیم. این نماد را با $\binom{n}{k}$ نشان می‌دهیم لذا:

$$\binom{n}{k}=\begin{cases}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-۱)\dots(n-k+۱)}{k!} & k\neq ۰\\ ۱ & k=۰\end{cases}$$

مثلا $۱=\binom{n}{0}$ و $۱=\binom{n}{n}$ و $n=\binom{n}{۱}$ و $n=\binom{n}{n-۱}$، $n!$ یعنی حاصل‌ضرب اعداد از ۱ تا n، $n!=۱\times۲\times۳\times\dots\times n$

مثلاً: $\binom{۱۰}{۷}=\dfrac{۱۰!}{۷!(۱۰-۷)!}=\dfrac{۷!\times۸\times۹\times۱۰}{۷!\ ۳!}=$

$$\frac{۸\times۹\times۱۰}{۱\ ۲\times۳}=۱۲۰$$

از تعریف مشخص است که $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ مانند: $\binom{۱۰}{۳}=\binom{۱۰}{۷}$

حال با معرفی نماد فوق بسط دوجمله‌ای را می‌توان به صورت ساده‌تر زیر نشان داد که حفظ کردن آن آسان‌تر می‌باشد.

$$(a+b)^n=\binom{n}{۰}a^n+\binom{n}{۱}a^{n-۱}b+\binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲+\dots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\dots+\binom{n}{n}b^n=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

$\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ را جمله عمومی می‌نامیم که جمله $(k+۱)$ ام است

بنابراین: $\boxed{T_{k+۱}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \quad \text{جمله } (k+۱) \text{ام}}$

مثال ۱۷. بسط $(a+b)^6$ را بنویسید.

حل.

$$(a+b)^6=\binom{6}{0}a^6+\binom{6}{1}a^5b+\binom{6}{2}a^4b^2+\binom{6}{3}a^3b^3+\binom{6}{4}a^2b^4+\binom{6}{5}ab^5+\binom{6}{6}b^6=$$

$$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

هرگاه در بسط $(a+b)^n$ ، b را به $-b$ تبدیل کنیم بسط $(a-b)^n$ بدست می‌آید که در این بسط جمله‌ها یك درمیان مثبت ومنفی هستند.

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+(-1)^nb^n$$

خواصی از بسط دوجمله‌ای

۱. در بسط $(a\pm b)^n$ تعداد جملات برابر $n+1$ است. به طور کلی تعداد جملات در بسط $(a_1+a_2+\cdots+a_k)^n$ برابر است با:

$\binom{n+k-1}{k-1}$ یا $\dfrac{(n+k-1)!}{(k-1)!\,n!}$ که می‌توان آنرا به صورت $\dfrac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!}$ نیز نوشت. می‌توان آن را به استقراء ثابت کرد.

مثال ۱۸. تعداد جملات در بسط $(a+b+c)^{98}$ را پیدا کنید.

حل.

$$\binom{98+3-1}{3+1}=\binom{100}{2}=\frac{100}{2!\,98!}=\frac{100\times 99}{2}$$

$$=50\times 99=4950$$

۲. در بسط $(a+b)^n$ مجموع ضرایب برابر 2^n و در بسط $(a-b)^n$ مجموع ضرایب برابر صفر است.

قبلا در فصل اول مجموع ضرایب یك چند جمله‌ای را بیان کردیم، یعنی برای تعیین مجموع ضرایب یك چند جمله‌ای از چند متغیر کافی است به جای همه متغیرها عدد یک بگذاریم.

بنابراین:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{k}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\cdots+(-1)^k\binom{n}{k}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

۳. از برابری $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ نتیجه می‌گیریم که در بسط $(a+b)^n$ ضرایب جملات متساوی الفاصله از طرفین برابرند یعنی ضرایب $a^{n-k}b^k$ و a^kb^{n-k} مساوی می‌باشند. و در بسط $(a-b)^n$ اگر n فرد باشد ضرایب جمله‌های متساوی‌الفاصله از طرفین قرینه‌اند مانند؛ $(a-b)^۳=a^۳-۳a^۲b+۳ab^۲-b^۳$ و اگر n زوج باشد ضرایب از طرفین مساوی می‌باشند مانند:

$$(a-b)^۴=a^۴-۴a^۳b+۶a^۳b+۶a^۲b^۲-۴ab^۳+b^۴$$

به طور کلی در بسط $(a\pm b)^n$ اگر ضریب جمله k ام با ضریب جمله r ام مساوی باشند؛ $k+r=n+۲$.

نتیجه: هرگاه T_k جمله k ام بسط $(a+b)^n$ باشد آنگاه؛

$$T_{k+۱}=T_k\cdot\frac{n-k+۱}{k}a^{-۱}b$$

۴. در بسط $(a\pm b)^n$ اگر n زوج باشد آنگاه بسط دارای جمله وسط است که جملهٔ $\frac{n}{۲}+۱=\frac{(n+۱)+۱}{۲}$ ام می‌باشد ولذا این جمله برابر است با، $\binom{n}{\frac{n}{۲}}a^{\frac{n}{۲}}b^{\frac{n}{۲}}$ که دارای بزرگترین ضریب از نظر قدرمطلق است.

مثال ۱۹. در بسط $\left(x-\frac{۲}{x}\right)^{۱۲}$ جمله وسط کدام است؟

حل. اولا جمله وسط جمله $۷=۱+\frac{۱۲}{۲}$ یعنی جمله هفتم است.

$$\binom{۱۲}{۶}x^۶\left(\frac{۲}{x}\right)^۶=\frac{۱۲!}{۶!۶!}\cdot ۲^۶=۷\times ۱۲\times ۱۱\times ۶۴$$

درحالتی که n فرد باشد در بسط $(a\pm b)^n$ جمله وسط وجودندارد اما دوجمله وجود دارند که ضرایب آنها از نظر قدر مطلق مساوی و از همه بزرگترهستند این دو جمله $\binom{n}{\frac{n-۱}{۲}}a^{\frac{n+۱}{۲}}b^{\frac{n-۱}{۲}}$ و $\binom{n}{\frac{n+۱}{۲}}a^{\frac{n-۱}{۲}}b^{\frac{n+۱}{۲}}$ می‌باشند که به ترتیب جمله‌های $\frac{n+۱}{۲}$ و $\frac{n+۳}{۲}$ هستند.

$$T_{\frac{n+۱}{۲}}=\binom{n}{\frac{n-۱}{۲}}a^{\frac{n+۱}{۲}}b^{\frac{n-۱}{۲}} \text{ و } T_{\frac{n+۳}{۲}}=\binom{n}{\frac{n+۱}{۲}}a^{\frac{n-۱}{۲}}b^{\frac{n+۱}{۲}}$$

۵. جمله عمومی یاجمله $k+1$ ام و تعیین جمله مستقل از متغیر، برای این منظور جمله $k+1$ ام به‌کار می بریم که درمحاسبات ساده‌تر ازخود جمله k ام است.

در بسط $(a+b)^n$ جمله $k+1$ ام یعنی T_{k+1} به صورت زیر است؛

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k$$

و در بسط $(a-b)^n$ داریم؛

$$T_{k+1}=(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}\,b^k$$

ازجمله عمومی استفاده‌های زیادی می‌توان کرد مثلا هرجمله را می‌توانیم مشخص کنیم یا اگر در بسط جمله مستقل ازبعضی متغیرها موجود باشد می‌توان آنرا پیدا کرد، از جمله عمومی، توان آن متغیررا پیداکرده مساوی صفرقرار می‌دهیم k مشخص می‌شود. سپس شماره جمله یعنی $k+1$ نیز بدست می آید.

مثال۲۰. ضریب x^{-17} را در بسط $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$ پیداکنید.

حل. $T_{k+1}=(-1)^k\binom{15}{k}(x^4)^{15-k}\left(\frac{1}{x^3}\right)^k=(-1)^k\binom{15}{k}x^{60-7k}$

$$60-7k=-17\Longrightarrow k=11\Longrightarrow T_{12}=-\binom{15}{11}x^{-17}=-7\times13\times15x^{-17}$$
$$=-1365x^{-17}$$

که جمله، دوازدهم بسط است.

مثال۲۱. در بسط $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^9$ جمله مستقل از xرا پیداکنید.

حل. درجمله عمومی مجموع توانهای x را پیدا کرده مساوی صفرقرارمی‌دهیم.

$$T_{k+1}=\binom{9}{k}(x^2)^{9-k}\left(\frac{2}{x}\right)^k=\binom{9}{k}\times2^k\times x^{18-3k}$$

جمله هفتم مستقل از x است. $18-3k=0\Longrightarrow k=6$

$$T_7=\binom{9}{6}2^6=84\times64=5376$$

همچنین ازجمله عمومی دربسط $(a\pm b)^n$ می‌توان استفاده‌کرده وجمله‌های گویا را

پیدا کرد. مثلا اگر بخواهیم در بسط، $(\sqrt[p]{x}+\sqrt[m]{y})^n$ تعداد جمله‌های گویا را نسبت به x یا نسبت به y یا نسبت بـه هـر دو پیدا کنیم ، ابتدا جمله عمومـی را می‌نـویسم،

$T_{k+1}=\binom{n}{k}(\sqrt[p]{x})^{n-k}(\sqrt[m]{y})^k$ یا $T_{k+1}=\binom{n}{k}x^{\frac{n-k}{p}}y^{\frac{k}{m}}$ اکنون اگر نسبت به y جمله‌ها گویا باشند باید $\frac{k}{m}$ عددی صحیح باشد $(\circ\leqslant k\leqslant n)$ و اگر نسبت به x گویا باشد بـایـد $\frac{n-k}{p}$ عددی صحیح باشد. واگر نسبت به x و y هر دو گویا باشد بایـد $\frac{k}{m}$ و $\frac{n-k}{p}$ هر دو با هم گویا باشند یعنی مقدارهائی از k قابل‌قبول می‌باشند که بازاء آنها هر دوی $\frac{k}{m}$ و $\frac{n-k}{p}$ گویا باشند.

مثال۲۲. جملات گویا را در بسط دوجمله‌ای $(\sqrt[5]{3}-\sqrt[7]{2})^{24}$ پیدا کنید.

حل. $T_{k+1}=\binom{24}{k}(\sqrt[5]{3})^{24-k}(\sqrt[7]{2})^k=\binom{24}{k}3^{\frac{24-k}{5}}2^{\frac{k}{7}}\ (\circ\leqslant k\leqslant 24)$

باید $\frac{k}{7}$ و $\frac{24-k}{5}$ اعدادی صحیح باشند برای آنکه $\frac{k}{7}$ صحیـح بـاشد بـایـد $k=\circ$ و ۷ و ۱۴ و ۲۱ باشد که فقط بازاء $k=14$ ، عدد $\frac{24-k}{5}$ صحیح است لذا فقط یك جمله گویا دارد وآن جمله پانزدهم است.

مسائل بخش‌پذیری و بسط دوجمله‌ای

۱. بازاء چه مقدار m عبارت $x^4+ma^2x^2+a^4$ بر x^2-ax+a^2 بخش‌پذیر است.

۲. باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x+1$ و $x-2$ و $x+2$ به‌ترتیب ۱ و ۳- و ۲ می‌باشد باقیمانده $f(x)$ بر $(x+1)(x^2-4)$ را پیدا کنید.

۳. a و b و c را چنان پیدا کنید که درعبارت ax^4+bx^3+c حاصلضرب باقیمانده‌های آن بر x^2+1 و x^3+1 برابر $2x^2-22x+15$ باشد.

۴. با چه شرطی $x^{2m}+x^m+1$ بر x^2+x+1 بخش‌پذیر است.

۵. ثابت کنید $(a+b+c)^{333}-a^{333}-b^{333}-c^{333}$ بر عبارت $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ بخش‌پذیر است.

۶. چند جمله‌ای درجه پنجم $f(x)$ را چنان پیدا کنید که $f(x)+2$ بر $(x-1)^3$ و $f(x)-4$ بر $(x+1)^3$ بخش‌پذیر باشد.

۷. ضریب x^{16} را در بسط $(x^2-2x)^{10}$ پیداکنید.

۸. جمله پنجم بسط $(x+2x^3)^{17}$ را پیداکنید.

۹. جمله مستقل از x را در بسط $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$ پیدا کنید.

۱۰. در بسط $\left(\frac{x\sqrt[3]{x}}{y}+\frac{1}{\sqrt[15]{x^{28}}}\right)^n$ جمله مستقل‌از x را پیداکنید درصورتی‌که مجموع ضرایب سه جمله اول بسط مساوی ۷۹ باشد.

۱۱. اگر در بسط $\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^n$ ضریب جمله سوم مساوی ۲۸ باشد جمله‌وسط را پیدا کنید

۱۲. اگر در بسط $(x+1)^n$ ضریب جمله‌های پنجم و نهـم مساوی باشند n را پیدا کنید.

۱۳. تعداد جمله‌های گویای بسط $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$ را پیدا کنید.

۱۴. ضریب x^{50} را درعبارت زیر پیداکنید.

$$f(x)=(1+x)^{1000}+x(1+x)^{999}+x^2(1+x)^{998}+\dots+x^{1000}$$

۱۵. اگرمجموع ضریب جمله دوم از اول وضریب جمله سوم از آخـر بسط دوجمله‌ای زیر مساوی ۷۸ باشد جمله مستقل از y را پیدا کنید.

$$\left(x\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[8]{x^5}}\right)^n$$

۱۶. به چه شرطی کسر $\dfrac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}$ به x بستگی ندارد.

۱۷. کسر $\dfrac{4x^2+3x+5}{x^3-3x-2}$ را به‌کسرهای ساده تبدیل کنید .

۱۸. بسط $\left(\sqrt[5]{x}+\sqrt[7]{y}\right)^7$ چند جمله گویا دارد.

تستهای بخش‌پذیری و بسط دوجمله‌ای

۱. برای آنکه عبارت $(x-a)(x-b)+k$ بر $x-a-b$ بخش‌پذیر باشد لازم است k برابر باشد با:

الف– ab ب– $-ab$ ج– $a+b$ د – $-(a+b)$

۲. اگر $(x-۲)^۴$ بر $x^۳+ax^۲+bx+c$ بخش‌پذیر باشد، b برابر است با ؟

الف– ۱۲ ب– ۱۲− ج– ۸ د – ۸−

۳. باقیمانده تقسیم $x^{۴۷}$ بر $x^۳+۱$ برابر است با ؟

الف– ۰ ب– ۱− ج– $-x^۲$ د – $x^۲+۱$

۴. بازاء چه مقادیر n عبارت $f(x)=nx^{n+۱}-nx^n-x^n+۱$ بر $(x-۱)^۲$ بخش‌پذیر است. $(n\in N)$

الف– همه مقادیر n ب– هیچ مقدار n

ج– مقادیر زوج n د – مقادیر فرد n

۵. اگر باقیمانده $f(x)$ بر $x^۳-۳x+۲$ برابر $x^۲+۴x+۴$ باشد $f(-۲)$ برابر است با ؟

الف– صفر ب– ۸ ج– ۸− د – ۴

۶. اگر باقیمانده‌های تقسیم $f(x)$ و $g(x)$ بر $x^۲+۲x+۲$ به ترتیب x و $x+۲$ باشد باقیمانده تقسیم $f(x)g(x)$ بر $x^۲+۲x+۲$ کدام است؟

الف– ۲ ب– ۲− ج– $۲x-۱$ د – $x^۲+x$

۷. اگرعبارت $۲x^۳+ax^۲+bx+۳$ بر $x^۲+۳$ بخش‌پذیر باشد a و b برابرند با :

الف- $\begin{cases} a=1 \\ b=6 \end{cases}$ ب- $\begin{cases} a=-1 \\ b=-6 \end{cases}$ ج- $\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases}$ د- $\begin{cases} a=-1 \\ b=6 \end{cases}$

۸. $x^{48}+y^{24}$ بر کدامیك ازعبارات زیر همواره بخش‌پذیر است.

الف- x^2+1 ب- $x^{16}-y^8$ ج- $y^{12}+y^8$ د- $x^{16}+y^8$

۹. اگر ax^3-4x^2-bx+6 بر x^2-x-2 بخش‌پذیر باشد a و b کدام‌اند؟

الف- $a=b=1$ ب- $a=b=-1$

ج- $a=1$ و $b=-1$ د- $a=-1$ و $b=1$

۱۰. خارج قسمت تقسیم $x^4+x^3-3x^2+2x-1$ بر $x-2$ کدام است؟

الف- x^3-3x^2+5x-1 ب- x^3-3x^2+7x-1

ج- x^3+3x^2+3x+8 د- x^3+3x^2-5x+1

۱۱. اگر باقیمانده $f(x)$ بر $4x-1$ برابر R باشد باقیمانده $f(x)$ بر $x-\frac{1}{4}$ کدام است.

الف- $\frac{R}{4}$ ب- $4R$ ج- R د- هیچکدام

۱۲. باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر $x-1$ و $x-2$ به ترتیب برابر ۵ و ۷ است باقیمانده تقسیم $f(x)$ بر x^2-3x+2 کدام است؟

الف- $3x+2$ ب- $2x-3$ ج- $2x+3$ د- $2-3x$

۱۳. باقیمانده x^5+x+1 بر x^2+x+1 کدام است:

الف- صفر ب- ۱ ج- ۲ د- ۳

۱۴. اگر $x^6+ax^4+bx^3+1$ بر x^2-1 بخش‌پذیر باشد $4a-3b$ برابراست با ؟

الف- صفر ب- -2 ج- ۸ د- $+4$

۱۵. اگر باقیمانده تقسیم ax^6+bx^3+1 بر x^3+1 برابر یك باشد باقیمانده $x^2+ax+2b$ بر $x+2$ کدام است؟

الف- -6 ب- -2 ج- ۲ د- ۴

۱۶. عبارت $x^{84}-y^{56}$ بر کدامیک ازعبارات زیر بخش‌پذیر است؟

الف- $x^{12}+y^{8}$ ب- $x^{3}+y^{4}$ ج- $x^{6}+y^{4}$ د- $x^{4}-y^{6}$

۱۷. اگر باقیمانده $f(x)$ بر $x-1$ برابر ۲ باشد باقیمانده $f(x^{3})$ بر $x-1$ برابر است با ؟

الف- ۱ ب- ۲ ج- صفر د- ۸

۱۸. اگر باقیمانده $f(x)$ بر $x^{2}+1$ برابر ۴ باشد باقیمانده $f(x^{3})$ بر $x^{4}-x^{2}+1$ کدام است؟

الف- ۴ ب- ۶۴ ج- $x^{3}+1$ د- $x^{2}+1$

۱۹. در بسط $\left(x^{4}-\frac{1}{x^{3}}\right)^{15}$ ضریب x^{32} کدام است ؟

الف- $\binom{15}{11}$ ب- $-\binom{15}{11}$ ج- $\binom{15}{5}$ د- $-\binom{15}{3}$

۲۰. جمله مستقل از x در بسط $\left(x\sqrt[3]{x^{-1}}+\frac{1}{\sqrt[7]{x^{2}}}\right)^{10}$ کدام است ؟

الف- ۴۵ ب- ۳۰ ج- ۶۰ د- ۱۲۰

۲۱. در بسط $(1+x)^{9}$ بزرگترین ضریب کدام است؟

الف- ۱۲۶ ب- ۱۸ ج- ۱۲۰ د- ۱۳۶

۲۲. بسط $(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{y})^{13}$ چندجمله گویا دارد.

الف- صفر ب- ۱ ج- ۲ د- ۳

۲۳. ضریب x^{n} در بسط $(1+x)^{2n}$ کدام است $(n\in N)$

(کنکور فنی ۶۵)

الف- $\frac{(2n+1)!}{((n+1)!)^{2}}$ ب- $\frac{(2n+1)!}{(n!)^{2}}$

ج- $\frac{(2n)!}{((n+1)!)^{2}}$ د- $\frac{(2n)!}{(n!)^{2}}$

۲۴. ضریب جمله x^{7} در بسط $(\sqrt[4]{x}+\sqrt{x})^{20}$ کدام است.

الف- $\binom{20}{11}$ ب- $\binom{20}{10}$ ج- $\binom{20}{12}$ د- $\binom{20}{9}$

۲۵. دربسط $\left(x+\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^n$ اگر تفاوت ضرایب جملات دوم وسوم ۵۴ باشند شماره جمله مستقل از x کدام است.

الف- ۸ ب- ۹ ج- ۱۰ د- ۱۱

۲۶. بازاء چه مقدار n ضرایب جملات دوم وسوم و چهارم بسط $(a+b)^n$ تشکیل تصاعدی عددی می‌دهند؟

الف- $n=۲$ ب- $n=۵$ ج- $n=۷$ د- $n=۲$ یا $n=۷$

۲۷. تعداد جملات بسط $S=(1+x)(1+x+x^2)\dots(1+x+x^2+\dots+x^n)$ برابر است با ؟

الف- $\frac{n(n+1)}{2}$ ب- $\frac{n(n-1)}{2}$ ج- $\frac{n^2+n+2}{2}$ د- $\frac{n^2+n-1}{2}$

۲۸. درعبارت زیر ضریب x^7 کدام است؟

$$f(x)=(1+x)^{10}+x(1+x)^9+x^2(1+x)^8+\dots+x^{10}$$

الف- ۳۳۰ ب- ۱۲۰ ج- ۳۴۰ د- ۳۰۰

۲۹. هرگاه دربسط $\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{x}\right)^n$ جمله سوم مستقل از x باشد n برابر است با ؟

الف- ۱۰ ب- ۵ ج- ۶ د- ۷

۳۰. دربسط $(1+x)^{10}$ ضریب جمله وسط کدام است.

الف- ۲۵۲ ب- ۲۵۰ ج- ۶۳ د- ۲۷۲

۳۱. دربسط $\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{y}\right)^{32}$ چند جمله گویا وجود دارد؟

الف- ۲ ب- ۳ ج- ۴ د- ۷

۳۲. اگر دربسط $(x+x^{\log x})^5$ جمله سوم برابر 10^6 باشد x برابر است با ؟

الف- ۱۰ ب- ۱۰۰ ج- $\frac{1}{10}$ د- ۱

۳۳. بازاء چه مقدار m کسر $\dfrac{x^{۲}-۲mx+m-۱}{x^{۲}+mx-۳}$ به x بستگی ندارد؟

الف- ۲ و ۳ ب- ۴ و ۲- ج- ۲- د- هیچ‌مقدار m

۳۴. اگر $x^{۳}-۴x^{۲}+۲x-۶=۰$ باشد حاصل $\dfrac{۴x^{۲}-x^{۳}}{\frac{۱}{۳}x-۱}$ کدام است ؟

الف- $\frac{۱}{۶}$ ب- $\frac{۱}{۳}$ ج- ۳ د- ۶

۳۵. اگر $\dfrac{B}{x-۳}+\dfrac{A}{x+۱}=\dfrac{۵x-۳}{x^{۲}-۲x-۳}$ آنگاه B و A برابرند با ؟

الف- $B=۳$ و $A=۲$ ب- $B=-۳$ و $A=۲$

ج- $A=-۲=B$ د- $B=۲$ و $A=+۳$

۳۶. مجموع ضرایب عددی بسط $(x+y+z+t)^{n-۳}$ شانزده برابر مجموع ضرایب عددی بسط $(a+b)^{n}$ است، n برابر است با ؟

الف- ۷ ب- ۸ ج- ۱۰ د- ۴

۳۷. مجموع جبری ضرایب بسط عبارت

$(۲x^{۲}+x-۲)^{۹۹}+(۲x^{۳}+x^{۲}-x-۱)^{۶}+۳$

کدام است؟

الف- ۲ ب- ۳ ج- ۴ د- ۵

(کنکور ریاضی وفنی ۶۶)

۳۸. اگر $\dfrac{c}{x+۱}+\dfrac{Ax+B}{x^{۲}+۱}=\dfrac{x^{۲}+۲x+۳}{(x^{۲}+۱)(x+۱)}$، آنگاه $A+B+C$ برابر است با ؟

(کنکور تجربی ۶۵)

الف- ۰ ب- ۱ ج- ۲ د- ۳

۳۹. اگر $\dfrac{۱}{x(x+۱)(x+۲)}=\dfrac{C}{x+۲}+\dfrac{B}{x+۱}+\dfrac{A}{x}$ آن گاه $A+B+C$ کدام است.

(کنکور تجربی ۶۶)

الف- ۰ ب- ۱ ج- ۲ د- ۳

۴۰. اگر $f(x)=x^{2}+2x-4$ بر $(x-\alpha)(x-\beta)$ بخش‌پذیر باشد مقدار عبارت $\frac{\alpha^{5}-\beta^{5}}{\alpha^{2}-\beta^{2}}$ برابر است با :

الف ـ ۴۰ ـ　　ب ـ ۸　　ج ـ ۸ ـ　　د ـ ۲۴

مسائل مختلف

۱. عبارتهای زیررا تجزیه کنید.

$$۱)\quad ۴x^۴-۴x^۲y^۲+y^۴-۴x^۴y^۴$$

$$۲)\quad x^۴-۶x^۲+۱ \qquad\qquad ۳)\quad y^۳(a-x)-x^۳(a-y)+a^۳(x-y)$$

۲. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲-x-۱=۰$ باشند معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\alpha^۳+\frac{۱}{\beta}$ و $\beta^۳+\frac{۱}{\alpha}$ باشد.

۳. درمعادله $x^۲+px+q=۰$ اگر یك ریشه مربع ریشه دیگر باشد معادله را حل کنید.

۴. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^۲+px+q=۰$ باشند نشان دهید که p و q ریشه‌های معادله $x^۲+(\alpha+\beta-\alpha\beta)x-\alpha\beta(\alpha+\beta)=۰$ می‌باشند.

۵. اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ و α' و β' ریشه‌های معادله $a'x^۲+b'x+c'=۰$ باشند معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $\frac{\alpha}{\alpha'}+\frac{\beta}{\beta'}$ و $\frac{\beta}{\alpha'}+\frac{\alpha}{\beta'}$ باشند.

۶. اگر a و b و c و p، q، r اعداد حقیقی باشند به طوری که $ac-b^۲>۰$ و $ap-۲bq+cr=۰$ ثابت کنید $pr-q^۲\leqslant ۰$

۷. فرض کنیم بازاء هر x که، $|x|\leqslant ۱$، همواره $|ax^۲+bx+c|\leqslant ۱$ (a و b و c اعداد

حقیقی‌اند) ثابت کنید برای هر x که $|x| \leqslant ۱$ داریم، $-۴ \leqslant ۲ax+b \leqslant ۴$

۸. ثابت کنید ریشه‌های معادله $x^۴+px^۳+qx^۲+rx+s=۰$

الف- اگر تصاعد حسابی تشکیل‌دهند داریم، $p^۳-۴pq+۸r=۰$

ب- اگر تصاعد هندسی تشکیل‌دهند داریم، $p^۲s=r^۲$

۹. اگر a و b و c و d به‌ترتیب جمله‌های متوالی یك تصاعد هندسی باشند ثابت کنید.

$$(a^۲+b^۲+c^۲)(b^۲+c^۲+d^۲)=(ab+bc+cd)^۲$$

۱۰. نامساوی زیررا ثابت کنید.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geqslant \frac{۳}{۲}$$ (a و b و c مثبت‌اند)

۱۱. اگر $n>k>m>۰$ ثابت کنید.

$$\sqrt{n-k}+\sqrt{n+k}<\sqrt{n-m}+\sqrt{n+m}$$

۱۲. اگر $a_۱$ و $a_۲$ و . . . و a_n، $x_۱$ و $x_۲$ و . . . و x_n اعداد حقیقی مثبت باشند ثابت کنید.

$$(a_۱x_۱+a_۲x_۲+\cdots+a_nx_n)^۲ \leqslant (a_۱+a_۲+\cdots+a_n)(a_۱x_۱^۲+a_۲x_۲^۲+\cdots+a_nx_n^۲)$$

۱۳. اگر a و b و c سه‌عدد حقیقی دلخواه باشند ثابت کنید.

$$\left(\frac{a}{۲}+\frac{b}{۳}+\frac{c}{۶}\right)^۲ \leqslant \frac{a^۲}{۲}+\frac{b^۲}{۳}+\frac{c^۲}{۶}$$

۱۴. اگر s مساحت و p نصف محیط یك چهارضلعی محاطی باشند ثابت کنید. $S \leqslant \frac{p^۲}{۴}$

۱۵. ثابت کنید $A_n \leqslant S_n$ یعنی اگر $a_۱$، $a_۲$، . . . a_n مثبت باشند، آنگاه،

$$\left(\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n}\right)^۲ \leqslant \frac{a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲}{n}$$

تساوی وقتی برقرار است که؛ $a_۱=\ldots=a_n$ (نامساوی واسطه حسابی و مربعی)

۱۶. اگر x و y و z مثبت و $x+y+z=\frac{۳}{۴}$ ثابت کنید؛

$$\left(۱+\frac{۱}{x}\right)\left(۱+\frac{۱}{y}\right)\left(۱+\frac{۱}{z}\right) \geqslant ۱۲۵$$

۱۷. اگر x یك‌عدد حقیقی‌مثبت و n عدد صحیح منفی باشد. ثابت کنید:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n \geqslant 1+\frac{n}{x+1}$$

۱۸. اگر n عددی طبیعی باشد ثابت کنید:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

۱۹. اگر $(n\in N)f(x)=nx^n+(n-1)x^{n-1}+\dots+x+1$ مقـدار ثابت $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)$ را پیدا کنید.

۲۰. حاصل عبارت زیر را پیدا کنید.

$$A=\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$$

۲۱. ثابت کنید برای هر $(n\in z)n\geqslant 0$ داریم،

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}]=[\sqrt{9n+8}]$$

۲۲. بازاء هرعدد صحیح ومثبت n نشان دهید.

$$[\sqrt{n}+\sqrt{n+1}]=[\sqrt{4n+1}]=[\sqrt{4n+2}]=[\sqrt{4n+3}]$$

۲۳. معادله $x^3-[x]=3$ را حل کنید.

۲۴. اگر $x>0$ و n عددی طبیعی باشد ثابت کنید.

$$\frac{x^n}{x^{3n}+2}\leqslant\frac{1}{3}$$

۲۵. اگر $x>1$ و n عددی طبیعی باشد ثابت کنید $x^{n-1}+\frac{n+1}{x}>n$

۲۶. معادله درجه دومی تشکیل دهید که بین ریشه‌های آن روابط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases}x'^3+x''^3=9\\ x'^2+x''^2=5\end{cases}$$

۲۷. تحقیق کنید که اگر ریشه‌های معادله $x^2+px-q=0$ دوعدد متوالی باشند آنگاه،

$$p^2-4q=1$$

۲۸. معادله زیر را حل کنید.

$$(x^۲+۲x+۲)^۴-۵(x^۲+۲x+۲)^۲x^۲+۴x^۴=۰$$

۲۹. اگر درمعادله $x^۲+ax+b=۰$ یک‌ریشه مجذور ریشه دیگر باشد ثابت کنید:

$$a^۳+b^۳=b(۳a-۱)$$

۳۰. اگر $a\geqslant ۰$ و $b\geqslant ۰$ و $c\geqslant ۰$ ثابت‌کنید، $\frac{a+b+c}{۳}\leqslant\sqrt{\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۳}}$

تستهای مختلف

۱. هرگاه دریك تصاعد عددی d قدرنسبت و a_n و a_m جمله‌های n ام و m ام باشند کدام درست است.

الف- $a_{m+n}=a_m+a_n$ ب- $a_{m+n}=\frac{a_m+a_n}{۲}$

ج- $a_{m+n}=a_n+md$ د- $a_{m+n}=a_n-md$

۲. درتصاعد عددی $a_{r+1}=a_r+۲$ و $a_{۵۱}=۱۰۳$، دراین تصاعد $a_{۷۵}$ کدام است.

الف- ۱۵۱ ب- ۱۶۱

ج- ۱۴۸ د- ۱۵۸

۳. حاصل عبارت $\frac{x+y}{x^{\frac{۲}{۳}}-x^{\frac{۱}{۳}}y^{\frac{۱}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}}-\frac{x-y}{x^{\frac{۲}{۳}}+x^{\frac{۱}{۳}}y^{\frac{۱}{۳}}+y^{\frac{۲}{۳}}}$

الف- $-۲\sqrt[۳]{y}$ ب- $-۲\sqrt[۳]{x}$

ج- $۲\sqrt[۳]{y}$ د- $۲(\sqrt[۳]{x}-\sqrt[۳]{y})$

۴. حاصل عبارت $\frac{x-۳۶x^{\frac{۱}{۳}}}{x^{\frac{۲}{۳}}-۶x^{\frac{۱}{۳}}}$ برابر است با ؟

الف $x^{\frac{۲}{۳}}-۶$ ب- $x^{\frac{۲}{۳}}+۶$

ج- $\sqrt[۳]{x}+۶$ د- $\sqrt[۳]{x}-۶$

۵. اگر $\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^{۲}}=۱$ آنگاه $A=x-\frac{۱}{x}$ برابر کدام است.

الف- ۴   ب- ۴-

ج- ۲   د- ۳-

۶. معادله $\sqrt[۳]{x+۱}+\sqrt[۳]{x+۲}+\sqrt[۳]{x+۳}=۰$ چند ریشه دارد.

الف- ۰   ب- ۱

ج- ۲   د- ۳

۷. معادله $\sqrt{۵x-۱}+\sqrt{x-۱}=۲$ چند ریشه دارد.

الف- هیچ   ب- ۱

ج- ۲   د- ۳

۸. حاصل $\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\ldots}}}}$ کدام است؟

$a\,b>۰$ و تعداد رادیکال‌ها نامتناهی است.

الف- $a\sqrt{b}$ ب- $\sqrt[۳]{ab}$

ج- $\sqrt[۳]{a^{۲}b}$ د- $\sqrt[۳]{a^{۲}b}$

۹. حاصل $\underbrace{\sqrt{|x|\sqrt{|x|\sqrt{\ldots|x|\sqrt{x^{۲}}}}}}_{n\ \text{مرتبه}}$ برابر است با.

الف- x ب- $n|x|$

ج- $|x|$ د- nx^{n}

۱۰. اگر n بر k بخش‌پذیر نباشد $\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-۱}{k}\right]$ برابر است با. $(n,K\in N)$

الف- ۱   ب- صفر

ج- ۱-   د- $-\frac{۱}{k}$

۱۱- اگر a و b اعداد گویا و معادله $x^{۲}+ax+b=۰$ دارای ریشه مضاعف باشد در معادله $x^{۲}+ax+b-۲=۰$ کدام درست است.

الف- دارای ریشه مضاعف است. ب- دارای دو ریشه اصم است.

ج- دو ریشه گویا دارد. د- دارای ریشه حقیقی نیست

۱۲- هرگاه عبارت $x^۴+ax^۳+bx^۲+cx+d$ بر $(x+۱)^۴$ بخش‌پذیر باشد a برابر است با. (کنکور فنی ۶۸)

الف- ۴ ب- ۳-

ج- ۲- د- ۲

۱۳. در دستگاه $\begin{cases} x+y=۵ \\ y+z=۳ \\ z+x=۴ \end{cases}$ حاصل عبارت $x+۲y+۳z$ کدام است؟

الف- ۷ ب- ۸ ج- ۹ د- ۱۰

۱۴. به ازای کدام مقادیر m دستگاه $\begin{cases} x+۲y=۵ \\ x+y=m^۲+m+۱ \\ ۲x+y=۴ \end{cases}$ دارای جواب است؟

(کنکور فنی ۶۵)

الف- ۴ - و۳ ب- ۳ - و۴

ج- ۱ و۲ - د- ۲ و۱ -

۱۵. حاصلضرب دوعدد فرد متوالی ۳۲۳ است مجموع این دوعدد کدام است؟

(کنکور تجربی ۶۳)

الف- ۳۲ ب- ۳۴ ج- ۳۵ د- ۳۶

۱۶- مجموع سه‌عدد زوج متوالی همواره برکدام عدد بخش‌پذیر است؟

(کنکور تجربی ۶۴)

الف- ۴ ب- ۶ ج- ۸ د- ۱۰

۱۷. حاصلضرب سه‌عدد متوالی همواره برکدام عدد بخش‌پذیر است.

الف- ۱۲ ب- ۱۰ ج- ۶ د- ۴

۱۸. مجموعه جواب‌های نامعادله $|x|(x^۲-۳x+۲)\geqslant ۰$ کدام است.

(کنکور تجربی ۶۵)

الف- [۲ و ۱]　　　ب- $\{0\}\cup$[۲ و ۱]

ج- [−۲ و −۱]　　　د- $\{0\}\cup$[−۲ و −۱]

۱۹. معادله $x^3-3x+1=0$ دارای چند جواب است؟

الف- ۰　　　ب- ۱　　　ج- ۲　　　د- ۳

(کنکور تجربی ۶۶)

۲۰. اگر $\log 3 = 0/477$، آنگاه 3^{40} چند رقمی است.

الف- ۱۸　　　ب- ۱۹　　　ج- ۲۰　　　د- ۲۱

۲۱. اگر باقیمانده $f(x)$ بر $x-1$ صفر باشد در این صورت $f(x^2)$ بر کدام عبارت بخش پذیر است.

الف- $(x-1)^2$　　　ب- $(x+1)^2$

ج- x^2-1　　　د- x^2+1

۲۲. اگر $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ باشد آنگاه حاصل عبارت $A=\dfrac{x^{100}+x^{-100}}{2x^{20}-x^{-5}}$ کدام است.

الف- صفر　　　ب- ۱　　　ج- ۲　　　د- 2^{100}

۲۳. اگر $x+y+z=3$ و $S=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ آنگاه مینیمم S کدام است،

الف- ۳　　　ب- ۹　　　ج- ۲　　　د- ۱۲

۲۴. اگر معادله درجه سوم $ax^3+bx^2+cx+d=0$ دارای سه ریشه حقیقی باشد کدام درست است.

الف- $ad \geqslant bc$　　　ب- $bc \leqslant 9ad$

ج- $bc \geqslant 9ad$　　　د- $bd \geqslant 9ac$

۲۵. حاصل $S=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\cdots}}}$ $(a>0)$ کدام است.

الف- $\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$　　　ب- $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

ج- $\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}$　　　د- $\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$

۲۶. کدام درست است.

الف- $\sqrt{2}>\sqrt[3]{3}$ ب- $\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4}$

ج- $\sqrt[10]{10}<1$ د- $\sqrt[3]{5}>\sqrt{5}$

۲۷- تعداد جملات بسط $[(2x-3y)^2(2x+3y)^2]^2$ برابر است با؟

الف- ۴ ب- ۵ ج- ۶ د- ۸

۲۸. معادله $x+\sqrt{x-2}=4$ وقتی می‌تواند ریشه داشته باشد که:

الف- $x\geqslant 2$ ب- این معادله هیچ‌گاه ریشه ندارد

ج- $2\leqslant x\leqslant 4$ د- این معادله همواره دو ریشه دارد

۲۹. اگر $\log_2 m=b-\log_2 n$ آنگاه کدام درست است؟

الف- m و b و n تشکیل تصاعد عددی می‌دهند ب- $mn=b^{10}$

ج- m و b و n تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند د- $m+n=b^2$

۳۰. حاصل $\frac{a^2-b^2}{ab}-\frac{ab-b^2}{ab-a^2}$ برابر است با؟

الف- $\frac{a^2-2b^2}{ab}$ ب- $\frac{a}{b}$

ج- $a-2b$ د- $\frac{b}{a}$

۳۱. بازاء کدام مقدار t مجموع مربعات ریشه‌های معادله $x^2-(t-2)x+t^2-1=0$ ماکزیمم است.

الف- ۱ ب- ۰ ج- ۱− د- ۲−

۳۲. به ازای کدام مقدار m تفاضل ریشه‌های معادله $x^2+x+m=0$ مساوی ۲ است.

الف- $\frac{3}{4}$ ب- $-\frac{3}{4}$

ج- $\frac{4}{3}$ د- $-\frac{4}{3}$

۳۳. اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2+3x-4m+8=0$ باشد به ازای چه مقادیر m نقطه $A(\alpha \text{ و } \beta)$ درناحیه دوم یا چهارم قرارمی‌گیرد.

الف- $m<2$ ب- $m>2$ ج- $m=2$ د- $m\neq 2$

۳۴. درمعادله $x^2+25|x|-270=0$ کدام درست است؟

الف‌ـ معادله۴ ریشه دارد　　　ب‌ـ مجموع ریشه‌ها ۲۵ — است

ج‌ـ حاصلضرب ریشه‌ها ۲۷۰ — است　　　د ـ حاصل‌جمع ریشه‌ها صفراست

۳۵. اگرمعادله $ax^2+b|x|+c=0$ دارای چهار ریشه حقیقی باشد حاصلضرب ریشه‌ها برابر است با؟

الف‌ـ $\frac{c}{a}$　　　ب‌ـ $-\frac{c^2}{a^2}$

ج‌ـ $\left|\frac{c}{a}\right|$　　　د ـ $\frac{c^2}{a^2}$

۳۶. بازاء چه مقادیر a معادله $x^2-2x+\log_{\frac{1}{2}} a=0$ دارای ریشه‌های حقیقی است؟

الف‌ـ $a\leqslant\frac{1}{2}$　　　ب‌ـ $a\geqslant\frac{1}{2}$

ج‌ـ $a\geqslant 1$　　　د ـ $a\leqslant 1$

۳۷. کدام همواره درست است؟

الف $\sqrt{101}+\sqrt{99}>20$　　　ب‌ـ $\sqrt{101}+\sqrt{99}<20$

ج‌ـ $\sqrt{101}+\sqrt{99}>21$　　　د ـ $\sqrt{101}+\sqrt{99}<21$

۳۸. اگر $x+2y+2z=3$ باشد مینیمم $S=x^2+y^2+z^2$ کدام است؟

الف‌ـ ۳　　　ب‌ـ ۹　　　ج‌ـ ۶　　　د ـ ۱

۳۹. جواب نامعادله $\frac{1}{x+2}<\frac{1}{4}$ کدام است؟

الف‌ـ $x>2$　　　ب‌ـ $x<-2$　　　ج‌ـ $|x|<2$　　　د ـ $|x|>2$

۴۰. جواب نامعادله $\frac{1}{x^2-9}>-\frac{1}{5}$ کدام است؟

الف‌ـ $|x|<2$　　　ب‌ـ $|x|>2$ و $x\neq\pm 3$

ج‌ـ $|x|<2$ یا $|x|>3$　　　د ـ $|x|>3$

۴۱. دربسط عبارت $(x-25)\dots(x-5)(x-3)(1-x)$ ضریب x^{12} برابراست با؟

الف‌ـ ۳۲۵　　　ب‌ـ ۱۶۹　　　ج‌ـ ۱۶۹ —　　　د ـ ۲۶۵ —

۴۲. اگر $x>0$ و $y>0$ و $x>y$ و $z\neq 0$ کدام همواره درست نیست؟

الف- $x-z>y-z$ ب- $xz>yz$

ج- $xz^{2}>yz^{2}$ د- $\frac{x^{2}}{z^{2}}>\frac{y^{2}}{z^{2}}$

۴۳. بازاء چه مقدار m معادله $\frac{x(x-1)-(m+1)}{(x-1)(m-1)}=\frac{x}{m}$ ریشه مضاعف دارد؟

الف- $m=-\frac{1}{2}$ ب- $m=\frac{1}{2}$

ج- $m=-1$ د- $m=1$

۴۴. اگر $a^{x}=b^{y}$ و $b^{z}=a^{t}$ آنگاه کدام همواره درست است؟

الف- $xt=yz$ ب- $xz=yt$

ج- $zt=xy$ د- $x+z=y+t$

۴۵. حد مجموع جمله‌ها در یك تصاعد هندسی نزولی ۶ ومجموع جمله‌های اول و دوم ۴/۵ است جمله اول کدام است؟

الف- ۳ یا ۹ ب- $\frac{1}{2}$ یا $-\frac{1}{2}$

ج- ۳- یا ۹- د- ۳ یا ۳-

۴۶. بازاء چه‌مقدار m معادله $\frac{x^{2}-bx}{ax-c}=\frac{m-1}{m+1}$ دو ریشه‌قرینه دارد؟

الف- $\frac{a+b}{a-b}$ ب- $\frac{a-b}{a+b}$

ج- c د- $a^{2}-b^{2}$

۴۷. درمعادله $x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}=16$ (تعداد xها نامتناهی‌است) x برابراست با؟

الف- بی‌شمار ریشه دارد ب- $\sqrt[4]{2}$

ج- $\sqrt[8]{2}$ د- $\sqrt{2}$

۴۸. اگر $x+y+z=16$ و $2 \cdot 4^{x}=2^{z}$ و $z^{x}=y^{2x}$ مقدار صحیح y کدام است؟

الف- ۳ ب- ۴

ج- ۹   د- ۵-

۴۹. اگر $y=x+\frac{1}{x}$ و $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$ آنگاه y برابر است با؟

الف- ۳ و ۲-   ب- ۳- و ۲

ج- ۳ و ۲   د- ۶- و ۱

۵۰. معادله $|4x-1|+|x-2|=5$ چند ریشه دارد؟

الف- هیچ   ب- بی‌شمار   ج- دو ریشه   د- یک ریشه

۵۱. جواب معادله $\frac{x}{2+\frac{x}{2+\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}}}=1$ کدام است؟

الف- ۳   ب- ۲   ج- ۱   د- ۱-

۵۲. بین سه عدد مخالف صفر a و b و c رابطه $(a^2+b^2)(b^2+c^2)=(ab+bc)^2$ برقرار است کدام درست است؟

الف- a و b و c تشکیل تصاعد عددی می‌دهند

ب- a و b و c تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند

ج- a و b و c تشکیل تصاعد توافقی می‌دهند

د- $b^2=a^2c^2$

۵۳. جواب نامعادله $|3x-6|+|x-1|>1$ کدام است؟

الف- هر x حقیقی   ب- $R-\{1, 2\}$

ج- $R-\{+2\}$ د- $1<x<2$

۵۴. برای حل معادله $x^2+bx+c=0$ دانش‌آموزی فقط با اشتباه در ضریب ثابت یعنی c جوابهای ۲ و ۸ را پیداکرده و دانش‌آموزی فقط با اشتباه در ضریب x یعنی b جوابها را ۱- و ۹- پیداکرده است، صورت صحیح معادله کدام است؟

الف- $x^2-8x+9=0$ ب- $x^2-10x+16=0$

ج- $x^2+10x+9=0$ د- $x^2-10x+9=0$

۵۵. معادله $\frac{2x^2}{x-1}-\frac{2x+7}{3}+\frac{4-6x}{x-1}+1=0$ چند ریشه دارد؟

الف- هیچ　　ب- ۱　　ج- ۲　　د- ۳

۵۶. اگر $x^2-4x+1=0$ و $A=\sqrt{1+\left(\frac{x^4-1}{2x^2}\right)^2}$ آنگاه A برابر است با؟

الف- ۷　　ب- ۱۴　　ج- ۸　　د- ۸-

۵۷. ریشه‌های معادله $2\sqrt{x}+2x^{-\frac{1}{2}}=5$ را ازحل کدام یك ازمعادلات زیرمی‌توان پیدا کرد؟

الف- $4x^2-25x-4=0$　　ب- $4x^2-25x+4=0$

ج- $4x^2-17x+4=0$　　د- $2x^2-21x+2=0$

۵۸. معادله $x^2-4x+3|x-2|+4=0$ چند ریشه است؟

الف- ۰　　ب- ۱　　ج- ۲　　د- ۳

۵۹. اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^3+kx^2+4=0$ باشند بازاء چه مقدار k بین ریشه‌ها رابطه $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\gamma$ برقرار است؟

الف- ۳ و ۵　　ب- ۳ و ۵-

ج- ۳- و ۵-　　د- ۳- و ۵

۶۰. اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $x^3-5x+1=0$ باشند معادله درجه سومی که ریشه‌هایش $\alpha\beta$ و $\beta\gamma$ و $\alpha\gamma$ باشد کدام است؟

الف- $x^3+5x^2-1=0$　　ب- $x^3-5x^2+1=0$

ج- $x^3-5x+1=0$　　د- $x^3-5x-1=0$

۶۱. هرگاه دریك تصاعد هندسی با تعداد جملات زوج مجموع همه جمله‌های با اندیس فرد (ردیف فرد) برابر s وقدرنسبت برابر r باشد مجموع جمله‌ها برابراست با؟

الف- $2s$　　ب- rs^2

ج- $s(1+r)$　　د- $\frac{s(1+r)}{r}$

۶۲. دریك تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ تعداد جملات زوج ومجموع جمله‌های بااندیس زوج ۸۵ است مجموع جملات برابر است با؟

الف– ۲۵۵ ب– ۲۵۲ ج– ۱۷۰ د– ۱۲۷/۵

۶۳. حاصل $\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۵}+۱}}+\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{\sqrt{۵}-۱}}$ کدام است؟

الف– $\sqrt{۲}$ ب– ۲ ج– ۱ د– $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۶۴. حاصل $\frac{a}{۱+\sqrt[n]{\sqrt{a}-\sqrt{a-۱}}}+\frac{a}{۱+\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{a-۱}}}$ برابر است با؟

الف– a ب– $\sqrt{a}$ ج– ۱ د– $۱-\sqrt{a}$

۶۵. درمعادله $a(b-c)x^۲+b(c-a)x+c(a-b)=۰$ یك ریشه برابراست با؟

الف– $\frac{b(c-a)}{a(b-c)}$ ب– $\frac{c(a-b)}{a(c-b)}$

ج– $-\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$ د– $\frac{c(b-a)}{a(c-b)}$

۶۶. اگر $\frac{m}{n}=\frac{۴}{۳}$ و $\frac{p}{q}=\frac{۹}{۱۴}$ مقدار $\frac{۳mp-nq}{۴nq-۷mp}$ برابر است با؟

الف– $\frac{۱۱}{۱۴}$ ب– $\frac{-۱۱}{۱۴}$ ج– $-\frac{۲}{۳}$ د– $\frac{۲}{۳}$

۶۷. اگر $\log ۲=۰/۳$ و $\log ۳=۰/۵$ آنگاه مقدار x ازمعادلـه $۳^{x+۳}=۱۳۵$ بـا تقریب برابر است با؟

الف– $\frac{۳}{۵}$ ب– $\frac{۷}{۵}$

ج– $\frac{۱۳}{۵}$ د– $\frac{۵}{۳}$

۶۸. مجموعه جواب نامعادله $۳^{[\log_{\frac{۱}{۲}} x]}=\frac{۱}{۹}$ کدام است؟

الف $\{+۴ و +۲\}$ ب– $[۴ و ۲)$

ج– $[-۲ و -۱)$ د– $(۴ و ۲]$

۷۵. جواب معادله $[x+۳]+[-x+۲]+[x-۲]=۳$ کدام فاصله است؟

الف- $[0 ، 2)$ ب- $\{0\} \cup [1 ، 2)$

ج- $\{0\} \cup (1 ، 2)$ د- $(0 ، 1)$

۷۱. اگر $x^3+y^3=2$ آنگاه ماکزیمم $A=x+y$ برابراست با؟

الف- ۸ ب- $\sqrt[3]{2}$ ج- ۲ د- $\frac{1}{8}$

۷۲. اگر $x+y=\sqrt[3]{4}$ مینیمم $S=x^6+y^6$ برابر است با؟

الف- ۲ ب- $\frac{1}{2}$ ج- ۴ د- $\frac{1}{4}$

۷۳. اگر درمعادله $ax^2+bx+c=0$ یك ریشه برابر مجذورعکس ریشه‌دیگر باشد، a^3+c^3 برابراست با؟

الف- abc ب- $-abc$

ج- صفر د- $\frac{-1}{abc}$

۷۴. درمثلث ABC به اضلاع a و b و c اگر $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ و p محیط باشد کدام درست است.

الف- $A \geqslant 9p$ ب- $A \geqslant \frac{9}{p}$

ج- $A \leqslant \frac{9}{p}$ د- $A \leqslant 3p$

۷۵. اگرمعادله $ax^2+2bx+c=0$ ریشه مضاعف داشته باشد کدام درست است؟

الف- a و b و c به تصاعد عددی می‌باشند

ب- a و b و c تشکیل تصاعد هندسی می‌دهند

ج- a و b و c تصاعد توافقی تشکیل می‌دهند

د- هرسه مساویند

۷۶. هرگاه $b \neq d$ و $\frac{ax+b}{cx+d} \neq \frac{b}{d}$ کدام درست است؟

الف- $a=c=1$ و $x \neq 0$ ب- $ad=bc$

ج- $x=0$ د- $a=c=0$

۷۷. معادله $\frac{۱۵}{x^{۲}-۴}-\frac{۲}{x-۲}=۱$ چند ریشه دارد؟

الف- هیچ　　ب- ۱　　ج- ۲　　د- ۳

۷۸. اگر $\frac{b}{۲x-۳}+\frac{a}{x+۲}=\frac{۵x-۱۱}{۲x^{۲}+x-۶}$ آنگاه $a+b$ برابراست با؟

الف- ۲　　ب- ۲-　　ج- ۴　　د- ۳

۷۹. اگر $۱۰^{۲x}=۲۵$ آنگاه، $۱۰^{-\frac{x}{۲}}$ برابراست با؟

الف- $\sqrt{۵}$　　ب- $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

ج- $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$　　د- $\pm\frac{\sqrt{۵}}{۵}$

۸۰. اگر $\sqrt{x+۱}-\sqrt{x-۱}=-۱$، $۴x$ برابر است با؟

الف- $\frac{۵}{۴}$　　ب- ۵　　ج- غیرحقیقی است　　د- $\frac{۵}{۲}$

۸۱. در بسط عبارت، $f(x)=(x+۱)^{۱۹}+x(x+۱)^{۱۸}+x^{۲}(x+۱)^{۱۷}+...+x^{۱۹}$
ضریب $x^{۱۸}$ برابراست با؟

الف- ۱۹۰　　ب- ۱۹　　ج ب ۱۸۹　　د- ۲۰۰

۸۲. اگر $۹^{۲+x}=۲۴۰+۹^{x}$ آنگاه x برابراست با؟

الف- $\frac{۱}{۴}$　　ب- ۲　　ج- $\frac{۱}{۲}$　　د- $-\frac{۱}{۲}$

۸۳. بازاء چه مقدار a دستگاه $\begin{cases} ax+(a-۱)y=۱ \\ (a+۱)x-ay=۱ \end{cases}$ جواب ندارد.

الف- $a\pm۱$　　ب- $a=\pm\sqrt{۲}$

ج- $a=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$　　د- $a=۰$ و $a=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۸۴. بازاء چند مقدار a معادله $(x-a)(x^{۴}-۵x^{۲}+۴)=۰$ دارای ریشه مضاعف است؟

الف- هیچ　　ب- ۱　　ج- ۲　　د- ۴

۸۵. بازاء چه مقدار m عبارت $\sqrt{(۴-m)x^{۲}-۲x+m+۴}$ همواره دارای معنی

است؟

الف- $m<4$ ب- $|m|\leqslant\sqrt{15}$

ج- $|m|\geqslant\sqrt{15}$ د- $\sqrt{15}\leqslant m<4$

۸۶. بازاء چه مقدار m معادله $(m-8)x^2-4mx+4m-5=0$ دارای دو ریشه عکس هم می‌باشد؟

الف- ۱ ب- ۱− ج- $\frac{13}{3}$ د- $\frac{3}{5}$

۸۷. جواب نامعاله $\log x\geqslant\log 2+\frac{1}{2}\log x$ کدام است؟

الف- $x>4$ ب- $x\geqslant 4$

ج- $0<x\leqslant 4$ د- $4\leqslant x\leqslant 8$

۸۸. اگر $b=xy$ و $a=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}$ آنگاه $(x+y)^2$ برابر است با؟

الف- $(a+2b)^2$ ب- $ab^2(b+2)$

ج- $ab(b+2)$ د- $b(ab+2)$

۸۹. اگر یکی از ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ دوبرابر ریشه دیگر باشد کدام درست است؟

الف- $9b^2=2ac$ ب- $b^2=4ac$

ج- $2b^2=9a$ د- $2b^2=9ac$

۹۰. اگر هر یك از ریشه‌های معادله $x^2+px+q=0$ مجذور هر یك از ریشه‌های معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد p برحسب a و b و c برابر است با؟

الف- b^2-2ac ب- $\frac{b^2-4ac}{a^2}$

ج- $\frac{b^2-2ac}{a^2}$ د- $\frac{2ac-b^2}{a^2}$

۹۱. تعداد جملات بسط $(a+b+c)^{10}$ برابر است با؟

الف- ۶۶ ب- ۱۳۲ ج- ۳۳ د- ۱۱

۹۲. ساده شده کسر $\frac{x^2-5x+4}{x^2-7x+12}\div\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$ برابر است با؟

الف- $\frac{x+1}{x-1}$ ب- ۱

ج- ۲   د- $\frac{x+3}{x-3}$

۹۳. واسطه حسابی بین n عدد طبیعی متوالی شروع ازیك برابراست با؟

الف- ۱   ب- n ج- $\frac{n+1}{2}$ د- $\frac{n}{2}$

۹۴. اگر $\lg_3 x\cdot\log_x 2x\cdot\log_{2x}y=\log_x x^2$ ، y برابراست با؟

الف- ۱۸   ب- ۹   ج ۶   د - ۸

۹۵. هرگاه در معادله $x^2-3kx+2k^2-1=0$ حاصلضرب ریشه‌ها برابر ۷ باشد ریشه‌های معادله چگونه‌اند؟

الف- ریشه‌ها گویا می‌باشند   ب- ریشه‌ها اصم هستند

ج- ریشه‌های معادله صحیح هستند   د - ریشه‌ها همگی اصم ومثبت می‌باشند

۹۶. حاصل $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$ برابر است با؟

الف- $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ب- صفر

ج- $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{2}}{2}$ د - $\frac{\sqrt{7}+2}{2}$

۹۷. هرگاه a و b و c اعداد حقیقی و $abc>0$ و $ab+bc+ac>0$ و $a+b+c>0$ آنگاه درمورد a و b و c کدام همواره درست است؟

الف- دوتا منفی ویکی مثبت است   ب- همگی مثبت‌اند

ج- بعضی مثبت و بعضی منفی‌اند   د - همگی مثبت یا صفرند

۹۸. جواب معادله $\frac{x-[x]}{x+[x]}=0$ کدام است؟

الف- تمام اعداد حقیقی   ب- Z (اعداد صحیح)

ج- $Z-\{0\}$ د - N (اعداد طبیعی)

۹۹. اگر α و β و γ ریشه‌های معادله $px^3-px^2+qx+q=0$ باشند حاصل $(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)$ برابراست با؟

الف- pq ب- ۱- ج- ۱ د- $\frac{p^۲}{q^۲}$

۱۰۰. درمعادله $x^۲+px-\frac{۱}{۲p^۲}=۰$ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های آن باشند مینیمم $A=x_۱^۴+x_۲^۴$ برابر است با؟

الف- $۲-\sqrt{۲}$ ب- $۲+\sqrt{۲}$

ج- $۲\sqrt{۲}$ د- $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۲}$

فصل هشتم

حل مسائل و پاسخ تشریحی تستها

۱. حل‌مسائل فصل اول

اتحادها و رادیکالها

۱. باضرب و به توان‌رساندن به سادگی بدست می‌آید.

۲. بنابه فرمول رادیکالهای مرکب یا اتحادهای اول داریم:

$$\sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}} \text{ و } \sqrt{۲+\sqrt{۳}}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}-\sqrt{\frac{۲}{۱}}$$

$$\frac{۲+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}=\frac{\left(\sqrt{\frac{۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}\right)^{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{\frac{۳}{۲}}+\sqrt{\frac{۱}{۲}}}=$$

$$\frac{(۱+\sqrt{۳})^{۲}\sqrt{۲}}{۲(۳+\sqrt{۳})}=\frac{(۱+\sqrt{۳})^{۲}\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۳}(۱+\sqrt{۳})}=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۶}$$

به همین‌ترتیب؛

$$\frac{۲-\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}=\frac{\sqrt{۳}-۱}{۶}$$

بنابراین داریم:

$$\left(\frac{۱+\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}}+\frac{\sqrt{۳}-۱}{\sqrt{۶}}\right)^{۲}=\left(\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۶}}\right)^{۲}=۲$$

۳. فرض می‌کنیم $K=\sqrt[۳]{ax^{۲}+by^{۲}+cz^{۲}}$ درنتیجه.

$$K=\sqrt[3]{\frac{ax^3}{x}+\frac{by^3}{y}+\frac{cz^3}{z}}=\sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}=x\sqrt[3]{a}$$

به‌همین ترتیب $K=y\sqrt[3]{b}$ و $K=z\sqrt[3]{c}$ بنابراین

$$\frac{K}{x}+\frac{K}{y}+\frac{K}{z}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c} \implies K\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

$$\implies K=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$$

۴. اگر $y=x$ قرار دهیم عبارت برابر صفر می‌شود پس در عبارت عامل $(y-x)$ وجود دارد و چون نسبت به حروف متقارن است پس عبارت بر $(x-y)\,(y-z)\,(z-x)$ بخش‌پذیر است و در نتیجه خارج قسمت چندجمله‌ای از درجهٔ دوم و متقارن است یعنی؛

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=$$
$$(x-y)(y-z)(z-x)\,[A(x^2+y^2+z^2)+B(xy+xz+yz)]$$

ضریب x^4، در دوطرف تساوی به ترتیب $+5(y-z)$ و $A(y-z)$ است یعنی $A=+5$ و با قرار دادن سه‌عدد دلخواه مثلاً $x=2$ و $y=1$ و $z=0$ نتیجه می‌شود $B=-5$ و بنابراین چندجمله‌ای به‌صورت زیر تجزیه می‌شود

$$(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5=$$
$$5(x-y)(y-z)(z-x)(x^2+y^2+z^2-xy-xy-yz)$$

۵. $$\left(\frac{(a-1)(a-5)}{(a-2)(a-5)}-\frac{(a-4)(a-2)}{(a-1)(a-4)}\right)\times(a-1)(a-2)=$$

$$\left(\frac{a-1}{a-2}-\frac{a-2}{a-1}\right)(a-1)(a-2)=((a-1)^2-(a-2)^2)=2a-3$$

۶. بنا به اتحاد: $$x+y+z=0 \implies x^3+y^3+z^3=3xyz$$

$$\frac{3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{3(a-b)(b-c)(c-a)}=(a+b)(b+c)(c+a)$$

۷.

$$\left(\sqrt[6]{\frac{(x^2+1)^3}{x^2}}+\sqrt[6]{\frac{(x^2-1)^3}{x^2}}\right)^{-2}=\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x}}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt[3]{x}}\right)^{-2}$$

$$=(\frac{\sqrt{x^۲+۱}+\sqrt{x^۲-۱}}{\sqrt[۳]{x}})^{-۲}=\frac{\sqrt[۳]{x^۲}}{(\sqrt{x^۲+۱}+\sqrt{x^۲-۱})^۲}=$$

$$\frac{\sqrt[۳]{x^۲}(\sqrt{x^۲+۱}-\sqrt{x^۲-۱})^۲}{۴}=\frac{\sqrt[۳]{x^۲}(x^۲-\sqrt{x^۴-۱})}{۲}$$

a) $\frac{\sqrt[۳]{۱۵^۲}+\sqrt[۳]{۱۵\times۷}+\sqrt[۳]{۷^۲}}{۱۵-۷}=\frac{\sqrt[۳]{۲۲۵}-\sqrt[۳]{۱۰۵}+\sqrt[۳]{۴۹}}{۸}$ ۸.

c) $\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۳}}}{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۳}}=\frac{\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۳}}}{\sqrt[۶]{۸}+\sqrt[۶]{۹}}=\frac{\sqrt{\sqrt{۳}+\sqrt[۳]{۲}}(\sqrt[۶]{۸}-\sqrt[۶]{۹})}{\sqrt[۳]{۸}+\sqrt[۳]{۹}}$

$$=-\sqrt{\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۳}}(\sqrt{۲}-\sqrt[۳]{۳})(۴+۲\sqrt[۳]{۹}+۳\sqrt[۳]{۳})$$

d) $\sqrt{\frac{(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})^۲}{۲}}=\frac{\sqrt{۵}+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۵}+\sqrt{۳})}{۲}$

f) $\frac{۱}{(\sqrt{۲۱}+\sqrt{۱۰})+(\sqrt{۱۵}+\sqrt{۱۴})}=\frac{\sqrt{۲۱}+\sqrt{۱۰}-\sqrt{۱۵}-\sqrt{۱۴}}{۳۱+۲\sqrt{۲۱۰}-۲۹-۲\sqrt{۲۱۰}}$

$$=\frac{\sqrt{۲۱}+\sqrt{۱۰}-\sqrt{۱۵}-\sqrt{۱۴}}{۲}$$

$\frac{۲}{\sqrt[۳]{a}(\sqrt[۳]{a^۲}-۳\sqrt[۳]{a^{-۱}})}-\frac{\sqrt[۳]{a^۲}}{a\sqrt[۳]{a^۲}-\sqrt[۳]{a^۲}}-\frac{(a+۱)}{(a-۱)(a-۳)}=$ ۹.

$$\frac{۲}{a-۳}-\frac{۱}{a-۱}-\frac{a+۱}{(a-۱)(a-۳)}=۰$$

$\frac{(a-۱)(a+۳)+(a+۱)\sqrt{a-۳}\sqrt{a+۳}}{(a+۱)(a-۳)+(a-۱)\sqrt{a-۳}\sqrt{a+۳}}=$ $(a>۳)$ ۱۰.

$$\frac{\sqrt{a+۳}[(a-۱)\sqrt{a+۳}+(a+۱)\sqrt{a-۳}]}{\sqrt{a-۳}[(a+۱)\sqrt{a-۳}+(a-۱)\sqrt{a+۳}]}=\frac{\sqrt{a+۳}}{\sqrt{a-۳}}$$

۱۱. $(۱-\frac{۱}{۳})A=(۱-\frac{۱}{۳^۲})(۱+\frac{۱}{۳^۲})(۱+\frac{۱}{۳^۴})\cdots(۱+\frac{۱}{۳^{۲^n}})$

$$=(۱-\frac{۱}{۳^۴})(۱+\frac{۱}{۳^۴})\cdots(۱+\frac{۱}{۳^{۲^n}})=\cdots$$

$$=۱-\frac{۱}{۳^{۲^{n+۱}}}\Longrightarrow A=\frac{۳}{۲}(۱-\frac{۱}{۳^{۲^{n+۱}}})$$

۱۲. روش اول :

$$a^{۱۰}+a^۵+۱=(a^{۱۰}+a^۹+a^۸)-(a^۹+a^۸+a^۷)+$$
$$(a^۷+a^۶+a^۵)-(a^۶+a^۵+a^۴)+(a^۵+a^۴+a^۳)-(a^۳+a^۲+a)$$
$$+(a^۲+a+۱)=$$
$$a^۸(a^۲+a+۱)-a^۷(a^۲+a+۱)+a^۵(a^۲+a+۱)-a^۴(a^۲+a+۱)+$$
$$a^۳(a^۲+a+۱)-a(a^۲+a+۱)+(a^۲+a+۱)=$$
$$(a^۲+a+۱)(a^۸-a^۷+a^۵-a^۴+a^۳-a+۱)$$

روش دوم: $a^{۱۰}+a^۵+۱=\frac{(a^۵)^۳-۱}{a^۵-۱}=\frac{a^{۱۵}-۱}{a^۵-۱}=$

$$\frac{(a^۳)^۵-۱}{(a-۱)(a^۴+a^۳+a^۲+a+۱)}=\frac{(a^۳-۱)(a^{۱۲}+a^۹+a^۶+a^۳+۱)}{(a-۱)(a^۴+a^۳+a^۲+a+۱)}$$

$$=\frac{(a^۲+a+۱)(a^{۱۲}+a^۹+a^۶+a^۳+۱)}{a^۴+a^۳+a^۲+a+۱}$$

که اگر پرانتز دوم صورت‌را برمخرج تقسیم کنیم حاصل برابراست با:

$$a^۸-a^۷+a^۵-a^۴+a^۳-a+۱$$

۱۳. روش اول: عبارت‌طرف اول‌را برابر A فرض کرده طرفین‌را به توان ۳ می‌رسانیم

$$A^۳=۵\sqrt{۲}+۷-۳\sqrt[۳]{(۵\sqrt{۲}+۷)^۲(۵\sqrt{۲}-۷)}+$$
$$۳\sqrt[۳]{(۵\sqrt{۲}-۷)^۲(۵\sqrt{۲}+۷)}-۵\sqrt{۲}+۷$$
$$=۱۴-۳\sqrt[۳]{۵\sqrt{۲}+۷}+۳\sqrt[۳]{۵\sqrt{۲}-۷}=۱۴-۳A\quad\Longrightarrow$$

$$A^{۳}+۳A-۱۴=۰ \Longrightarrow A^{۳}-۸+۳(A-۲)=۰ \Longrightarrow$$
$$(A-۲)(A^{۲}+۴+۲A+۳)=۰ \Longrightarrow$$
$$(A-۲)(A^{۲}+۲A+۷)=۰ \Longrightarrow A=۲$$

روش دوم: $۵\sqrt{۲}+۷=(\sqrt{۲}+۱)^{۳}$ و $۵\sqrt{۲}-۷=(\sqrt{۲}-۱)^{۳}$

$$\Longrightarrow A=\sqrt{۲}+۱-\sqrt{۲}+۱=۲$$

تذکر: هر توانی از $\sqrt{۲}-۱$ را می‌توان به صورت $\sqrt{N}-\sqrt{N-۱}$ نوشت که N عددی صحیح و مثبت است مثلاً $(\sqrt{۲}-۱)^{۲}=\sqrt{۹}-\sqrt{۸}$ یا :

$$(\sqrt{۲}-۱)^{۳}=۵\sqrt{۲}-۷=\sqrt{۵۰}-\sqrt{۴۹}$$

۱۴. می‌دانیم $۲-\sqrt{۳}=\dfrac{۱}{۲+\sqrt{۳}}$ پس باید ثابت کنیم $\sqrt[۳]{۲۶+۱۵\sqrt{۳}}=۲+\sqrt{۳}$ که با به توان‌سه رساندن دوطرف نتیجه مطلوب حاصل می‌شود.

۱۵. $$\sqrt{۳+\sqrt{۵-\sqrt{۱۲+۱+۲\sqrt{۱۲}}}}=\sqrt{۳+\sqrt{۵-(\sqrt{۱۲}+۱)}}$$
$$=\sqrt{۳+\sqrt{۴-\sqrt{۱۲}}}=\sqrt{۳+\sqrt{۳+۱-۲\sqrt{۳}}}=\sqrt{۳+(\sqrt{۳}-۱)}=$$
$$\sqrt{۲+\sqrt{۳}}$$

۱۶. a) $$\frac{۵a^{۲}(a^{۲}+۱)-۳b(a^{۲}+۱)}{(a^{۲}+۱)(a^{۲}+۲)}=\frac{۵a^{۲}-۳b}{a^{۲}+۲}$$

b) $$\frac{۲a^{۴}+۳a^{۲}+۴a^{۲}+۶}{۳(a^{۴}+a^{۲}-۲)}=\frac{a^{۲}(۲a^{۲}+۳)+۲(۲a^{۲}+۳)}{۳(a^{۲}-۱)(a^{۲}+۲)}=$$
$$\frac{(۲a^{۲}+۳)(a^{۲}+۲)}{۳(a^{۲}-۱)(a^{۲}+۲)}=\frac{۲a^{۲}+۳}{۳a^{۲}-۳}$$

c) $$\frac{a^{۴}+a^{۲}b^{۲}+b^{۴}}{(a^{۲}-b^{۲})(a^{۴}+a^{۲}b^{۲}+b^{۴})}=\frac{۱}{a^{۲}-b^{۲}}$$

$$d)\quad \frac{(a^۲-۴)(a^۲+۳)}{(a^۲+۳)(a^۲+۵)}=\frac{a^۲-۴}{a^۲+۵}$$

$$e)\quad \frac{ab}{a^۲-b^۲}-\frac{b^۲}{a+b}+\frac{a^۲}{a-b}-ab-\frac{ab}{a^۲-b^۲}+\frac{a^۲}{a+b}-\frac{b^۲}{a-b}+ab$$

$$=\frac{a^۲}{a+b}-\frac{a^۲}{a-b}-\frac{b^۲}{a+b}-\frac{b^۲}{a-b}=\frac{-۲a^۲b}{a^۲-b^۲}-\frac{۲ab^۲}{a^۲-b^۲}$$

$$=\frac{-۲ab(a+b)}{a^۲-b^۲}=\frac{۲ab}{b-a}$$

۱۷. $a)\quad (m-n)(m^۲+mn+n^۲)x=m-n$

اگر $m-n=۰$ آنگاه معادله بی‌شمار جواب دارد فرض کنیم $m\neq n$ در این صورت $x=\frac{۱}{m^۲+mn+n^۲}$ ریشه معادله است.

$$b)\quad x^۲-(a+b)x+ab=x^۲+(a+b)^۲+۲(a+b)x \implies$$

$$۳(a+b)x=ab-(a+b)^۲ \implies x=\frac{ab-(a+b)^۲}{۳(a+b)}$$

به شرطی که $a\neq -b$

۱۸. $$a)\quad \frac{y^۲}{x^۳-y^۳}-\frac{x^۳y^۲}{(x^۳-y^۳)(x^۳+y^۳)}=\frac{y^۲(x^۳+y^۳)-x^۳y^۲}{(x^۳-y^۳)(x^۳+y^۳)}$$

$$=\frac{y^۵}{(x^۳-y^۳)(x^۳+y^۳)}$$

$$b)\quad (۱-x)^۲+\frac{۱-x^۴}{(۱+x)^۲}=\frac{[(۱-x)(۱+x)]^۲+۱-x^۴}{(۱+x)^۲}=$$

$$\frac{(۱-x^۲)^۲+(۱-x^۲)(۱+x^۲)}{(۱+x)^۲}=\frac{(۱-x^۲)(۱-x^۲+۱+x^۲)}{(۱+x)^۲}=$$

$$\frac{۲(۱-x)}{۱+x}$$

$$\frac{\dfrac{x^{۲}+y^{۲}-xy}{xy}}{\dfrac{x^{۲}+xy+y^{۲}}{y^{۲}}}\times\frac{\dfrac{x+y}{x}}{x-y}\times\frac{\dfrac{x^{۳}-y^{۳}}{xy}}{\dfrac{x^{۳}+y^{۳}}{x^{۲}}}=$$

$$\frac{y^{۲}(x^{۲}+y^{۲}-xy)}{xy(x^{۲}+y^{۲}+xy)}\times\frac{x+y}{x(x-y)}\times\frac{x^{۲}(x^{۳}-y^{۳})}{xy(x^{۳}+y^{۳})}=$$

$$\frac{y^{۲}(x^{۳}+y^{۳})}{x^{۲}y(x^{۳}-y^{۳})}\times\frac{x^{۲}(x^{۳}-y^{۳})}{y(x^{۳}+y^{۳})}=۱$$

$d)\ \dfrac{۵}{\left(\dfrac{x+y}{xy}\right)^{-۱}}=۵\,\dfrac{x+y}{xy}$

$e)\ \dfrac{۱-x^{۲}+۴+x^{۲}}{۱+x}\,(۱-x^{۲})=۵(۱-x)$

$\dfrac{-a}{bc}[b^{۲}+c^{۲}-(-b-c)^{۲}]-\dfrac{b}{ca}[c^{۲}+a^{۲}-(-a-c)^{۲}]$ ۱۹.

$-\dfrac{c}{ab}[a^{۲}+b^{۲}-(-a-b)^{۲}]=$

$-\dfrac{a}{bc}(-۲bc)-\dfrac{b}{ca}(-۲ac)-\dfrac{c}{ab}(-۲ab)=۲a+۲b+۲c=۰$

$۶b^{۲}(۴a^{۲}b-b^{۳})=۶b^{۳}(۲a-b)(۲a+b)$ ۲۰.

$۱۲a^{۲}b(۸a^{۳}-b^{۳})=۱۲a^{۲}b(۲a-b)(۴a^{۲}+b^{۲}+۲ab)$ و

$۸ab^{۳}(۲a^{۲}-ab)=۸a^{۲}b^{۳}(۲a-b)$ ؛ ب - م - م $=۲b(۲a-b)$

ک - م - م $=۲۴a^{۲}b^{۳}(۲a-b)(۲a+b)(۴a^{۲}+b^{۲}+۲ab)$

$a)\ x^{۳}+y^{۳}-x^{۲}y-xy^{۲}-x-y=$ ۲۱.

$(x+y)(x^{۲}+y^{۲}-xy)-xy(x+y)-(x+y)=$

$(x+y)(x^{۲}+y^{۲}-xy-xy-۱)=(x+y)[(x-y)^{۲}-۱]=$

$(x+y)(x-y+۱)(x-y-۱)$

$b)\ x^{۴}+۶۴=(x^{۲}+۸)^{۲}-۱۶x^{۲}=(x^{۲}+۸+۴x)(x^{۲}+۸-۴x)$

$c)\ a^{۲}+۸ab+۱۵b^{۲}=a^{۲}+۸ab+۱۶b^{۲}-b^{۲}=$

$(a+۴b)^{۲}-b^{۲}=(a+۴b+b)(a+۴b-b)=(a+۵b)(a+۳b)$

۲۲

$$x^۲+y^۲-۲xy+y^۲+z^۲-۲yz+z^۲+u^۲-۲zu=۰ \Longrightarrow$$
$$(x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-u)^۲=۰ \Longrightarrow$$
$$x-y=۰ \text{ و } y-z=۰ \text{ و } z-u=۰ \Longrightarrow x=y=z=u$$

۲. حل‌مسائل فصل دوم (نامساوی‌ها)

۱. بنابه نامساوی واسطه حسابی وهندسی چنین داریم:

$$\begin{cases} a^۴+b^۴+c^۴>۳\sqrt[۳]{a^۴b^۴c^۴} \\ (ab+ac+bc)>۳\sqrt[۳]{a^۲b^۲c^۲} \end{cases} \Longrightarrow$$

$$(a^۴+b^۴+c^۴)(ab+ac+bc)>۹\sqrt[۳]{a^۶b^۶c^۶}=۹a^۲b^۲c^۲$$

۲. سه نامساوی مقابل را باهم جمع می‌کنیم نامساوی مطلوب حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} a^۳+b^۳>ab(a+b) \\ b^۳+c^۳>bc(b+c) \\ c^۳+a^۳>ac(a+b) \end{cases}$$

۳. $$۲(\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})=\frac{۲}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}<\frac{۲}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{۱}{\sqrt{n}}$$

زیرا $\sqrt{n+۱}>\sqrt{n}$، بنابراین نامساوی فوق را بسازاء ... و۳ و۲ و۱ $=n$ بـه‌کار می‌بریم وسپس نامساوی‌ها را باهم جمع می‌کنیم.

$$۱>۲(\sqrt{۲}-۱)$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۲}}>۲(\sqrt{۳}-\sqrt{۲})$$

$$\frac{۱}{\sqrt{۳}}>۲(۲\sqrt{۴}-\sqrt{۳})$$

....

....

$$\frac{۱}{\sqrt{n}}>۲(۲\sqrt{n+۱}-\sqrt{n})$$

$$۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\dots+\frac{۱}{\sqrt{n}}>۲(\sqrt{n+۱}-۱)$$

۴. چون $b>0$ و a لذا $a^3+b^3 \geqslant ab(a+b)$ وچون $abc>0$ در نتیجه:

$a^3+b^3+abc>ab(a+b+c)$ بنابراین: $\frac{1}{a^3+b^3+abc}<\frac{1}{ab(a+b+c)}$

به همین ترتیب درمورد دوکسر دیگر ثابت می‌شود درنتیجه؛

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}<$$
$$\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)=\frac{1}{abc}$$

۵. فرض می‌کنیم $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=A$ و $b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=B$ و $a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n=C$.

همچنین‌مشخص‌است که $(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2 \geqslant 0$

وتساوی وقتی برقرار است که پرانتزها برابر صفرباشند یعنی $x=\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\ldots=\frac{b_n}{a_n}$

ازبسط‌نامعادله‌فوق‌داریم. $Ax^2-2Cx+B \geqslant 0$ وچون $A>0$ این‌نامساوی‌وقتی‌همواره برقرار است که $C^2-AB \leqslant 0$ یا $C^2 \leqslant AB$ این نامساوی مهم به‌نامساوی (Cauchy–Buniakowski) معروف است.

۶. با توجه به مسأله قبل، $0 \leqslant (a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2 \leqslant 1$

در نتیجه، $-1 \leqslant a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n \leqslant 1$

۷. بنابه نامساوی واسطه حسابی وهندسی، داریم:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}=x \Longrightarrow a+b+c \geqslant 3x$$

$$\frac{ab+ac+bc}{3} \geqslant \sqrt[3]{(ab)(ac)(bc)}=\sqrt[3]{(abc)^2}=x^2$$

درنتیجه چنین داریم؛

$$(1+a)(1+b)(1+c)=1+(a+b+c)+(ab+ac+bc)+abc$$
$$\geqslant 1+3x+3x^2+x^3=(1+x)^3$$

۸. با توجه به قسمت ۴ـ۲.نامساوی (۴) که $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$ نامساوی به‌صورت زیر نوشته می‌شود؛

$$(a+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+b}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{d+a}\right) \geqslant$$

$$(a+c)\ \frac{۴}{a+b+c+d}\ +(b+d)\ \frac{۴}{a+b+c+d}\ =$$

$$\frac{۴(a+c+b+d)}{(a+b+c+d}=۴$$

۹. با توجه به نامساوی $\left(\frac{x+y}{۲}\right)^۲\leqslant\frac{x^۲+y^۲}{۲}$ اگر $x=a+\frac{۱}{a}$ و $y=b+\frac{۱}{b}$ فرض کنیم آنگاه:

$$\frac{۱}{۲}\left(a+\frac{۱}{a}\right)^۲+\left(b+\frac{۱}{b}\right)^۲\geqslant\frac{۱}{۴}\left(a+\frac{۱}{a}+b+\frac{۱}{b}\right)^۲=\frac{۱}{۴}\left(۱+\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\right)^۲\geqslant$$

$$\frac{۱}{۴}\left(۱+\frac{۴}{a+b}\right)^۲=\frac{۱}{۴}(۱+۴)^۲=\frac{۲۵}{۴}\Longrightarrow$$

$$\left(a+\frac{۱}{a}\right)^۲+\left(b+\frac{۱}{b}\right)^۲\geqslant\frac{۲۵}{۲}$$

(از نامساوی $\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\geqslant\frac{۴}{a+b}$ استفاده کرده‌ایم).

۱۰. با توجه به مسأله ۵ همین‌فصل اگر $b_۱=b_۲=\ldots=b_n=۱$ قرار دهیم؛

$$(x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲)(n\times ۱)\geqslant(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)^۲\Longrightarrow$$

$$nS\geqslant k^۲\Longrightarrow S\geqslant\frac{k^۲}{n}$$

و در نامساوی فوق (۵) تساوی وقتی برقرار است که $\frac{x_۱}{۱}=\frac{x_۲}{۱}=\ldots=\frac{x_n}{۱}$ یعنی

$$x_۱=x_۲=\cdots x_n=\frac{k}{n}$$

۱۱. اگر $S=x_۱+x_۲+\cdots+x_n$ و $x_۱^۲+x_۲^۲+\cdots+x_n^۲=P$ فرض کنیم؛

$$(x-x_۱)^۲+(x-x_۲)^۲+\cdots+(x-x_n)^۲=$$

$$nx^۲-۲Sx+p=n\left(x^۲-\frac{۲S}{n}x+\frac{p}{n}\right)=$$

$$n\left[\left(x-\frac{S}{n}\right)^۲+\frac{p}{n}-\frac{S^۲}{n^۲}\right]$$

اکنون این‌عبارت وقتی مینیمم است که $x-\frac{S}{n}$ مینیمم باشد (بقیه ثابت می‌باشند)

و این عبارت وقتی مینیمم است که $x-\frac{S}{n}=۰$ یا $x=\frac{S}{n}$ یعنی $x=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}$

تذکر: این مسأله با توجه به مشتق به سادگی قابل حل است اگر عبارت را برابر $f(x)$ فرض کرده و از آن مشتق بگیریم؛

$$f'(x)=۲(x-x_۱)+۲(x-x_۲)+\cdots+۲(x-x_n)$$

$$f'(x)=۰\Longrightarrow nx=x_۱+x_۲+\cdots+x_n\Longrightarrow x=\frac{x_۱+x_۲+\cdots+x_n}{n}$$

۱۲. چون عبارت نسبت به a و b متقارن است می‌توان فرض کرد $a\geqslant b$ درنتیجه

$۰<\frac{b}{a}=x\leqslant ۱$ وچون $m>n$ لذا $x^m\leqslant x^n$ ودرنتیجه $۱+x^m\leqslant ۱+x^n$ وچون $m>n$

$(۱+x^m)^n<(۱+x^n)^m$ یا $\left(۱+\frac{b^m}{a^m}\right)^n<\left(۱+\frac{b^n}{a^n}\right)^m$ ولذا $(a^m+b^m)^n<(a^n+b^n)^m$

۱۳. طرف اول را به توان می‌رسانیم

$$a^۲+b^۲+c^۲+\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}+۲\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant\frac{۷۵}{۴}$$

$$\begin{aligned}۳۶=(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲(ab+ac+bc)\leqslant ۳(a^۲+b^۲+c^۲)\\ \Longrightarrow a^۲+b^۲+c^۲\geqslant ۱۲\end{aligned}$$

همچنین، $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant ۳$ بنابراین:

$$a^۲+b^۲+c^۲+۲\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant ۱۸$$

چون $\frac{۳}{۴}+۱۸=\frac{۷۵}{۴}$ پس کافیست ثابت کنیم $\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}\geqslant\frac{۳}{۴}$

$$\frac{a+b+c}{۳}\geqslant\sqrt[۳]{abc}\Longrightarrow\sqrt[۳]{abc}\leqslant ۲\Longrightarrow\frac{۱}{\sqrt[۳]{a^۲b^۲c^۲}}\geqslant\frac{۱}{۴}$$

$$\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}\geqslant ۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{a^۲b^۲c^۲}}\geqslant\frac{۳}{۴}$$

۱۴. با توجه به نامساوی کوشی بونیاکفسکی (۲۰) یا مسأله (۵) به سادگی نتیجه می‌شود.

$$(a^۲+b^۲)(c^۲+d^۲)\geqslant(ac+bd)^۲=p^۲q^۲$$

نتیجه: ایـن‌نامساوی درهـرچهارضلعی محاطی برقـرار است. که a و b و c و d اضلاع و q و p اقطار آن می‌باشند.

۱۵. این مسأله نیز حالت خاصی ازمسأله (۵) نامساوی کوشی است.

$$(x^۲+y^۲+z^۲)(a^۲+b^۲+c^۲)\geqslant(ax+by+cz)^۲$$

وتساوی وقتی برقرار است که $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ لذا

$$S(a^۲+b^۲+c^۲)\geqslant k^۲\Longrightarrow S\geqslant\frac{k^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}$$

یعنی $MinS=\frac{k^۲}{a^۲+b^۲+c^۲}$

نتیجه: اگر $a_۱x+a_۲y+a_۳z+\dots+a_nt=k$ و k مقدار ثابتی بـاشد آنگاه عبارت $S=x^۲+y^۲+z^۲+\dots+t^۲$ وقتی‌مینیمم است که؛ $\frac{x}{a_۱}=\frac{y}{a_۲}=\dots=\frac{t}{a_n}$ ومقدار این مینیمم برابر است با:

$$MinS=\frac{k^۲}{a_۱^۲+a_۲^۲+\dots+a_n^۲}$$

۳. حل مسائل فصل‌سوم(قدر مطلق)

۱)

$$\begin{cases}x\leqslant-۱\Longrightarrow -۴x=۴\Longrightarrow x=-۱\\ -۱<x\leqslant۰\Longrightarrow ۲x+۲-x-x+۱=۳\Longrightarrow ۳=۳ \text{ معادله بی‌شمار جواب دارد}\\ ۰\leqslant x<۱\Longrightarrow ۲x+۲+x+۱-x=۳\Longrightarrow x=۰\\ x\geqslant۱\Longrightarrow ۲x+۲+x+x-۱=۳\Longrightarrow x=\frac{۱}{۲}\text{ قابل قبول نیست}\end{cases}$$

۲)

$$|x-۵|-۱۰=\pm۴\Longrightarrow\begin{cases}|x-۵|=۱۴\\ |x-۵|=۶\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x-۵=\pm۱۴\\ x-۵=\pm۶\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x=-۹ \text{ و } x=۱۹\\ x=-۱ \text{ و } x=۱۱\end{cases}$$

$$۳)\quad |x-۲|+۳=\pm۶\Longrightarrow\begin{cases}|x-۲|=۳\quad\Longrightarrow x-۲=\pm۳\Longrightarrow\\ |x-۲|=-۳\quad\text{ جواب ندارد}\end{cases}$$

$x=۵$ و $x=-۱$

۴) $x^۲-\pi^۲\leqslant ۰ \Longrightarrow |x|\leqslant \pi$ یا $-\pi\leqslant x\leqslant \pi$

۵) $|x|^۲+۲|x|-۱=۰ \Longrightarrow |x|=-۱\pm\sqrt{۲} \Longrightarrow |x|=\sqrt{۲}-۱ \Longrightarrow$
$x=\pm(\sqrt{۲}-۱)$

۶) $x\geqslant -۱ \Longrightarrow (x+۲)(x-۳)=۲ \Longrightarrow x^۲-x-۶=۲ \Longrightarrow$
$x^۲-x-۸=۰ \Longrightarrow$

$$x=\frac{۱\pm\sqrt{۳۳}}{۲} \Longrightarrow x=\frac{۱+\sqrt{۳۳}}{۲}\ (x\geqslant -۱)$$

$x<-۱ \Longrightarrow (-x-۱+۱)(x-۳)=۲ \Longrightarrow -x^۲+۳x-۲=۰ \Longrightarrow$
$x^۲-۳x+۲=۰ \Longrightarrow x=۱$ و $x=۲$ اما هیچ‌کدام قابل‌قبول نیست

۷) $x^۲-x-۶=x+۲ \Longrightarrow x^۲-۲x-۸=۰ \Longrightarrow x=۱\pm\sqrt{۹}=۱\pm۳$
$\Longrightarrow x=۴$ و $x=-۲$ که هر دو درمعادله صدق می‌کنند

$x^۲-x-۶=-x-۲ \Longrightarrow x^۲-۴=۰ \Longrightarrow x=\pm۲$

که این دونیز درمعادله صدق می‌کنند.

۸) $x^۲+۳x+x^۲-۲=۰ \Longrightarrow ۲x^۲+۳x-۲=۰ \Longrightarrow x=\frac{-۳\pm\sqrt{۲۵}}{۴}=$
$\frac{-۳\pm۵}{۴}$

$x_۱=-۲$ و $x_۲=\frac{۱}{۲}$ ریشه نیست $x=-۲$ صدق نمی‌کند

$-x^۲-۳x+x^۲-۲=۰ \Longrightarrow x=-\frac{۲}{۳}$ درمعادله صدق می‌کند

می‌توان معادله را با این روش نیز حل کرد که ابتدا $x\leqslant ۰$ یا $x\geqslant -۳$ و سپس
$-۳\leqslant x\leqslant ۰$

۹) $|x^۲-۹|+|x^۲-۴|=|x^۲-۹|+|۴-x^۲|\geqslant |x^۲-۹+۴-x^۲|=۵$

پس همواره‌عبارت طرف چپ بزرگتر یا مساوی ۵ است یعنی مینیمم آن برابر ۵ است ولذا معادله بی‌شمارجواب داردکه باید $۴\leqslant x^۲\leqslant ۹$ یعنی $۲\leqslant |x|\leqslant ۳$ در نتیجه $-۳\leqslant x\leqslant -۲$ یا $۲\leqslant x\leqslant ۳$ جواب معادله است.

۱۰) $|a-b|=۵ \Longrightarrow$ معادله بی‌شمارجواب داردکه فاصله [۱۰ و ۵] است.

۱۱) حالت درنظر گرفته قدرمطلقها را برمی‌داریم جواب معادله $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ است.

۲.

۱) هر x حقیقی جواب است.

۲) $-\frac{1}{2}\leqslant 4-3x\leqslant\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2}\leqslant -3x\leqslant -\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{7}{6}\leqslant x\leqslant\frac{9}{6}$

۳) $x\geqslant 2 \Rightarrow x-2<\frac{x}{2} \Rightarrow x<4 \Rightarrow 2\leqslant x<4$

۴) اولاً $x=-1$ جواب نامعادله است ثانیاً؛ $|1+x|^2\geqslant|1-x|\,|1+x|$

و درنتیجه با شرط $x\neq -1$ داریم، $|1+x|\geqslant|x-1|$

$x<-1 \Rightarrow -1-x\geqslant 1-x \Rightarrow -1\geqslant 1$ که جواب ندارد

$-1<x<1 \Rightarrow 1+x\geqslant 1-x \Rightarrow x\geqslant 0 \Rightarrow 0\leqslant x<1$

$x\geqslant 1 \Rightarrow 1+x\geqslant x-1 \Rightarrow 1>-1$ که همواره برقرار است.

جواب: $\{-1\}\cup[0,+\infty)$

۵) $x<-1$ یا $x>\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1}-1>0 \Rightarrow \frac{x-2}{x-1}>0 \Rightarrow$

$x<-1$ یا $x>2$

$-1<x\leqslant\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{2x-1}{x+1}-1>0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1}<0 \Rightarrow -1<x<0$

جواب: $(-1,0)\cup(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)=$

$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)-\{-1\}$

۶) $x<1 \Rightarrow 1-x<3-x \Rightarrow 1<3$ همواره برقرار است

$1\leqslant x\leqslant 3 \Rightarrow x-1<3-x \Rightarrow x<2 \Rightarrow 1\leqslant x<2$

$x>3 \Rightarrow x-1<x-3 \Rightarrow 1>3$ که برقرار نیست

جواب: $(-\infty,2)$

۷) $x\leqslant -2 \Rightarrow -3x-3<x^2+x \Rightarrow x^2+4x+3>0$

$$-۲<x\leqslant -۱ \Rightarrow -x+۱<x^۲+x \Rightarrow x^۲+۲x+۱>۰$$
$$-۱<x\leqslant ۰ \Rightarrow x+۳<x^۲+x \Rightarrow x^۲>۳$$
$$x<۰ \Rightarrow ۳x+۳<x^۲+x \Rightarrow x^۲-۲x-۳>۰$$

سپس هر نامعادله را با شرایط آن حل می‌کنیم

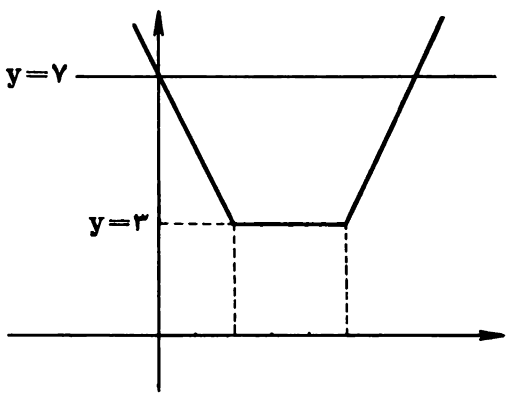
۸) $$-۱۰<x^۲-۵x-۴<۱۰ \Rightarrow \begin{cases} x^۲-۵x-۱۴<۰ \\ x^۲-۵x+۶>۰ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -۲<x<۷ \\ x>۳ \text{ یا } x<۲ \end{cases} \Rightarrow ۳<x<۷ \text{ یا } -۲<x<۲$$

۹) $$|x-۲|+|x-۵|\geqslant|۵-۲|=۳$$

$$\begin{cases} x-۲+x-۵=۷ \Rightarrow x=۷ \\ -x+۲-x+۵=۷ \Rightarrow x=۰ \end{cases} \Rightarrow$$

جواب نامعادله $x>۷$ یا $x<۰$



۳. ۱) $|x-۱|+|x-۲|=|x-۱|+|۲-x|\geqslant|x-۱+۲-x|=۱$

۲) حالت کلی آن مسأله (۴) است.

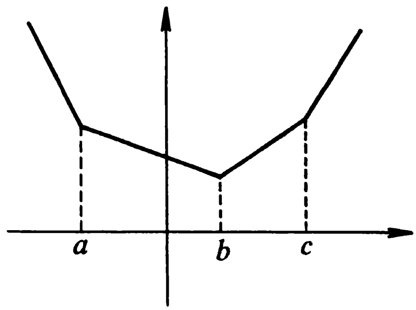
۴. اگر نمودار $y=|x-a|+|x-b|+|x-c|$ را در نظر بگیریم مینیمم در یکی از نقاط $x=a$ یا $x=b$ یا $x=c$ رخ می‌دهد.

$$x=a \Longrightarrow y=|a-b|+|a-c|=b-a+c-a>c-a$$

$$x=b \Longrightarrow y=|b-a|+|b-c|=b-a+c-b=c-a$$

$$x=c \Longrightarrow y=|c-a|+|c-b|=c-a+c-b>c-a$$

بنابراین $\mathrm{Min}\, y=c-a$ واین مقدار مینیمم به‌ازاء $x=b$ بدست می‌آید یعنی وقتی تساوی برقرار است که $x=b$ باشد.



۵. الف) $x\geqslant ۰,\ y\geqslant ۰ \Longrightarrow \frac{x+y}{۲}\geqslant \sqrt{xy}\geqslant -\sqrt{xy}$

$$\Longrightarrow \frac{x+y}{۲}-\sqrt{xy}+\frac{x+y}{۲}+\sqrt{xy}=x+y$$

ب) $x<۰,\ y<۰ \Longrightarrow \frac{x+y}{۲}-\sqrt{xy}<۰$ و $\frac{|x+y|}{۲}\geqslant\sqrt{xy} \Longrightarrow$

$\frac{x+y}{۲}-\sqrt{xy}<۰$ و $\frac{x+y}{۲}+\sqrt{xy}<۰ \Longrightarrow$

$$-\frac{x+y}{۲}+\sqrt{xy}-\frac{x+y}{۲}-\sqrt{xy}=-x-y$$

۶. $y=\frac{۱}{\sqrt{(\sqrt{x-۱}+۱)^۲}}+\frac{۱}{\sqrt{(\sqrt{x-۱}-۱)^۲}}=(۱<x<۲)$

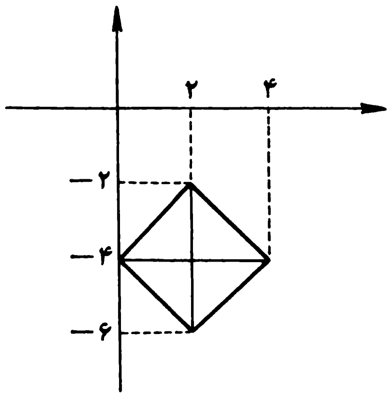
$$\frac{۱}{\sqrt{x-۱}+۱}+\frac{۱}{|\sqrt{x-۱}-۱|}=\frac{۱}{\sqrt{x-۱}+۱}+\frac{۱}{۱-\sqrt{x-۱}}$$

$$(\sqrt{x-۱}-۲<۰)=\frac{۱-\sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۱}+۱}{۱-(x-۱)}=\frac{۲}{۲-x}$$

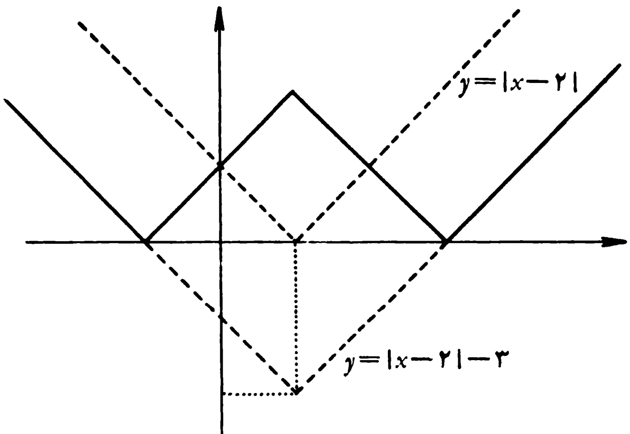
۷. نمودار این رابطه یك مربع به‌مرکز $(۲,-۴)$ وقطر ۴ است. می‌تـوان چهارحالت نیز درنظرگرفت و عبارت را ساده‌کرد.

$a=۲$ و $b=-۳$ و $k=۲$ درنتیجه؛

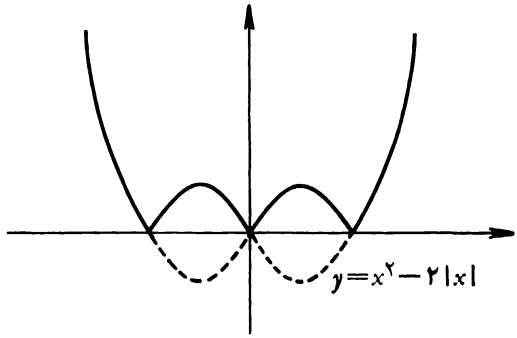
$$\begin{cases} ۲-۲\leqslant x\leqslant ۲+۲ \\ -۴-۲\leqslant y\leqslant -۴+۲ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۰\leqslant x\leqslant ۴ \\ -۶\leqslant y\leqslant -۲ \end{cases}$$



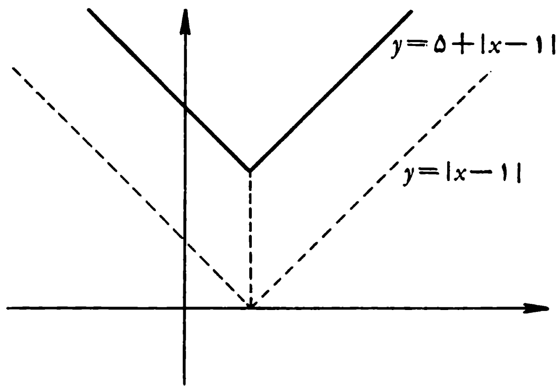
۸. ابتدا نمودار $y=|x-۲|$ را رسم کـرده وسپس ۳ واحد آنـرا به‌موازات (۱ محور yها و درجهت منفی انتقال می‌دهیم سپس قرینه‌آنرا نسبت به‌محورxها پیدا می‌کنیم.



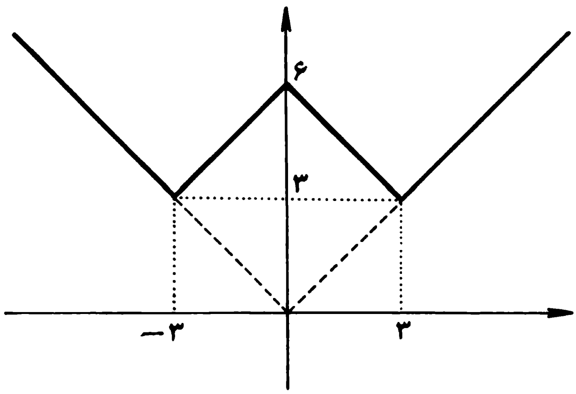
۲) ابتدا نمودار تابع $y=|x|^2-2|x|$ را رسم کرده سپس قرینه آن را نسبت به محور xها پیدا می‌کنیم.



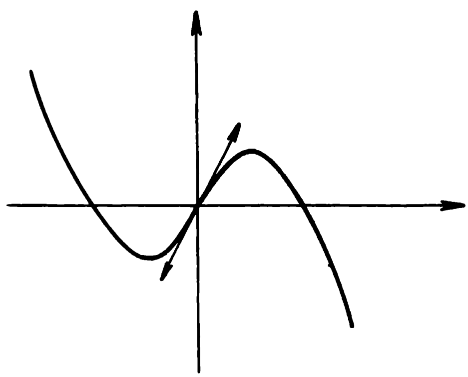
۳) $y=5+|x-1|$



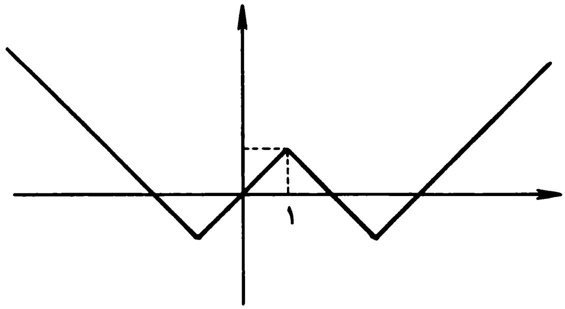
۴) $y=\begin{cases} 3-x+x-x-3=-x \text{ ،} & x<-3 \\ 3-x+x+x+3=x+6 \text{ ،} & -3\leqslant x\leqslant 0 \\ 3-x-x+x+3=-x+6 \text{ ،} & 0<x<3 \\ x-3-x+x+3=x \text{ ،} & x\geqslant 3 \end{cases}$



۵) $y=x(1-|x|)=\begin{cases} x(1-x) & x\geqslant 0 \\ x(1+x) & x<0 \end{cases}$



۶) مانند مثالهای حل شده عمل کنید

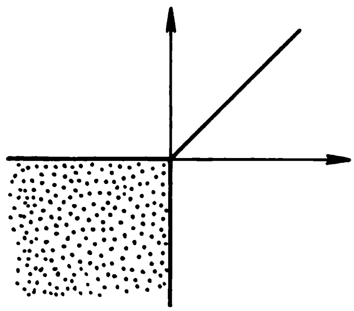


.۹

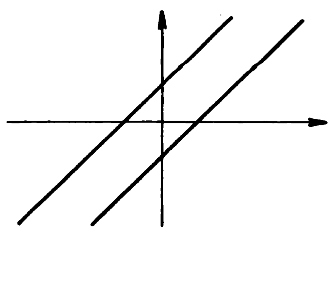
۱) اولاً باید x و y هم علامت باشند زیرا اگر مثلاً $x<0$ و $y>0$ باشد آنگاه $2y=0$ وغیرممکن است.

نیمساز ربع اول $\quad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \Longrightarrow y=x$

هرنقطه درناحیه سوم وقسمتهای منفی دومحور $\quad x\leqslant 0,\ y\leqslant 0 \Longrightarrow 0=0$ جواب است.



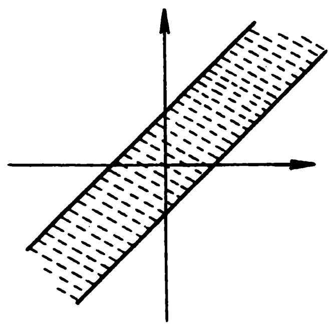
۲) $x-y=\pm 2 \Longrightarrow \begin{cases} y=x-2 \\ y=x+2 \end{cases}$ دوخط موازی



$$۳)\ |x-y|<۲ \Longrightarrow -۲<x-y<۲ \Longrightarrow \begin{cases} x-y<۲ \\ x-y>-۲ \end{cases}$$

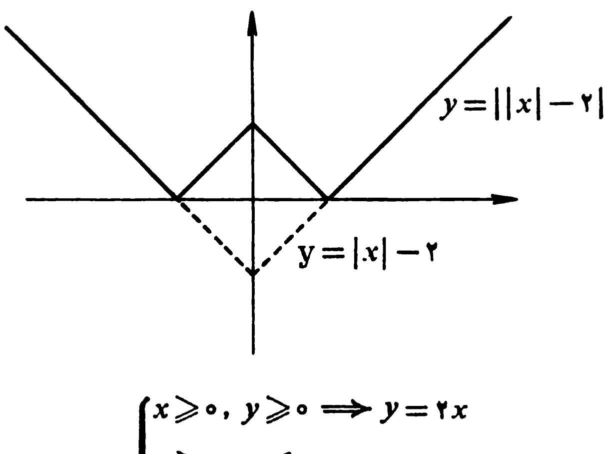
$$\Longrightarrow \begin{cases} y-x+۲>۰ \\ y-x-۲<۰ \end{cases}$$

تمام نقاط بین دوخط موازی نمودار است روی خط قابل قبول نیست زیرا تساوی برقرار نمی‌باشد.

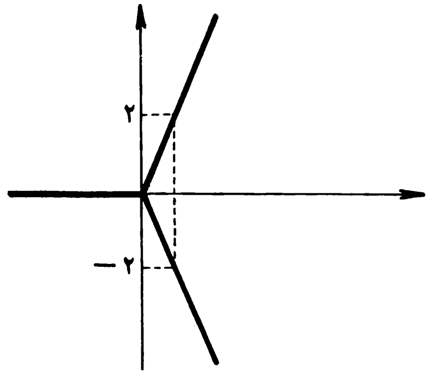


$$۴)\ y=\sqrt{(|x|-۲)^۲}=||x|-۲|$$

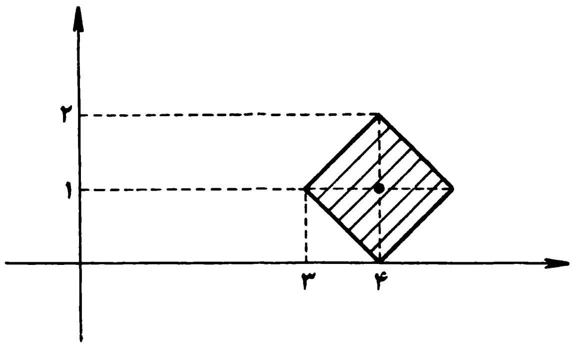
ابتـدا نمودار $y=|x|$ را به‌اندازه ۲ واحـد درجهت منفی محور yهـا به‌پائین انتقال داده سپس قرینه آنرا نسبت به‌محور xها پیدا می‌کنیم.



$$۵)\ |y|=x+|x| \Longrightarrow \begin{cases} x\geqslant ۰,\ y\geqslant ۰ \Longrightarrow y=۲x \\ x\geqslant ۰,\ y\leqslant ۰ \Longrightarrow y=-۲x \\ x\leqslant ۰,\ y\leqslant ۰ \Longrightarrow -y=۰ \Longrightarrow y=۰ \\ x\leqslant ۰,\ y\geqslant ۰ \Longrightarrow y=۰ \end{cases}$$



۶) ابتدا نمودار رابطه $|x-۴|+|y+۱|=۱$ راکه یک مربع به‌مرکز (۴, −۱) و قطر ۲ است رسم می‌کنیم تمام نقـاط داخل و روی مربع جواب است. زیرا اگر مختصات مرکز مربع را در رابطه قراردهیم $۰ \leqslant ۱$ که برقرار است.



۷) $|۲x-۲|=|۳y-۶| \Longrightarrow ۳y-۶=\pm(۲x-۲) \Longrightarrow$

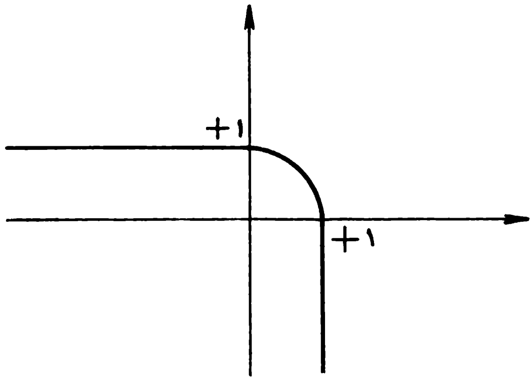
$$\begin{cases} ۳y-۲x-۸=۰ \\ ۳y+۲x-۴=۰ \end{cases}$$ نمودار دو خط متقاطع است

۸) $x\geqslant ۰,\ y\geqslant ۰ \Longrightarrow x^۲+y^۲=۱$ پس یک ربع دایره است $x\geqslant ۰$ و $y\geqslant ۰$

$x>۰,\ y<۰ \Longrightarrow x^۲=۱ \Longrightarrow x=۱,\ y<۰$ یک نیم‌خط است

$x<۰,\ y>۰ \Longrightarrow y^۲=۱ \Longrightarrow y=۱,\ x<۰$ یک نیم‌خط است

$x<۰,\ y<۰ \Longrightarrow ۰=۴$ که برقرار نیست



۱۰. تساوی برقرار است پس باید $f(x)$ و $g(x)$ هم‌علامت باشند یعنی $f(x)g(x)\geqslant ۰$ بنابراین:

$$(x-۱)(x^۲-۴)\geqslant ۰$$

-۲		۰		۲		
$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$

مجموعه جواب $x\geqslant ۲$ یا $-۲\leqslant x\leqslant ۱$

$$|x-۱|+|x^۲-۴|=|x^۲+x-۵|$$

۴. حل مسائل فصل چهارم (لگاریتم)

۱. $$\frac{۲}{۳}\log_{۳^۲}۳^۳\log_۲(۳+x)-\log_۲(۷x+۹)=\frac{۲}{\log_{۲^۲}۲^۴}-\frac{۷}{۲}\Longrightarrow$$

$$\frac{۲}{۳}\cdot\frac{۳}{۲}\log_۲(۳+x)-\log_۲(۷x+۹)=\frac{۳}{۲}-\frac{۷}{۲}=-۲\Longrightarrow$$

$$\log\frac{۳+x}{۷x+۹}=-۲\Longrightarrow\frac{۳+x}{۷x+۹}=\frac{۱}{۴}\Longrightarrow$$

$$۷x+۹=۱۲+۴x\Longrightarrow\boxed{x=۱}$$

۲. $$\frac{\frac{۱}{\log_n^a\log_n^b}}{\frac{۱}{\log_n^a}+\frac{۱}{\log_n^b}}=\frac{۱}{\log_n^a+\log_n^b}=\frac{۱}{\log_n^{ab}}=\log_{ab}^n$$

.۳

$$\log_a ۲۷ = b \Longrightarrow ۳\log_a ۳ = b \Longrightarrow \log_a ۳ = \frac{b}{۳}$$

$$\log_{\sqrt{۳}} \sqrt[۶]{a} = \frac{۲}{۶}\log_۳ a = \frac{۱}{۳}\left(\frac{۳}{b}\right) = \frac{۱}{b}$$

.۴

$$\begin{cases} x+۲۷>۰ \\ ۱۶-۲x>۰ \\ x>۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x>-۲۷ \\ x<۸ \\ x>۰ \end{cases} \Longrightarrow ۰<x<۸$$ حوزه تعریف معادله

$$\log_\pi \frac{x+۲۷}{۱۶-۲x} < \log_\pi x \Longrightarrow \frac{x+۲۷}{۱۶-۲x} < x \Longrightarrow$$

$$\frac{۲x^۲-۱۵x+۲۷}{۱۶-۲x} < ۰ \Longrightarrow ۳<x<\frac{۹}{۲}$$

.۵

ابتدا حوزه تعریف را مشخص می‌کنیم؛

$$a)\begin{cases} \dfrac{x+۳}{x-۱}>۰ \\ ۰<x\neq ۱ \end{cases} \Longrightarrow x>۱$$

$$x>۱ \Longrightarrow \frac{x+۳}{x-۱}>x \Longrightarrow \frac{۳-x^۲}{x-۱}>۰ \Longrightarrow ۳-x^۲>۰$$

$$x^۲<۳ \Longrightarrow |x|<۳ \Longrightarrow ۱<x<۳$$ جواب

$$b)\ ۰<\frac{x-۱}{x+۱}\neq ۱ \Longrightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۵$$

طرف دوم مثبت است و چون عدد مثبت و کوچکتر از یك است پس مبنا نیز باید کوچکتر از یك باشد.

$$\frac{x-۱}{x+۵}<۱ \Longrightarrow \frac{-۶}{x+۵}<۰ \Longrightarrow x+۵>۰ \Longrightarrow x>-۵$$

بنابراین با توجه به‌شرط جواب $x>۱$ جواب است.

$$c)\ x>۱ \text{ شرط جواب } \Longrightarrow \log_{\frac{۱}{۵}}(x-۱)>۲ \text{ یا } \log_{\frac{۱}{۵}}(x-۱)<-۲$$

$$\log_{\frac{۱}{۵}}(x-۱)>\log_{\frac{۱}{۵}}\frac{۱}{۲۵}\Longrightarrow x-۱<\frac{۱}{۲۵}\Longrightarrow x<\frac{۲۶}{۲۵}$$

$$\Longrightarrow ۱<x<\frac{۲۶}{۵}$$

$$\log_{\frac{۱}{۵}}(x-۱)<-۲=\log_{\frac{۱}{۵}}۲۵\Longrightarrow x-۱>۲۵\Longrightarrow x>۲۶$$

جواب $\left(۱, \frac{۲۶}{۲۵}\right)\cup(۲۶ ، +\infty)$

d) $\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{x(x+۱)}>\left(\frac{۳}{۱۰}\right)^{۷۲}$ (توان یك دنباله تصاعد عددی است)

چون عدد مثبت و کوچکتر از یك است پس طرف بزرگتر دارای توان کمتر است.
لذا $x^۲+x<۷۲$ یا $x^۲+x-۷۲<۰$ که $-۹<x<۸$ وچون $x\in N$ لذا؛ $x=۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$ جواب است

e) $۸^x\times ۸-(۸^x)^۲\times\frac{۱}{۸}-۳۰>۰$ و $۸^x=t\Longrightarrow$

$$۸t-\frac{۱}{۸}t^۲-۳۰>۰\Longrightarrow t^۲-۶۴t+۲۴۰<۰\Longrightarrow$$

$$۴<t<۶۰\Longrightarrow ۴<۸^x<۶۰\Longrightarrow \log_۸ ۴<\log_۸ ۸^x<\log_۸ ۶۰$$

$$\Longrightarrow \frac{۲}{۳}\log_۲ ۲<x<\log_۸ ۶۰\Longrightarrow \frac{۲}{۳}<x<\log_۸ ۶۰$$

f) $۱<۳^{|x^۲-x|}<۹\Longrightarrow \log_۳ ۱<|x^۲-x|\log_۳ ۳<\log_۳ ۳^۲$

$$\Longrightarrow ۰<|x^۲-x|<۲\Longrightarrow \begin{cases}x^۲-x\neq ۰\\ -۲<x^۲-x<۲\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x\neq ۰, ۱\\ x^۲-x-۲<۰\\ x^۲-x+۲>۰ \text{ همواره برقرار است}\end{cases}\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}x\neq ۰, ۱\\ -۱<x<۲\end{cases}\Longrightarrow x\in(-۱, ۲)-\{۰, ۱\}$$

۶.

$a)$ $(2^{\sqrt{x+1}})^2 - 2^{\sqrt{x+1}+2} = 0 \Longrightarrow 2^{\sqrt{x+1}}(2^{\sqrt{x+1}} - 2^2) = 0$

$2^{\sqrt{x+2}} \neq 0 \Longrightarrow 2^{\sqrt{x+1}} = 2^2 \Longrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Longrightarrow \boxed{x=3}$

$b)$ $\begin{cases} x-1=0 \Longrightarrow x=1 \\ x^2-x-1=1 \Longrightarrow x^2-x-2=0 \Longrightarrow x=-1 \end{cases}$ و $x=2$

$c)$ $\log(\log x(\log x^3-2))=0 \Longrightarrow \log x \log x^3 - 2\log x = 1$

$\Longrightarrow 3(\log x)^2 - 2\log x - 1 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \log x = 1 \\ \log x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} x=10 \\ x=10^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x=10} \\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{10}} \end{cases}$ قابل قبول نیست $(\log x>0$ زیرا باید$)$

$d)$ $2^{4\log x^2} = 2^3 \Longrightarrow \log x^2 = \frac{3}{4} \Longrightarrow x^2 = 10^{\frac{3}{4}}$

$x = \pm 10^{\frac{3}{8}} = \pm\sqrt[8]{1000}$

$e)$ $\log_5 \sqrt{5x} = 1 \Longrightarrow \sqrt{5x} = 5 \Longrightarrow \boxed{x=5}$

$f)$ $\sin x>0,\ \cos x>0 \Longrightarrow 2k\pi < x < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$:حوزه تعریف

$\log_{\cos x} \sin x = t \Longrightarrow t + \frac{1}{t} = 2 \Longrightarrow t = 1 \Longrightarrow \sin x = \cos x$

یا $\operatorname{tg} x = 1 \Longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4}$

با توجه به‌حوزه تعریف چون x در ربع اول است جواب $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ است.

۷. $$f(z)=f(x)+f(y) \Longrightarrow \log\frac{1+z}{1-z}=\log\frac{1+x}{1-x}+\log\frac{1+y}{1-y}$$

$$\Longrightarrow \log\frac{1+z}{1-z}=\log\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} \Longrightarrow \frac{1+z}{1-z}=\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)}$$

$$\Longrightarrow z=\frac{(1+x)(1+y)-(1-x)(1-y)}{(1+x)(1+y)+(1-x)(1-y)}=\frac{2(x+)y}{2(1+xy)}=\frac{x+y}{1+xy}$$

۸. $$\frac{1}{\log_a(c+b)}+\frac{1}{\log_a(c-b)}=\frac{2}{\log_a(c+b)\log_a(c-b)} \Longrightarrow$$
$$\log_a(c+b)+\log_a(c-b)=2 \Longrightarrow \log_a(c^2-b^2)=2 \Longrightarrow$$
$$c^2-b^2=a^2 \Longrightarrow c^2=a^2+b^2$$

۹. $(1\neq x>0)$ $$\frac{1}{4}\log_5^2 x-\frac{3}{2}\log_x 5+1/25=0$$

$$\log_5 x=t \Longrightarrow t^2-\frac{6}{t}+5=0 \Longrightarrow$$

$$t^3+5t-6=0 \Longrightarrow t^3-1+5(t-1)=0 \Longrightarrow$$

$$(t-1)(t^2+t+6)=0 \Longrightarrow t=1 \Longrightarrow \boxed{x=5}$$

۱۰. $$[\log_{13}19)^{-1}+(\log_{28}19)^{-1}=\log_{19}13+\log_{19}28$$
$$=\log_{19}364>\log_{19}361=\log_{19}19^2=2$$

حل مسائل دنباله‌ها (فصل پنجم)

۱. بنا به خاصیت تصاعد هندسی ، $\frac{a_m}{a_n}=r^{m-n}$

$$\frac{a_m^n}{a_m^p}\cdot\frac{a_n^p}{a_n^m}\cdot\frac{a_p^m}{a_p^n}=\left(\frac{a_m}{a_p}\right)^n\left(\frac{a_n}{a_m}\right)^p\left(\frac{a^p}{a_n}\right)^m=(r^{m-p})^n\cdot(r^{n-m})^p\cdot(r^{p-n})^m=$$
$$r^{mn-np+np-mp+pm-nm}=r^\circ=1$$

۲. $$S=x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\cdots+\frac{1}{x^{2n}}-2n$$

$$=x^2\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right)-\frac{1}{x^2}\left(\frac{\frac{1}{x^{2n}}-1}{\frac{1}{x^2}-1}\right)-2n=$$

$$x^2\left(\frac{x^{2n}-1}{x^2-1}\right)+\frac{1}{x^2}\left(\frac{1-x^{2n}}{1-x^2}\right)\frac{x^2}{x^{2n}}-2n=\frac{1}{x^2-1}\left(x^{2n+2}-\frac{1}{x^{2n}}\right)-2n-1$$

۳. اگر این چهار عدد را به $x=a-3d$ و $y=a-d$ و $z=a+d$ و $t=a+3d$ نشان دهیم؛

$$\begin{cases} xyzt+16d^2=(a^2-5d^2)^2 \\ x+y+z+t=22 \Longrightarrow a=\frac{11}{2} \end{cases} \Longrightarrow 280+16d^2=\left(\frac{121}{4}-5d^2\right)^2$$

که d بدست می‌آید

۴. $$S=\frac{1}{3}(9+99+999+\cdots)=\frac{1}{3}(10-1+10^2-1+10^3-1$$

$$+\cdots+10^n-1)=\frac{1}{3}\left(10\frac{10^n-1}{10-1}-n\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{10^{n+1}-10-9n}{9}\right)$$

$$=\frac{1}{27}(10^{n+1}-9n-10)$$

۵. جمله‌های تصاعد را a و $b=ar$ و $c=ar^2$ و $d=ar^3$ انتخاب می‌کنیم باجای‌گذاری به‌سادگی ثابت می‌شود.

۶. $$S=1+(1+a)r+(1+a+a^2)r^2+(1+a+a^2+a^3)r^3+\cdots$$

S را در r ضرب کرده و دو رابطه را ازهم کم می‌کنیم.

$$rS=r+(1+a)r^2+(1+a+a^2)r^3+(1+a+a^2+a^3)r^4+\cdots$$

$$(1-r)S=1+ar+a^2r^2+a^3r^3+\cdots=\frac{1}{1-ar}$$

$$\Longrightarrow S=\frac{1}{(1-r)(1-ar)}$$

۷. $$\frac{1}{q+r}+\frac{1}{p+q}=\frac{q-r}{q^2-r^2}+\frac{p-q}{p^2-q^2}=\frac{p-r}{d}=\frac{2(p-r)}{2d}$$

$$=\frac{۲(p-r)}{p^{۲}-r^{۲}}=\frac{۲}{p+r}$$

۹. $\dfrac{m^{۲}}{n^{۲}}=\dfrac{\frac{m}{۲}(a_{۱}+a_m)}{\frac{n}{۲}(a_{۱}+a_n)}$ یا $\dfrac{m}{n}=\dfrac{۲a_{۱}+(m-۱)d}{۲a_{۱}+(n-۱)d}$ بنابراین،

$(۲a_{۱}-d)(m-n)=۰$ یا $a_{۱}=\dfrac{d}{۲}$ در نتیجه: $\dfrac{۲m-۱}{۲n-۱}=\dfrac{\frac{d}{۲}+(m-۱)d}{\frac{d}{۲}+(n-۱)d}=\dfrac{a_m}{a_n}$

۱۰. $\dfrac{a_{۱}}{۱-r}=۴$ و $\dfrac{a_{۱}^{۳}}{۱-r^{۳}}=۱۹۲\Longrightarrow$

$$۶۴(۱-r)^{۳}=۱۹۲(۱-r^{۳})\Longrightarrow(۱-r)^{۲}=۳(۱+r+r^{۲})$$

$$\Longrightarrow ۲r^{۲}+۵r+۲=۰\Longrightarrow r=-۲ \text{ یا } r=-\frac{۱}{۲}$$

که جواب $r=-\frac{۱}{۲}$ است.

۱۱.

۱،۴،۱۰،۲۰،۳۵،...

۳ ،۶ ،۱۰ ،۱۵ ،...

۱ ،۱ ،۱ ،۱ ،...

مجموعه تفاضلات متناهی با جمله مولد درجه سوم است لذا

$$l_n=an^{۳}+bn^{۲}+cn+d$$

$$a+b+c+d=۱ \text{ و } ۷a+۳b+c=۳ \text{ و } ۱۲a+۲b=۳ \text{ و } ۶a=۱$$

بنابراین $a=\frac{۱}{۶}$ و $b=\frac{۱}{۲}$ و $c=\frac{۱}{۳}$ و $d=۰$ پس؛ $l_n=\frac{۱}{۶}n^{۳}+\frac{۱}{۲}n^{۲}+\frac{۱}{۳}n$ یا

$$l_n=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶}$$

۱۲. یك صفحه شطرنجی ۱ × ۱ دارای یك مربع است و اگر صفحهٔ شطرنجی ۲ × ۲

باشد دارای یك مربع ۲ × ۲ وچهار مربع ۱ × ۱ یعنی ۵ مربع است بههمین ترتیب اگر $n = ۳$ آنگاه دارای یك مربع ۳ × ۳ وچهارمربع ۲ × ۲ و نهمربع ۱ × ۱ ولـذا جمعاً ۱۴ مربع است اگر این عمل را ادامه دهیم دنباله زیررا داریم؛

۱ ،۵ ،۱۴ ،۳۰ ،۵۵ ...

که با روش تفاضلات متناهی دنبالههای زیر بدست می آیند.

۴ ،۹ ،۱۶ ،۲۵ ،...

۵ ،۷ ،۹ ،...

۲ ،۲ ،۲ ،...

کـه جمله مولـد آن از درجـه سوم است مانند مسئله قبـل ضـرایب را پیـدا می کنیم

$$l_n = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$ تعداد مربعها

.۱۳
$$S - S_n < ۱۰^{-۵} \Longrightarrow \frac{۱}{۱-\frac{۱}{۳}} - \frac{۱-\left(\frac{۱}{۳}\right)^n}{۱-\frac{۱}{۳}} < ۱۰^{-۵} \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{۱}{۳}\right)^n < \frac{۲}{۳}(۱۰^{-۵}) \Longrightarrow \frac{۱}{۳^{n-۱}} < \frac{۲}{۱۰^۵} \Longrightarrow ۳^{n-۱} > ۵۰۰۰۰ \Longrightarrow$$

$$۳^{n-۱} = ۳^{۱۰} \Longrightarrow n = ۱۱$$

.۱۴
$$S = \left(\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}\right) + \left(\frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴}\right) + \cdots + \left(\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}\right)$$

$$= ۱ - \frac{۱}{n+۱} = \frac{n}{n+۱}$$

.۱۵ $n \cdot n! = (n+۱-۱)n! = (n+۱)! - n!$ بنابراین

$$A = (۲! - ۱!) + (۳! - ۲!) + (۴! - ۳!) + \cdots + ((n+۱)! - n!) =$$

$$(n+۱)! - ۱$$

.۱۶ $s = \frac{۱}{۱-p}$ و $s' = \frac{۱}{۱-r}$ در نتیجـه ؛ $p = \frac{s-۱}{s}$ و $r = \frac{s'-۱}{s'}$ همـچنین

لذا؛ $k = \frac{۱}{۱-pr}$

$$k=\frac{۱}{۱-\frac{(s-۱)(s'-۱)}{ss'}}=\frac{ss'}{ss'-(ss'-s-s'+۱)}=\frac{ss'}{s+s'-۱}$$

۱۷. $s_۱=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۲}}=۲$ و $s_۲=\frac{۲}{۱-\frac{۱}{۳}}=۳$ و $s_۳=\frac{۳}{۱-\frac{۱}{۴}}=۴$ و ...

$$s_p=\frac{p}{۱-\frac{۱}{p+۱}}=p+۱$$

بنابراین:

$$s_۱+s_۲+\cdots+s_p=۲+۳+\cdots+p+۱=\frac{p(p+۱+۲)}{۲}$$

$$=\frac{p(p+۳)}{۲}$$

۱۸. $s=a_۱+(a_۱+a_۱r)+(a_۱+a_۱r+a_۱r^۲)+\cdots$

$$=a_۱\left(۱+\frac{r^۲-۱}{r-۱}+\frac{r^۳-۱}{r-۱}+\cdots+\frac{r^n-۱}{r-۱}\right)=$$

$$\frac{a_۱}{r-۱}(r-۱+r^۲-۱+r^۳-۱+\cdots+r^n-۱)=\frac{a_۱}{r-۱}\left(r\cdot\frac{r^n-۱}{r-۱}-n\right)$$

$$=\frac{a_۱}{(r-۱)^۲}(r^{n+۱}-(n+۱)r+n)$$

۱۹. $\frac{k-۱}{k!}=\frac{۱}{(k-۱)!}-\frac{۱}{k!}$

در نتیجه:

$$\frac{۰}{۱!}+\left(\frac{۱}{۱!}-\frac{۱}{۲!}\right)+\left(\frac{۱}{۲!}-\frac{۱}{۳!}\right)+\left(\frac{۱}{۳!}-\frac{۱}{۴!}\right)+\cdots+$$

$$\frac{۱}{(n-۱)!}-\frac{۱}{n!}=۱-\frac{۱}{n!}$$

حل مسائل فصل ششم (معادلات)

۱. $\frac{a^۲}{b+۱}+\frac{b^۲}{a+۱}=\frac{a^۳+b^۳+a^۲+b^۲}{ab+a+b+۱}=\frac{s^۳-۳ps+s^۲-۲p}{p+s+۱}=$

$$\frac{125-3(-1)5+25+2}{-1+5+1}=\frac{167}{5}$$

۲. $\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=$ و $b^2>0$

$$(b^2+c^2-a^2+2bc)(b^2+c^2-a^2-2bc)=$$

$$(b+c+a)(b+c-a)(b-c+a)(b-c-a)<0$$

۳. چون x_1 و x_2 ریشه معادله می‌باشند لذا؛

$$x_1^2-4x_1=2 \text{ و } x_2^2-4x_2=2 \Longrightarrow$$

$$A=\frac{x_1x_2(x_1^3+x_2^3)-3x_1x_2}{(2x_1+3)(2x_2+3)}=\frac{p(s^3-3ps)-3p}{4p+6s-9}$$

۴.

$$\begin{cases} ax^2+2bx+c\geqslant 0,\ a>0 \Longrightarrow ac-b^2\geqslant 0 \\ px^2+2qx+r\geqslant 0,\ p>0 \Longrightarrow pr-q^2\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ac\geqslant b^2 \\ pr\geqslant q^2 \end{cases},\ ap>0 \Longrightarrow aprc\geqslant b^2q^2,\ ap>0 \Longrightarrow$$

$$apx^2+2bqx+cr\geqslant 0$$

۵. اگر ریشه‌های معادله را α و β بنامیم؛

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{4k+5}{k-3} \\ \alpha\beta=\dfrac{2-k}{k-3} \end{cases}$$ بین دو رابطه زیر k را حذف می‌کنیم

۶. $\alpha=4-\sqrt{15}$ و $\beta=4+\sqrt{15}$ معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که ریشه‌های آن α و β باشند وسپس مجموع توانهای چهارم ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم.

$$s=8 \text{ و } p=16-15=1 \Longrightarrow x^2-8x+1=0$$

$$A=\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=(s^2-2p)^2-2p^2=$$

$$=(64-2)^2-2=62^2-2=3842$$

۷. این ریشه‌ها دوبه‌دو قرینه‌اند؛ α، β، $-\beta$، $-\alpha$ بنابراین $2\beta=\alpha-\beta$ یا $\alpha=3\beta$

در نتیجه $a^2=9\beta^2$ همچنین $\alpha^2\beta^2=q$ و $\alpha^2+\beta^2=-p$ ازحذف α و β بین این سه رابطه چنین داریم: $\frac{q}{p^2}=\frac{9}{100}$ یا $\sqrt{q}=\frac{3}{10}p$

۸. $\sqrt{x-1+4-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1+9-6\sqrt{x-1}}=1$

$|\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1$

ریشه‌های داخل قدرمطلقها برابر ۵ و ۱۰ است لذا چنین داریم،

$x\leqslant 5 \Longrightarrow 2-\sqrt{x-1}+3-\sqrt{x-1}=1 \Longrightarrow$

$\sqrt{x-1}=2 \Longrightarrow \boxed{x=5}$

$5\leqslant x\leqslant 10 \Longrightarrow \sqrt{x-1}-2+3-\sqrt{x-1}=1 \Longrightarrow 1=1$

بنابراین هر x که $5\leqslant x\leqslant 10$ جواب است.

$x\geqslant 10 \Longrightarrow \sqrt{x-1}-2+\sqrt{x-1}-3=1 \Longrightarrow \sqrt{x-1}=3 \Longrightarrow$

$\boxed{x=10}$

بنابراین جواب معادله هر x که $5\leqslant x\leqslant 10$ است.

این معادله را با به‌توان ۲ رساندن طرفین نیز می‌توان حل کرد.

۹. $a-\sqrt{a+x}=x^2 \Longrightarrow x^2-a=-\sqrt{a+x}$

$x^4-2ax^2+a^2=a+x \Longrightarrow x^4-2ax^2-x+a^2-a=0$

معادله حاصل نسبت به a از درجه دوم است آنرا مرتب کرده وحل می کنیم،

$a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=0 \Longrightarrow$

$a=\frac{2x^2+1\pm\sqrt{4x^2+4x+1}}{2}=\frac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2}$

$\Longrightarrow \begin{cases} a_1=x^2+x+1 \\ a_2=x^2-x \end{cases} \Longrightarrow$

$a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=(a-a_1)(a-a_2)=$

$$(a-x^{۲}-x-۱)(a-x^{۲}+x)=۰$$

بنابراین دومعادله زیررا داریم؛

$$\begin{cases} x^{۲}+x+۱-a=۰ \\ x^{۲}-x-a=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_{۱,۲}=\frac{۱}{۲}\pm\sqrt{a+\frac{۱}{۴}} \\ x_{۳,۴}=-\frac{۱}{۲}\pm\sqrt{a-\frac{۳}{۴}} \end{cases}$$

معادله چهارریشه دارد.

۱۰. الف- اگر $x_۱$ و $x_۲$ و $x_۳$ ریشه‌های معادله باشند.

$$x_۲=\sqrt{x_۱x_۳} \text{ و } x_۱+x_۲+x_۳=-p \text{ و } x_۱x_۲+x_۲x_۳+x_۱x_۳=q$$
$$\text{و } x_۱x_۲x_۳=-r$$

که ازاین روابط ریشه‌ها بدست می‌آید، $x_۲=-\sqrt[۳]{r}$ وبقیه نیز بدست می‌آیند.

ب- با توجه به‌سه رابطه روابط بین ریشه‌ها که در قسمت (الف) بیان شد و رابطه $x_۱=x_۲+x_۳$ داریم؛ $۲x_۱=-p$ یا $x_۱=-\frac{p}{۲}$ و $x_۲x_۳=+\frac{۲r}{p}$ و

$$-\frac{p}{۲}x_۲+\frac{۲r}{p}-\frac{p}{۲}x_۳=q \Longrightarrow x_۲+x_۳=\frac{۴r-۲pq}{p^{۲}}$$

که ازحل معادله درجه دوم،

$$x^{۲}-\frac{۴r-۲pq}{p^{۲}}x+\frac{۲r}{p}=۰ \text{ یا } p^{۲}x^{۲}-(۴r-۲pq)x+۲pr=۰$$

دو ریشه دیگر یعنی $x_۲$ و $x_۳$ بدست می‌آیند.

۱۱. $S=\alpha^{۲}+\beta^{۲}+\gamma^{۲}+۶(\alpha+\beta+\gamma)+۲۷=$

$$p_۱^{۲}-۲p_۲-۶p_۱+۲۷=۲۵-۲(۶)-۶(۵)+۲۷=۱۰$$

*۱۲. اگر β و γ دو ریشه دیگر معادلـه باشند داریم: $\beta\gamma=\frac{۱}{\alpha}$ و $\beta+\gamma=-۱-\alpha$

---

* حل مسألهٔ فوق با این روش تا روابط (۳) ابتدا توسط آقـای پیمان کسائی دانش‌آموز دوم ریاضی دبیرستان علامه حلی تهران حل و به‌اینجانب ارائه شدکـه ازآن در ریاضیدان جوان و مجله رشد ریاضی نیز استفاده گردید.

بنابراین β و γ ریشه‌های معادله $x^{۲}+(\alpha+۱)x+\frac{۱}{\alpha}=۰$ می‌باشند. ابتدا درمعادله‌فوق Δ را ساده می‌کنیم؛

$$\Delta=(\alpha+۱)^{۲}-\frac{۴}{\alpha}$$

چون α در معادله صدق می‌کند؛ $\alpha^{۳}+\alpha^{۲}-۲\alpha-۱=۰$ یا $(\alpha+۱)^{۲}(\alpha-۱)=a$

لذا، $(\alpha+۱)^{۲}=\frac{\alpha}{\alpha-۱}$ ، (۱) یا $(\alpha+۱)^{۲}=\frac{\alpha^{۲}}{\alpha(\alpha-۱)}$ که از آن نتیجه می‌گیریم $\alpha(\alpha-۱)=\frac{\alpha^{۲}}{(\alpha+۱)^{۲}}$ ، (۲) اکنون از روابط (۱) و (۲) چنین داریم:

$$\Delta=\frac{\alpha}{\alpha-۱}-\frac{۴}{\alpha}=\frac{(\alpha+۲)^{۲}}{\alpha(\alpha-۱)}=\frac{(\alpha+۲)^{۲}(\alpha+۱)^{۲}}{\alpha^{۲}}\Longrightarrow$$

$$\beta,\gamma=\frac{-۱-\alpha\pm\frac{(\alpha+۲)(\alpha+۱)}{\alpha}}{۲}\Longrightarrow\begin{cases}\beta=-\frac{\alpha+۱}{\alpha}\\ \gamma=-\frac{\alpha^{۲}-۱}{\alpha}\end{cases}\qquad(۳)$$

اما از رابطه $\alpha^{۳}+\alpha^{۲}-۲\alpha-۱=۰$ داریم $\alpha^{۲}-۱=-\alpha^{۳}+۲\alpha$ و $\alpha+۱=\alpha^{۳}+\alpha^{۲}-\alpha$ درنتیجه $\beta=-\alpha^{۲}-\alpha+۱$ و $\gamma=\alpha^{۲}-۲$

۱۳. معادله را به‌صورت (۱)، $\underbrace{\sqrt{x+۲\sqrt{x+\cdots+۲\sqrt{x+۲x}}}}_{n\ \text{رادیکال}}=x$ می‌نویسیم در طرف چپ در آخرین رادیکال به‌جای x مقدار آن را از معادله قرار می‌دهیم بدست می‌آید؛

$$x=\underbrace{\sqrt{x+۲\sqrt{x+\cdots\cdot+۲\sqrt{x+۲x}}}}_{۲n\ \text{رادیکال}}\qquad(۲)$$

دوباره به‌جای x درآخرین رادیکال معادله (۲) مقدار x را ازمعادله (۱) قرار می‌دهیم بدست می‌آید؛

$$x=\underbrace{\sqrt{x+۲\sqrt{x+\cdots\cdot+۲\sqrt{x+۲x}}}}_{۳n\ \text{رادیکال}}$$

اگر این عمل را به همین ترتیب ادامه دهیم تا تعداد رادیکالها به سمت بی‌نهایت میل کند چنین داریم:

$$x=\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{\dots}}}=$$

$$\lim_{N\to\infty}\underbrace{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\dots+2\sqrt{x+2x}}}}}_{N\ \text{رادیکال}}$$

بنابراین:

$$x=\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\dots}}}=$$

$$\sqrt{x+2\sqrt{[x+2\sqrt{x+2\sqrt{x+\dots}}]}}=\sqrt{x+2x}$$

درنتیجه $x=\sqrt{3x}$ یا $x^2=3x$ که $x=0$ و $x=3$ ریشه معادله است.

۱۴.

$$x_i^2<x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2=(x_1+x_2+\dots+x_n)^2-$$

$$2(x_1x_2+x_1x_3+\dots)=p_1^2-2p_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)=\frac{b^2-2ac}{a^2}\Longrightarrow$$

$$x_i^2<\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

برای قسمت دوم نامساوی گوئیم هریك از ریشه‌های معادله،

$$lx^n+kx^{n-1}+rx^{n-2}+\dots+bx+a=0$$

عکس هریك از ریشه‌های معادله فوق می‌باشند بنابراین؛

$$\forall_i,\ \frac{1}{x_i^2}<\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\dots+\frac{1}{x_n^2}=\left(-\frac{k}{l}\right)^2-2\frac{r}{l}=$$

$$\frac{k^2-2rl}{l^2}\Longrightarrow x_i^2>\frac{l^2}{k^2-2rl}$$

۱۵. اگر x_i ریشه معادله باشد$(i=1,2,3)$ بنا به‌مسئلهٔ(۱۴).

$$\frac{(-30)^2}{(11)^2-2(4)(-30)}<x_i^2<\frac{16-2(1)(-11)}{(1)^2}\Longrightarrow\frac{900}{361}<x_i^2<38$$

۱۶. چون $x=1$ در معادله صدق نمی‌کند لذا $x^5=\frac{x^5-1}{x-1}$ یا $x^6-2x^5+1=0$ با تبدیل x به $\frac{1}{x}$ به‌معادله $f(x)=x^6-2x+1=0$ می‌رسیم که $x_1=\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$ ریشه $f'(x)=0$ بوده و $f(x_1)<0$ یعنی معادله $f(x)=0$ دو ریشه دارد اما یك ریشه $x=1$ است که قابل‌قبول نیست لذا معادله یك ریشه حقیقی دارد.

۱۷. اگر $a=b$ که حکم بدیهی است فرض‌کنیم $a\neq b$ دراین صورت چندجمله‌ای $g(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم؛

$$g(x)=f(x)-f(b)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x)$$

واضح است‌که $g(a)=g(b)=0$ پس بنا به‌قضیه رل معادله $g'(x)=0$ یك ریشه‌حقیقی بین a و b دارد یعنی عددی مانند c بین a و b هست که $g'(c)=0$ و چون $g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ درنتیجه؛

$$0=g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\Longrightarrow f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$

۱۸. $\sqrt[n]{17\sqrt{5}+38}=x\Longrightarrow x+\frac{1}{x}=\sqrt{20}\Longrightarrow$

$$x^2-\sqrt{20}x+1=0\Longrightarrow x=\sqrt{5}+2$$

$$(\sqrt{5}+2)^3=17\sqrt{5}+38\Longrightarrow\sqrt[n]{(\sqrt{5}+2)^3}=\sqrt{5}+2\Longrightarrow n=3$$

۱۹. اگر نامساوی بازاء جمیع مقادیر $x\geqslant 0$ برقرار باشد درآن‌صورت بازاء $x=1$هم برقرار است یعنی $-a+1\geqslant 0$ یا $a\leqslant 1$. برعکس اگر $a\leqslant 1$ باشد،
$x^3-x^2-ax+1=(x-1)^2(x+1)+(1-a)x\Longrightarrow x\geqslant 0$.

۲۰. اگر دومعادله را ازهم کم‌کنیم داریم؛ $x^2-4x+4=0$ که ریشه آن $x=2$ همان ریشه‌مشترك دومعادله‌است. اگر $x=2$ رادریکی ازمعادلات قراردهیم؛ $2^n-8+2=0$ یا $2^n=6$ که در نتیجه $n=\frac{\log 6}{\log 2}$ یا $n=1+\log_2^3$.

۲۱. هرریشه معادله مطلوب را به X نشان می‌دهیم فرض‌کنیم مقدار $f(x)$ بازاء x برابر X شود یعنی؛ $X=x^4-6x^2+5x-1$ این معادله و معادله $x^3-6x+4=0$ ریشه

مشترك دارند بنابراین؛

$$x^{۴}-۶x^{۲}+۵x-۱-X=(x^{۳}-۶x+۴)x+x-۱-X=۰\Longrightarrow$$
$$x=X+۱\Longrightarrow(X+۱)^{۳}-۶(X+۱)+۴=۰\Longrightarrow$$
$$X^{۳}+۳X^{۲}-۳X-۱=۰$$

۲۲. باید معادله فوق ومشتق آن دوریشه مشترك داشته باشند.

۲۳.
$$\begin{cases}sp=۲۰\\ \dfrac{s}{p}=\dfrac{۵}{۴}\end{cases}\Longrightarrow s=\frac{۵}{۴}p\Longrightarrow\frac{۵}{۴}p^{۲}=۲۰\Longrightarrow$$

$$p=\pm۴ \text{ و } s=\pm۵$$

که x و y بدست می‌آیند (۴ و ۱) و (۱ و ۴) جوابهای دستگاه می‌باشند.

۲۴. اگر سه معادله را با هم جمع کنیم $xy+xz+yz=-۷$ بدست می‌آید که از آن با جای‌گذاری معادلات دراین معادله داریم؛ $yz=-۳$ و $xz=-۶$ و $xy=۲$ بنابراین $(xyz)^{۲}=۳۶$ یا $xyz=\pm۶$ که با توجه به‌سه معادله فوق دستگاه قابل‌حل است. (۳— و ۱ و۲) و (۳ و۱— و۲—) جواب می‌باشند.

۲۵. اگر $x+y=s$ و $xy=p$ فرض‌کنیم؛
$$\begin{cases}s^{۳}-۳ps+p^{۳}=۱۷\\ s+p=۵\end{cases}$$

که از آن $s=۳$ و $p=۲$. وهمچنین $s=۲$ و $p=۳$ بدست می‌آیند و سپس x و y مشخص می‌شوند (۲ و۱) و (۱ و۲) ریشه‌های دستگاه می‌باشند.

۲۶.
$$\begin{cases}xy+۲۴=۱۲y\\ ۳۶+xy=۱۰x\end{cases}\Longrightarrow ۱۲=۱۰x-۱۲y$$

سپس دستگاه قابل حل است. $y=۴$ ، $x=۶$ و $y=۵$؛ $x=\frac{۳۶}{۵}$ جوابند.

۲۷. بافرض $x+u=a$ و $y+z=b$ داریم؛

$$\begin{cases}a+b=۱۲\\ a^{۲}+b^{۲}-۲xu-۲yz=۵۰\\ a^{۳}+b^{۳}-۳(axu+byz)=۲۵۲\end{cases}$$

پس داریم؛

$$\begin{cases} a+b=۱۲ \\ ab+۲xu=۴۷ \Longrightarrow ab=۳۵,\ xu=۶,\ yz=۶ \\ ab+xu=۴۱ \end{cases}$$

که $a=۵$ و $b=۷$ و درنتیجه $x=۲$ و $y=۱$ و $z=۶$ و $u=۳$ یک‌دسته جواب است که با توجه به‌تقارن‌کلیه جابگشتهای این جوابها نیز جواب دستگاه می‌باشند.

۲۸. به سادگی داریم، $x=\frac{a^۳-۱}{a^۲-۱}$ و $y=\frac{-a^۲+a}{a^۲-۱}$ اگر $a\neq\pm۱$ آنگاه $x=\frac{a^۲+a+۱}{a+۱}$ و $y=\frac{-a}{a+۱}$ جوابهای‌دستگاه می‌باشند اما اگر $a=۱$ یا $a=-۱$ آنگاه دو دستگاه زیر را داریم،

$$\begin{cases} -x+y=۱ \\ x-y=۱ \end{cases} (۱) \quad و \quad \begin{cases} x+y=۱ \\ x+y=۱ \end{cases} (۲)$$

که دستگاه (۱) جواب ندارد و دستگاه (۲) بی‌شمار جواب دارد.

۲۹. $$\begin{cases} (x+y)^۲-۲xy=۲+۲a \\ x+y=\pm\sqrt{۱۴} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} xy=۶-a \\ x+y=\pm\sqrt{۱۴} \end{cases}$$

برای‌آنکه دستگاه فوق دارای‌جواب باشد بایدمعادله $t^۲\pm\sqrt{۱۴}t+۶-a=۰$ دارای جواب باشد بنابراین:

$$۱۴-۲۴+۴a\geqslant ۰ \Longrightarrow \boxed{a\geqslant\frac{۵}{۲}}$$

۳۰. چون $x^۲+x+۱>۰$ لذا آنرا در دوطرف نامعادله ضرب می‌کنیم ،

$$x^۲+۳x+a<۲x^۲+۲x+۲ \Longrightarrow x^۲-x+۲-a>۰$$

$$\triangle=۱-۸+۴a=۴a-۷<۰ \Longrightarrow a<\frac{۷}{۴}$$

۳۱. $y=\sqrt{x^۲+۵x+۲۸}$ فرض می‌کنیم دراین‌صورت $x^۲+۵x+۴=y^۲-۲۴$ و لذا نامعادله به‌صورت $y^۲-۵y-۲۴<۰$ یا $(y-۸)(y+۳)<۰$ تبدیل می‌شود که

باید، $-3<y<8$ بنابراین $-3<\sqrt{x^2+5x+28}<8$ نامعادله طرف چپ همواره برقرار است پس $0\leqslant x^2+5x+28<64$ نامساوی $x^2+5x+28>0$ همواره برقرار است لذا $x^2+5x-36<0$ یا $(x-4)(x+9)<0$ که جواب $-9<x<4$ است.

۳۲
$$\begin{cases} x^2-x-12\geqslant 0 \\ x^2-x-12<x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+3)\geqslant 0 \\ x>-12 \text{ و } x>0 \end{cases} \Longrightarrow x\geqslant 4$$

۳۳. اولاً باید $x^2-4x\geqslant 0$ که $x\geqslant 4$ یا $x\leqslant 0$.

ثانیاً اگر $3-x\geqslant 0$ یا $x\leqslant 3$ آنگاه نامعادله بازاء هر x که رادیکال با معنی است برقرار است یعنی $x\leqslant 0$ جواب است.

ثالثاً اگر $3-x<0$ یا $x>3$ با به توان دو رساندن داریم $2x>9$ یا $x>\frac{9}{2}$ با توجه به‌شرط $x\geqslant 4$ و $x>3$ جواب $x>\frac{9}{2}$ است. لذا جواب نامعادله

$$(-\infty, 0]\cup(4.5, +\infty)$$

است.

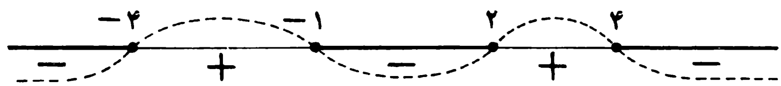
۳۴. شرط جواب آن است که $x+3\geqslant 0$ و $x-4\geqslant 0$ و لذا $x\geqslant 4$.

$$\sqrt{x+3}\geqslant 2+\sqrt{x-4} \Longrightarrow x+3\geqslant 4+x-4+4\sqrt{x-4} \Longrightarrow$$

$$\sqrt{x-4}\leqslant\frac{3}{4} \Longrightarrow x-4\leqslant\frac{9}{16} \Longrightarrow x\leqslant\frac{73}{16}$$

بنابراین جواب $4\leqslant x\leqslant\frac{73}{16}$ است.

۳۵. همواره $x^2+4>0$ و $x^2+x+1>0$ و $x^2-4x+4\geqslant 0$ بنابراین نامعادله هم‌ارز نامعادله $(16-x^2)(x^2-x-2)\leqslant 0$ و $x=2$ است.



$$x=0 \Longrightarrow 16(-2)<0$$

لذا جواب $(-\infty, -4]\cup[-1, 2]\cup[4, +\infty)$ است.

۳۶. $x^۲-۵x+۶>۰ \Longrightarrow x>۳$ یا $x<۲$

$$\frac{۳x-۲۱}{x^۲+x+۴}<۰ \Longrightarrow ۳x-۲۱<۰ \Longrightarrow x<۷$$

زیرا همواره $x^۲+x+۴>۰$ است.

لذا جواب به‌صورت زیر است:

$$[(-\infty, ۲)\bigcup(۳, +\infty)]\bigcap(-\infty, ۷)=(-\infty, ۲)\bigcup(۳, ۷)$$

۳۷. همواره $x^۲-۵x+۸>۰$ و $x^۲-۳x+۶>۰$ لذا مجموعه‌نقاط صدق تهی‌است دستگاه جواب ندارد.

۳۸. $n=[x]$ فرض می‌کنیم درنتیجه $x^۲+۷=۸n$ و از آنجا $n\geqslant ۰$ با استفاده از نامساوی $n\leqslant x<n+۱$ خواهیم داشت؛

$$n^۲+۷\leqslant x^۲+۷<(n+۱)^۲+۷=n^۲+۲n+۸$$

بنابراین: $n^۲+۷\leqslant ۸n<n^۲+۲n+۸$ از نامعادله $n^۲-۸n+۷\leqslant ۰$ مقادیر قابل قبول n درفاصله $[۱, ۷]$ ونامساوی $n^۲-۶n+۸>۰$ به‌ازاء مقادیر قابل قبول n که $n<۲$ یا $n>۴$ برقرار است لـذا مقادیر قابل قبول n در فاصله $[۱, ۲)$ یا $(۴, ۷]$ است وچون n صحیح است بنابراین؛ $n=۱, ۵, ۶, ۷$ ولذا $x^۲=۱, ۳۳, ۴۱, ۴۹$ و چون $x\geqslant ۰$ لذا $x=۱, \sqrt{۳۳}, \sqrt{۴۱}, ۷$ جواب معادله می‌باشند.

۳۹. اگر $n=[x]$ فرض‌کنیم $x=n+p$ و $۰\leqslant p<۱$ همچنین واضح است‌که $x\geqslant ۰$ زیرا بازاء مقادیر منفی x هیچگاه نامعادله برقرار نمی‌باشد $[x^۲]\geqslant[x]$ درنتیجه $n\geqslant ۰$ است و $n\in z$ بنابراین:

$$n-[n^۲+۲pn+p^۲]\geqslant ۰ \Longrightarrow n-n^۲-[۲np+p^۲]\geqslant ۰ \Longrightarrow$$

$$[۲np+p^۲]\leqslant n(۱-n)$$

چون $n\geqslant ۰$ و $۰\leqslant p<۱$ پس همواره $[۲np+p^۲]\geqslant ۰$ و لذا $n(۱-n)\geqslant ۰$ و این رابطه فقط وقتی ممکن است‌که $n=۰$ یا $n=۱$ باشد.

اگر $n=۰$ که درنتیجه $۰\leqslant x<۱$ ونامعادله هموارهٔ برقرار است.

اگر $n=۱$ که درنتیجه $۱\leqslant x<۲$ آنگاه $[۲p+p^۲]=۰$ یا $۰\leqslant p^۲+۲p<۱$ که ازآن $۰\leqslant p<\sqrt{۲}-۱$ بدست می‌آید وچون $x=۱+p$ لذا $۱\leqslant x<\sqrt{۲}$ یعنی جواب نامعادله $[۰, \sqrt{۲})$ است.

۴۰.
$$\begin{cases} x=n+p & ،۰\leqslant p<۱ \\ y=m+q & ،۰\leqslant q<۱ \end{cases} \Longrightarrow ۲n+[۲p]+۲m+[۲q]\geqslant$$

$$n+m+n+m+[p+q] \Longrightarrow [۲p]+[۲q]\geqslant[p+q]$$

که اگر چهار حالت درنظر بگیریم درستی نامساوی تحقیق می‌شود.

$$۱)\ ۰\leqslant p<\frac{۱}{۲} \text{ و } ۰\leqslant q<\frac{۱}{۲} \qquad ۲)\ ۰\leqslant p<\frac{۱}{۲} \text{ و } \frac{۱}{۲}<q<۱$$

$$۳)\ \frac{۱}{۲}<p<۱ \text{ و } ۰\leqslant q<\frac{۱}{۲} \qquad ۴)\ \frac{۱}{۲}\leqslant p<۱ \text{ و } \frac{۱}{۲}\leqslant q<۱$$

۴۱.
$$T=([\sqrt{۱}]+[\sqrt{۲}]+[\sqrt{۳}])+([\sqrt{۴}]+[\sqrt{۵}]+\cdots+[\sqrt{۸}])+\cdots$$

$$+([\sqrt{۵۷۶}]+\cdots+[\sqrt{۶۲۴}])+[\sqrt{۶۲۵}]=$$

$$۱\times۳+۲\times۵+\cdots+۲۴\times۴۹+۲۵=\sum_{n=۱}^{۲۴} n(۲n+۱)+۲۵$$

$$=۲\sum_{n=۱}^{۲۴} n^۲+\sum_{n=۱}^{۲۴} n+۲۵=۲\times\frac{۲۴\times۲۵\times۴۹}{۶}+\frac{۲۴(۲۵)}{۲}+۲۵$$

$$=۹۸۰۰+۳۰۰+۲۵=۱۰۱۲۵$$

۴۲. $a=(x+۱)^۲$ فرض می‌کنیم، $\frac{۱}{a-۱}-\frac{۱}{a}=\frac{۱}{۱۲}$.

بنابراین $a(a-۱)=۱۲$ یا $a^۲-a-۱۲=۰$ که ریشه‌های آن $a=۴$ و $a=-۳$ است که فقط $a=۴$ قابل قبول است.

$$(x+۱)^۲=۴ \Longrightarrow x+۱=\pm۲ \Longrightarrow x=۱ \text{ و } x=-۳$$

۴۳. برای آنکه معادله دارای جواب باشد باید $x\geqslant۱$ که در این صورت $\sqrt{x-۱}+\sqrt{x}\geqslant۱$ و $\frac{۱}{x^۴}\leqslant۱$ بنابراین فقط درحالتی معادله برقرار است که هردوطرف برابر یك باشند و لذا $x=۱$.

۴۴.
$$\frac{۱}{a}=-b^۲ \Longrightarrow \frac{x^۳}{c}+\frac{x^۲}{b}-b^۲x=bc \Longrightarrow$$

$$bx^۳+cx^۲-cb^۳x-b^۲c^۲=۰ \Longrightarrow x^۲(bx+c)-b^۲c(bx+c)=۰$$

$$\Longrightarrow (bx+c)(x^{2}-b^{2}c)=0 \Longrightarrow x=-\frac{c}{b} \text{ و } x=\pm\sqrt{b^{2}c}=$$

$$\pm b\sqrt{c} \quad (c>0)$$

۴۵. $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ 3-x\geqslant 0 \\ x^{2}-4x\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x\geqslant 0 \\ x\leqslant 3 \\ x\geqslant 4 \text{ یا } x\leqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow x=0$

تابع فقط بازاء $x=0$ تعریف شده است.

۴۶. هریك ازعبارتها باید برابر صفر شوند.

$$x^{4}-3x^{2}-4=0 \Longrightarrow \begin{cases} x^{2}=-1 \\ x^{2}=4 \end{cases} \Longrightarrow x=\pm 2$$

که هر دو جواب درمعادله $x^{3}-x^{2}-4x+4=0$ صدق می‌کنند پس باید عبارت سوم نیز صفر باشد.

$$xy^{2}-2xy+2=0 \text{ ، } \begin{cases} x=2 \Longrightarrow y^{2}-2y+1=0 \Longrightarrow y=1 \\ x=-2 \Longrightarrow y^{2}-2y-1=0 \Longrightarrow y=1\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین $y=1$، $x=2$ و $y=1\pm\sqrt{2}$، $x=-2$ ریشه‌های معادله هستند.

۴۷. ریشه‌های معادله درجه دوم گویا می‌باشند اگر وفقط اگر $b^{2}-4ac$ مربع کامل‌باشد چون a و b و c فردند لذا $a=2p+1$ و $b=2n+1$ و $c=2q+1$ درنتیجه،

$$b^{2}-4ac=(2n+1)^{2}-4(2p+1)(2q+1)=8k+5$$

و هیچ مربع کاملی نمی‌تواند به‌صورت $8k+5$ باشد. زیرا اگر n عددی صحیح باشد $n=4k$ یا $n=4k\pm 1$ یا $n=4k+2$ ولـذا $n^{2}=8k$ یا $n^{2}=8k+4$ و درنتیجه هیچ مربع کاملی به‌صورت $8k+5$ وجود ندارد.

حل مسائل بخش‌پذیری وبسط دو جمله‌ای

۱. اگر $x^{2}=ax-a^{2}$ قرار دهیم، $R=a^{2}(m-1)(x-a)$ کـه اگر $m=1$ آنگاه $R=0$.

۲. چون مقسوم‌علیه از درجه ۳ است پس باقیمانده حداکثر از درجه ۲ است. بنابراین

$$f(x)=(x^{2}-4)(x+1)g(x)+ax^{2}+bx+c$$

$$\begin{cases} f(-1)=1 \Longrightarrow a-b+c=1 \\ f(2)=-3 \Longrightarrow 4a^2+2b+c=-3 \Longrightarrow a=-\frac{1}{12} \\ f(-2)=2 \Longrightarrow 4a^2-2b+c=2 \end{cases}$$ و

$$b=-\frac{5}{4} \text{ و } c=-\frac{1}{6} \Longrightarrow R=-\frac{1}{12}x^2-\frac{5}{4}x-\frac{1}{6}$$

۳. باقیمانده عبارت بر x^2+1 برابر است با: $R_1=a(-1)^2+bx(-1)+c$ یا $R_1=a+c-bx$ و باقیمانده عبارت بر x^3+1 برابر است با:

$$R_2=-ax-b+c \quad \text{یا} \quad R_2=ax(-1)-b+c$$

بنابراین:

$$R_1R_2=(a+c-bx)(-ax-b+c)\equiv 2x^2-12x+10$$

که ازضرب طرف اول ومتحد قرار دادن جمله‌های هم‌درجه داریم، $a=2$ و $b=-1$ و $c=1$ یا $a=-2$، $b=1$ و $c=-1$.

۴. $f(x)=x^{2m}+x^m+1$ و $g(x)=x^2+x+1$، $f(x)$ و $g(x)$ را در $x-1$ ضرب می‌کنیم بنابراین باید $h(x)=(x-1)f(x)$ بر x^3-1 قابل قسمت باشد.

$$h(x)=x^{2m+1}-x^{2m}+x^{m+1}-x^m+x-1$$

برای m سه حالت درنظر می‌گیریم $m=3k$ و $m=3k+1$ و $m=3k+2$

$$\begin{cases} m=3k \\ x^3=1 \end{cases} \Longrightarrow R=3(x-1) \qquad \text{که قابل قسمت نیست}$$

اگر $m=3k+1$ و $m=3k+2$ قرار دهیم باقیمانده صفر می‌شود. پس، $m=3k\pm 1$.

۵. $$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(a-c)(b+c)$$

مثال (۲۲) فصل اول.

مشخص است که عبارت $(a+b+c)^{333}-a^{333}-b^{333}-c^{333}$ بر $a+b$ و $a+c$ و $b+c$ بخش‌پذیر است.

۶. چون $f(x)+2$ بر $(x-1)^3$ بخش‌پذیر است پس $f'(x)$ بر $(x-1)^2$ بخش‌پذیر است به همین ترتیب $f'(x)$ بر $(x+1)^2$ نیز بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$f'(x)=m(x-1)^2(x+1)^2=m(x^4-2x^2+1)$$

که m عددی ثابت است. اگر از آن تابع اولیه بگیریم داریم:

$$f(x)=m\left(\frac{۱}{۵}x^{۵}-\frac{۲}{۳}x^{۳}+x\right)+c$$

که برای محاسبه m و c گوئیم $f(۱)+۲=۰$ و $f(-۱)-۴=۰$ درنتیجه $c=۱$ و $.m=-\frac{۴۵}{۸}$

.۷
$$T_{k+۱}=\binom{۱۰}{k}(x^{۲})^{۱۰-k}(-۲x)^{k}=(-۲)^{k}\binom{۱۰}{k}x^{۲۰-k}$$

$$۲۰-k=۱۶\Longrightarrow\boxed{k=۴}\Longrightarrow T_{۵}=(-۲)^{۴}\binom{۱۰}{۴}x^{۱۶}=۱۶\left(\frac{۱۰!}{۴!۶!}\right)x^{۶}$$

$$=\frac{۱۶\times۷\times۸\times۹\times۱۰}{۲\times۳\times۴}x^{۱۶}=۳۳۶۰x^{۱۶}$$

.۸
$$T_{۵}=\binom{۱۷}{۴}(x)^{۱۷-۴}(۲x^{۳})^{۴}=\binom{۱۷}{۴}x^{۱۳}(۱۶x^{۱۲})=$$

$$۱۶\binom{۱۷}{۴}x^{۲۵}$$

.۹
$$T_{k+۱}=\binom{۳n}{k}x^{۳n-k}\left(-\frac{۱}{x^{۲}}\right)^{k}=(-۱)^{k}\binom{۳n}{k}x^{۳n-۳k}$$

$$۳n-۳k=۰\Longrightarrow\boxed{k=n}\Longrightarrow T_{n+۱}=\binom{۳n}{n}(-۱)^{n}=$$

$$=(-۱)^{n}\frac{(۳n)!}{n!(۲n)!}$$

.۱۰
$$T_{k+۱}=\binom{n}{k}\left(\frac{x^{\frac{۴}{۳}}}{y}\right)^{n-k}\left(x^{-\frac{۲۸}{۱۵}}\right)^{k}$$

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}=۷۹\Longrightarrow ۱+n+\frac{n(n-۱)}{۲}=۷۹\Longrightarrow$$

$$n^{۲}+n-۱۵۶=۰\Longrightarrow n=-۱۳ \text{ یا } n=۱۲$$

بنابراین $n=۱۲$ و درنتیجه،

$$T_{k+1}=\binom{۱۲}{k}\left(x^{\frac{۵\times ۴۸-۴۸k}{۱۵}}\right)\left(\frac{۱}{y}\right)^{۱۲-k}\Longrightarrow \boxed{k=۵}$$

$$T_{۶}=\binom{۱۲}{۵}y^{-۷}$$

.۱۱
$$T_{۳}=\binom{n}{۲}=۲۸\Longrightarrow \frac{n!}{۲!(n-۲)!}=۲۸\Longrightarrow$$

$$n(n-۱)=۵۶=۱\times ۵۶=۸\times ۷\Longrightarrow n=۸$$

$n=۸$ پس تعداد جملات ۹ می‌باشد و لذا جمله وسط جمله پنجم است.

$$T_{۵}=\binom{۸}{۴}(\sqrt{۱+x})^{۸-۴}(\sqrt{۱+x})^{۴}(-۱)^{۴}=۷۰(۱-x^{۲})^{۲}$$

.۱۲
$$T_{۵}=T_{۹}\Longrightarrow \binom{n}{۴}=\binom{n}{۸}\Longrightarrow$$

$$\frac{n!}{(n-۴)!\,۴!}=\frac{n!}{(n-۸)!\,۸!}\Longrightarrow (n-۴)!\,۴!=(n-۸)!\,۷!\Longrightarrow$$

$$(n-۴)(n-۵)(n-۶)(n-۷)=۸\times ۷\times ۶\times ۵\Longrightarrow$$

$$n-۴=۸\Longrightarrow \boxed{n=۱۲}$$

.۱۳
$$T_{k+1}=\binom{۱۰۰}{k}(\sqrt{۲})^{۱۰۰-k}(\sqrt[۴]{۳})^{k}=\binom{۱۰۰}{k}۲^{\frac{۱۰۰-k}{۲}}\times ۳^{\frac{k}{۴}}$$

چون $۱۰۰ \geqslant k \geqslant ۰$، بنابراین باید k را چنان پیدا کنیم که $\frac{k}{۴}$ و $\frac{۱۰۰-k}{۲}$ صحیح باشند.

$$\frac{k}{۴}\ \text{صحیح} \Longrightarrow k=۰,\ ۴,\ \ldots,\ ۹۶,\ ۱۰۰$$

که تعداد آنها ۲۶ عدد است، $\left[\frac{۱۰۰}{۴}\right]+۱=۲۶$ که بازاء تمـام این اعداد $\frac{۱۰۰-k}{۲}$ نیز صحیح است پس تعداد جمله‌های گویا برابر است با ۲۶ جمله.

۱۴. بنا به اتحاد $a^{n}-b^{n}$ یا دنباله تصاعد هندسی

$$f(x)=(۱+x)^{۱۰۰۱}-x^{۱۰۰۱}$$

لذا ضریب $x^{۵۰}$ را باید در بسط $(۱+x)^{۱۰۰۱}$ پیدا کنیم

$$T_{۵۱}=\binom{۱۰۰۱}{۵۰}(۱)^{۱۰۰۱-۵۰}\times x^{۵۰}=\binom{۱۰۰۱}{۵۰}x^{۵۰}$$

۱۵. $$T_{۲}+T_{n-۱}=۷۸\Longrightarrow\binom{n}{۱}+\binom{n}{n-۲}=۷۸$$

$$n+\frac{n(n-۱)}{۲}=۷۸\Longrightarrow n^{۲}+n-۱۵۶=۰\Longrightarrow n=-۱۳,\ n=۱۲$$

$$n=۱۲\Longrightarrow\left(x\sqrt[۴]{x}-\frac{۱}{\sqrt[۸]{x^{۵}}}\right)^{۱۲}$$

$$T_{k+۱}=\binom{۱۲}{k}(x\sqrt[۴]{x})^{۱۲-k}\left(-\frac{۱}{\sqrt[۸]{x^{۵}}}\right)^{k}=(-۱)^{k}\binom{۱۲}{k}x^{\frac{۱۲۰-۱۵k}{۸}}$$

$$۱۲۰-۱۵k=۰\Longrightarrow k=۸\Longrightarrow T_{۹}=\binom{۱۲}{۸}=۴۹۵$$

۱۶. $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

۱۷. $$\frac{۴x^{۲}+۳x+۵}{(x+۱)^{۲}(x-۲)}=\frac{a}{x+۱}+\frac{b}{(x+۱)^{۲}}+\frac{c}{x-۲}$$

روش اول مخرج مشترك گرفته دوطرف را متحد قرار می‌دهیم؛

$$۴x^{۲}+۳x+۵\equiv a(x+۱)(x-۲)+b(x-۲)+c(x+۱)^{۲}\equiv$$
$$(a+c)x^{۲}+(b-a+۲c)x-۲a-۲b+c\Longrightarrow$$
$$a+c=۴,\ b-a+۲c=۳,\ -۲a-۲b+c=۵\Longrightarrow a=۱,$$
$$b=-۲,\ c=۳$$

روش دوم:

$$x=۲\Longrightarrow ۱۶+۶+۵=(۲+۱)^{۲}c\Longrightarrow c=۳$$
$$x=-۱\Longrightarrow ۴-۳+۵=(-۱-۲)b\Longrightarrow ۶=-۳b\Longrightarrow b=-۲$$
$$x=۰\Longrightarrow\frac{۵}{-۲}=\frac{a}{۱}+\frac{-۲}{۱}+\frac{۳}{-۲}\Longrightarrow a=۱$$

چون مخرج یك کسر ریشه مضاعف‌دارد برای محاسبه a از ریشه‌ها نمی‌توان استفاده‌کرد.

۱۸. $T_{k+1}=\binom{7}{k}x^{\frac{7-k}{5}}\cdot y^{\frac{k}{3}} \qquad (\sqrt[5]{x}+\sqrt[3]{y})^7$

بازاء $k=0, 3, 6$ نسبت به y گویا است که بازاء هیچکدام x گویا نمی‌شود پس جمله گویا نسبت به x و y وجود ندارد.

حل مسائل مختلف

۱. $(2x^2-y^2)^2-4x^4y^4=(2x^2-y^2-2x^2y^2)(2x^2-y^2+2x^2y^2)$ (۱

$(x^2-3)^2-9+1=(x^2-3+2\sqrt{2})(x^2-3-2\sqrt{2})$ (۲

$ay^3-xy^3-ax^3+yx^3+a^3x-a^3y=$ (۳

$a(y^3-x^3)-yx(y^2-x^2)-a^3(y-x)=$

$(y-x)(a(y^2+x^2+xy)-yx(y+x)-a^2)=$

$(y-x)(ay^2+ax^2+xy-y^2x-yx^2-a^3)$

۲. اگر ریشه‌های معادله مطلوب را x_1 و x_2 بنامیم چنین داریم.

$$x_1+x_2=\alpha^3+\beta^3+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=$$

$$=(1)^3-3(-1)(+1)+\frac{1}{-1}=+4-1=3$$

$$x_1x_2=\left(\alpha^3+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^3+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^3\beta^3+\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{\alpha\beta}=$$

$$(-1)^3+(1)^2+2+\frac{1}{-1}=1 \Longrightarrow x^2-3x+1=0$$

۳. $x'=x''^2 \Longrightarrow x''^3=q \Longrightarrow x''=\sqrt[3]{q}$

۴. $\begin{cases}\alpha+\beta=-p\\ \alpha\beta=q\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}p+q=\alpha\beta-\alpha-\beta\\ pq=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2\end{cases}$

۵. $x_1+x_2=\dfrac{\alpha\beta'+\beta\alpha'}{\alpha'\beta'}+\dfrac{\alpha\alpha'+\beta\beta'}{\alpha'\beta'}=\dfrac{(\alpha'+\beta')(\alpha+\beta)}{\alpha'\beta'}$

$$=\frac{\left(-\frac{b'}{a'}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)}{\frac{c'}{a'}}=\frac{bb'}{ac'}$$

$$x_1x_2=\frac{1}{\alpha'^2\beta'^2}(\alpha^2\alpha'\beta'+\alpha\beta\beta'^2+\alpha\beta\alpha'^2+\alpha'\beta'\beta^2)=$$

$$\alpha'\beta'(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta(\alpha'+\beta')=\frac{c'}{a'}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{c}{a}\right)+\frac{c}{a}\left(-\frac{b'}{a'}\right)=$$

$$\frac{c'}{a'}\ \frac{b^2-ac}{a^2}\ -\frac{b'c}{aa'}$$

۶. اگر $pr-q^2\leqslant 0$ نباشد آنگاه $pr>q^2$ لذا چنین داریم:

$$\begin{cases} pr>q^2 \\ ac>b^2 \end{cases} \Longrightarrow aprc>b^2q^2$$

$$ap+cr=2bq \Longrightarrow a^2p^2+c^2r^2+2aprc=4b^2q^2$$

بنا براین از دو رابطه فوق نتیجه می‌گیریم؛

$$a^2p^2+c^2r^2+2aprc<4aprc \Longrightarrow (ap-cr)^2<0$$ که غیرممکن است

لذا باید $pr\leqslant q^2$ باشد.

۷.

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+c \Longrightarrow & -1\leqslant a-b+c\leqslant 1 \\ f(0)=-c \Longrightarrow & -1\leqslant -c\leqslant 1 \\ f(1)=a+b+c \Longrightarrow & -1\leqslant a+b+c\leqslant 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -2\leqslant a-b\leqslant 2 \\ -2\leqslant a+b\leqslant 2 \end{cases} \Longrightarrow -4\leqslant 2a\leqslant 4 \Longrightarrow -2\leqslant a\leqslant 2$$

$$\begin{cases} -2\leqslant a+b\leqslant 2 \\ -2\leqslant a\leqslant 2 \end{cases} \Longrightarrow -4\leqslant 2a+b\leqslant 4$$

$$\begin{cases} -2\leqslant a-b\leqslant 2 \\ -2\leqslant a\leqslant 2 \end{cases} \Longrightarrow -4\leqslant 2a-b\leqslant 4 \Longrightarrow -4\leqslant -2a+b\leqslant 4$$

اکنون گوئیم تابع $f'(x)=2ax+b$ اکیداً یکنوا است پس برد آن برابر است با $f'(1)=2a+b$ و $f'(-1)=-2a+b$ و لذا $-4\leqslant 2ax+b\leqslant 4$.

۸. الف ـ ریشه‌های معادله را $x_1=\alpha-3d$ و $x_2=\alpha-d$ و $x_3=\alpha+d$ و $x_4=\alpha+3d$ فرض می‌کنیم،

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=4\alpha=-p \\ x_1x_2+x_1x_3+\dots\dots+x_3x_4=6\alpha^2-10d^2=q \\ x_1x_2x_3+\dots=4\alpha^3-2\alpha d^2=-r \end{cases}$$

ازحذف α و d بین سه رابطه فوق ثابت می‌شود.

۸. ب ـ ریشه‌های معادله را $x_1=a$ و $x_2=ab$ و $x_3=ab^2$ و $x_4=ab^3$ فرض می‌کنیم با استفاده از روابط بین ریشه‌ها داریم،

$$\begin{cases} a(1+b+b^2+b^3)=-p \\ a^3b^3(1+b+b^2+b^3)=-r \Longrightarrow p^2S=r^2 \\ a^4b^6=S \end{cases}$$

b و a را حذف می‌کنیم.

۹. قدر نسبت تصاعد را r فرض می‌کنیم.

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)=$$
$$(a^2+a^2r^2+a^2r^4)(a^2r^2+a^2r^4+a^2r^6)=a^4r^2(1+r^2+r^4)^2=$$
$$(a^2r+a^2r^3+a^2r^5)^2=(ab+bc+cd)^2$$

۱۰. نامساوی زیر را داریم؛

$$\Big((a+b)+(b+c)+(c+a)\Big)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geqslant 9 \Longrightarrow$$
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geqslant\frac{9}{2}$$

با ضرب پرانتز اول در پرانتز دوم نامساوی مطلوب بدست می‌آید

۱۱. نامعادله را به‌صورت $\sqrt{n+k}-\sqrt{n-m}<\sqrt{n+m}-\sqrt{n-k}$ می‌نویسیم. بنابراین باید ثابت کنیم.

$$\frac{k+m}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n-m}}<\frac{k+m}{\sqrt{n+m}+\sqrt{n-k}} \qquad (1)$$

$\sqrt{n+k}>\sqrt{n+m}$ و $\sqrt{n-m}>\sqrt{n-k}$ ولذا نامساوی (۱) برقرار است.

۱۲. بنابه نامساوی مسئله ۵ نامساوی‌ها، نامساوی، Cauchy – Buniakowski چنین داریم:

$$(\sqrt{a_۱}\sqrt{a_۱}x_۱+\sqrt{a_۲}\sqrt{a_۲}x_۲+\cdots+\sqrt{a_n}\cdot\sqrt{a_n}x_n)^۲\leqslant$$
$$(\sqrt{a_۱^۲}+\sqrt{a_۲^۲}+\cdots+\sqrt{a_n^۲})(a_۱x_۱^۲+a_۲x_۲^۲+\cdots+a_nx_n^۲)=$$
$$(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)(a_۱x_۱^۲+a_۲x_۲^۲+\cdots+a_nx_n^۲)$$

۱۳. روش اول. باتوجه به‌نامساوی مسئله قبل (۱۲) چنین داریم،

$$\left(\frac{۱}{۲}a+\frac{۱}{۳}b+\frac{۱}{۶}c\right)^۲\leqslant\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}\right)\left(\frac{۱}{۲}a^۲+\frac{۱}{۳}b^۲+\frac{۱}{۶}c^۲\right)$$

که نامساوی بدست می‌آید.

روش دوم. طرف دوم را بـه‌توان می‌رسانیم و همه را به یك طرف منتقل می‌کنیم سپس آنرا به مجموع سه مربع کامل تبدیل می‌کنیم.

۱۴. درهرچهارضلعی محاطی اگر $p=\dfrac{a+b+c+d}{۲}$ باشد مساحت بـرابـر است با: $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ بنابراین

$$\sqrt{S}=\sqrt[۴]{(p-a)(p-b)(p-c)(p-b)}\leqslant\frac{p-a+p-b+p-c+p-d}{۴}$$
$$=\frac{p}{۲}\Longrightarrow S\leqslant\frac{p^۲}{۴}$$

۱۵. بنابه نامساوی مسئله (۵) نامساوی‌ها چنین داریم:

$$(a_۱\cdot۱+a_۲\cdot۱+\cdots+a_n\cdot۱)^۲\leqslant(a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲)(۱+۱+\cdots+۱)$$
$$\Longrightarrow(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)^۲\leqslant n(a_۱^۲+a_۲^۲+\cdots+a_n^۲)$$

۱۶. پرانتزها را ضرب و نامساوی واسطه حسابی و هندسی را به‌کار می‌بریم.

$$A=۱+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}+\frac{۱}{xy}+\frac{۱}{xz}+\frac{۱}{yz}+\frac{۱}{xyz}\geqslant$$
$$۱+۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{xyz}}+۳\sqrt[۳]{\frac{۱}{x^۲y^۲z^۲}}+\frac{۱}{xyz}=\left(۱+\frac{۱}{\sqrt[۳]{xyz}}\right)^۳$$

اما $\sqrt[۳]{xyz}\leqslant\dfrac{x+y+z}{۳}=\dfrac{۱}{۴}$ یا $\dfrac{۱}{\sqrt[۳]{xyz}}\geqslant ۴$ ولذا

$$A \geqslant (۱+۴)^۳ = ۱۲۵$$

۱۷. $\left(۱+\frac{۱}{x}\right)^n = \left(\frac{x}{x+۱}\right)^{-n} = \left(۱-\frac{۱}{x+۱}\right)^{-n} \geqslant ۱-(-n)\frac{۱}{x+۱}$

$=۱+\frac{n}{x+۱}$ از نامساوی برنولی استفاده کرده‌ایم.

۱۸. نامساوی را به‌صورت $\sqrt[n+۱]{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n} < ۱+\frac{۱}{n+۱}$ می‌نویسیم.

اکنون نامساوی حسابی و هندسی را به‌کار می‌بریم،

$$\sqrt[n+۱]{\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n} = \sqrt[n+۱]{۱\times\left(۱+\frac{۱}{n}\right)\left(۱+\frac{۱}{n}\right)\cdots\left(۱+\frac{۱}{n}\right)} <$$

$$\frac{۱+\left(۱+\frac{۱}{n}\right)+\left(۱+\frac{۱}{n}\right)+\cdots+\left(۱+\frac{۱}{n}\right)}{n+۱} = \frac{n+۱+۱}{n+۱} = ۱+\frac{۱}{n+۱}$$

۱۹. $C\left(f(x)\cdot f\left(\frac{۱}{x}\right)\right) = ۱+۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots+n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}+۱$

۲۰. $\frac{۱}{n\sqrt{n+۱}+(n+۱)\sqrt{n}} = \frac{۱}{\sqrt{n}} - \frac{۱}{\sqrt{n+۱}}$

بنابراین:

$$A = \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۲}} - \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \dots + \frac{۱}{\sqrt{n}} - \frac{۱}{\sqrt{n+۱}} = ۱ - \frac{۱}{\sqrt{n+۱}}$$

۲۱. اگر $n=۰$ آنگاه $[۱+\sqrt{۲}] = [۲\sqrt{۲}] = ۲$ که برقرار است.

حال اگر $n \geqslant ۱$ وفرض کنیم، $x=\sqrt{n}+\sqrt{n+۱}+\sqrt{n+۲}$ آنگاه

$$x^۲ = ۳n+۳+۲\left(\sqrt{n(n+۱)}+\sqrt{n(n+۲)}+\sqrt{(n+۱)(n+۲)}\right)$$

و روابط زیر را داریم.

$$\left(n+\frac{۲}{۵}\right)^۲ < n(n+۱) < \left(n+\frac{۱}{۲}\right)^۲$$

$$\left(n+\frac{۷}{۱۰}\right)^۲ < n(n+۲) < (n+۱)^۲$$

$$\left(n+\frac{7}{5}\right)^2<(n+1)(n+2)<\left(n+\frac{3}{2}\right)^2$$

از طرفین نامساوی‌ها جذر گرفته آنها را باهم جمع کرده در ۲ ضرب می‌کنیم.

$$6n+5<2\left(\sqrt{n(n+1)}+\sqrt{n(n+2)}+\sqrt{(n+1)(n+2)}\right)<6n+6$$

به طرفین $3n+3$ اضافه می‌کنیم داریم،

$$9n+8<x^2<9n+9$$

در نتیجه $\sqrt{9n+8}<x<\sqrt{9n+9}$ و $[x]=[\sqrt{9n+8}]$

۲۲. $x=\sqrt{n}+\sqrt{n+1} \Longrightarrow x^2=2n+1+2\sqrt{n^2+n}$

و $n^2<n(n+1)<\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$ لذا $2n<2\sqrt{n^2+n}<2n+1$

و $4n+1<x^2<4n+2$ در نتیجه $[x]=[\sqrt{4n+1}]$ و تساوی‌های بعدی نیز به‌سادگی بدست می‌آیند.

۲۳. فرض می‌کنیم $n=[x]$، $n\in z$ در این‌صورت $x=\sqrt[3]{n+3}$ بنابراین $[x]=[\sqrt[3]{n+3}]$ و درنتیجه $n\leqslant\sqrt[3]{n+3}<n+1$ یا $n^3\leqslant(n+3)<(n+1)^3$ و مشاهده می‌کنیم که این نامساوی فقط بازاء $n=1$ برقرار است یعنی $x=\sqrt[3]{4}$ جواب معادله است.

۲۴. روش اول. اگر طرفین نامساوی را معکوس کنیم $x^{2n}+\frac{2}{x^n}\geqslant 3$

بنا به نامساوی که اگر $x_1x_2x_3=1$ آنگاه $x_1+x_2+x_3\geqslant 3$، چون $x^{2n}\,\frac{1}{x^n}\,\frac{1}{x^n}=1$ درنتیجه، $x^{2n}+\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^n}\geqslant 3$ یا $x^{2n}+\frac{2}{x^n}\geqslant 3$

روش دوم.

$$x>0 \Longrightarrow x^n+\frac{1}{x^n}\geqslant 2 \Longrightarrow \begin{cases} x^{2n}+1\geqslant 2x^n \\ 2x^n+\frac{2}{x^n}\geqslant 4 \end{cases} \Longrightarrow$$

(نامساوی‌ها را با هم جمع می‌کنیم)

$$x^{2n}+\frac{2}{x^n}+1\geqslant 4 \Longrightarrow x^{2n}+\frac{2}{x^n}\geqslant 3$$

۲۵. $x>1 \Longrightarrow x^n+n-1>nx \Longrightarrow x^n-1>n(x-1) \Longrightarrow$

$$(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)>n(x-1)\Longrightarrow x^{n-1}+\cdots+1>n$$

که چون $x>1$ لـذا نامساوی فوق همواره برقرار است و در نتیجه نامساوی بـرقـرار خواهد بود.

۲۶.
$$\begin{cases}s^3-3ps=9\\ s^2-2p=5\end{cases}\Longrightarrow p=\frac{s^2-5}{2}\Longrightarrow$$

$$s^3-3\left(\frac{s^2-5}{2}\right)s=9\Longrightarrow s^3-15s+18=0\Longrightarrow$$

$$s^3-9s-6s+18=0\Longrightarrow s(s-3)(s+3)-6(s-3)=0\Longrightarrow$$

$$(s-3)(s^2+3s-6)=0\Longrightarrow\begin{cases}s=3\\ s=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{2}\end{cases}$$

سپس p نیز محاسبه شده ومعادله را تشکیل می‌دهیم. سه جواب وجود دارد.

۲۷.
$$\begin{cases}x'-x''=1\\ x'+x''=-p\Longrightarrow x'=\dfrac{1-p}{2}\ \text{و}\ x''=\dfrac{-p-1}{2}\\ x'x''=q\end{cases}$$

$$-\left(\frac{1-p}{2}\right)\left(\frac{p+1}{2}\right)=q\Longrightarrow-(1-p^2)=4q\Longrightarrow p^2-1=4q$$

۲۸. اگر $(x^2+2x+2)^2=a$ فرض کنیم

$$a^2-5ax^2+4x^4=0\Longrightarrow(a-4x^2)(a-x^2)=0\Longrightarrow$$

$$\begin{cases}a=4x^2\\ a=x^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}(x^2+2x+2)^2=4x^2\\ (x^2+2x+2)^2=x^2\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}x^2+2x+2=\pm2x\\ x^2+2x+2=\pm x\end{cases}$$

لذا چهار معادله زیر را داریم:

$$\begin{cases}x^2+2=0\\ x^2+4x+2=0\\ x^2+3x+2=0\\ x^2+x+2=0\end{cases}$$

فقط معادلات دوم وسوم ریشه دارند

$$x=-۱ \ ، -۲ \ و \ -۲\pm\sqrt{۲}$$

.۲۹ $x_۱=x_۲^۲$ و $x_۱x_۲=b \Longrightarrow x_۲^۳=b \Longrightarrow x_۲=\sqrt[۳]{b}$

طرفین را بــه توان سه می‌رسانیم، $\sqrt[۳]{b^۲}+a\sqrt[۳]{b}+b=۰ \Longrightarrow a\sqrt[۳]{b}=-b-\sqrt[۳]{b^۲}$
رابطه حاصل می‌شود.

.۳۰ $(a+b+c)^۲\leqslant ۳(a^۲+b^۲+c^۲) \Longrightarrow$

$$۲ab+۲ac+۲bc\leqslant ۲a^۲+۲b^۲+۲c^۲$$

که نامساوی فوق همواره برقرار است.

پاسخ تشریحی تستها

۱. پاسخ تستهای فصل اول

«اتحادها و رادیکالها»

۱. (ب) $A=\sqrt{۲}\cdot\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\cdot\sqrt{۴-(۲+\sqrt{۲})}=\sqrt{۲}\sqrt{۲+\sqrt{۲}}\cdot\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$
$=\sqrt{۲}\cdot\sqrt{۴-۲}=۲$

۲. (ج) $a+b=c+۱ \Longrightarrow a^۲+b^۲+۲ab=c^۲+۲c+۱ \Longrightarrow$
$a^۲+b^۲-c^۲=۲\left(\frac{۱}{۲}-ab+c\right)$

۳. (ج) $\begin{cases}a^۲+b^۲+۲ab=۸ab\\ a^۲+b^۲-۲ab=۴ab\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}(a+b)^۲=۸ab\\ (a-b)^۲=۴ab\end{cases} \Longrightarrow$
$\frac{a+b}{a-b}=\sqrt{\frac{۸}{۴}}=\sqrt{۲}$

۴. (الف) $\sqrt{۹-۲\sqrt{۱۴}}=\sqrt{۷+۲-۲\sqrt{۱۴}}=\sqrt{(\sqrt{۷}-\sqrt{۲})^۲}=$
$|\sqrt{۷}-\sqrt{۲}|=\sqrt{۷}-\sqrt{۲}$

می‌توان از فرمول صفحه ۴۴ نیز استفاده کرد.

۵. (ب) $۱+x\geqslant ۰ \Longrightarrow x\geqslant -۱$

همواره برقرار است، $\sqrt{۱+x}\leqslant ۱+\frac{x}{۲} \Longrightarrow ۱+x\leqslant ۱+x+\frac{x^۲}{۴}$ و

۶. (ج) $ab=\frac{۱}{c} \Longrightarrow \frac{۱+c}{۱+\frac{۱}{c}}=\frac{c(۱+c)}{۱+c}=c$

۰۷. (الف) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\dfrac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{(x+y)^2-2xy}=\dfrac{27+9}{9+2}=\dfrac{36}{11}$

۰۸. (الف) $\begin{cases} f(1)=3^n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n} \\ f(-1)=1=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{2n} \end{cases} \Longrightarrow$

$3^n+1=2a_0+2a_2+\cdots+2a_{2n} \Longrightarrow 3^n+1=2k \Longrightarrow k=\dfrac{3^n+1}{2}$

۰۹. (الف) $x=\sqrt{1+\sqrt{2}} \Longrightarrow x^2=1+\sqrt{2} \Longrightarrow x^4=3+2\sqrt{2}$

۰۱۰. (ج) برای آنکه عبارت معین باشد باید $x\leqslant 0$ باشد

$$\sqrt{\sqrt[4]{x^4\cdot x^3\sqrt[5]{x^7}}}=\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[5]{x^{42}}}}=\sqrt[40]{x^{42}}=\sqrt[20]{|x^{21}|}=|x|\sqrt[20]{|x|}$$

$$=-x\sqrt[20]{-x}$$

۰۱۱. (ج) $\dfrac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{y}(\sqrt{y}-\sqrt{x})}=-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=-\sqrt{\dfrac{x}{y}}$

۰۱۲. (الف) $\dfrac{9+4\sqrt{5}-9+4\sqrt{5}}{81-80}=8\sqrt{5}$

۰۱۳. (ب) $\dfrac{x^n(5x^2+4x-9)}{x^n(x^2-1)}=\dfrac{(x-1)(5x+9)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{5x+9}{x+1}$

۰۱۴. (الف) $x^2(x-1)-(x-1)=0 \Longrightarrow (x-1)(x^2-1)=0 \Longrightarrow$

$(x-1)^2(x+1)=0 \Longrightarrow x=1$ ریشه مضاعف ، $x=-1$

۰۱۵. (الف) $x-5=0 \Longrightarrow x=5$ و $10+5y=0 \Longrightarrow y=-2$

$2x+y-z=0 \Longrightarrow z=10-2=8$

۰۱۶. (الف) $x^4+y^4-x^2y^2(x+y)+16xy=x^4+y^4-2x^2y^2+16xy$

$=(x^2-y^2)^2+16xy=$

$4(x-y)^2+16xy=4(x^2+y^2+2xy)=4(x+y)^2=16$

روش دوم؛ چون $x+y=2$ است می‌توان فرض کرد $x=1$ و $y=1$ لذا عبارت برابر ۱۶ می‌شود.

۱۷. (ب) $(x-\sqrt{۲})^{۲}-۲+(y-۲\sqrt{۲})^{۲}-۸+۱۰=۰ \Rightarrow$
$(x-\sqrt{۲})^{۲}+(y-۲\sqrt{۲})^{۲}=۰$ ، $x=\sqrt{۲}$ و $y=۲\sqrt{۲}$

۱۸. (ج) روش اول: $n=۱$ قرار می‌دهیم $A_۱=[۱ ,۲]$ پس ۲ متعلق به‌اجتماع فوق است وفقط در گزینه (ج) چنین است.

روش دوم: $\bigcup_{i=۱}^{n} A_i=\left[\frac{۱}{n},۲\right] \Rightarrow \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i=(۰,۲]$

۱۹. (ب) چون توان فرد است جهت تغییر نمی‌کند.

۲۰. الف $x=۳ \Rightarrow -۵=۳+a+b-۱ \Rightarrow a+b=-۷$

۲۱. (د) $-x+|x|+|-۲|=-x+x+۲=۲$

۲۲. (ج) روش اول:

$$\frac{(x+y+z)(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-xy-xz-yz)}{۲(x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}-xy-xz-yz)}=\frac{۱}{۲}(x+y+z)$$

روش دوم: $z=۱$ و $x=y=۰$ قرار می‌دهیم حاصل عبارت برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شودکه فقط در گزینه (ج) برابر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

روش سوم: اگرصورت و مخرج را برحسب x مرتب‌کنیم و برهم تقسیم‌کنیم $\frac{x^{۳}}{۲x^{۲}}=\frac{۱}{۲}x$ که فقط در گزینه (ج) $\frac{۱}{۲}x$ وجود دارد البته بنا به‌تقارن $\frac{۱}{۲}y$ و $\frac{۱}{۲}z$ نیز باید وجود داشته باشد.

۲۳. (ب) $a^{۲}-۲a+۱+b^{۲}-۲b+۱+c^{۲}-۲c+۱=۰ \Rightarrow$
$(a-۱)^{۲}+(b-۱)^{۲}+(c-۱)^{۲}=۰ \Rightarrow a=b=c=۱$

۲۴. (ج) $\frac{\sqrt{۲}(\sqrt{۲}+۱)}{\sqrt{۳}(\sqrt{۲}+۱)}=\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۶}}{۳}$

۲۵. (ب) $x=۱۱ \Rightarrow x+۱=۱۲ \Rightarrow$
$x^{۵}-(x+۱)x^{۴}+(x+۱)x^{۳}-(x+۱)x^{۲}+(x+۱)x-۱=$
$x^{۵}-x^{۵}-x^{۴}+x^{۴}+x^{۳}-x^{۳}-x^{۲}+x^{۲}+x-۱=x-۱=۱۱-۱=۱۰$

۲۶. (ج) $\frac{۱}{۴\times۵}+\frac{۱}{۵\times۶}+\frac{۱}{۶\times۷}+\cdots+\frac{۱}{۱۰\times۱۱}+\frac{۱}{۱۱\times۱۲}=$

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

۲۷. (ب)

$$\left(\frac{a\sqrt{a}-a\sqrt{b}+b\sqrt{b}-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)^2=$$

$$\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a-b)}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^2=$$

$$\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b})}\right)^2=1$$

۲۸. (د)

$$(x-1)^2+(y+1)^2+\left(\frac{1}{2}z-1\right)^2=0 \Longrightarrow x=1,$$

$$y=-1,\ z=2$$

۲۹. (د)

$$x^2(y^2-1)-(y^2-1)=0 \Longrightarrow (x^2-1)(y^2-1)=0 \Longrightarrow$$

$x=\pm 1$ و $y\in R$ یا $y=\pm 1$ و $x\in R$

۳۰. (ب)

$$x^3(x^2+1)-(x^2+1)=0 \Longrightarrow (x^2+1)(x^3-1)=0 \Longrightarrow x=1$$

۳۱. (الف).

$$(\sqrt{a+1}-\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{a-1})\times\left(\frac{\sqrt{a-1}}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}}\right)$$

$$=\sqrt{a-1}$$

۳۲. (الف)

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}}=\sqrt{\frac{6+4\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}$$

$$=\sqrt{2}+1$$

روش دوم:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}}=\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}}=\sqrt{2}+1$$

۳۳. (ج)

$$\sqrt[12]{(7-4\sqrt{3})^3(7+4\sqrt{3})^4}=\sqrt[12]{7+4\sqrt{3}}=\sqrt[12]{(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt[6]{2+\sqrt{3}}$$

۳۴. (ب)
$$\frac{۱}{۴x}\left(\frac{(x+\sqrt{x^۲-۱})^۲-(x-\sqrt{x^۲-۱})^۲}{x^۲-x^۲+۱}\right)=$$

$$\frac{۱}{۴x}\left((x+\sqrt{x^۲-۱}+x-\sqrt{x^۲-۱})(x+\sqrt{x^۲-۱}-x+\sqrt{x^۲-۱}\right)=$$

$$\frac{۱}{۲}(۲\sqrt{x^۲-۱})=\sqrt{x^۲-۱}$$

می‌توانیم به‌روش دیگر پرانتزها را به‌توان برسانیم.

۳۵. (د) باید b و a هم علامت باشند تا رادیکالها معین باشند و با این شرط طرف راست همواره منفی است درحالی‌که طرف چپ مثبت است و این ممکن نیست یا به‌طریق‌دیگر چنین داریم:

$$\sqrt{a^۳b^۲\sqrt[۳]{b}}=|ab|\sqrt{a\sqrt[۳]{b}}=-ab\sqrt{a\sqrt[۳]{b}}\Longrightarrow |ab|=-ab\Longrightarrow ab<۰$$

که ممکن نیست زیرا a و b باید هم علامت باشند.

۳۶. (ب) اولاً باید $ab\geqslant ۰$ یعنی b و a هم علامت باشند ثانیاً،

$$\sqrt{a^۳b^۵}=|a|b^۲\sqrt{|ab|}=-ab^۲\sqrt{ab}\Longrightarrow a\leqslant ۰\Longrightarrow b\leqslant ۰$$

۳۷. (ب) $x^۲+۷xy+۱۲y^۲=(x+۳y)(x+۴y)$ و

$$(x^۲-۲xy-۱۵y^۲)=(x+۳y)(x-۵y)$$

$$\text{ب.م.م}=(x+۳y)$$

۳۸. (د) $x^۲=\sqrt[۳]{۸}=۲$

۳۹. الف
$$\frac{a^۲-(b+c)^۲}{(a+b)^۲-c^۲}\times\frac{a+b-c}{-a+b+c}=$$

$$\frac{(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}=-۱$$

۴۰. (د) $x^۲+\frac{۱}{x^۲}=۱۴\Longrightarrow\left(x-\frac{۱}{x}\right)^۲=۱۲\Longrightarrow x-\frac{۱}{x}=۲\sqrt{۳}$

$$x^۳-\frac{۱}{x^۳}=\left(x-\frac{۱}{x}\right)\left(x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۱\right)=۲\sqrt{۳}(۱۵)=۳۰\sqrt{۳}$$

۴۱. (ج) $x+\frac{۱}{x}+۱=۴\Longrightarrow x+\frac{۱}{x}=۳$

$$A=\frac{x^۲}{x^۴+x^۲+۱}\Longrightarrow\frac{۱}{A}=x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۱=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۱=۹-۱=۸$$

$$\Longrightarrow A=\frac{۱}{۸}$$

۴۲. (ب) $a+b+c\neq ۰$ و $a^۳+b^۳+c^۳=۳abc\Longrightarrow a=b=c$

$$\frac{۳\sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{۳a}}=\frac{۳}{\sqrt[۳]{۳}}=\sqrt[۳]{۹}$$

۴۳. (الف) $a^۲+b^۲+c^۲=ab+ac+bc\Longrightarrow$

$$(a-b)^۲+(b-c)^۲+(c-a)^۲=۰$$

$$\Longrightarrow a=b=c \text{ و } \frac{۳\sqrt[۳]{a^۳}}{۳a}=۱$$

۴۴. (الف) $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$ و

$$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$$

$$b^۲-a^۲=-(a-b)(a+b)\quad \text{ک.م.م}=(a^۳-b^۳)(a^۳+b^۳)=a^۶-b^۶$$

۴۵. (ج) $a\sqrt{۳}+b\sqrt{۳}+a-b\equiv ۱\Longrightarrow(a+b)\sqrt{۳}+a-b\equiv ۱$

$$\Longrightarrow\begin{cases}a+b=۰\\ a-b=۱\end{cases}\Longrightarrow a=\frac{۱}{۲} \text{ و } b=-\frac{۱}{۲}$$

۴۶. (ب) $((\sqrt{۶}-\sqrt{۵})(\sqrt{۶}+\sqrt{۵}))^{m-۲}(\sqrt{۶}+\sqrt{۵})^۲=(۱)(۱۱-۲\sqrt{۳۰})$

۴۷. (ج) در عبارت فرض اگر $x=-y$ قرار دهیم صدق می‌کند و چون عبارت نسبت به‌حروف متقارن است لذا دارای‌عامل $(x+y)(y+z)(z+x)$ است و درنتیجه‌حداقل یکی از پرانتزها صفر است.

۴۸. (ب) $x^۲+x+۱=۰\Longrightarrow x^۳=۱\Longrightarrow A=x^{۳۰۰}.x^۲+\dfrac{۱}{x^{۳۰۰}.x^۲}=$

$$x^۲+\frac{۱}{x^۲}=\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۲=(-۱)^۲-۲=-۱\quad\left(x+\frac{۱}{x}+۱=۰\right)$$

روش دوم،

$$x^{۳۰۲}=t \Longrightarrow A=t+\frac{۱}{t}=\frac{t^{۲}+۱}{t}=\frac{-t}{t}=-۱$$

۴۹. (د) $(۱)^{۱۰۰}(-۱)^{۱۰}(۲)^{۳}=۸$

۵۰. (ب) $y=۰ \Longrightarrow f(x+۰)=f(x)+f(۰) \Longrightarrow f(۰)=۰$

۵۱. (الف) $y=-x \Longrightarrow f(x-x)=f(x)+f(-x) \Longrightarrow$

$$f(x)+f(-x)=۰ \Longrightarrow f(-x)=-f(x)$$

۵۲. (ج) $\begin{cases} x-۱\geqslant ۰ \\ x+۱>۰ \end{cases} \Longrightarrow x\geqslant ۱$ و $\frac{x-۱}{x+۱}\geqslant ۰ \Longrightarrow x\geqslant ۱$ یا $x<-۱$

$$x^{۲}-۱>۰ \Longrightarrow x>۱ \text{ یا } x<-۱$$

که جواب مشترک $x>۱$ است.

۵۳. (ب) $\sqrt[۴]{x}=۱ \Longrightarrow x=۱ \Longrightarrow x^{۴}+\frac{۱}{x^{۴}}=۱+۱=۲$

۵۴. (ج) $f(x,\, y)=\dfrac{\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}}{\frac{۱}{x}-\frac{۱}{y}}=\dfrac{x+y}{y-x} \Longrightarrow f(۲,\, ۳)=\dfrac{۲+۳}{۳-۲}=۵$

یا به روش دیگر $\frac{۱}{x}=۲$ یا $x=\frac{۱}{۲}$ و $\frac{۱}{y}=۳$ یا $y=\frac{۱}{۳}$ درنتیجه:

$$f(۲,\, ۳)=\dfrac{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}}=\dfrac{۳+۲}{۳-۲}=۵$$

۵۵. (ج) $f\left(-\frac{۱}{a}\right)=\sqrt{\frac{۱}{a^{۲}}+۱}=\sqrt{\frac{۱+a^{۲}}{a^{۲}}}=\frac{\sqrt{a^{۲}+۱}}{|a|}=\frac{f(a)}{-a}$

۵۶. (ب) $\frac{x+۱}{x-۱}=۳ \Longrightarrow x=۲ ،f(۳)=(۲)^{۲}-۲(۲)=۰$

۵۷. (ب) $(۱+۲+۳+\cdots+۱۰)x^{۹}=\frac{۱۰(۱۰+۱)}{۲}x^{۹}=۵۵x^{۹}$

۵۸. (د) $\begin{cases} m^2-4=0 \\ m+2=0 \end{cases} \Rightarrow m=-2$ ، $(m^2-4)x=m+2$

۵۹. (ب) $\begin{cases} a^2-9=0 \\ a-3\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=-3}$ ، $(a^2-9)x=a-3$

۶۰. (د) $a-b=0$ و $a=1 \Rightarrow a=b=1$

۶۱. (الف) $x^2+(a-b)x-ab=x^2 \Rightarrow (a-b)x=ab \Rightarrow a\neq b$

۶۲. (الف) $x(1-x^2)\leqslant 0$

$-1\leqslant x\leqslant 0$ یا $x\geqslant 1$

۶۳. (ب) $\begin{cases} x-1<2x \\ 2x-4>x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>4 \end{cases} \Rightarrow x>4$

۶۴. (ب) $(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})=x-y$

۶۵. (د) $\begin{cases} x<-1 \\ x>2 \end{cases}$ اشتراك آنها تهی است

۶۶. (ج) $(a^2+ab+b^2-a^2+ab-b^2)\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\right)=2ab\left(\frac{a^2-b^2}{2ab}\right)$

$=a^2-b^2$

۶۷. روش اول: باید $x\geqslant 0$ که بازاء $x=0$ نیز برقراراست پس‌جواب گزینه (د) است.

روش دوم:

$$\begin{cases} 2\sqrt{x}+2>3\sqrt{x}+1 \Rightarrow \sqrt{x}<1 \Rightarrow x<1 \Rightarrow 0\leqslant x<1 \\ x\geqslant 0 \end{cases}$$

۲. پاسخ تستهای فصل دوم

«نامساوی‌ها»

۱. (د) $\frac{x}{y}>0$ یا $xy>0$

۲. (ج) $a=\sqrt[n]{\frac{2a^n}{2}}<A=\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}<\sqrt[n]{\frac{2b^n}{2}}=b$

۳. (ب) $(a^2+b^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\geqslant 2^2=4 \Longrightarrow S\geqslant 0$

۴. (ب)
$$\begin{cases} x\leqslant 0 \Longrightarrow A>0 \\ 0<x\leqslant 1 \Longrightarrow A=x^8+x^2(1-x^3)+(1-x)>0 \\ x>1 \Longrightarrow A=x^5(x^3-1)+x(x-1)+1>0 \end{cases}$$
$\forall x\in R$؛ $A>0$،

۵. (د) $a^3\geqslant a^2 \Longrightarrow a\geqslant 1$

۶. (ج)
$$\begin{cases}(a+b)(a^2-ab+b^2)\geqslant ab(a+b) \\ a+b\geqslant 0\end{cases} \Longleftrightarrow$$
$$\begin{cases}a^2+b^2\geqslant 2ab \\ a+b\geqslant 0\end{cases}$$
همواره برقرار است

۷. (الف) زیرا نامساوی (الف) معادل $a+b\geqslant\sqrt{ab}$ است که همواره درست نیست. صورت صحیح نامساوی فوق $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$ که معادل $\frac{2ab}{a+b}\leqslant\sqrt{ab}$ و این نیز معادل $1\leqslant\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$ یا $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$ است نامساوی فوق نامساوی‌واسطه هندسی‌و توافقی‌است یعنی همواره، $G_n\geqslant H_n$.

درمورد(ب)اگرطرفین‌رابه‌توان‌دوبرسانیم $2\sqrt{ab}>0$ یا $a+b+2\sqrt{ab}>a+b$ که همواره‌برقرار است درمورد (ج) $5^4>4^5$ و درموردگزینه (د) اگرطرفین را به‌توان ۶ برسانیم $(a^2+b^2)^3>(a^3+b^3)^2$ یا $3(a^2+b^2)<2ab$ که همواره برقرار است.

۸. (ج) $x=0 \Longrightarrow S=0$ و $x\geqslant 0 \Longrightarrow S\geqslant 0$

$$\frac{1}{S}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\geqslant\frac{1}{2}(2)=1 \Longrightarrow S\leqslant 1 \Longrightarrow 0\leqslant S\leqslant 1$$

۹. (ج) $0=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2A \Longrightarrow$

$$2A=-(x^2+y^2+z^2)\leqslant 0$$

۱۰. (د) اولاً باید $a\neq 0$ و $b\neq 0$ ثانیاً اگر s را در a^2b^2 ضرب کنیم

$$a^2b^2s=a^3+b^3-ab(a+b)=(a+b)(a^2+b^2-2ab)$$

$$=(a+b)(a-b)^2\geqslant 0 \Longrightarrow a+b\geqslant 0$$

۱۲. (ج) اگر $a=b=-1$ عبارت مینیمم است. $s=(a-b)^2+(b+1)^2+1\geqslant 1$

۱۳. (ج) $y=\frac{1}{x}<0 \Longrightarrow x+\frac{1}{x}\leqslant -2 \Longrightarrow s\leqslant -2$

۱۴. (الف) $\frac{1}{3}<\frac{1}{a}<\frac{1}{2}$ و $-\frac{1}{2}<\frac{1}{b}<-\frac{1}{3} \Longrightarrow -\frac{1}{6}<A<\frac{1}{6}$

۱۵. (ب) $s=(a+b)(a^2+b^2-ab)>0$

۱۶. (الف) $x^2\geqslant 0$ و $x^6\geqslant 0$ $y\geqslant 7$

۱۷. (ب) $s=xy+\frac{1}{xy}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+xy+\frac{1}{xy}-\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=2\left(xy+\frac{1}{xy}\right)\geqslant 4$

۱۸. (د) $A=\frac{(x^4-2x^2+2)}{(x^4+2)^2-4x^2}=\frac{x^2-2x+2}{(x^4-2x^2+2)(x^4+2x^2+2)}$

$$\Longrightarrow \frac{1}{A}=x^4+2x^2+2$$

$\frac{1}{A}\geqslant 2 \Longrightarrow A\leqslant\frac{1}{2}$ و $A>0 \Longrightarrow 0<A\leqslant\frac{1}{2}$

۱۹. (ج) اولاً $A\leqslant 4$ ثانیاً،

$$4+2A\geqslant 0 \Longrightarrow A\geqslant -2 \quad ، -2\leqslant A\leqslant 4$$

۲۰. (ب) $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+xz+yz=12 \Longrightarrow B\geqslant 12$

۲۱. (ب) $s^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+12\geqslant 18 \Longrightarrow |s|\geqslant 3\sqrt{2}$

۰.۲۲ (ب) $y=x+\frac{۴}{x}\geqslant ۲\sqrt{x.\frac{۴}{x}}=۴ \Longrightarrow \mathrm{Min}y=۴$

۰.۲۳ (الف) $۴۸=xy+yz+xz\geqslant ۳\sqrt[۳]{x^۲y^۲z^۲}\Longrightarrow x^۲y^۲z^۲\leqslant ۱۶^۳ \Longrightarrow$

$xyz\leqslant ۶۴ \Longrightarrow \mathrm{Max}(xyz)=۶۴$

روش دوم: باید $x^۲y^۲z^۲$ ماکزیمم باشد و این درصورتی است که متغییرها مساوی باشند $xy=yz=xz=۱۶$ درنتیجه $x=y=z=۲$ و لذا $\mathrm{Max}(xyz)=۶۴$ البته به‌شرطی‌که x و y و z مثبت باشند

۰.۲۴ (ب) $x^۲+y^۲\geqslant\frac{(x+y)^۲}{۲}=۲$

روش دوم: بنا به مسألهٔ (۱۰) همین فصل s وقتی مینیمم است که

$x=y=\frac{۲}{۲}=۱$

۰.۲۵ (ج) بنا به مسأله (۱۰) همین فصل،

$x^۲+y^۲\geqslant\frac{۲۵}{۹+۱۶}=۱ \Longrightarrow \mathrm{Min}\,s=۱$

۰.۲۶ (ج) $۵\mathrm{tg}x\times ۴\mathrm{cotg}x=۲۰ \Longrightarrow ۵\mathrm{tg}x=۴\mathrm{cotg}x=\sqrt{۲۰}\Longrightarrow$

$\mathrm{tg}^۲x=\frac{۴}{۵}\Longrightarrow \mathrm{tg}x=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}\Longrightarrow \mathrm{cotg}x=\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ ، $\mathrm{Min}y=$

$=\sqrt{۲۰}+\sqrt{۲۰}=۴\sqrt{۵}$

۰.۲۷ (ب) $s=\frac{x^۲+y^۲}{k^۲}$ و $x^۲+y^۲$ وقتی مینیمم است کـه $x=y=\sqrt{k}$ و در نتیجه

$\mathrm{Min}\,s=\frac{k+k}{k^۲}=\frac{۲}{k}$

۰.۲۸ (ب) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}\geqslant\frac{۴}{a}$ یا $(x+y)\left(\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}\right)\geqslant ۴$

۰.۲۹ (ب) $y=۴x^۳+\frac{۱۶}{x^۳}\geqslant ۲\sqrt{۴x^۳.\frac{۱۶}{x^۳}}=۱۶$

$۴x^۳=\frac{۱۶}{x^۳}\Longrightarrow x^۶=۴\Longrightarrow x=\sqrt[۳]{۲}$

۳۰. (ب) $۳۶=(x+y+z)^{۲}=A+۲(xy+xz+yz)\leqslant A+۲A=۳A$

$\Longrightarrow A\geqslant ۱۲$

تذکر:

$$(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲(ab+ac+bc)\leqslant ۳(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})$$

$$(a+b+c)^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+۲(ab+ac+bc)\geqslant ۳(ab+ac+bc)$$

بنابراین:

$$۳(ab+ac+bc)\leqslant (a+b+c)^{۲}\leqslant ۳(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})$$

و شرط تساوی آن است که $a=b=c$.

۳۱. (ب) ابعاد مکعب مستطیل را به x و y و z نشان می‌دهیم بنابراین،

$S=xy+xz+yz$ و $xyz=۲۴\sqrt{۳}$

لذا حاصلضرب $(xy)(xz)(yz)$ ثابت است پس s وقتی مینیمم است که

$$x=y=z=۲\sqrt{۲}$$

۳. پاسخ تستهای فصل سوم

«قدر مطلق»

۱. (ج)

$$y=\frac{x\sqrt{\dfrac{(x^{۲}+۱)^{۲}}{۴x^{۲}}}}{x^{۲}+۱}=\frac{x\dfrac{x^{۲}+۱}{۲|x|}}{x^{۲}+۱}=\frac{x}{۲|x|}=\begin{cases}\frac{۱}{۲}\ ،& x>۰\\ -\frac{۱}{۲}\ ،& x<۰\end{cases}$$

۲. (ج)

$$\begin{cases}x\geqslant ۰\Longrightarrow x+۲>x & \text{همواره برقرار است}\Longrightarrow x\geqslant ۰\\ -۲\leqslant x<۰\Longrightarrow x+۲>-x\Longrightarrow x>-۱\Longrightarrow -۱<x<۰\\ x<-۲\Longrightarrow -x-۲>-x & \text{که برقرار نیست}\end{cases}$$

۳. (ب) $|x|^{۲}-۳|x|+۲<۰\Longrightarrow ۱<|x|<۲\Longrightarrow$

$-۲<x<-۱$ یا $۱<x<۲$

۴. (الف) $|x-۱||x^۳+x+۱|\leqslant x^۲+x+۱ \Longrightarrow |x-۱|\leqslant ۱ \Longrightarrow$

$-۱\leqslant x-۱\leqslant ۱ \Longrightarrow ۰\leqslant x\leqslant ۲$

۵. (ب) قابل قبول نیست $x\geqslant ۱ \Longrightarrow x-۱=۱-۲x \Longrightarrow x=\frac{۲}{۳}$

$x<۱ \Longrightarrow ۱-x=۱-۲x \Longrightarrow x=۰$

۶. (ب) بی‌شمار جواب دارد

$|۳-(-۲)|=۵ \Longrightarrow -۵\leqslant |۳-x|-|x+۲|\leqslant ۵ \Longrightarrow$

جواب (ب) یا (ج) است اگر $x=-۲$ را قرار دهیم صدق می‌کند بنابراین (ب) صحیح است.

۷. (د) $\mathrm{Min}=|۱-(-۲)|=۳$ و ۴ ازمینیمم بیشتر است

$x>\frac{۱-۲+۴}{۲}=\frac{۳}{۲}$ یا $x<\frac{۱-۲-۴}{۲}=-\frac{۵}{۲}$

۸. (ج) قابل قبول است $۲x-۳=x+۷ \Longrightarrow x=۱۰$

قابل قبول است $۲x-۳=-x-۷ \Longrightarrow x=-\frac{۴}{۳}$

۹. (ج) $x\geqslant ۰ \Longrightarrow x^۳+x=۰ \Longrightarrow x=۰$

$x<۰ \Longrightarrow x^۳-x=۰ \Longrightarrow x=\pm ۱ \Longrightarrow x=-۱$

۱۰. (ب) $x^۲-\pi^۲\leqslant ۰ \Longrightarrow |x|\leqslant \pi \Longrightarrow -\pi\leqslant x\leqslant \pi$

۱۱. (ب) $\begin{cases} |x-۳|\geqslant ۱ \\ |x-۳|\leqslant -۳ \quad \text{برقرار نیست} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x-۳\geqslant ۱ \Longrightarrow x\geqslant ۴ \\ x-۳\leqslant -۱ \Longrightarrow x\leqslant ۲ \end{cases}$

۱۲. (ج) تعریف نشده است $x+|x|=۰ \Longrightarrow |x|=-x \Longrightarrow x\leqslant ۰$

۱۳. (الف) $x-|x|\geqslant ۰ \Longrightarrow x\geqslant |x| \Longrightarrow x=|x| \Longrightarrow x\geqslant ۰$

۱۴. (د) دامنه بقیه R نیست $\frac{۶|x-۲|}{۶}=|x-۲|$

۱۵. (الف) خط $y=۱$ از مینیمم کمتراست. $|۱-۳|=۲>۱$

۱۶. (ج) $x^۲-۳=\pm ۱ \Longrightarrow \begin{cases} x^۲=۴ \Longrightarrow x=\pm ۲ \quad \text{گویا} \\ x^۲=۲ \Longrightarrow x=\pm\sqrt{۲} \quad \text{اصم} \end{cases}$

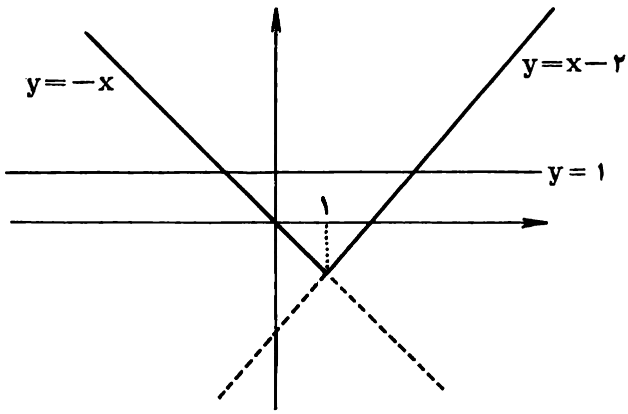
۱۷. (ج)
$$x \geqslant \circ \Longrightarrow x = ۱ \quad \text{و} \quad x < \circ \Longrightarrow \frac{|۲x|}{۲} = ۱$$
$$\Longrightarrow |x| = ۱ \Longrightarrow x = \pm ۱$$

$x < \circ$ بنابراین $x = -۱$

۱۸. (ب)
$$y = \frac{x + |x|}{۲} - \frac{|x - |x||}{۲} = \begin{cases} x & x \geqslant \circ \\ -|x| = x & x < \circ \end{cases}$$

یا با توجه به نمودار نیز به‌سادگی مشخص است.

۱۹. (ج)



با توجه به نمودار خط $y = ۱$ نمودار تابع را در دونقطه قطع می‌کند. بامحاسبه نیز می‌توان معادله را حل کرد.

۲۰. (ج) روش اول: نمودار $y = |x|$ را دو واحد بـه موازات محور yها بـه پائین انتقال داده سپس قرینه آنرا نسبت به محور xها پیدا می‌کنیم.

روش دوم: نمودار تابع فوق همواره بالای محور xها و پیوسته است.

۲۱. (د) نمودار $y = |x - ۱|$ را یك واحد بـه موازات محور y به پائین انتقال داده قرینه آنرا نسبت به محور xها پیدا می‌کنیم نمودار $y = ||x - ۱| - ۱|$ بدست می‌آید سپس نمودار فوق را یك واحد به موازات محور yها به بالا انتقال می‌دهیم.

۲۲. (الف) اگر y را به $-y$ تبدیل کنیم عبارت تغییر نمی‌کند لـذا محور xها محور تقارن است و همچنین باید $x \leqslant \circ$ باشد.

به‌روش دیگر نمودار خط $y=-x$ را با yهای مثبت رسم کرده قرینه‌آنرا نسبت به محور xها پیدا می‌کنیم.

۲۳. (الف) $-3<|x-1|<2 \Rightarrow |x-1|<2 \Rightarrow$

$-2<x-1<2 \Rightarrow -1<x<3$

۲۴. (د) $1<|x|<3 \Rightarrow 1<\pm x<3 \Rightarrow \begin{cases} 1<x<3 \\ -3<x<-1 \end{cases}$

۲۵. (د) $\sqrt{x^2-2|x|+1}\leqslant 1 \Rightarrow x^2-2|x|\leqslant 0 \Rightarrow 0\leqslant|x|\leqslant 2$

$\Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 2$

۲۶. (الف) $0-2\leqslant x\leqslant 0+2 \Rightarrow -2\leqslant x\leqslant 2 \Rightarrow |x|\leqslant 2$

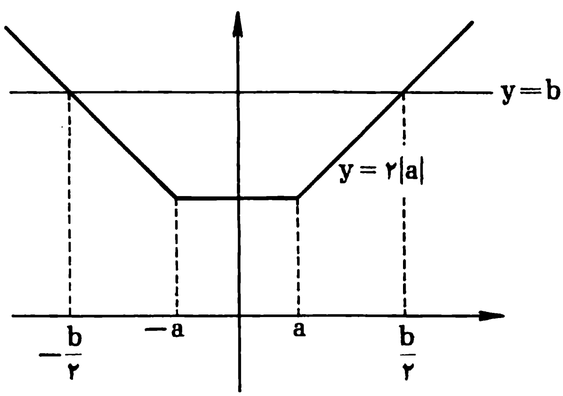
۲۷. (ب) $x-1+2x-3=3x-4$

تساوی برقرار است لذا باید $0\leqslant(2x-3)(x-1)$ یا $x\geqslant\frac{3}{2}$، $x\leqslant 1$

۲۸. (ب) $|2x-3|+|5-2x|\geqslant|2x-3+5-2x|=2$

لذا نامعادله جواب ندارد زیرا مینیمم برابر ۲ است وهیچ قسمت نمودار زیرخط $y=2$ قرار ندارد.

۲۹. (الف) $|x-a|+|x+a|\geqslant 2|a|$



$$\begin{cases} ۲x<b \Longrightarrow x<\frac{b}{۲} \\ -۲x<b \Longrightarrow x>-\frac{b}{۲} \end{cases}$$

۳۰. (الف) ریشه‌های عبارت $x=۰$ و $x=-۳$ و $x=۲$ است که فاصله (۱ و ۰) شامل ریشه‌ای ازعبارت نیست با قراردادن $x=۱$ علامت عبارت مشخص شده قدر مطلقها را برمی‌داریم.

$$y=x+۳+x-۲x+۴=۷$$

۳۱. (ج)

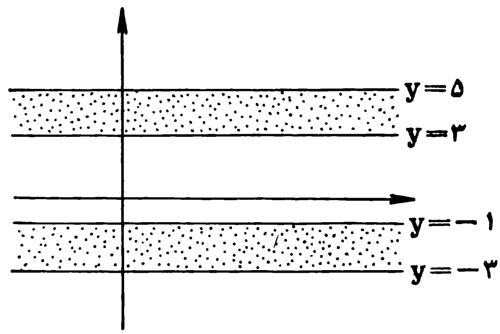
$$A=\sqrt{x^۲-۴|x|+۴}+\sqrt{x^۲+۴|x|+۴}$$
$$=||x|-۲|+||x|+۲|$$
$$-۲<x<۰ \Longrightarrow y=|-x-۲|-x+۲=x+۲-x+۲=۴$$

۳۲. (ج)

$$\begin{cases} A=|a-۲|+|a+۳|=a-۲+a+۸=۲a+۱ \\ a\geqslant ۲ \end{cases}$$

۳۳. (ج)

$$۲\leqslant \pm(y-۱)\leqslant ۴ \Longrightarrow ۳\leqslant y\leqslant ۵ \quad \text{یا} \quad -۳\leqslant y\leqslant -۱$$



۳۴. (د) نمودار $y=|x|$ که در $x=۰$ تعریف نشده است.

$$y=\frac{|x|^۲}{|x|}=|x| \quad \text{و} \quad x\neq ۰$$

۳۵. (د)

$$y+۳=\pm(x-۳) \Longrightarrow \begin{cases} y=x-۶ \\ y=-x \end{cases}$$

۳۶. (ج)
$$\begin{cases} y=|x-۱|+|x+۱|+۴=۱-x+x+۱+۴=۶ \\ -۱\leqslant x\leqslant ۱ \end{cases}$$

پارهٔ خط $y=۶$ درفاصله $[۱ \text{ و } -۱]$

۳۷. (ج) $x^۲<۸ \Longrightarrow |x|<۲\sqrt{۲} \Longrightarrow -۲\sqrt{۲}<x<۲\sqrt{۲}$

$$|x-۲\sqrt{۲}|+|x+۲\sqrt{۲}|=۲\sqrt{۲}-x+x+۲\sqrt{۲}=۴\sqrt{۲}$$

۴. پاسخ تستهای فصل چهارم

«لگاریتم»

۱. (ب) $\log^۲x+\log x+۱=\dfrac{۷}{\log x-۱} \Longrightarrow$

$$\log^۳x-\log^۲x+\log^۲x-۱=۷$$

$$\log^۳x=۸ \Longrightarrow \log x=۲ \Longrightarrow x=۱۰۰$$

۲. (ب) $\log_۲(x^۲-۱)=-\log_۲(x^۲-۱)=\log_۲(x-۱)^{-۱}$

$$\Longrightarrow x^۲-۱=\frac{۱}{x-۱}$$

$$x^۳-x^۲-x+۱=۱ \Longrightarrow x=۰ \quad \text{یا} \quad x^۲-x-۱=۰ \Longrightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}$$

که $x=۰$ و $x=\dfrac{۱-\sqrt{۵}}{۲}$ قابل قبول نیستند

۳. (ب) اولاً $x=۱$ ریشه معادله است ثانیاً،

$$\frac{۱}{\log_x^۲}+\frac{۱}{\log_x^۳}=\frac{۱}{\log_x^۲\cdot\log_x^۳} \Longrightarrow \log_x^۲+\log_x^۳=۱ \Longrightarrow$$

$$\log_x^۶=۱ \Longrightarrow x=۶$$

۴. (ب) $\log_۳ ۳\times ۲^۲=a \Longrightarrow ۱+۲\log_۳^۲=a \Longrightarrow \log_۳^۲=\dfrac{a-۱}{۲}$

$$\log_۳ ۱۸=\log_۳ ۲\times ۳^۲=۲+\log_۳^۲=۲+\frac{a-۱}{۲}=\frac{a+۳}{۲}$$

۵. (الف) $\log_{\sqrt{xy}}x+\log_{\sqrt{xy}}y=\log_{\sqrt{xy}}xy=۲$

۶. (الف) $\frac{A}{B}=\frac{\log_{۵}۷}{\log_{۸}۳}=\frac{\log۷\cdot\log۸}{\log۵\cdot\log۳}>۱\Longrightarrow A>B$

۷. (ب) $\log_{ab}a+\log_{ab}b=۱\Longrightarrow\log_{ab}b=-۳$ و $\log_{ab}\frac{\sqrt[۳]{a}}{\sqrt{b}}=$

$\frac{۱}{۳}\log_{ab}a-\frac{۱}{۲}\log_{ab}b=\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۲}(-۳)=\frac{۴}{۳}+\frac{۳}{۲}=\frac{۱۷}{۶}$

۸. (الف) $۳\log_{۱۲}۳=a\Longrightarrow\log_{۳}۱۲=\frac{۳}{a}\Longrightarrow ۱+۲\log_{۳}^{۲}=\frac{۳}{a}\Longrightarrow$

$\log_{۳}۲=\frac{۳-a}{۲a}\Longrightarrow\log_{۲}۳=\frac{۲a}{۳-a}$ و $\log_{۶}۱۶=\frac{۴}{\log_{۲}۶}=$

$\frac{۴}{۱+\log_{۲}۳}=\frac{۴}{۱+\frac{۲a}{۳-a}}=\frac{۴(۳-a)}{۳+a}$

۹. (د) $a^{۲}+۱>۱$ و $\log_{x}(a^{۲}+۱)<۰\Longrightarrow ۰<x<۱$

۱۰. (ج) $\log_{N}۲+\log_{N}۳+\cdots+\log_{N}۱۳۶۸=$

$\log_{N}۲\times۳\times\cdots\times۱۳۶۸=\log_{N}۱۳۶۸!=\log_{N}^{N}=۱$

۱۱. (ب) چون $\log_{a}tg۴۵^{\circ}=\log_{a}۱=۰$ درعبارت وجود دارد.

۱۲. (الف) $\log_{a}tg۱^{\circ}tg۲^{\circ}\cdots tg۴۴\cdots cotg۲^{\circ}cotg۱^{\circ}=\log_{a}۱=۰$

۱۳. (ج) $x>۱\Longrightarrow\log_{a}x<۱\Longrightarrow x<a\Longrightarrow ۱<x<a$

$۰<x<۱\Longrightarrow\log_{a}x<۰$ که برقرار نمی‌باشد

۱۴. (ب) $-\log_{۱۰}۶۰۰۰$ و $\log_{۱۰}۶۰۰۰=۳/p\Longrightarrow$

$-\log_{۱۰}۶۰۰۰=\bar{۴}/p'$

۱۵. (ج) $\Delta'\geqslant۰\Longrightarrow ۱-\log a\geqslant۰\Longrightarrow\log a\leqslant۱\Longrightarrow ۰<a\leqslant۱۰$

۱۶. (ج) $\log\frac{a+b}{۳}=\log\sqrt{ab}\Longrightarrow\frac{a^{۲}+b^{۲}+۲ab}{۹}=ab\Longrightarrow$

$a^{۲}+b^{۲}=۷ab$

۱۷. (ج) $\begin{cases} x^۲-۲x=۰ \\ x\neq ۰ \end{cases} \Rightarrow x=۲$ و $|x|=۱ \Rightarrow x=\pm ۱$

۱۸. (ب) $۲^{۳x}.۳^x\left(۱-\frac{۳}{۲}\right)=-۲۸۸ \Rightarrow ۸^x.۳^x=۴\times ۱۴۴ \Rightarrow$

$۲۴^x=۲۴^۲ \Rightarrow x=۲$

۱۹. (ب) $۳^{|x-۲|}\geqslant ۳^۴ \Rightarrow |x-۲|\geqslant ۴ \Rightarrow x\geqslant ۶$ یا $x\leqslant -۲$

۲۰. (ج) $۴-x>۰ \Rightarrow x<۴$

$\log_۳\log_۲(۴-x)>۰ \Rightarrow \log_۲(۴-x)>۱ \Rightarrow ۴-x>۲ \Rightarrow x<۲$

۲۱. (د) $(x+۳)^۲=۱۶ \Rightarrow x+۳=\pm ۴ \Rightarrow x=-۷,\ x=۱$

هیچ‌یك قابل قبول نیستند باید $۰<x\neq ۱$ باشد.

۲۲. (ج) $\log_{abc}x=\frac{۱}{\log_x abc}=\frac{۱}{\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۸}}=\frac{۸}{۵}$

۲۳. (ب) $\log_a x+۴\log_a x+۹\log_a x=۴ \Rightarrow \log_a x=\frac{۴}{۱۴}=\frac{۲}{۷}$

$\Rightarrow x=a^{\frac{۲}{۷}}=\sqrt[۷]{a^۲}$

۲۴. (ب) $\log a-\log b+\log b-\log c+\log c-\log d-\log a-$

$\log y+\log x+\log d=\log x-\log y=\log\frac{x}{y}$

۲۵. (ج) $\frac{۱}{۲}\log x\geqslant \log ۲ \Rightarrow \log\sqrt{x}\geqslant \log ۲ \Rightarrow \sqrt{x}\geqslant ۲ \Rightarrow x\geqslant ۴$

۲۶. (ج) $x>۰ \Rightarrow ۱+x<۱۰^x \Rightarrow \log(۱+x)<\log ۱۰^x \Rightarrow$

$\log(۱+x)<x$

۲۷. (ب) باید $x<۰$ باشد،

$۲\log|x|+\log(-x)=۳ \Rightarrow ۳\log(-x)=۳$

$\Rightarrow \log(-x)=۱ \Rightarrow x=-۱۰$

۲۸. (ج) شرط جواب $x>۰,\ \log x \geqslant ۰ \Longrightarrow x \geqslant ۱$

$\frac{۱}{۴}\log^{۲}x-\log x=۰ \Longrightarrow \log x=۰$ یا $\log x=۴ \Longrightarrow$

$x=۱$ یا $x=۱۰^{۴}$

۲۹. (ب)

$۱+۲\log_{۳}۲=a \Longrightarrow \log_{۳}۲=\frac{a-۱}{۲}$ و $\log_{۳}۱۸=۲+\log_{۳}۲$

$=۲+\frac{a-۱}{۲}=\frac{a+۳}{۲}$

۳۰. (ب) $A=۳^{۱۰۰} \Longrightarrow \log A=۱۰۰\log ۳=۴۷/۷۱$

مفسر ۴۷ است پس عدد ۴۸ رقمی است.

۳۱. (ب) $\log(۲x+۱)(x-۲)=\log ۱۰+\log ۲۵=\log ۲۵۰$

$۲x^{۲}-۳x-۲=۲۵۰ \Longrightarrow ۲x^{۲}-۳x-۲۵۲=۰ \Longrightarrow$

$$x=\frac{۳\pm\sqrt{۹+۸\times ۲۵۲}}{۴}$$

که فقط جواب مثبت قابل قبول است.

۳۲. (ج) $\begin{cases} x-۱>۰ \\ \log(x-۱)\geqslant ۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x>۱ \\ x-۱\geqslant ۱ \Longrightarrow x\geqslant ۲ \end{cases} \Longrightarrow x\geqslant ۲$

۳۳. (ب) $\log ۲x=\log|x-۱۵| \Longrightarrow ۲x=|x-۱۵| \Longrightarrow$

$\begin{cases} ۲x=x-۱۵ \Longrightarrow x=-۱۵ & \text{قابل قبول نیست} \\ ۲x=۱۵-x \Longrightarrow x=۵ & \text{جواب است} \end{cases}$

۳۴. (ج) $\log x=\overline{۱۴}/۴۷۸۳ \qquad ۱۰^{-۱۴}<x<۱۰^{-۱۳} \Longrightarrow$

$۱۰^{-۱۵}<x<۱۰^{-۱۰}$ ، $۱۰^{-۳}<\sqrt[۵]{x}<۱۰^{-۲}$

۳۵. (ج) $\begin{cases} x+۱>۰ \\ x^{۲}\neq ۰,\ ۱ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x>-۱ \\ x\neq ۰,\ x\neq \pm ۱ \end{cases} \Longrightarrow (-۱,+\infty)-\{۰,۱\}$

۳۶. (ب) $۲\times ۷^{\log x}=۹۸ \Rightarrow ۷^{\log x}=۷^{۲} \Rightarrow \log x=۲ \Rightarrow x=۱۰۰$

۳۷. (الف) $\log ۵=a \Rightarrow ۱-\log ۲=a \Rightarrow \log ۲=۱-a$

$$\log_{۸}۱۰۰=\frac{\log ۱۰۰}{\log ۸}=\frac{۲}{۳\log ۲}=\frac{۲}{۳(۱-a)}$$

۳۸. (د) اولاً $x^{۲}-۴>۰$ یا $|x|>۲$ ثانیاً،

$$\log_{\frac{۱}{۵}}(x^{۲}-۴)\geqslant \log_{\frac{۱}{۵}}۵ \Rightarrow x^{۲}-۴\leqslant ۵ \Rightarrow |x|\leqslant ۳$$

$۲<|x|\leqslant ۳ \Rightarrow ۲<x\leqslant ۳$ یا $-۳\leqslant x<-۲$

۳۹. (الف) $\log_{x}\sqrt[۶]{x^{۴}\sqrt[۴]{x}}=\log_{x}\sqrt[۶]{\sqrt[۴]{x^{۱۷}}}=\log_{x}x^{\frac{۱۷}{۲۴}}=\frac{۱۷}{۲۴}$

۴۰. (ب) $\frac{\log(\log a)}{\log a}=\log_{a}\log a \Rightarrow a^{\log_a(\log a)}=\log a$

۴۱. (الف) $۵^{۳}<۳۰۰<۵^{۴} \Rightarrow \log_{۵}۳۰۰=۳/p$

۴۲. (ج) $۰<a<۱ \Rightarrow \log_{۲}a<۰,\ \log_{a}۵<\log_{a}۲$

بنابراین گزینه (ج) صحیح است،

$$۰<a<۱ \Rightarrow \log_{a}۷<\log_{a}۵<۰ \Rightarrow \frac{۱}{\log_{a}۷}>\frac{۱}{\log_{a}۵}$$

۴۳. (د) $A=\log_{۳}۲+\log_{۳}۵=\log_{۳}۱۰$ و

$۳^{۲}<۱۰<۳^{۳} \Rightarrow ۲<\log_{۳}۱۰<۳$

۴۴. (ب) $\log(x+۴)^{۲}=\log(۲x+۱۱) \Rightarrow x^{۲}+۸x+۱۶=$

$۲x+۱۱ \Rightarrow x^{۲}+۶x+۵=۰ \Rightarrow x=-۱,\ x=-۵$

$x=-۱$ قابل قبول است زیرا $x>-۴$

با امتحان کردن گزینه‌ها دراین تست نیز جواب به سادگی مشخص می‌شود.

۴۵. (الف) $\frac{۱}{b^{۲}}=\frac{۱}{ac} \Rightarrow b^{۲}=ac \Rightarrow ۲\log b=\log a+\log c$

۴۶. (د) $\begin{cases} x^{۲}-۱>۰ \\ x>۰,\ x\neq ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>۱ \text{ یا } x<-۱ \\ ۱\neq x>۰ \end{cases} \Rightarrow x>۱$

۴۷. (ب) $\log_n \dfrac{۲\times ۳\times \cdots \times n}{۱\times ۲\times ۳\times \cdots \times n-۱}=\log_n n=۱$

۴۸. (ب) $\log_{|x|}|۲x+۱|=۱ \Rightarrow |۲x+۱|=|x| \Rightarrow$

$$\begin{cases} ۲x+۱=x \\ ۲x+۱=-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=-\dfrac{۱}{۳} \end{cases}$$

اما $x=-۱$ قابل قبول نیست وجواب $x=-\dfrac{۱}{۳}$ است.

۴۹. (الف) $\dfrac{۱}{۲}\log_{|x|}(۲x-۱)=\dfrac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x-۱=|x| \Rightarrow \begin{cases} x=۱ \\ x=\dfrac{۱}{۳} \end{cases}$

که هیچکدام قابل قبول نیستند

۵۰. (ب) $xyz=۱۰^۶ \Rightarrow \log x+\log y+\log z=۶$

$\Rightarrow \log x=\log y=\log z=۲ \Rightarrow \mathrm{Max}\,p=۲^۳=۸$

۵۱. (الف) $S=\log xyz$

S وقتی ماکزیمم است که xyz ماکزیمم باشد و این در صورتی است که $x=y=z=۱۰۰$ ودرنتیجه، $MaxS=\log ۱۰^۶=۶$

۵۲. (ب) $\begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ \log(x-۱)=۰ \Rightarrow x-۱=۱ \Rightarrow x=۲ \end{cases}$

$x=-۲$ ریشه معادله نیست

۵. پاسخ تستهای فصل پنجم

«دنباله‌ها»

۱. (ج) $s_n=\dfrac{۱}{۲}(s_{۲n}-s_n) \Rightarrow s_{۲n}=۳s_n$

در هر تصاعد عددی اگر s_n و $s_{۲n}$ و $s_{۳n}$ به‌ترتیب مجموع n و $۲n$ و $۳n$ جمله اول باشند آنگاه $s_{۳n}=۳(s_{۲n}-s_n)$ (۱)

بنابراین؛

$$\frac{s_{3n}}{s_n}=\frac{3(s_{2n}-s_n)}{s_n}=\frac{6s_n}{s_n}=6$$

تذکر: رابطه (۱) با جای‌گذاری به سادگی ثابت می‌شود.

$$3(s_{2n}-s_n)=3\left[\frac{2n}{2}(a_1+a_{2n})-\frac{n}{2}(a_1+a_n)\right]=\frac{3n}{2}(a_1+2a_{2n}-a_n)$$

$$=\frac{3n}{2}(a_1+a_{3n})=s_{3n}$$

زیرا:

$$2a_{2n}-a_n=a_{3n} \quad \text{یا} \quad a_{3n}+a_n=2a_{2n}$$

۲. (ج) $$2\times\frac{1}{2b}=\frac{1}{b-c}+\frac{1}{b-a}\Longrightarrow\frac{1}{b}=\frac{2b-a-c}{(b-a)(b-c)}\Longrightarrow$$

$$b^2-bc-ab+ac=-ab-bc+2b^2\Longrightarrow b^2=ac$$

۳. (د) $$s^2=3s,\ s\neq 0\Longrightarrow s=3$$

۴. (د) ضلع مربعها به ترتیب a و $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ و $\frac{a}{2}$ و ... می‌باشند که محیطها $4a$ و $2a\sqrt{2}$ و ... به‌تصاعد هندسی با قدر نسبت $\frac{\sqrt{2}}{2}$ و لذا p حد محیطها برابر $\frac{4a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ یا $4a(2+\sqrt{2})$ است و مساحتها به‌تصاعد هندسی با قدر نسبت $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ یا $\frac{1}{2}$ است که حد مجموع مساحتها برابر $2a^2=\frac{a^2}{1-\frac{1}{2}}$ و قطرها نیز به تصاعد هندسی با قدر نسبت $\frac{\sqrt{2}}{2}$ می‌باشند لذا حد مجموع آنها برابر $\frac{a\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$ یا $2a(\sqrt{2}+1)$ است.

۵. (ج) $$a_1,\ a_1r,\ a_1r^2,\ a_1r^3,\ \ldots.$$

$$a_1(1-r),\ a_1r(1-r),\ a_1r^2(1-r),\ \ldots$$

۶. (ب) $a_n=a_1r^{n-1},\ a_1=r \Longrightarrow \sqrt{\text{۷}^n}=r^n \Longrightarrow r=\sqrt{\text{۷}}$

۷. (ب) $a_{\text{۱۰}}=s_{\text{۱۰}}-s_{\text{۹}}=\text{۱۰}^{\text{۲}}+\text{۵۰}-\text{۹}^{\text{۲}}-\text{۴۵}=\text{۲۴}$

۸. (ب) پایه‌ها تشکیل یك تصاعد عددی با قدر نسبت ۴ می‌دهندکه جمله اول ۲ است لذا جمله nام برابر است با $a_n=(\text{۲}+(n-\text{۱})\text{۴})^{\text{۲}}$ یا $a_n=(\text{۴}n-\text{۲})^{\text{۲}}$ است که $a_{\text{۱۰}}=\text{۳۸}^{\text{۲}}$.

۹. (الف) دنباله تفاضلات متناهی با جمله مولد درجه دوم است.

$k:\ \text{۱},\ \text{۳}،\ \text{۶}،\ \text{۱۰}،\ \text{۱۵}،\ldots$

$k_1:\ \text{۲},\ \text{۳}،\ \text{۴}،\ \text{۵}\ldots$

$k_2=\text{۱},\ \text{۱}،\ \text{۱}،\ \text{۱}،\ldots$

$$\text{۲}a=\text{۱} \Longrightarrow a=\frac{\text{۱}}{\text{۲}},\ \text{۳}a+b=\text{۲} \Longrightarrow b=\frac{\text{۱}}{\text{۲}},\ a+b+c=\text{۱} \Longrightarrow c=\text{۰}$$

$$\Longrightarrow a_n=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}n^{\text{۲}}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}n \Longrightarrow a_{\text{۲۰}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲۰}}\times\text{۴۰۰}+\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\times\text{۲۰}=\text{۲۱۰}$$

۱۰. (الف)

$$\frac{\text{۵}}{\text{۱}},\ \frac{\text{۸}}{\text{۲}},\ \frac{\text{۱۱}}{\text{۳}}،\frac{\text{۱۴}}{\text{۴}}،\ldots a_n=\frac{\text{۳}n+\text{۲}}{n} \Longrightarrow a_{\text{۴۰}}=\frac{\text{۱۲۰}+\text{۲}}{\text{۴۰}}=\frac{\text{۶۱}}{\text{۲۰}}$$

صورت‌ها تصاعدی عددی با قدر نسبت ۳ می‌باشند.

۱۱. (د) $a-d+a+a+d=\text{۱۵} \Longrightarrow a=\text{۵}$

$a(a^{\text{۲}}-d^{\text{۲}})=\text{۸۰} \Longrightarrow \text{۲۵}-d^{\text{۲}}=\text{۱۶} \Longrightarrow d=\pm\text{۳}$

۱۲. (ب) $(x+z)^{\text{۲}}-y^{\text{۲}}=x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}}+z^{\text{۲}} \Longrightarrow \text{۲}xz=\text{۲}y^{\text{۲}} \Longrightarrow y^{\text{۲}}=xz$

۱۳. (الف) $s_{\text{۲۳}}=\text{۲۳}\times\text{۳۲}=\text{۷۳۶}$

۱۴. (ب) $r=\sqrt[\text{۲۶}]{\dfrac{a^{\text{۲۰}}}{a^{\text{۷}}}}=\sqrt[\text{۲۶}]{a^{\text{۱۳}}}=\sqrt{a}$

۱۵. (الف) $a_1=s_1=\text{۳}-\text{۴}=-\text{۱}$ و $a_1+a_2=s_2=\text{۱۲}-\text{۸}=\text{۴}$

$\Longrightarrow a_2=\text{۵} \Longrightarrow d=a_2-a_1=\text{۵}-(-\text{۱})=\text{۶}$

۱۶. (ب) $a_1=s-a_1 \Longrightarrow \text{۲}a_1=\dfrac{a}{\text{۱}-r} \Longrightarrow r=\dfrac{\text{۱}}{\text{۲}}$

۱۷. (ج) $۰/۵۸\overline{۳} = \frac{۵۸۳-۵۸}{۹۰۰} = \frac{۵۲۵}{۹۰۰} = \frac{۷}{۱۲}$

۱۸. (ج) $a_{۳}+a_{۱۱}=۲a_{۷},\ a_{۶}+a_{۸}=۲a_{۷} \Longrightarrow ۴a_{۷}=۴\times ۲۰=۸۰$

۱۹. (ج) $a_{۱}=۳(s-a_{۱}) \Longrightarrow ۴a_{۱}=\frac{۳a_{۱}}{۱-r} \Longrightarrow ۴-۴r=۳ \Longrightarrow r=\frac{۱}{۴}$

۲۰. (ب)

$$\begin{cases} a_n=a_{۱}+(n-۱)d \\ a'_n=a_{۱}+(n-۱)d^{۲} \end{cases} \Longrightarrow a'_n-a_n=(n-۱)(d^{۲}-d)$$

۲۱. (د)

$$\begin{cases} ۳a_{۷}=۶۰ \Longrightarrow \\ ۳a_{۲}=۱۵ \Longrightarrow \end{cases} \begin{cases} a_{۷}=۲۰ \\ a_{۲}=۵ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_{۱}+۶d=۲۰ \\ a_{۱}+d=۵ \end{cases} \Longrightarrow d=۳,\ a_{۱}=۲$$

$a_{۱۲}=۲+۱۱\times ۳=۳۵$

۲۲. (ب)

$$A=(۲۰+۱۹)+(۱۸+۱۷)+\cdots\cdot+۲+۱=\frac{۲۰(۲۱)}{۲}=۲۱۰$$

۲۳. (ج)

$$s_{۲n+۱}=(۲n+۱)a_k \Longrightarrow ۱۴۳=(۲n+۱)\cdot ۱۳ \Longrightarrow ۲۶n=۱۳۰ \Longrightarrow n=۵$$

۲۴. (الف) $f(۴)=\frac{F(۳)\cdot f(۲)+۱}{f(۱)}=۲$ و $F(۵)=\frac{F(۴)F(۳)+۱}{F(۲)}=۳$

$$F(۶)=\frac{F(۵)F(۴)+۱}{F(۳)}=\frac{۲\times ۳+۱}{۱}=۷$$

۲۵. (ب) $۵n-۳=۱۷ \Longrightarrow n=۴ \Longrightarrow a_{۱۷}=\frac{۵}{۳}(۸-۱)=\frac{۳۵}{۳}$

۲۶. (الف) $۱۹۲=a_{۴}+a_{۶}+a_{۱۵}+a_{۱۷}=۲(a_{۱}+a_{۲۰})$

$s_{۲۰}=۱۰(a_{۱}+a_{۲۰})=۱۰\times ۹۶=۹۶۰$

۲۷. (الف) $s_n-s_{n-۱}=a_n=۳n-۲$ و $a_{۱}=۱,\ a_{۲۵}=۷۳$

$$s_{۲۵}=\frac{۲۵}{۲}(۱+۷۳)=۳۷\times ۲۵=۹۶۰$$

یا $a_{۱۳}=۳۹-۲=۳۷ \Longrightarrow s_{۲۵}=۲۵\times ۳۷=۹۶۰$

۲۸. (ب) $\frac{۷}{۲}=\frac{۳}{۱-r} \Longrightarrow r=\frac{۱}{۷},\ s=\frac{۹}{۱-\frac{۱}{۴۹}}=\frac{۱۴۷}{۱۶}$

۲۹. (ب)

$$ac=b^{۲} \Longrightarrow \frac{b^{۲}c^{۲}}{a}+\frac{a^{۲}c^{۲}}{b}+\frac{a^{۲}b^{۲}}{c}=\frac{ac^{۳}}{a}+\frac{b^{۴}}{b}+\frac{a^{۳}c}{c}=a^{۳}+b^{۳}+c^{۳}$$

۳۰. (الف) $۲(x'+x'')=۴+x'x'' \Longrightarrow ۲m=۴+۲ \Longrightarrow m=۳$

۳۱. (د) $\frac{s_{۲n}}{s_n}=۱+r^n \Longrightarrow ۶۵=۱+r^{۶} \Longrightarrow r^{۶}=۶۴ \Longrightarrow r=۲$

۳۲. (ج)

$$\frac{s_{۴}}{s}=\frac{۸۰}{۸۱} \Longrightarrow \frac{\frac{a_{۱}(۱-r^{۴})}{۱-r}}{\frac{a_{۱}}{۱-r}}=\frac{۸۰}{۸۱} \Longrightarrow ۱-r^{۴}=\frac{۸۰}{۸۱}$$

$$\Longrightarrow r^{۴}=\frac{۱}{۸۱} \Longrightarrow r=\pm\frac{۱}{۳}$$

۳۳. (د) جمله وسطی $a_k=\frac{a_{۱}+a_m}{۲}=\frac{۱/۱-۱/۹}{۲}=\frac{-۰/۸}{۲}=-۰/۴$

۳۴. (ج) به مثال (۲۰) مراجعه کنید.

۳۵. (ب) $\frac{۲}{۳}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۴}{۵}\times \cdots \times\frac{n-۱}{n}=\frac{۲}{n}$

۳۶. (ب) تصاعد هندسی و حسابی $a_n=x^n+na$.

$$s=x+x^{۲}+\cdots+x^{۹}+a+۲a+\cdots+۹a=$$

$$\frac{x(۱-x^{۹})}{۱-x}+\frac{۹}{۲}(a+۹a)=۴۵a+\frac{x^{۱۰}-x}{x-۱}$$

۳۷. (ب)

$$s=\left(۱+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۶۴}+\cdots\right)-\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۲۸}+\cdots\right)-$$

$$\left(\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳۲}+\frac{۱}{۲۵۶}+\cdots\right)=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۸}}-\frac{\frac{۱}{۲}}{۱-\frac{۱}{۸}}-\frac{\frac{۱}{۴}}{۱-\frac{۱}{۸}}=\frac{۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}}{\frac{۷}{۸}}=\frac{۲}{۷}$$

۳۸. (ب) $۲\log_x b=\log_x a+\log_x c \Longrightarrow b^۲=ac$

۳۹. (ب) $A^۲=۲+A \Longrightarrow A^۲-A-۲=۰ \Longrightarrow A=\frac{۱+\sqrt{۱+۸}}{۲}$

۴۰. (ج) $۱۰^۲,\ ۱۱^۲,\ldots,۳۱^۲ \Longrightarrow n=(۳۱-۱۰)+۱=۲۲$

۴۱. (ج) روش اول: $n=۱$ دراین‌صورت $t_۲=۴t_۱=۲۰$ و فقط در گزینه (ج) بازاء $n=۲$ حاصل ۲۰ بدست می‌آید.

روش دوم: $\frac{t_{n+1}}{t_n}=۴ \Longrightarrow \frac{t_۲}{t_۱}\times\frac{t_۳}{t_۲}\times\frac{t_۴}{t_۳}\times\cdots\times\frac{t_n}{t_{n-1}}=۴^{n-1} \Longrightarrow$

$$\frac{t_n}{t_۱}=۴^{n-۱} \Longrightarrow t_n=t_۱۴^{n-۱}=۵\times۴^{n-۱}$$

۴۲. (ب) $۲b=a+c \Longrightarrow ۴b^۲=a^۲+c^۲+۲ac<a^۲+c^۲+a^۲+c^۲$

$$\Longrightarrow ۲b^۲<a^۲+c^۲$$

۴۳. (ب) $a_۱=-۱,\ a_۲=۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۲} \Longrightarrow r=\frac{a_۲}{a_۱}=-\frac{۱}{۲}$

$$s=\frac{-۱}{۱-\left(-\frac{۱}{۲}\right)}=-\frac{۲}{۳}$$

۴۴. (ب) $a_۲+a_۴+a_۹=۳۳ \Longrightarrow ۳a_۵=۳۳ \Longrightarrow a_۵=۱۱$

تذکر: اگر در یك تصاعد عددی $m+r+s=۳n$ باشد آنگاه $a_m+a_r+a_s=۳a_n$ و این برای هر تعداد قابل تعمیم است.

۶. پاسخ تستهای فصل ششم

«معادلات»

۱. (ب) $\begin{cases}\Delta'=a^2-a>0\\ a>0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}a>1 \text{ یا } a<0\\ a>0\end{cases}\Longrightarrow a>1$

۲. (ج) $\Delta'=(a+2)^2-a^2-4=4a>0\Longrightarrow a>0\Longrightarrow a+2>0$

۳. (ج) $\Delta_1=p_1^2-4q_1$ و $\Delta_2=p_2^2-4q_2\Longrightarrow\Delta_1+\Delta_2$

$$=p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)=p_1^2+p_2^2-2p_1p_2=(p_1-p_2)^2\geqslant 0$$

بنابراین حداقل یکی از Δ_1 یا Δ_2 مثبت یا صفر است.

۴. (ب) $A^2=x'+x''-2\sqrt{x'x''}=5-2\sqrt{1}=3\Longrightarrow A=\sqrt{3}$

۵. (د) چون بازاء هر x برقرار است پس بازاء $x=0$ نیز برقرار است. لذا $f(0)=c\geqslant 0$.

و چون همواره عبارت نامنفی است پس ریشه نداشته یا ریشه مضاعف دارد یعنی $\Delta'=b^2-ac\leqslant 0$ یا $ac-b^2\geqslant 0$ لذا (الف) و (ج) هردو درست می‌باشند و گزینه صحیح (د) است.

برای اثبات (ب) گوئیم $af(x)=(ax+b)^2-(b^2-ac)$ اگر a منفی باشد آنگاه $af(x)\geqslant 0$ و $(ax+b)^2\leqslant b^2-ac$ (۱) یعنی بازاء هر x باید رابطه (۱) برقرار باشد که ممکن نیست. می‌توان عددی مانند k که $k>1$ و $k>b^2-ac$ پیدا کرد که در رابطه $ax+b=k$ صدق کند دراین‌صورت

$$(ax+b)^2=k^2>k>b^2-ac$$

۶. (ج) $af(x)=(ax+b)^2+ac-b^2\geqslant ac-b^2\geqslant 0\Longrightarrow af(x)\geqslant 0$

به طور کلی اگر $a\geqslant 0$، $c\geqslant 0$، $ac-b^2\geqslant 0$ همواره $f(x)\geqslant 0$ (عکس تست قبل) برای اثبات با توجه به رابطهٔ فوق اگر $a>0$ که همواره $f(x)\geqslant 0$ اگر $a=0$ از رابطه $ac-b^2\geqslant 0$ نتیجه می‌شود $b=0$ و دراین‌حالت بازاء هر x $f(x)=c\geqslant 0$ و درنتیجه با توجه به مفروضات فوق $f(x)\geqslant 0$.

۷. (ج) $\alpha\beta(\alpha^2-2\alpha)(\beta^2-2\beta)=(-1)\left(+\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$

۸. (الف) $x_1(x_1+x_2)=5\Longrightarrow x_1=5\Longrightarrow m^2=20\Longrightarrow m=\pm2\sqrt{5}$

۹. (د) $\frac{b^۲}{ac}=\frac{(n+۱)^۲}{n} \Longrightarrow \frac{a^۲}{۱}=\frac{۵^۲}{۴} \Longrightarrow a=\pm\frac{۵}{۲}$

۱۰. (ج)

$$\begin{cases} s+p=۳ \\ \frac{s}{p}=۲ \end{cases} \Longrightarrow ۳p=۳ \Longrightarrow p=۱,\ s=۲ \Longrightarrow x^۲-۲x+۱=۰$$

۱۱. (الف) $x'(x'+x'')=۳ \Longrightarrow ۳x'=۳ \Longrightarrow x'=۱ \Longrightarrow$

$۱-۳+m+۱=۰ \Longrightarrow \boxed{m=۱}$

۱۲. (ج) $b^۲<۲$ و $\Delta'=۹b^۲-۲۰<-۲<۰$ لذا معادله دوم ریشه ندارد و چون $b\geqslant ۰$ یا $b<۰$ لذا معادله $x^۲-b=۰$ حداکثر دو ریشه دارد.

۱۳. (الف) $s=\frac{x_۲}{x_۱}+\frac{x_۱}{x_۲}=\frac{s^۲-۲p}{p}=\frac{m^۲+۲m^۲}{-m^۲}=-۳,\ p=۱$

۱۴. (الف)

$$x_۱=-۴x_۲ \Longrightarrow n=-۴ \Longrightarrow \frac{۹m^۲}{-۱}=\frac{(-۴+۱)^۲}{-۴} \Longrightarrow m=\pm\frac{۱}{۲}$$

۱۵. (ج) $x_۱=x_۲^۲,\ x_۱x_۲=۲۷ \Longrightarrow x_۲^۳=۲۷ \Longrightarrow x_۲=۳ \Longrightarrow$

$۹-۱۲m+۲۷=۰ \Longrightarrow m=۳$

۱۶. (ج) $b^۲-ac\geqslant ۰,\ a=c \Longrightarrow b^۲\geqslant a^۲ \Longrightarrow |b|\geqslant|a|$

۱۷. (ج)

$$\begin{cases} af(۱)>۰ \Longrightarrow ۲(۲+۱-m)>۰ \Longrightarrow m<۳ \\ \Delta>۰ \Longrightarrow ۱+۸m>۰ \Longrightarrow m>-\frac{۱}{۸} \end{cases} \Longrightarrow -\frac{۱}{۸}<m<۳$$

۱۸. (د) $f(۱)\cdot f(-۱)<۰ \Longrightarrow$

$(۲m-۱-۲+m-۳)(۲m-۱+۲+m-۳)<۰$

$۳(m-۲)(۳m-۲)<۰ \Longrightarrow \frac{۲}{۳}<m<۲$

۱۹. (ب)
$$\begin{cases}(a-1)^2+(2a-2)(5-a)<0\\ 5-a<0\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}(a-1)(9-a)<0\\ a>5\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}a>9 \text{ یا } a<1\\ a>5\end{cases} \Longrightarrow a>9$$

۲۰. (الف) x را بـه $x+2$ تبدیـل مـی‌کنیم $(x+2)^2-(x+2)-3=0$ یـا $x^2+3x-1=0$ که $\alpha'=\alpha-2$ و $\beta'=\beta-2$ ریشه‌های معادله حاصل می‌باشند

$$\frac{1}{\alpha'^2}+\frac{1}{\beta'^2}=\frac{9+2}{(-1)^2}=11$$

۲۱. (ب)
$$2ax+b=\pm\sqrt{\Delta} \text{ و } 2mx+n=\pm\sqrt{\Delta'} \Longrightarrow$$
$$(2ax+b)^2=(2mx+n)^2$$

۲۲. (ب)
$$\Delta'=4a^2-4(a^2-b^2)=4b^2\geqslant 0$$

۲۳. (ج)
$$\frac{a^2}{a}<0 \Longrightarrow a<0$$

۲۴. (الف) از درجه فرد و اکیداً یکنوا است.

$$f'(x)=7x^6+25x^4+9x^2+1>0$$

مشخص است کـه این ریشه نمی‌تواند صحیح باشد زیرا در این صورت باید ۱ یا ۱− باشد.

۲۵. (ب)
$$x^5=y \Longrightarrow y^7+7y-4=0 \quad (1)$$

درمعادله (۱)، $p>0$ و $q<0$ پس یك ریشه مثبت دارد لـذا معادله مفروض نیز یك ریشه مثبت دارد.

۲۶. (ج)
$$p<0,\ 4p^3+27q^2=4(-7)^3+27\times 6^2=$$
$$-28\times 7^2+27\times 6^2<0$$

سه ریشه دارد

۲۷. (ج) ریشه‌های گویا دربین اعداد ± 1 و $\pm\frac{1}{2}$ و $\pm\frac{1}{4}$ است کـه فقط ± 1 صدق می‌کند.

یا می‌توان معادله را بر $x^{۲}-۱$ تقسیم کرد ،معادله درجه دوم حاصل ریشه ندارد مثال (۳۰) را مشاهده‌کنید.

۲۸. (د) کافی است x را به $x-۵$ تبدیل کنیم،

$$y=-x+۵ \Longrightarrow x=۵-y$$
$$m(۵-x)^{۲}-۲(۵-x)+۱=۰ \Longrightarrow$$
$$mx^{۲}+۲(۱-۵m)x+۲۵m^{۲}-۹=۰$$

۲۹. (الف)

$$f(۲)\,f(۱)<۰ \Longrightarrow (۴m+۳)(m-۳)<۰ \Longrightarrow -\frac{۳}{۴}<m<۳$$

۳۰. (ج) از درجه فرد وتابع حاصل اکیداً صعودی است پس فقط یك ریشه دارد وچون $f(۰)>۰$ پس یك ریشه مثبت دارد.

۳۱. (د) $p<۰,\ f'(x)=۷x^{۶}-۷=۰ \Longrightarrow x=\pm۱$

$f(۱)\cdot f(-۱)<۰$ و $q<۰$ یك ریشه مثبت و دو ریشه منفی

۳۲. (ج) ، $p>۰$ و $q<۰$

۳۳. (الف) $\alpha+\gamma=۲\beta \Longrightarrow \alpha+\beta+\gamma=۳\beta \Longrightarrow ۳\beta=۳\mathrm{k} \Longrightarrow \beta=k$

$$k^{۳}-۳k^{۳}+k^{۳}+۲۷=۰ \Longrightarrow k=۳$$

۳۴. (ب) $p<۰$ و $۴(-۳)^{۳}+۲۷m^{۲}<۰ \Longrightarrow |m|<۲$

۳۵. (ج) $p_{۱}^{۲}-۲p_{۲}=۶p_{۳} \Longrightarrow ۰-۲(-۳)=-۶m \Longrightarrow m=-۱$

۳۶. (الف) $\alpha+\beta+\gamma=۰$ و $\alpha^{۳}+\beta^{۳}+\gamma^{۳}+\alpha+\beta+\gamma=-۳ \Longrightarrow$

$$۳\alpha\beta\gamma=-۳ \Longrightarrow m=۱$$

۳۷. (د) $a+b+c=b \Longrightarrow a+c=۰$

$ab+ac+bc=b \Longrightarrow ac=b$ و $abc=۳bc \Longrightarrow$

$a=۳$ و $c=-۳$ و $b=-۹$

۳۸. (ب) x را به $\frac{۱}{x}$ تبدیل می‌کنیم $x^{۴}-۴x-۲=۰$ چون $(۱)(-۲)<۰$ و n زوج دو ریشه‌مختلف‌العلامت‌دارد.

تذکر. معادله $x^n+px+q=\circ$ اگر n زوج باشد حداکثر دو ریشه دارد به بحث آن مراجعه کنید.

۳۹. (د) $(\text{۳}x-\text{۵})^\text{۳}+(-\text{۲}x-\text{۴})^\text{۳}+(\text{۹}-x)^\text{۳}=\circ$

$\text{۳}x-\text{۵}-\text{۲}x-\text{۴}+\text{۹}-x=\circ \Longrightarrow x_\text{۱}=\frac{\text{۵}}{\text{۳}}$ و $x_\text{۲}=-\text{۲}$ و $x_\text{۳}=\text{۹}$

۴۰. (د) $b^\text{۲}-\text{۳}ac<\circ \Longrightarrow a^\text{۲}-\text{۹}<\circ \Longrightarrow |a|<\text{۳}$

لازم به‌تذکر است‌که این شرط کامل نیست زیـرا حالت دیگری نیز ممکن است، که $b^\text{۲}>\text{۳}ac$ اما حاصلضرب Max در Min مثبت باشدکه شرایط دیگری را برای a علاوه برشرایط فوق ممکن است به‌وجود آورد.

۴۱. (د) $b^\text{۲}-\text{۳}ac=\text{۳۶}-\text{۳۶}=\circ \Longrightarrow$ یك ریشه یا سه ریشه مساوی دارد

که چون ریشه مشتق درمعادله صدق نمی‌کند پس فقط یك ریشه منفی دارد

$(x+\text{۲})^\text{۳}+\text{۱۲}=\circ \Longrightarrow x+\text{۲}=-\sqrt[\text{۳}]{\text{۱۲}} \Longrightarrow x=-\text{۲}-\sqrt[\text{۱۲}]{\text{۱۲}}$

۴۲. (ج) $(x+\text{۱})^\text{۳}=\text{۲} \Longrightarrow x+\text{۱}=\sqrt[\text{۳}]{\text{۲}} \Longrightarrow x=\sqrt[\text{۳}]{\text{۲}}-\text{۱}$

۴۳. (الف) $x=\sqrt{\text{۷}-\text{۴}\sqrt{\text{۳}}}=\sqrt{(\text{۲}-\sqrt{\text{۳}})^\text{۲}}=\text{۲}-\sqrt{\text{۳}} \Longrightarrow$

$(x-\text{۲})=-\sqrt{\text{۳}} \Longrightarrow x^\text{۲}-\text{۴}x+\text{۴}=\text{۳}$ یا $x^\text{۲}-\text{۴}x+\text{۱}=\circ$

۴۴. (ج) $\text{۳}x^\text{۲}-\text{۶}x=\circ \Longrightarrow x=\circ$ یا $x=\text{۲}$

باید ریشه مشتق اول ریشه خود معادله نیز باشد

$x=\circ \Longrightarrow m=\text{۲}$ و $x=\text{۲} \Longrightarrow m=\text{۶}$

۴۵. (د) $x^\text{۲}+\frac{\text{۱}}{x^\text{۲}}+x+\frac{\text{۱}}{x}=\text{۴} \Longrightarrow \left(x+\frac{\text{۱}}{x}\right)^\text{۲}+\left(x+\frac{\text{۱}}{x}\right)-\text{۶}=\circ$

$y^\text{۲}+y-\text{۶}=\circ \Longrightarrow \begin{cases} y=-\text{۳} \\ y=\text{۲} \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x^\text{۲}+\text{۳}x+\text{۱}=\circ \text{ دو ریشه دارد،} \\ x^\text{۲}-\text{۲}x+\text{۱}=\circ \text{ ،}x=\text{۱} \text{ ریشه مضاعف} \end{matrix}$

۴۶. (د) $\alpha+\beta+\gamma=\circ \Longrightarrow \alpha^\text{۳}+\beta^\text{۳}+\gamma^\text{۳}=\text{۳}\alpha\beta\gamma=\text{۹}$

۴۷. (ب) $\text{۲}\log|x|+|x|=\text{۱}+\text{۲}\log x$

باید $x>\circ$ ، لذا $|x|=\text{۱}$ یا $x=\pm\text{۱}$ که $x=\text{۱}$ ریشه است.

۴۸. (ب) درگزینه (الف) $x=\circ$ ریشهٔ معادله است که درمعادله دیگر صدق نمی‌کند
درگزینه (ب) $x=\pm ۱$ ریشه هردو است ولذا معادلند.

درگزینه (ج) $x=\circ$ در هردو صدق می‌کند اما $x=-\frac{۲}{۷}$ در دیگری صدق نمی‌کند

درگزینه (د) $x-۳=۱۰۰$ درحالی‌که در معادله دوم $|x-۳|=۱۰۰$ که دو ریشه دارد.

۴۹. (الف)

$$x-۱\geqslant \circ \Longrightarrow x\geqslant ۱ \text{ و } ۲-x\geqslant \circ \Longrightarrow x\leqslant ۲ \text{ و } x-۴\geqslant \circ \Longrightarrow x\geqslant ۴$$

که اشتراک آنها تهی‌است.

۵۰. (ب) طرف اول همواره بزرگتر یا مساوی دو است فقط اگر $x=\circ$ باشد برابر ۲ است. درغیر این‌صورت از ۲ بزرگتر است لذا معادله فقط یك ریشه دارد.

۵۱. (ب) $\sqrt[3]{x}=y \Longrightarrow y^۳+y-۲=\circ \quad (۲)$

که درمعادله (۲) $p>\circ$ و $q<\circ$ لذا یك‌ریشه مثبت دارد درنتیجه معادله (۱) نیز یك ریشه مثبت دارد.

۵۲. (ج) $۱-\sqrt{x^۴-۴x^۲}=x^۲-۲x+۱ \Longrightarrow$

$$x^۴-۴x^۲=x^۲(x-۲)^۲ \Longrightarrow x=\circ \text{ یا } x^۲-۴=(x-۲)^۲ \Longrightarrow x=۲$$

$x=\circ$ درمعادله صدق نمی‌کند ریشه خارجی است

۵۳. (الف) شرط جواب آن است که $x\geqslant ۱$، یك روش‌آن است که طرفین را به توان ۲ برسانیم.

$$x-۲\sqrt{x-۱}=(۱-\sqrt{x-۱})^۲ \Longrightarrow x=۱+x-۱ \Longrightarrow \circ=\circ$$

بی‌شمار ریشه دارد هرعدد بزرگتر یا مساوی ۱ وکوچکتر یا مساوی ۲ ریشه معادله است.

$$۱-\sqrt{x-۱}\geqslant \circ \Longrightarrow x-۱\leqslant ۱ \Longrightarrow x\leqslant ۲$$

روش دوم:

$$\sqrt{x-۱}+\sqrt{(\sqrt{x-۱}-۱)^۲}=۱ \Longrightarrow \sqrt{x+۱}+|\sqrt{x-۱}-۱|=۱$$

$$۱\leqslant x\leqslant ۲ \Longrightarrow \sqrt{x-۱}+۱-\sqrt{x-۱}=۱ \quad \text{که همواره برقرار است}$$

$$x\geqslant ۲ \Longrightarrow \sqrt{x-۱}+\sqrt{x-۱}-۱=۱ \Longrightarrow \sqrt{x-۱}=۱ \Longrightarrow \boxed{x=۲}$$

۵۴. (ج) چون دو رادیکال مثبت وعکس یکدیگرند لذا باید ۱ $=\sqrt[۴]{\frac{۲-x}{۳+x}}$ یا $x=\frac{۱}{۲}$

۵۵. (ب) باید $۲\geqslant x$ دراین‌صورت طرف اول بزرگتر یا مساوی ۴ و چون باید طرف دوم نیز چنین باشد یعنی $۴\geqslant x-۶$ یا $۲\leqslant x$ درنتیجه $x=۲$ ریشه معادله می‌باشد.

۵۶. (الف) $۴\geqslant x$ و $۱\geqslant |x|$ لذا باید $۴\geqslant x$ که با شرط فوق $\sqrt[۵]{x-۳}>۰$ و طرف چپ همواره مثبت است.

۵۷. (ب) $x^۵=۲ \Longrightarrow ۲^۲+y+۵=۰ \Longrightarrow y=-۹$

۵۸. (ج) $x^۲-x-۶=۰ \Longrightarrow x=۳,\ x=-۲$

که هردو درمعادله دوم نیز صدق می‌کنند.

۵۹. (ج) $x^۲+۲x-۳=۰ \Longrightarrow x=۱,\ x=-۳$

$$\log_۳(x^۲-۱)=۰ \Longrightarrow x^۲-۱=۱ \Longrightarrow x=\pm\sqrt{۲}$$

اما بازاء $x=۱$ معادله لگاریتمی نامعین است و بازاء $x=-\sqrt{۲}$ زیر رادیکال منفی می‌شود معادله اصم نامعین است لذا $x=-۳$ و $x=\sqrt{۲}$ ریشه‌معادله‌اند.

۶۰. (ب) پارامتر را بین دو معادله حذف می‌کنیم

$$\begin{cases} x^۲-x-۲a=۰ \\ ۲x^۲+۴x+۲a=۰ \end{cases} \Longrightarrow ۳x^۲+۳x=۰ \Longrightarrow x=۰,\ x=-۱$$

که بازاء $x=۰$، a برابر صفرمی‌شود.

۶۱. (ج) $(x_۱+x_۲+x_۳)^۲-۲(x_۱x_۲+x_۱x_۳+x_۲x_۳)=۶ \Longrightarrow$

$-۲(-۳m)=۶ \Longrightarrow m=۱$

۶۲. (ب) $۲\alpha+\beta+\gamma=\alpha+(\alpha+\beta+\gamma)=\alpha,\ \alpha+۲\beta+\gamma=\beta$

$\alpha+\beta+۲\gamma=\gamma \Longrightarrow x^۳-۳mx-۱=۰$

یعنی همان خود معادله است

۶۳. (الف) $\Delta'=m^۲-۱۶m^۲=-۱۵m^۲\leqslant ۰$

۶۴. (الف) $x=۲$ ریشه هردو رادیکال است. دو معادله دیگر هرگز ریشه ندارند.

۶۵. (ج) $(x^۲+x+a)-(x^۲+ax+۱)=۰ \Longrightarrow (۱-a)x+a-۱=۰$

$a\neq ۱ \Longrightarrow x=۱ \Longrightarrow ۱+۱+a=۰ \Longrightarrow a=-۲$

۶۶. (ج) $\begin{cases} a^۴-۱=۰ \\ a-۱\neq ۰ \end{cases} \Longrightarrow a=-۱$

۶۷. (ب) $\begin{cases} x=۱ \Longrightarrow (a+b)+a+۱=۰ \\ x=۱ \Longrightarrow ۲(a+b)\times ۱+a=۰ \end{cases} \Longrightarrow (a+b)=۱$

$x=۱$ درمشتق عبارت نیز صدق می‌کند

۶۸. (د) حاصل‌ضرب ریشه‌ها منفی می‌شود

$\Delta'=m^۲-m+۴>۰ \qquad m-۴<۰ \Longrightarrow m<۴$

۶۹. (ج) $\Delta'=(b+c)^۲-(b+c+a)(b+c-a)=a^۲\geqslant ۰$

۷۰. (د) $x^۴-۵x^۲+۴=۰ \Longrightarrow x^۲=۱,\ x^۲=۴ \Longrightarrow x=\pm ۱,\ \pm ۲$

بازاء هر یك از ریشه‌های فوق برای a جوابی بدست می‌آید پس چهار مقدار وجود دارد.

۷۱. (الف) $(a^۲+۱)x+(a^۲+۱)(a^۲-۱)=\sqrt{f(x)} \Longrightarrow$

$(x+a^۲-۱)=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{a^۲+۱} \Longrightarrow x-۱+a^۲\geqslant ۰ \Longrightarrow x\geqslant ۱-a^۲$

۷۲. (د) $\alpha^۲+\beta^۲+\gamma^۲=(a-۲)^۲-۲(۱)=(a-۲)^۲-۲ \Longrightarrow a=۲$

۷۳. (الف) $\begin{cases} x^۲-۳x+a=۰ \\ x^۲+ax-۳=۰ \end{cases} \Longrightarrow (a+۳)x=a+۳ \Longrightarrow \begin{cases} x=۱ \\ a\neq -۳ \end{cases}$

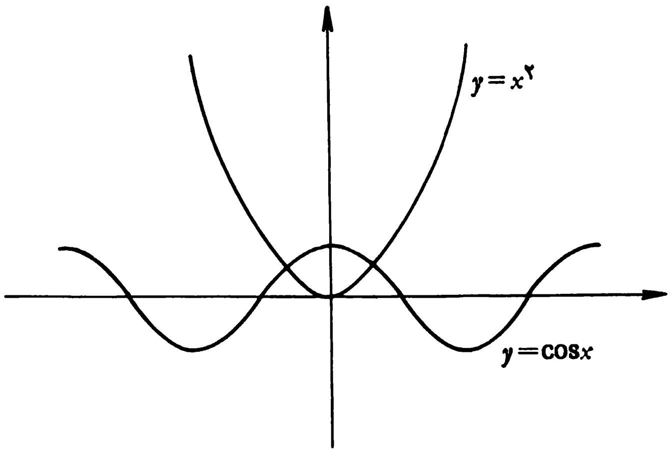
$x=۱ \Longrightarrow ۱-۳+a=۰ \Longrightarrow a=۲$

۷۴. (ج) $۴(-۳m)^۳+۲۷(-۲)^۲=۰ \Longrightarrow m^۳=۱ \Longrightarrow m=۱$

$x=۱ \Longrightarrow ۱-۳m-۲=۰ \Longrightarrow m=-\dfrac{۱}{۳}$

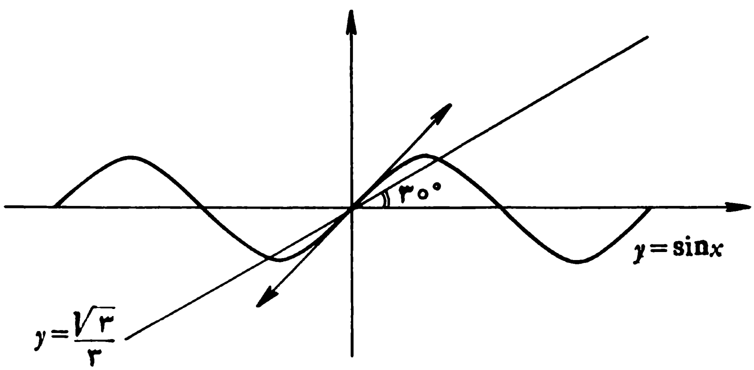
$x=-۱ \Longrightarrow -۱+۳m-۲=\circ \Longrightarrow m=۱$

۷۵. (ج) ریشه‌های معادله محل تلاقی نمودار دو تابع $y=x^{۲}$ و $y=\cos x$ است که در دو نقطه متقاطعند.

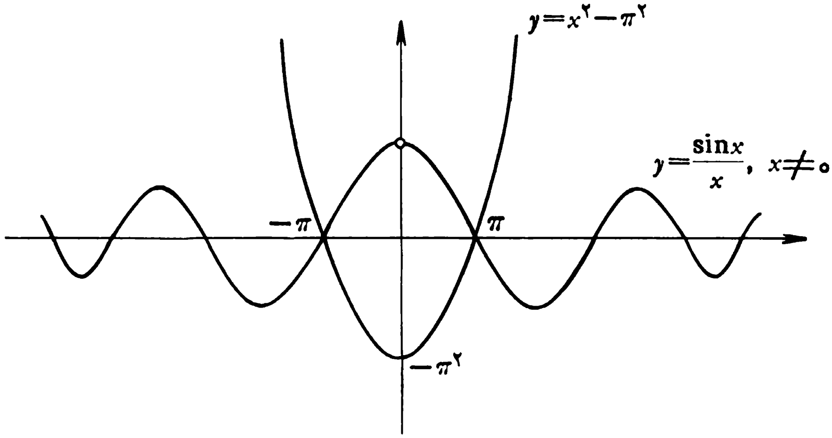


۷۶. (د) ریشه‌های معادله محل تلاقی نمودار دو تابع $y=\sin x$ و $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x$ است.

مشخص است که زاویه خط $y=\frac{\sqrt{۳}}{۳}x$ با محور xها برابر $۳\circ^\circ$ و زاویه مماس بر تابع $y=\sin x$ درمبدأ با محور xها ۴۵° است لذا دونمودار درسه نقطه متقاطعند.



۷۷. (ب) دو نمودار $y=\frac{\sin x}{x}$ و $y=x^{۲}-\pi^{۲}$ در دو نقطه قرینه، یکدیگر را قطع می‌کنند که ریشه‌ها $x=\pm\pi$ می‌باشند.



۷۸. (ب) معادله $x^{۳}+۷x+۱=۰$ فقط یك ریشه منفی دارد پس اگر دو معادله ریشه مشترك داشته باشند باید ریشه منفی معادله $x^{۴}+x^{۲}-۱=۰$ یعنی $x=-\sqrt{\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}}$ باشد که این ریشه درمعادله $x^{۳}+۷x+۱=۰$ صدق نمی‌کند.

۷۹. (ج) $\frac{m^{۲}+۱}{m-۱}=\frac{m}{۱}\neq\frac{۳m+۴}{۲m+۱}\Longrightarrow$

$$m^{۲}+۱=m^{۲}-m\Longrightarrow \boxed{m=-۱} \text{ و } \frac{۳m+۴}{۲m+۱}=-۱$$

زیرا بازاء $m=-۱$ شرط دوم برقرار نیست.

۸۰. (الف) $\frac{a+۱}{a}=\frac{۸}{a+۳}=\frac{۴a}{۳a-۱}\Longrightarrow a^{۲}+۴a+۳=۸a\Longrightarrow$

$$a^{۲}-۴a+۳=۰\Longrightarrow a=۱,\ a=۳،\ a=۱\Longrightarrow \frac{۸}{۴}=\frac{۴}{۲}،$$

بنابر این $a=۱$ قابل قبول است. $a=۳ \Longrightarrow \frac{۸}{۶}\neq\frac{۱۲}{۸}$

۸۱. (الف) $x=۲t,\ y=۳t,\ z=۴t \Longrightarrow \frac{۱}{۲t}+\frac{۱}{۳t}+\frac{۱}{۴t}=\frac{۱۳}{۲۴} \Longrightarrow$

$$\frac{۱۳}{۱۲t}=\frac{۱۳}{۲۴} \Longrightarrow t=۲ \Longrightarrow x+y+z=۲(۲+۳+۴)=۱۸$$

۸۲. (ج) $x=\frac{۲y}{۳},\ z=\frac{۳y}{۲} \Longrightarrow \frac{۲y}{۳}+y+\frac{۳y}{۲}=۳۸ \Longrightarrow \frac{۱۹y}{۶}=۳۸$

$$\Longrightarrow y=۱۲$$

۸۳. (ب) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=۲a,\ \frac{۱}{x}+\frac{۱}{z}=۲b,\ \frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=۲c \Longrightarrow$

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{z}=a+b+c \Longrightarrow \frac{۱}{x}+۲c=a+b+c \Longrightarrow x=\frac{۱}{a+b-c}$$

۸۴. (ج) مشخص است که $x=y=z$ بنابراین $۲x=x^۳$ و $x=۰$ یا $x=\pm\sqrt{۲}$ بنابراین $(۰,۰,۰)$ و $(\sqrt{۲},\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ و $(-\sqrt{۲},-\sqrt{۲},-\sqrt{۲})$ جوابهای دستگاه می‌باشند.

۸۵. (الف) $x+y+۲\sqrt{xy}=۴xy \Longrightarrow ۲xy-\sqrt{xy}-۱=۰ \Longrightarrow$

$$۲t^۲-t-۱=۰$$

$t=۱$ یا $t=-\frac{۱}{۲} \Longrightarrow xy=۱$ $t=-\frac{۱}{۲}$ قابل قبول نیست.

۸۶. (د) $۲x+۳y+۵z=۲(x+z)+۳(y+z)=۴+۹=۱۳$

۸۷. (ب) $(x-۳)(x+۱)\geqslant ۰ \Longrightarrow x\geqslant ۳$ یا $x\leqslant -۱$

اگر $x<-۱$ طرف اول معین و طرف دوم کوچکتر از صفر است یعنی بازاء هر $x<-۱$ برقرار است.

اگر $x\geqslant ۳$ آنگاه $(x+۳)>۳(x+۱)$ یا $x<۰$ که برقرار نیست.

۸۸. (الف) باید $x+۴>۰$ و $(۲x-۱)(x+۴)\geqslant ۰$ درنتیجه شرط جواب $x\geqslant\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین با به‌توان دو رساندن داریم، $۲x-۱<x+۴$ یا $x<۵$. $\frac{۱}{۲}\leqslant x<۵$

۸۹. (د) $x>۰$ و $x\geqslant \frac{۲۰}{۹}$ لذا $x\geqslant \frac{۲۰}{۹}$ شرط جواب است.

اگر به‌توان دو برسانیم، $x^۲-۹x+۲۰>۰$ که ریشه‌های $x^۲-۹x+۲۰=۰$ برابرند با $x=۴$ و $x=۵$ درنتیجه $x>۵$ یا $x<۴$ که با توجه به شرط جواب $\frac{۲۰}{۹}\leqslant x<۴$ یا $x>۵$ جواب است.

۹۰. (ب) $x-۱\geqslant ۰$ و $x+۲\geqslant ۰$ لذا شرط جواب $x\geqslant ۱$ است.

اکنون اگر $x\geqslant ۱$ آنگاه $\sqrt{x+۲}>۱$ و طرف اول همواره بزرگتر از یك است پس نامعادله جواب ندارد.

۹۱. (د) همواره $x^۲-x+۱>۰$ و $\frac{۱}{x^۲+x+۱}=\frac{x-۱}{x^۳-۱}$ نیز بازاء هر $x\neq ۱$ مثبت است درنتیجه رادیکال فقط بازاء $x=۱$ نامعین است. و

$$\log_{x^۲+۱}(x^۲-۴x+۴)=\log_{x^۲+۱}(x-۲)^۲$$

ولذا این عبارت نیز بازاء $x=۰$ و $x=۲$ نامعین است بنابراین دامنه $R-\{۰, ۱, ۲\}$ است.

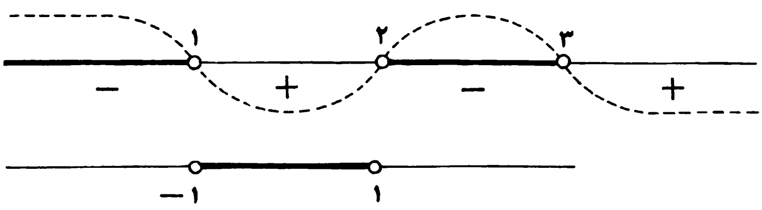
۹۲. (ب) لازم است $a>۰$ زیرا طرف چپ همواره مثبت است. اما کافی نیست زیرا حوزه تعریف معادله $x\geqslant ۲$ است لذا اگر مثلاً $a=۱$ باشد معادله جواب ندارد.

۹۳. (ج) $x<۰$ جواب نامعادله است اگر $x>۰$ آنگاه $x>۳$ درنتیجه

$$(-\infty, ۰)\cup(۳, +\infty)$$

جواب نامعادله است.

۹۴. (ب) $x^۲<۱ \Longrightarrow |x|<۱$



جواب نامعادله اول $۲<x<۳$ یا $x<۱$ وجواب نامعادله دوم $-۱\leqslant x\leqslant ۱$ است که اشتراك آنها $-۱<x<۱$ جواب نامعادله است.

۹۵. (ج) $x^۲+y^۲+۲xy=۳۶ \Longrightarrow (x+y)^۲=۳۶ \Longrightarrow x+y=\pm ۶$

۹۶. (الف)

$$A=۳\times ۱+۵\times ۲+۷\times ۳=۳۴$$

۹۷. (ب)

$$[۲x]-[x]=\left[x+\frac{۱}{۲}\right]=۲ \Longrightarrow ۲\leqslant x+\frac{۱}{۲}<۳ \Longrightarrow$$

$$\frac{۳}{۲}\leqslant x<\frac{۵}{۲}$$

۹۸. (ج)

$$[(۱+\sqrt{۲})^۶]=۱۹۸+[-(۱-\sqrt{۲})^۶]=۱۹۸-۱=۱۹۷$$

$$۰<(۱-\sqrt{۲})^۶<۱ \Longrightarrow -۱<-(۱-\sqrt{۲})^۶<۰ \Longrightarrow$$

$$[-(۱-\sqrt{۲})^۶]=-۱$$

۹۹. (ج)

$$\begin{cases} x=[x]+p \Longrightarrow [x]=\frac{۵}{۶}[x]+\frac{۵}{۶}\,p \Longrightarrow p=\frac{[x]}{۵} \Longrightarrow ۰\leqslant[x]<۵ \\ ۰\leqslant p<۱ \end{cases}$$

$[x]=۰,\ ۱,\ ۲,\ ۳,\ ۴$ پنج ریشه دارد

۱۰۰. (الف)

$$[۲(x^۲+۱)]=[۴x]=n \Longrightarrow \begin{cases} n\leqslant ۲(x^۲+۱)<n+۱ \\ n\leqslant ۴x<n+۱ \end{cases} \Longrightarrow$$

$$۲n\leqslant ۲(x+۱)^۲<۲n+۲ \Longrightarrow n\leqslant (x+۱)^۲<n+۱ \Longrightarrow$$

$$[(x+۱)^۲]=n=[۴x]$$

۷. پاسخ تستهای فصل هفتم

«بخش‌پذیری و بسط دو جمله‌ای»

۱. (ب) $x=a+b \Longrightarrow R=(a+b-a)(a+b-b)+k=۰ \Longrightarrow$

$k+ab=۰ \Longrightarrow k=-ab$

۲. (الف) $(x-۲)^۴=(x-۲)(x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸) \Longrightarrow$

$a=-۶,\ b=۱۲,\ c=-۸$

۳. (ج) $x^۳=-۱,\ x^{۴۷}=(x^۳)^{۱۵}.x^۲ \Longrightarrow R=x^۲$

۴. (الف)

۵. (الف) $f(x)=(x^۳-۳x+۲)g(x)+x^۲+۴x+۴ \Longrightarrow$

$f(-۲)=۰+(-۲)^۲+۴(-۲)+۴=۰$

۶. (ب) باید باقیمانده $x^۲+۲x=(x+۲)x$ را بر $x^۲+۲x+۲$ پیدا کنیم که برابر ۲− است.

۷. (الف) $R=۲x(-۳)-۳a+bx+۳=x(b-۶)-۳(a-۱)\equiv ۰$

$\Longrightarrow b=۶,\ a=۱$

۸. (د) باید $\frac{m}{p}$ عددی فرد باشد $۳=\frac{۲۴}{۸}=\frac{۴۸}{۱۶}$.

۹. (ج) روش اول: $x^{۲}=x+۲ \Longrightarrow R=ax(x+۲)-۴(x+۲)-bx+۶=$

$ax^{۲}+۲ax-۴x-۸-bx+۶=a(x+۲)+۲ax-۴x-bx-۲$

$$(۳a-b-۴)+۲a-۲\equiv ۰ \Longrightarrow \begin{cases} a=۱ \\ ۳a-b-۴=۰ \Longrightarrow b=-۱ \end{cases}$$

روش دوم:

$x^{۲}-x-۲=(x+۱)(x-۲)=۰$

$$\begin{cases} f(-۱)=-a-۴+b+۶=۰ \Longrightarrow \\ f(۲)=۸a-۱۶-۲b+۶=۰ \Longrightarrow \end{cases} \begin{cases} a-b-۲=۰ \\ ۸a-۲b-۱۰=۰ \end{cases} \Longrightarrow$$

$a=۱,\ b=-۱$

۱۰. (ج) تقسیم را انجام دهید.

۱۱. (ج) $f(x)=(۴x-۱)g(x)+R \Longrightarrow f(x)=\left(x-\frac{۱}{۴}\right)۴g(x)+R$

۱۲. (ج) $x^{۲}-۳x+۲=(x-۱)(x-۲) \Longrightarrow \begin{cases} a+b=۵ \\ ۲a+b=۷ \end{cases} \Longrightarrow$

$a=۲,\ b=۳$

$R=۲x+۳$

۱۳. (الف) $x^{۲}=-x-۱ \Longrightarrow R=x(-x-۱)^{۲}+x+۱=$

$x(x^{۲}+۲x+۱)+x+۱=x(-x-۱+۲x+۱)+x+۱$

$=x(x)+x+۱=x^{۲}+x+۱=۰$

۱۴. (ج) روش اول:

$x^{۲}=۱ \Longrightarrow R=۱+a+bx+۱=۰ \Longrightarrow b=۰،a=-۲ \Longrightarrow ۳b-۴a=۸$

روش دوم:

$$\begin{cases} f(۱)=۰ \\ f(-۱)=۰ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+b=-۲ \\ a-b=-۲ \end{cases} \Longrightarrow a=-۲,\ b=۰$$

۱۵. (د)
$$x^۳=-۱ \Longrightarrow a-b+۱=۱ \Longrightarrow a-b=۰$$
$$x+۲=۰ \Longrightarrow x=-۲ \Longrightarrow R=۴-۲a+۲b=۴-۲(a-b)=۴$$

۱۶. (ج) باید $\frac{m}{p}$ زوج باشد.

۱۷. (ب)
$$f(x)=(x-۱)g(x)+۲ \Longrightarrow f(x^۳)=(x^۳-۱)g(x^۳)+۲$$

۱۸. (الف)
$$f(x)=(x^۲+۱)g(x)+۴ \Longrightarrow$$
$$f(x^۳)=(x^۶+۱)g(x^۳)+۴=(x^۲+۱)(x^۴-x^۲+۱)g(x^۳)+۴$$

۱۹. (الف)
$$T_{k+۱}=\binom{۱۵}{k}(x^۴)^{۱۵-k}\left(-\frac{۱}{x^۳}\right)^k=(-۱)^k\binom{۱۵}{k}x^{۶۰-۷k}$$
$$۶۰-۷k=۳۲ \Longrightarrow k=۴,\quad \binom{۱۵}{۴}=\binom{۱۵}{۱۱}$$

۲۰. (د)
$$T_{k+۱}=\binom{۱۰}{k}\left(x^{\frac{۲}{۳}}\right)^{۱۰-k}\left(x^{-\frac{۲}{۷}}\right)^k=\binom{۱۰}{k}x^{\frac{۱۴۰-۲۰k}{۲۱}}$$
$$۱۴۰-۲۰k=۰ \Longrightarrow k=۷ \Longrightarrow T_۸=\binom{۱۰}{۷}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=۱۲۰$$

۲۱. (الف) وقتی n فرد است جمله‌های وسط جمله‌های $T_{\frac{n+۱}{۲}}$ و $T_{\frac{n+۳}{۲}}$ می‌باشند که ضرایب آنها مساویند.
$$\frac{n+۱}{۲}=\frac{۹+۱}{۲}=۵ ، \binom{۹}{۶}=\binom{۹}{۴}=۱۲۶$$

۲۲. (ب)
$$T_{k+۱}=\binom{۱۳}{k}x^{\frac{۱۳-k}{۳}}.y^{\frac{k}{۵}}$$
اگر $k=۰, ۵, ۱۰$ نسبت به y گویا است.

وفقط بازاء $k=۱۰$، نسبت به x نیز گویا است.

۲۳. (د)
$$\binom{۲n}{n}=\frac{(۲n)!}{n!n!}=\frac{(۲n)!}{(n!)^۲}$$

۲۴. (ج)
$$T_{k+۱}=\binom{۲۰}{k}x^{\frac{۲۰-k}{۴}}.x^{\frac{k}{۲}}=\binom{۲۰}{k}x^{\frac{۲۰+k}{۴}},\quad \frac{۲۰+k}{۴}=۷ \Longrightarrow$$

$$k=۸ \Longrightarrow T_۹=\binom{۲۰}{۸}x^۷=\binom{۲۰}{۱۲}x^۷$$

۲۵. (د) $\binom{n}{۲}-\binom{n}{۱}=۵۴ \Longrightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}-n=۵۴ \Longrightarrow n^۲-۳n=۱۰۸$

$$\Longrightarrow n=۱۲,\ n=-۹ \qquad T_k=\binom{۱۲}{k}x^{\frac{۶۰-۶k}{۵}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{k=۱۰} \Longrightarrow T_{۱۱}=\binom{۱۲}{۱۰}$$

۲۶. (ج) $۲\binom{n}{۲}=\binom{n}{۳}+\binom{n}{۱} \Longrightarrow n(n-۱)=\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}+n \Longrightarrow$

$n^۲-۹n+۱۴=۰ \Longrightarrow n=۲$ یا $n=۷ \Longrightarrow n=۷$

$n=۲$ قابل قبول نیست

۲۷. (ج) اگر $n=۲$ انتخاب کنیم چهار جمله دارد که فقط در گزینه (ج) چنین است می‌توان درحالت کلی نیز آنرا ثابت کرد.

۲۸. (الف) $f(x)=(۱+x)^{۱۱}-x^{۱۱} \Longrightarrow k=۷ \Longrightarrow \binom{۱۱}{۷}=۳۳۰$

۲۹. (ب) $T_۳=\binom{n}{۲}x^{\frac{۲(n-۲)}{۳}}x^{-۲}=\binom{n}{۲}x^{\frac{۲n-۱۰}{۳}} \Longrightarrow \boxed{n=۵}$

۳۰. (الف) $\binom{۱۰}{۵}=\frac{۱۰!}{۵!\,۵!}=۲۵۲$

۳۱. (ج) $x^{\frac{۳۲-k}{۲}}.y^{\frac{k}{۵}} \qquad ۰\leqslant k\leqslant ۳۲$

برای y باید $k=۰,۵,۱۰,۱۵,۲۰,۲۵,۳۰$ که بازاء $k=۰,۱۰,۲۰,۳۰$ توان x نیز گویا می‌شود.

$$\left[\frac{۳۲}{۵}\right]+۱=۷,\quad \left[\frac{۳۲}{۱۰}\right]+۱=۴$$

تذکر: در بعضی حالات خاص می‌توان تعداد جمله‌های گویای بسط $(\sqrt[m]{x}+\sqrt[p]{y})^n$ را از رابطه $\left[\frac{n}{C}\right]+۱$ بدست آورد که c کوچکترین مضرب مشترك بین m و p است اما این

فرمول درحالت‌کلی درست نیست. بنابراین باید از به‌کاربردن فرمول فوق پرهیز کرد.

اما بنا به‌قضیه تقسیم برای تعداد جمله‌هـای‌گویا نسبت به هر یك از حروف صحیح است.تعداد جمله‌های‌گویا نسبت به y برابر است با $\left[\frac{n}{p}\right]+۱$ ($[\ ]$ نماد جزء صحیح است).

۳۲. (الف) $T_۳=\binom{۵}{۲}x^۳(x^{۲\log x})=۱۰^۶ \Longrightarrow ۱۰x^{۳+۲\log x}=۱۰^۶$

$$\Longrightarrow x^{۳+۲\log x}=۱۰^۵ \Longrightarrow (۳+۲\log x)\log x=۵ \Longrightarrow$$

$$۲\log^۲x+۳\log x-۵=۰ \Longrightarrow \begin{cases}\log x=۱ \\ \log x=-\frac{۵}{۲}\end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x=۱۰ \\ x=\frac{۱}{۱۰۰\sqrt{۱۰}}\end{matrix}$$

۳۳. (د)

دستگاه سازگار نیست $\frac{۱}{۱}=\frac{-۲m}{m}=\frac{m-۱}{-۳} \Longrightarrow m=-۲$

۳۴. (د) $۴x^۲-x^۳=۲x-۶ \Longrightarrow \dfrac{۴x^۲-x^۳}{\frac{۱}{۳}x-۱}=\dfrac{۲(x-۳)}{\frac{۱}{۳}(x-۳)}=۶$

۳۵. (الف) $x=-۱ \Longrightarrow (-۱-۳)A=(-۵-۳) \Longrightarrow A=۲$

$$x=۳ \Longrightarrow (۳+۱)B=(۱۵-۳) \Longrightarrow B=۳$$

۳۶. (ج) $۴^{n-۳}=۱۶\times ۲^n \Longrightarrow ۲^{۲n-۶}=۲^{n+۴} \Longrightarrow$

$$۲n-۶=n+۴ \Longrightarrow n=۱۰$$

۳۷. (د) $f(۱)=(۱)^{۹۹}+(۱)^۶+۳=۵$

۳۸. (د) $x=۱ \Longrightarrow \frac{۶}{۴}=\frac{A+B}{۲}+\frac{C}{۲} \Longrightarrow A+B+C=۳$

۳۹. (الف) روش اول.

$$\begin{cases} x=\circ \Longrightarrow ۲A=۱ \Longrightarrow A=\frac{۱}{۲} \\ x=-۱ \Longrightarrow (-۱)(-۱+۲)B=۱ \Longrightarrow B=-۱ \Longrightarrow \\ x=-۲ \Longrightarrow -۲(-۲+۱)C=۱ \Longrightarrow C=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$A+B+C=\circ$

روش دوم. هرگاه در سمت چپ مخرج مشترك گرفته شود $A+B+C$ ضریب $x^۲$ است که درصورت طرف دوم ضریب $x^۲$ صفر است پس $A+B+C=\circ$.

۴۰. (الف) α و β ریشه‌هـای معادله می‌باشند یعنی $\alpha+\beta=-۲$ و $\alpha\beta=-۴$.

$$\frac{\alpha^۵-\beta^۵}{\alpha^۲-\beta^۲}=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^۴+\alpha^۳\beta+\alpha^۲\beta^۲+\alpha\beta^۳+\beta^۴)}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}=$$

$$\frac{\alpha^۴+\beta^۴+\alpha\beta(\alpha^۲+\beta^۲)+\alpha^۲\beta^۲}{\alpha+\beta}=\frac{(s^۲-۲p)^۲-۲p^۲+p(s^۲-۲p)+p^۲}{s}$$

$$=-۴۵$$

پاسخ تستهای مختلف

۱. (ج) $a_{m+n}=a_۱+(m+n-۱)d=a_۱+(n-۱)d+md=a_n+md$

یا $\boxed{a_{m+n}-a_n=md}$

۲. (الف) $d=۲ \Longrightarrow a_{۷۵}=a_{۵۱}+۲۴d=۱\circ۳+۴۸=۱۵۱$

۳. (الف) $\sqrt[۴]{x}-\sqrt[۴]{y}-(\sqrt[۴]{x}+\sqrt[۴]{y})=-۲\sqrt[۴]{y}$

۴. (ج) $\frac{\sqrt[۴]{x}(\sqrt[۴]{x}-۶)(\sqrt[۴]{x}+۶)}{\sqrt[۴]{x}(\sqrt[۴]{x}-۶)}=\sqrt[۴]{x}+۶$

۵. (ب) $\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{x^۲}-۱=\circ \Longrightarrow x+x^۲-۱=-۳\sqrt[۳]{x^۳}=-۳x$

$$A=\frac{x^۲-۱}{x}=\frac{-۴x}{x}=-۴$$

۶. (ب) $x+۱+x+۲+x+۳=۳\sqrt[۳]{(x+۲)(x^۲+۴x+۳)} \Longrightarrow$

$(x+۲)^۳=(x+۲)(x^۲+۴x+۳) \Longrightarrow$

$x=-۲$ یا $x^۲+۴x+۳=x^۲+۴x+۴$

که این معادله ریشه ندارد.

۷. (ب) زیرا $۱ \leqslant x$ وبا شرط فوق طرف اول همواره بزرگتر یا مساوی ۲ است وفقط باید $x=۱$ باشد تا دوطرف مساوی شوند.

۸. (ج) $x^۲=a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\ldots}}} \Longrightarrow \begin{cases} x^۴=a^۲bx \\ x\neq ۰ \end{cases} \Longrightarrow x^۳=a^۲b$

یا $x=\sqrt[۳]{a^۲b}$

۹. (ج) $\sqrt{x^۲}=|x|,\sqrt{|x|\sqrt{x^۲}}=\sqrt{x^۲}=|x|$

و به همین ترتیب ادامه پیدا می‌کند.

۱۰. (ب) $n=mk+r,\ ۰<r<k \Longrightarrow m+\left[\frac{r}{k}\right]-m-\left[\frac{r-۱}{k}\right]=۰$

۱۱. (ب) $a^۲-۴b=۰ \Longrightarrow a^۲=۴b$

$\triangle=a^۲-۴(b-۲)=a^۲-۴b+۸=۸$ $\quad$ $\triangle$ مربع کامل نیست.

۱۲. (الف) $f'(x)=۴x^۳+۳ax^۲+۲bx+c,\ f''(x)=۱۲x^۲+۶ax+۲b$

$f'''(x)=۲۴x+۶a,\ f'''(-۱)=۰ \Longrightarrow \boxed{a=۴}$

۱۳. (د) $x+z+۲(y+z)=۴+۲(۳)=۱۰$

۱۴. (ج) $\begin{cases} x+۲y=۵ \\ ۲x+y=۴ \end{cases} \Longrightarrow ۳(x+y)=۹ \Longrightarrow x+y=۳ \Longrightarrow$

$m^۲+m-۲=۰ \Longrightarrow m=۱,\ -۲$

۱۵. (د) $(۲k-۱)(۲k+۱)=۳۲۳ \Longrightarrow ۴k^۲=۳۲۴ \Longrightarrow k^۲=۸۱$ یا

$k=۹$ و $(۲k-۱)+(۲k+۱)=۴\mathrm{k}=۳۶$

۱۶. (ب) $(۲k-۲)+۲k+(۲k+۲)=۶k$

$(۲k-۲)(۲k)(۲k+۲)=۸(k-۱)k(k+۱)=۴۸\,\mathrm{m}$

یعنی حاصلضرب سه عدد زوج متوالی همواره بر ۴۸ بخش‌پذیر است.

تذکر: حاصلضرب هر دوعدد صحیح متوالی همواره بر ۲ و حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی همواره بر ۳ و . . . به همین ترتیب حاصلضرب n عدد صحیح متوالی همواره بر n بخش‌پذیر است.

۱۷. (ج) زیرا حاصل‌ضرب هرسه عدد متوالی هم بر ۲ وهم بر ۳ بخش‌پذیر است وچون ۲ و ۳ نسبت به‌هم اولند پس برحاصلضرب آنها یعنی ۶ بخش‌پذیر است.

تذکر: هرعدد صحیح را می‌توان برحسب باقیمانده‌های آن برعدد صحیحی نوشت مثلاً عدد صحیح n را می‌توان به‌یکی ازصورتهای زیر برحسب باقیمانده‌اش بر m نوشت

$$n=mk \text{ یا } mk+۱ \text{ یا } mk+۲ \text{ یا } \dots mk+(m-۱)$$

مثلاً هرعددصحیح به‌یکی ازصورتهای $۲k$ یا $۲k-۱$ است یا هرعدد صحیح به‌یکی از صورتهای $۳k$ یا $۳k+۱$ یا $۳k+۲$ است. بنابراین بـرای اثبات قسمت فوق می‌توان ازاین روابط کمك گرفت. ازسه‌عدد n و $n+۱$ و $n+۲$ حداقل یکی بر۳بخش‌پذیر است. نتیجه. هرعدد صحیح به‌یکی ازصورتهای $۴k$، $۴k+۱$، $۴k+۲$، $۴k+۳$ است. کـه $۴k+۱$ و $۴k+۳$ فرد می‌باشند یعنی هـرعدد فـرد را می‌توان به یکی از صورتهـای $n=۴k+۱$ یا $n=۴k+۳$ نشان داد اگر این عدد را به‌توان دو برسانیم،

$$n^۲=۸(۲k^۲+۳k+۱)+۱ \text{ یا } n^۲=۸(۲k^۲+۱)+۱$$

یعنی $n^۲=۸k'+۱$ یـا $n^۲=۸k''+۱$ است درنتیجه مربع هـر عـدد فرد به صورت $۸t+۱$ است. که t عدد صحیح دلخواه است.

۱۸. (ب)
$$\begin{cases}|x|=۰ \\ x^۲-۳x+۲\leqslant ۰\end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x=۰ \\ ۱\leqslant x\leqslant ۲\end{matrix}$$

۱۹. (د) روش اول: $p<۰$ و $\triangle=۴p^۳+۲۷q^۲=۴(-۲۷)+۲۷<۰$

سه ریشه دارد

روش دوم: $f'(x)=3x^2-3=0 \Longrightarrow x=\pm 1$

سه ریشه دارد، $f(1).f(-1)=(-1)(3)<0$

۲۰. (ج) $A=3^{40} \Longrightarrow \log A=40\log 3=19/08$

مفسر لگاریتم A برابر ۱۹ است پس عدد ۲۰ رقمی است.

۲۲. (ج) $x^5-1=0 \Longrightarrow x^5=1 \Longrightarrow A=\dfrac{(1)^{20}+(1)^{-20}}{2(1)^4-1}=2$

۲۳. (الف) $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\geqslant 9 \Longrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geqslant 3$

۲۴. (ج) اگر ریشه‌های این معادله را α و β و γ بنامیم

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geqslant 9 \Longrightarrow \left(-\frac{b}{a}\right)\frac{\frac{c}{a}}{-\frac{d}{a}}\geqslant 9 \Longrightarrow$$

$$\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{d}\geqslant 9 \Longrightarrow bc\geqslant 9ad$$

۲۵. (ب) $s^2=a+s \Longrightarrow s^2-s-a=0 \Longrightarrow s=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

که‌چون $a>0$ پس جواب منفی قابل قبول نیست، $s=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$

۲۶. (ب) طرفین را به‌توان ۱۲ می‌رسانیم

$$\sqrt[3]{3}>\sqrt[4]{4} \Longleftrightarrow 3^4>4^3$$

۲۷. (ب) $(4x^2-9y^2)^4$ ، تعداد جملات $=5$

۲۸. (ج) $\sqrt{x-2}=4-x \Longrightarrow \begin{cases} x-2\geqslant 0 \\ 4-x\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow 2\leqslant x\leqslant 4$

$$x-2=16+x^2-8x \Longrightarrow x^2-9x+18=0 \Longrightarrow$$

$x_1=3,\ x_2=6$ $x=6$ قابل قبول نیست

۲۹. (ج) $\log_{۲}^{n}+\log_{۲}^{m}=b \Longrightarrow \log_{۲}mn=b \Longrightarrow mn=b^{۲}$

۳۰. (ب) $\dfrac{a^{۲}-b^{۲}}{ab}+\dfrac{b(a-b)}{a(a-b)}=\dfrac{a^{۲}-b^{۲}}{ab}+\dfrac{b}{a}=\dfrac{a^{۲}}{ab}=\dfrac{a}{b}$

۳۱. (د) $s=x_{۱}^{۲}+x_{۲}^{۲}=(x_{۱}+x_{۲})^{۲}-۲x_{۱}x_{۲}=(t-۲)^{۲}-۲(t^{۲}-۱)=$

$$-t^{۲}-۴t+۶=-(t+۲)^{۲}+۱۰ \Longrightarrow \boxed{t=-۲}$$

یا می‌توان مشتق گرفت.

۳۲. (ب) $|x'-x''|=\dfrac{\sqrt{\triangle}}{|a|} \Longrightarrow ۲=\dfrac{\sqrt{۱-۴m}}{۱} \Longrightarrow m=-\dfrac{۳}{۴}$

۳۳. (ب) $\alpha\beta<۰ \Longrightarrow -۴m+۸<۰ \Longrightarrow m>۲$

۳۴. (د) این معادله دو ریشه قرینه دارد و لذا جمع آن دوصفر است. لازم به‌تذکر است که چون a و c مختلف‌العلامت می‌باشند معادلـه $t^{۲}+۲۵t-۲۷۰=۰$ دو ریشه مختلف‌العلامت داردکه فقط از ریشه مثبت آن دو ریشه مختلف‌العلامت برای معادله اصلی بدست می آید.

۳۵. (د) اگر ریشه‌های معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$ را $x_{۱}$ و $x_{۲}$ بنامیم $x_{۱}x_{۲}=\dfrac{c}{a}$ و $\pm x_{۱}$ و $\pm x_{۲}$ ریشه‌های معادلـه فـوق می‌باشند در نتیجه حاصلضرب ریشه‌ها $(x_{۱}x_{۲})^{۲}=\dfrac{c^{۲}}{a^{۲}}$ است.

۳۶. (ب) $۱-\log_{\frac{۱}{۲}}a\geqslant ۰ \Longrightarrow \log_{\frac{۱}{۲}}a\leqslant ۱=\log_{\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}} \Longrightarrow a\geqslant\dfrac{۱}{۲}$

۳۷. (ب) $\sqrt{۱۰۱}-\sqrt{۱۰۰}<\sqrt{۱۰۰}-\sqrt{۹۹} \Longrightarrow \sqrt{۱۰۱}+\sqrt{۹۹}<۲۰$

۳۸. (د) $\mathrm{Min}\, s=\dfrac{۹}{۱+۴+۴}=۱$

۳۹. (د) $x+۲<۰$ یا $x<-۲$ یك قسمت جواب است.

$$x+۲>۰ \Longrightarrow x+۲>۴ \Longrightarrow x>۲$$

۴۰. (ب) اگر $x^{۲}-۹>۰$ یا $|x|>۳$ نامساوی همواره برقرار است. اگر $x^{۲}-۹<۰$

یا $3<|x|$ آنگاه $-5<-9-x^2$ یا $x^2>4$ لذا $|x|>2$ درنتیجه جواب $2<|x|$ و $x\neq\pm 3$ است.

۴۱. (ج) $-(1+3+5+\cdots+25)x^{12}=-13^2x^{12}=-169x^{12}$

۴۲. (ب) ممکن است z منفی باشد.

۴۳. (الف) پس ازساده‌کردن داریم، $x^2-x-m(m+1)=0$.

$$\triangle=1+4m(m+1)=0 \Longrightarrow (2m+1)^2=0 \Longrightarrow m=-\frac{1}{2}$$

۴۴. (ب) $a^x=b^y \Longrightarrow a=b^{\frac{y}{x}}$ و $a^t=b^z \Longrightarrow a=b^{\frac{z}{t}}$

بنابراین $b^{\frac{y}{x}}=b^{\frac{z}{t}}$ یا $yt=xz$

۴۵. (الف) $\frac{a_1}{1-r}=6,\ a_1+a_1r=4/5 \Longrightarrow \begin{cases} 1+r=\dfrac{4/5}{a_1} \\ 1-r=\dfrac{a_1}{6} \end{cases}$ یا

$$2=\frac{a_1}{6}+\frac{4/5}{a_1} \Longrightarrow a_1^2-12a_1+27=0 \Longrightarrow a_1=3 \text{ یا } a_1=9$$

۴۶. (ب) معادله هم‌ارز معادله $x^2-\left(b+\frac{m-1}{m+1}a\right)x+c\frac{m-1}{m+1}=0$ است باید $bm+b+ma-a=0$ یا $m=\frac{a-b}{a+b}$.

۴۷. (ب) $x^{16}=16$ یا $x=\sqrt[16]{2^4}$ لذا $x=\sqrt[4]{2}$

۴۸. (الف) $z=y^2$ و $2^{2x+1}=2^z$ یا $z=2x+1$ بنابراین، $x=\frac{z-1}{2}=\frac{y^2-1}{2}$ و $y^2+y+\frac{y^2-1}{2}=16$ درنتیجه $3y^2+2y-33=0$ که جواب صحیح y برابر ۳ است.

۴۹. (ب) طرفین معادله را بر x^2 تقسیم می‌کنیم $(x\neq 0)$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}-4=0$$

بنابراین $y^۲+y-۶=۰$ یا $y=-۳, ۲$.

۵۰. (ج) اگر تابع $y=|۴x-۱|+|x-۲|$ را درنظر بگیریم بازاء $x=۲$ یا $x=\frac{۱}{۴}$ مینیمم است که با امتحان کردن مشخص است که بازاء $x=\frac{۱}{۴}$ دارای مینیممی برابر $\frac{۷}{۴}$ است وچون $۵>\frac{۷}{۴}$ لذا دو ریشه دارد.

۵۱. (الف) $$۲+\frac{x}{\sqrt{x+۱}+۱}=۲+\frac{x(\sqrt{x+۱}-۱)}{x}=\sqrt{x+۱}+۱$$

بنابراین معادله معادل است با $۱=\dfrac{x}{۲+\dfrac{x}{\sqrt{x+۱}+۱}}$ یا مانند فوق معادل است

با $\frac{x}{\sqrt{x+۱}+۱}=۱$ یا $\sqrt{x+۱}+۱=x$ که $x^۲-۳x=۰$ و $x=۳$.

۵۲. (ب) $$a^۲b^۲+a^۲c^۲+b^۴+b^۲c^۲=a^۲b^۲+b^۲c^۲+۲ab^۲c,$$

$$b^۴-۲ab^۲c+a^۲c^۲=۰ \text{ یا } (b^۲-ac)^۲=۰ \Longrightarrow b^۲=ac$$

۵۳. (ج) مینیمم تابع $y=|۳x-۶|+|x-۱|$ در $x=۲$ و برابر یك است و لذا همواره $|۳x-۶|+|x-۱|\geqslant ۱$ کافیست حالت تساوی را حذف کنیم. بنابراین جواب $R-\{۲\}$ است.

۵۴. (د) فرض کنیم معادله صحیح $x^۲+bx+c=۰$ باشد دانش‌آموز اول جواب‌را $x^۲+bx+c'=۰$ و دانش‌آموز دوم جواب را $x^۲+b'x+c=۰$ بدست آورده‌اند درنتیجه؛

$$x^۲+bx+c'=x^۲-۱۰x+۱۶=۰$$

$$x^۲+b'x+c=x^۲+۱۰x+۹=۰$$

لذا $x^۲+bx+c=x^۲-۱۰x+۹=۰$ معادله صحیح است.

۵۵. (ب) پس ازساده کردن داریم $x^۲-۵x+۴=۰$ که $x=۱$ و $x=۴$ اما $x=۱$ قابل قبول نیست.

.۵۶ (الف) $A=\sqrt{\frac{۴x^۴+x^۸-۲x^۴+۱}{۴x^۴}}=\sqrt{\frac{(x^۴+۱)^۲}{۴x^۴}}=\frac{x^۴+۱}{۲x^۲}$

$$=\frac{۱}{۲}\left(x^۲+\frac{۱}{x^۲}\right)=\frac{۱}{۲}\left(x+\frac{۱}{x}\right)^۲-۱=\frac{۱}{۲}(۴)^۲-۱=۷$$

زیرا $x\neq ۰$ و $x^۲-۴x+۱=۰$ در نتیجه $x+\frac{۱}{x}=۴$.

.۵۷ (ج) $۲\sqrt{x}+\frac{۲}{\sqrt{x}}=۵ \Longrightarrow ۲x-۵\sqrt{x}+۲=۰ \Longrightarrow ۲x+۲=۵\sqrt{x}$

$۴x^۲+۴+۸x-۲۵x=۰$ یا $۴x^۲-۱۷x+۴=۰$

.۵۸ (ب) $|x-۲|(|x-۲|+۳)=۰$ یا $(x-۲)^۲+۳|x-۲|=۰$

بنابراین $|x-۲|=۰$ یا $x=۲$

.۵۹ (ج) $\frac{۱}{\alpha}+\frac{۱}{\beta}+\frac{۱}{\gamma}=\frac{۱}{\gamma}-\gamma \Longrightarrow \frac{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{۱-\gamma^۲}{\gamma}$

اما $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=۰$ در نتیجه $\gamma=\pm۱$ و لذا

$\gamma=۱ \Longrightarrow ۱+k+۴=۰ \Longrightarrow k=-۵$ و $\gamma=-۱ \Longrightarrow k=-۳$

.۶۰ (الف) $s=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=-۵,\ \ p=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)=۰$

$q=(\alpha\beta\gamma)^۲=(-۱)^۲=۱ \Longrightarrow x^۳+۵x^۲-۱=۰$

تذکر: هر معادله درجه سوم $ax^۳+bx^۲+cx+d=۰$ را می‌توان به صورت $x^۳+\frac{b}{a}x^۲+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=۰$ و در نتیجه به‌صورت $x^۳-sx^۲+px-q=۰$ نشان‌داد که:

$s=x_۱+x_۲+x_۳$ و $p=x_۱x_۲+x_۱x_۳+x_۲x_۳$ و $q=x_۱x_۲x_۳$

.۶۱ (ج) هرگاه در تصاعد هندسی $a_۱, a_۱r, \ldots, a_۱r^{n-۱}$ تعداد جمله‌ها زوج باشد و s مجموع جمله‌های ردیف فرد و s' جمله‌های ردیف زوج و s_n مجموع n جمله اول باشد چنین داریم:

$$\begin{cases} s'=a_۱r+a_۱r^۳+a_۱r^۵+\cdots+a_۱r^{n-۱} \\ s=a_۱+a_۱r^۲+a_۱r^۴+\cdots+a_۱r^{n-۲} \end{cases} \Longrightarrow \frac{s'}{s}=r \text{ یا } \boxed{s'=rs}$$

بنا براین،

$$s_n = s + s' = s + rs = (۱+r)s$$

به همین ترتیب

$$s_n = \frac{s'(۱+r)}{r}$$

۶۲. (الف) با توجه به رابطه‌های تست قبل.

$$s_n = \frac{s'(۱+r)}{r} = \frac{۸۵\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)}{\frac{۱}{۲}} = ۲۵۵$$

۶۳. (ج) اگر $\sqrt{\sqrt{۵}-۱} = a$ آنگاه $\frac{۲}{a} = \sqrt{\sqrt{۵}+۱}$ و درنتیجه:

$$\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+a} + \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\frac{۲}{a}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+a} + \frac{a}{a+\sqrt{۲}} = \frac{a+\sqrt{۲}}{a+\sqrt{۲}} = ۱$$

۶۴. (الف) $\sqrt[n]{\sqrt{a}+\sqrt{a-۱}} = x$ فرض می‌کنیم

$$\frac{a}{۱+x} + \frac{a}{۱+\frac{۱}{x}} = \frac{a}{۱+x} + \frac{ax}{۱+x} = \frac{a(۱+x)}{۱+x} = a$$

۶۵. (د) مجموع ضرایب صفر است پس یك ریشه $x_۱ = ۱$ و ریشه دیگر برابر است با $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$ یا $\frac{c(b-a)}{a(c-b)}$.

۶۶. (ب) $\frac{mp}{nq} = \frac{۶}{۷}$ درنتیجه $mp = ۶k$ و $nq = ۷k$ لذا:

$$\frac{۳(۶k)-۷k}{۴(۷k)-۷(۶k)} = \frac{۱۸-۷}{۲۸-۴۲} = \frac{-۱۱}{۱۴}$$

۶۷. (ب)

$$۲۷.۳^x = ۱۳۵ \Longrightarrow ۳^x = ۵ \Longrightarrow x \log ۳ = \log ۵ \Longrightarrow$$

$$x(۰/۵) = ۱ - \log ۲ \Longrightarrow \frac{۱}{۲}x = ۱ - \frac{۳}{۱۰} \Longrightarrow y = \frac{۷}{۵}$$

۶۸. (ب) $-1 > \log_{\frac{1}{2}} x \geqslant -2 \Longleftarrow [\log_{\frac{1}{2}} x] = -2 \Longleftarrow 3^{-2} = 3^{[\log_{\frac{1}{2}} x]}$

یا $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} < x \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Longrightarrow 2 < x \leqslant 4$

۷۰. (ج) $[x]+3+[-x]+2+[x]-2=3 \Longrightarrow$

$[x]+[-x]+[x]=0$

اگر $x\in z$ آنگاه $[x]+[-x]=0$ ولذا $[x]=0$ درنتیجه $x=0$ اگر $x\neq z$ آنگاه $[x]+[-x]=-1$ و $[x]=1$ یا $1<x<2$.

۷۱. (ج) با توجه به نامساوی

$$(x+y\geqslant 0),\ \ x^n+y^n\geqslant\frac{(x+y)^n}{2^{n-1}}$$

الف ـ اگر $x+y=k$ وثابت باشد x^n+y^n وقتی مینیمم است که $x=y=\frac{k}{2}$ و این مقدار مینیمم برابر است با $\frac{k^n}{2^{n-1}}$.

ب ـ اگر $x^n+y^n=s$ و ثابت باشد آنگاه $x+y$ وقتی ماکزیمم است که $x=y=\sqrt[n]{\frac{s}{2}}$ ومقدار این ماکزیمم برابر است با $\sqrt[n]{2^{n-1}s}$.

بنابراین:

$$\operatorname{Max} A=\sqrt[3]{2^2\times 2}=2$$

۷۲. (ب) با توجه به‌تذکر تست قبل،

$$\operatorname{Min} s=\frac{(\sqrt[3]{4})^6}{2^5}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$

۷۳. (ب) $x'=\frac{1}{x''^2}$ و $x'x''=\frac{c}{a}\Longrightarrow\frac{1}{x''}=\frac{c}{a}$ یا $x''=\frac{a}{c}$

$$\frac{a^3}{c^2}+b.\frac{a}{c}+c=0\Longrightarrow a^3+abc+c^3=0\Longrightarrow a^3+c^3=-abc$$

۷۴. (ب) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geqslant 9\Longrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{p}$

۷۵. (ب) $\triangle' = b^2 - ac = 0 \Longrightarrow b^2 = ac$

۷۶. (الف) اولاً باید $x \neq 0$ زیرا درغیراین‌صورت‌دوکسرمساویند ثانیاً باید $ad \neq bc$، که چون $b \neq d$ اگر $a = c = 1$ شرط فوق برقرار است. و بازاء گزینه‌های دیگر ممکن است تساوی برقرار شود.

۷۷. (ج) $x \neq \pm 2$ لذا، $x^2 + 2x - 15 = 0$ کـه $x = 3$ و $x = -5$ ریشه‌های آن می‌باشند.

۷۸. (الف) $x = -2 \Longrightarrow -7a = -10 - 11 = -21 \Longrightarrow a = 3$

$$x = +\frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{7}{2} b = +\frac{15}{2} - 11 \Longrightarrow 7b = -7 \Longrightarrow b = -1$$

۷۹. (ب) $10^{2x} = 25 \Longrightarrow (10^{\frac{x}{2}})^4 = 25 \Longrightarrow 10^{\frac{x}{2}} = \sqrt{5} \Longrightarrow$

$$10^{-\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

۸۰. (الف) $\sqrt{x-1} + 1 = \sqrt{x+1} \Longrightarrow x + 2\sqrt{x-1} = x + 1 \Longrightarrow$

$$2\sqrt{x-1} = 1 \Longrightarrow 4x - 4 = 1 \quad \text{یا} \quad x = \frac{5}{4}$$

۸۱. (الف) $f(x) = (x+1)^{20} - x^{20}$ ، $\binom{20}{18} x^{18} = \frac{20 \times 19}{2} x^{18} = 190\, x^{18}$

۸۲. (ج) $9^x(81 - 1) = 240 \Longrightarrow 9^x = 3 \Longrightarrow 3^{2x} = 3 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$

۸۳. (ج) $\frac{a}{a+1} = \frac{a-1}{-a} \neq \frac{1}{1} \Longrightarrow a^2 - 1 = -a^2 \Longrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

۸۴. (د) معادله $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ دارای چهار ریشه است که اگر a برابر هریك از آنها باشد معادله اصلی دارای ریشه مضاعف است.

۸۵. (ب) $\begin{cases} 1 - (m+4)(4-m) \leqslant 0 \\ 4 - m > 0 \end{cases}$ یا $\begin{cases} -\sqrt{15} \leqslant m \leqslant \sqrt{15} \\ m < 4 \end{cases}$ یا

$$|m| \leqslant \sqrt{15}$$

۸۶. (ب) $4m - 5 = m - 8 \Longrightarrow m = -1$

۸۷. (ب) $\log x \geqslant \log ۲\sqrt{x} \Longrightarrow x \geqslant ۲\sqrt{x} \Longrightarrow x^۲ - ۴x \geqslant ۰ \Longrightarrow$

$x \geqslant ۴$ یا $x \leqslant ۰$

که جواب قابل قبول $x \geqslant ۴$ است.

۸۸. (د) $\frac{x^۲+y^۲}{b^۲} = a \Longrightarrow (x+y)^۲ - ۲b = ab^۲ \Longrightarrow$

$(x+y)^۲ = b(ab+۲)$

۸۹. (د) $x' = ۲x''$ و $x' + x'' = -\frac{b}{a} \Longrightarrow x'' = -\frac{b}{۳a}$ و $x' = -\frac{۲b}{۳a}$

$x'x'' = \frac{c}{a} \Longrightarrow \frac{۲b^۲}{۹a^۲} = \frac{c'}{a} \Longrightarrow ۲b^۲ = ۹ac$

۹۰. (د) روش اول: $y = x^۲$ لذا $x = \pm\sqrt{y}$ بنا بر این x را به $\pm\sqrt{x}$ تبدیل می‌کنیم.

$ax \pm b\sqrt{x} + c = ۰ \qquad a^۲x^۲ + ۲acx + c^۲ = b^۲x$

$a^۲x^۲ + (۲ac - b^۲)x + c^۲ = ۰$ یا $x^۲ + \frac{۲ac - b^۲}{a^۲}x + \frac{c^۲}{a^۲} = ۰$

در نتیجه، $p = \frac{۲ac - b^۲}{a^۲}$

روش دوم: اگر ریشه‌های معادله اول را $y_۱$ و $y_۲$ و از معادله دوم را $x_۱$ و $x_۲$ فرض کنیم:

$$-p = y_۱ + y_۲ = x_۱^۲ + x_۲^۲ = (x_۱ + x_۲)^۲ - ۲x_۱x_۲ = \frac{b^۲}{a^۲} - ۲\frac{c}{a} =$$

$\frac{b^۲ - ۲ac}{a^۲}$ یا $p = \frac{۲ac - b^۲}{a^۲}$

۹۱. (الف) $\binom{۱۰+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۱۲}{۲} = \frac{۱۲!}{۱۰!۲!} = ۶۶$

۹۲. (ب) $\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x-۲)(x-۳)} \times \frac{(x-۳)(x-۴)}{(x-۱)(x-۴)} = ۱$

۰۹۳. (ج) $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=$

$\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}$

۰۹۴. (ب) $x>0$ و $x\neq 1$ و $x\neq\frac{1}{2}$،

$$\frac{\log x}{\log 3}\times\frac{\log 2x}{\log x}\times\frac{\log y}{\log 2x}=2\log_x x \Rightarrow \log_3 y=2 \Rightarrow y=3^2=9$$

۰۹۵. (ب) $\triangle=9k^2-7=36-7=29$ ، $2k^2-1=7 \Rightarrow k^2=4$

و $\sqrt{29}$ اصم است این ریشه‌ها مثبت ومنفی می‌باشند.

۰۹۶. (ب) اگر فرض‌کنیم $x=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}$ آنگاه

$x^2=4+\sqrt{7}+4-\sqrt{7}-\sqrt{7}-2\sqrt{16-7}$

یا $x^2=8-6=2$ لذا $x=\sqrt{2}$.

۰۹۷. (ب) اگر $abc=r$ و $ab+bc+ac=q$ و $a+b+c=p$ فرض کنیم a و b و c ریشه‌های معادله درجه سوم $f(x)=x^3-px^2+qx-r=0$ می‌باشندکـه بازاء هر $x\leqslant 0$، $f(x)<0$ لـذا معادله دارای هیچ ریشه منفی نمی‌باشد و درنتیجه سه ریشه آن یعنی a و b و c مثبت هستند وبا توجه به‌نامساوی $abc>0$ هیچ‌کدام صفر نیز نمی‌توانند باشند.

۰۹۸. (ج)
$$\begin{cases}x-[x]=0\\ x+[x]\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}[x]=x\Rightarrow x=k\in z\\ [x]\neq -x\Rightarrow x\neq 0\end{cases}$$

۰۹۹. (ج) $\alpha+\beta+\gamma=$ و $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=\frac{q}{p}$ و $\alpha\beta\gamma=-\frac{q}{p}$

$-\frac{-p}{p}=1$

لذا عبارت برابر است با $1-=\frac{\frac{q}{p}}{-\frac{q}{p}}$ (۱)

۱۰۰. (ب)

$$A=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=\left((-p)^2-2\left(-\frac{1}{2p^2}\right)\right)^2-2\left(-\frac{1}{2p^2}\right)^2=$$

$$\left(p^2+\frac{1}{p^2}\right)^2-\frac{1}{2p^4}=p^4+\frac{1}{2p^4}+2\geqslant 2\sqrt{p^4\times\frac{1}{2p^4}}+2$$

$$=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}+2=2+\sqrt{2}$$

«آزمون پیشرفته»

۱. اگر y,x اعدادی مثبت و $\log_5 x+\log_5 y \geqslant 2$ و $S=x+y$ کدام درست است.

الف- $S\leqslant 10$ ب- $S\geqslant 10$ ج- $S\leqslant 5$ د- $S\geqslant 2$ هـ- $S\geqslant 5$

۲. هرگاه $a=x^{\frac{1}{x-1}}$ ، $b=x^{\frac{x}{x-1}}$ کدام درست است.

الف- $a^b=b^{-a}$ ب- $a^a=b^b$ ج- $a^b=b^a$ د- $a^{-b}=b^{+a}$ هـ- $ab=x$

۳. مجموعه‌های $N_1=\{1\}$ ، $N_2=\{2,3\}$ ، $N_3=\{4,5,6\}$ ، $N_4=\{7,8,9,10\}$ ، ... ، از اعدادطبیعی مفروضند، اگر S_n مجموع عضوهای N_n باشد S_{20} برابراست با: (n تعداد عضوهای هرمجموعه است)

الف- ۲۱۰ ب- ۲۰۱۰ ج- ۴۰۲۰ د- ۸۰۱۰ هـ- ۴۰۱۰

۴. اگر $i^2=-1$ وباقیمانده n بر۴، برابرصفر یایك باشد حاصل

$$S=1+i+i^2+\dots+i^{n-1}$$

برابراست با:

الف- صفر ب- ۱ ج- i د- صفر یا ۱ هـ- ۱ یا ۱−

۵. در دنباله $a_1,a_2,a_3,\dots$ ، ازجمله سوم‌به بعد هرجمله برابر است با جمله قبلی منهای جمله پیش‌از جمله قبلی. اگر $a_3=2$ ، $a_4=-3$ آنگاه مجموع ۲۴۵ جمله اول این دنباله برابراست با:

الف. صفر ب- ۲ ج- ۳ د- ۴۹۰ هـ- ۷

۶. $[(\sqrt{3}+1)^6]$ برابراست با؟ ([ ] جزءصحیح است)

الف- ۴۱۶ ب- ۴۱۵ ج- ۴۱۷ د- ۲۰۸ هـ- ۲۰۷

۷. هرگاه S مساحت‌مجموعه نقاطی باشدکه مختصات آنها در رابطه

$$x+|x|\leqslant y\leqslant x-|x|+2$$

صدق می‌کنند، مقدار S برابراست با؟

الف- ۴ ب- ۲ ج- ۱ د- نامتناهی‌است هـ- مرتباً تغییر می‌کند

۸. تابع f به‌ازای هردوعدد حقیقی y,x، درمعادله تابعی

$$f(x)+f(y)=f(x+y)-xy$$

صدق می‌کند اگر $f(1)=1$ آنگاه $f(100)$ برابر است با؟

الف‌ـ ۵۰۱۰ ب‌ـ ۱۰۱۰۰ ج‌ـ ۵۰۵۰ د‌ـ ۵۰۹۰ هـ‌ـ ۱۰۰

۹. اگر γ,β,α ریشه‌های معادله $x^3-Px-1=0$ باشند معادله‌ای که ریشه‌هایش، $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}$ ، $\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}$ ، $\frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$ باشد کدام است؟

الف‌ـ $x^3-Px^2+1=0$ ب‌ـ $x^3+Px^2-1=0$

ج‌ـ $x^3+Px+1=0$ د‌ـ $x^3-Px^2-1=0$ هـ‌ـ $x^3-x+1=0$

۱۰. هرگاه تابع $f(x)$ بازاءهر y,x حقیقی تعریف‌شده ودر معادله

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)$$

صدق کند آنگاه $f(2n)\ (n\in\mathrm{N})$ برابر است با؟

الف‌ـ $f(n)$ ب‌ـ $2f(n)$ ج‌ـ $f^2(n)$ د‌ـ $4f(n)$ هـ‌ـ $4f^2(n)$

۱۱. مقدار ماکزیمم $A=\frac{(x^2-1)(4-x^2)}{(x^2+1)(x^2+4)}$ برابر است با؟

الف. $\frac{1}{9}$ ب‌ـ $\frac{1}{3}$ ج‌ـ -1 د‌ـ ۱ هـ‌ـ $\frac{10}{9}$

۱۲. اگر $S=a^2+b^2+c^2$ ، b,a دوعدد صحیح متوالی و $c=ab$ آنگاه $\sqrt{S}$ برابر است با ؟

الف‌ـ عددی گنگ است ب‌ـ c ج‌ـ $c+1$ د‌ـ $c-1$ هـ‌ـ $a+1$

۱۳. اگر بازاءهر i، a_i عددی‌صحیح ومثبت و N نیز صحیح و مثبت باشد آنگاه معادله $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+1=N$ چندریشه صحیح‌دارد.

الف‌ـ ۱ ب‌ـ صفر ج‌ـ حداکثر یك‌ریشه د‌ـ حداقل یك‌ریشه هـ‌ـ n

۱۴. اگر q,p دوعدد صحیح‌فرد باشند، معادله $x^2+2px+2q=0$ چند ریشه صحیح دارد ؟

الف‌ـ ۰ ب‌ـ ۱ ج‌ـ ۲ د‌ـ حداکثریکی هـ‌ـ حداقل یکی

۱۵. اگر n عددصحیح‌فرد بزرگتراز یك‌باشد معادله $(x-1)^n+x^n=(x+1)^n$

الف ــ یك ریشه صحیح دارد ب ــ چهار ریشه گویا دارد ج ــ حداقل یك ریشه گویا دارد
د ــ n ریشه گویا دارد. هـ ــ هیچ ریشه گویا ندارد

۱۶. اگر a , b نامساوی و مخالف صفر باشند معادله

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x+b}=0$$

الف ــ سه ریشه دارد که دوتا مثبت است ب ــ چهار ریشه دارد

ج ــ دو ریشه مختلف العلامت دارد د ــ سه ریشه دارد که حتماً یکی مثبت و یکی منفی است

هـ ــ هرگز ریشه ندارد

۱۷. اگر $2x^2-5x+2\leqslant 0$ و $y=\frac{x+1}{x-1}$ آنگاه:

الف ــ $|y|\geqslant 3$ ب ــ $|y|\leqslant 3$ ج ــ $|y|\leqslant 3$, $y\neq 1$

د ــ $y\neq 1$, $|y|\leqslant 1$ هـ ــ $|y|\leqslant 3$ و $y\neq \pm 1$

۱۸. ریشه‌های معادله $64x^3-144x^2+92x-15=0$ تشکیل تصاعد عددی می‌دهند، اختلاف بین بزرگترین و کوچکترین ریشه برابر است با؟

الف ــ ۱ ب ــ ۲ ج ــ $\frac{1}{2}$ د ــ $\frac{3}{4}$ هـ ــ $\frac{1}{4}$

۱۹. اگر $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ آنگاه $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ برابر است با

الف ــ ۲ ب ــ صفر ج ــ ۱ د ــ ۴ هـ ــ نامعین است.

۲۰. اگر $x_1>x_2>x_3>\dots>x_n$, $S=x_1-x_2+x_3-\dots+(-1)^{n-1}x_n$ کدام همواره درست است.

الف. $x_1<A<0$ ب ــ $0\leqslant A\leqslant nx_1$ ج ــ $0<A<x_1$

د ــ $0<A<x_n$ هـ ــ $0<A<(-1)^n x_n$

۲۱. اگر $x^3+8y^3+27z^3=81$, $x,y,z>0$, $A=x+2y+3z$ کدام درست است؟

الف ــ $A\geqslant 9$ ب ــ $A\leqslant 9$ ج ــ $A\leqslant 27$ د ــ $A\leqslant 36$ هـ ــ $A\geqslant 36$

۲۲. مجموع n جمله اول دنباله زیر برابر کدام است؟

$$1,(1+2),(1+2+2^2),\dots,(1+2+2^2+\dots+2^{n-1})$$

الف. $2^{n+1}-n-1$ ب- $2^{n+1}-n-2$ ج- 2^n-n-2

د- 2^n ه- $2^{n+1}-n$

۲۳. معادله $|x-1|^{\log^2 x-\log x^2}=|x-1|^3$ چندریشه دارد.

الف. ۰ ب- ۵ ج- ۲ د- ۳ ه- ۴

۲۴. اگر $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ باقیمانده $f(x^{12})$ بر $f(x)$ کدام است؟

الف- x^4-x-6 ب- x^3-x^2+2 ج- $x+6$

د- $5-x$ ه- ۶

۲۵. در دنباله‌ای از اعداد، اولین جمله برابر یك، و به‌ازاء هر $n\geqslant 2$ حاصلضرب اولین n عدد دنباله برابر n^3 است اگر a_n جمله nام باشد $\sqrt[3]{a_na_{n+1}}$ برابر است با؟ $(n\geqslant 2)$

الف- n ب- $n+1$ ج- $\frac{n+1}{n-1}$ د- $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^3$ ه- $\frac{n-1}{n+1}$

۲۶. حاصل $\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$ برابراست با: $(1\leqslant k<n)$

الف- $\binom{n}{k+1}$ ب- $\binom{n+1}{k+1}$ ج- $\binom{n+1}{k+1}-\binom{n}{k}$

د- $\binom{n+1}{k}-\binom{n}{k}$ ه- $n\binom{n+1}{k}$

۲۷. حاصل $\sqrt[3]{5+2\sqrt{13}}+\sqrt[3]{5-2\sqrt{13}}$ کدام است؟

الف- ۱ ب- $\frac{3}{2}$ ج- $\frac{\sqrt[3]{25}}{2}$ د- $\sqrt[3]{65}$ ه- $\frac{1+\sqrt{41}}{2}$

۲۸. اگر $a^2+b^2+c^2=2$, $a+b+c=2$ آنگاه ماکزیمم c برابر است با؟

الف - $\frac{3}{4}$ ب- $\frac{2}{3}$ ج- $\sqrt{\frac{2}{3}}$ د- $\frac{1}{3}$ ه- $\frac{4}{3}$

پاسخ کلیدی تستها

۱. فصل اول (اتحادها و رادیکالها)

۱. ب / ۲. ج / ۳. ج / ۴. الف / ۵. ب / ۶. ج / ۷. الف/۸. الف/۹. الف/۱۰. ج
۱۱. ج/۱۲. الف/۱۳. ب/۱۴. الف/۱۵. الف/۱۶. الف/۱۷. ب/۱۸. ج/۱۹. ب
۲۰. الف/۲۱. د/۲۲. ج/۲۳. ب/۲۴. ج/۲۵. ب/۲۶. ج/۲۷. ب/۲۸. د/۲۹. د
۳۰. ب / ۳۱. الف / ۳۲. الف / ۳۳. ج /۳۴. ب/۳۵. د/۳۶. ب/۳۷. ب/۳۸. د
۳۹. الف / ۴۰. د / ۴۱. ج / ۴۲. ب/۴۳. الف/۴۴. الف/۴۵. ج/۴۶. ب/۴۷. ج
۴۸. ب/۴۹. د/۵۰. ب/۵۱. الف/۵۲. ج/۵۳. ب/۵۴. ج/۵۵. ج/۵۶. ب/۵۷. ب
۵۸. د/۵۹. ب/۶۰. د/۶۱. الف/۶۲. الف/۶۳. ب/۶۴. ب/۶۵. د/۶۶. ج/۶۷. د

۲. فصل دوم (نامساوی‌ها)

۱. د/۲. ج/۳. ب/۴. ب/۵. د/۶. ج/۷. الف/۸. ج/۹. ج/۱۰. د ۱۲. ج
۱۳. ج / ۱۴. الف / ۱۵. ب / ۱۶. الف/۱۷. ب/۱۸. د/۱۹. ج/۲۰. ب/۲۱. ب
۲۲. ب / ۲۳. الف / ۲۴. ب / ۲۵. ج /۲۶. ج/۲۷. ب/۲۸. ب/۲۹. ب/۳۰. ب
۳۱. ب

۳. فصل سوم (قدر مطلق)

۱. ج / ۲. ج / ۳. ب / ۴. الف/۵. ب/۶. ب/۷. د/۸. ج/۹. ج/۱۰. ب/۱۱. ب
۱۲. ج/۱۳. الف/۱۴. د/۱۵. الف/۱۶. ج/۱۷. ج/۱۸. ب/۱۹. ج/۲۰. ج/۲۱. د
۲۲. الف/۲۳. الف/۲۴. د/۲۵. د/۲۶. الف/۲۷. ب/۲۸. ب/۲۹. الف/۳۰. الف
۳۱. ج/۳۲. ج/۳۳. ج/۳۴. د/۳۵. د/۳۶. ج/۳۷. ج

۴. فصل چهارم (لگاریتم)

۱. ب/۲. ب/۳. ب/۴. ب/۵. الف/۶. الف/۷. ب/۸. الف/۹. د/۱۰. ج/۱۱.ب
۱۲. الف/۱۳. ج/۱۴. ب/۱۵. ج/۱۶. ج/۱۷. ج/۱۸. ب/۱۹. ب/۲۰. ج/۲۱.د
۲۲. ج/۲۳. ب/۲۴. ب/۲۵. ج/۲۶. ج/۲۷. ب/۲۸. ج/۲۹. ب/۳۰. ب/۳۱.ب
۳۲. ج / ۳۳. ب / ۳۴. ج / ۳۵. ج/۳۶. ب/۳۷. الف/۳۸. د/۳۹. الف/۴۰. ب
۴۱. الف / ۴۲. ج / ۴۳. د /۴۴. ب/۴۵. الف/۴۶. د/۴۷. ب/۴۸. ب/۴۹. الف
۵۰. ب/۵۱. الف/۵۲. ب

۵. فصل پنجم (دنباله‌ها)

۱. ج / ۲. ج / ۳. د / ۴. د/۵. ج/۶. ب/۷. ب/۸. ب/۹. الف/۱۰. الف ۱۱. د
۱۲. ب / ۱۳. الف / ۱۴. ب /۱۵. الف/۱۶. ب/۱۷. ج/۱۸. ج/۱۹. ج/۲۰. ب
۲۱. د / ۲۲. ب / ۲۳. ج/۲۴. الف/۲۵. ب/۲۶. الف/۲۷. الف/۲۸. ب/۲۹. ب
۳۰. الف/۳۱. د/۳۲. ج/۳۳. د/۳۴. ج/۳۵. ب/۳۶. ب/۳۷. ب/۳۸. ب/۳۹.ب
۴۰. ج/۴۱. ج/۴۲. ب/۴۳. ب/۴۴. ب

۶. فصل (ششم معادلات)

۱. ب/۲. ج/۳. ج/۴. ب/۵. د/۶. ج/۷. ج / ۸. الف/۹. د / ۱۰. ج / ۱۱. الف
۱۲. ج / ۱۳. الف / ۱۴. الف /۱۵. ج/۱۶. ج/۱۷. ج/۱۸. د/۱۹. ب/۲۰. الف
۲۱. ب/۲۲. ب/۲۳. ج/۲۴. الف/۲۵. ب/۲۶. ج/۲۷. ج/۲۸. د/۲۹. الف/۳۰. ج
۳۱. د/۳۲. ج/۳۳. الف/۳۴. ب/۳۵. ج/۳۶. الف/۳۷. د/۳۸. ب/۳۹. د/۴۰. د
۴۱. د/۴۲. ج/۴۳. الف/۴۴. ج/۴۵. د/۴۶. د/۴۷. ب/۴۸. ب/۴۹. الف/۵۰. ب
۵۱. ب / ۵۲. ج / ۵۳. الف / ۵۴. ج/۵۵. ب/۵۶. الف/۵۷. ب/۵۸. ج/۵۹. ج
۶۰. ب / ۶۱. ج / ۶۲. ب / ۶۳. الف/۶۴. الف/۶۵. ج/۶۶. ج/۶۷. ب/۶۸. د
۶۹. ج/۷۰. د/۷۱. الف/۷۲. د/۷۳. الف/۷۴. ج/۷۵. ج/۷۶. د/۷۷. ب/۷۸.ب
۷۹. ج / ۸۰. الف / ۸۱. الف/۸۲. ج/۸۳. ب/۸۴. ج/۸۵. الف/۸۶. د/۸۷. ب
۸۸. الف/۸۹. د/۹۰. ب/۹۱. د/۹۲. ب/۹۳. ج/۹۴. ب/۹۵. ج/۹۶. الف/۹۷. ب
۹۸. ج/۹۹. ج/۱۰۰. الف

۷. فصل هفتم (بخش‌پذیری و بسط دوجمله‌ای)

۱. ب/۲. الف/۳. ج/۴. الف/۵. الف/۶. ب/۷. الف/۸. د/۹. ج/۱۰.ج/۱۱.ج
۱۲. ج / ۱۳. الف / ۱۴. ج / ۱۵. د/۱۶. ج/۱۷. ب/۱۸. الف/۱۹. الف/۲۰. د
۲۱. ب / ۲۲. ب / ۲۳. د / ۲۴. ج / ۲۵. ج/۲۶. ج/۲۷. ج/۲۸. الف/۲۹. ب
۳۰. الف / ۳۱. ج / ۳۲. الف / ۳۳. د / ۳۴. د/۳۵. الف/۳۶. ج/۳۷. د/۳۸. د
۳۹. الف/۴۰. الف

۸. تستهای مختلف

۱. ج/۲. الف/۳. الف/۴. ج/۵. ب/۶. ب/۷. ب/۸. ج/۹. ج/۱۰. ب / ۱۱. ب
۱۲. الف/۱۳. د/۱۴. ج/۱۵. د/۱۶. ب/۱۷. ج/۱۸. ب/۱۹. د/۲۰. ج / ۲۱. ج
۲۲. ج/۲۳. الف/۲۴. ج/۲۵. ب/۲۶. ب/۲۷. ب/۲۸. ج/۲۹. ج/۳۰. ب/۳۱. د
۳۲. ب / ۳۳. ب / ۳۴. د/۳۵. د/۳۶. ب/۳۷. ب/۳۸. د/۳۹. د/۴۰. ب/۴۱. ج
۴۲. ب/۴۳. الف/۴۴. ب/۴۵. الف/۴۶. ب/۴۷. ب/۴۸. الف/۴۹. ب / ۵۰. ج
۵۱. الف / ۵۲. ب / ۵۳، ج / ۵۴. د/۵۵. ب/۵۶. الف/۵۷. ج/۵۸. ب/۵۹. ج
۶۰. الف / ۶۱. ج / ۶۲. الف/۶۳.ج/۶۴. الف/۶۵. د/۶۶. ب/۶۷. ب/۶۸. ب
۷۰. ج / ۷۱. ج / ۷۲. ب /۷۳. ب/۷۴. ب/۷۵. ب/۷۶. الف/۷۷. ج/۷۸. الف
۷۹. ب / ۸۰. الف / ۸۱. الف / ۸۲. ج/۸۳. ج/۸۴. د/۸۵. ب/۸۶. ب/۸۷. ب
۸۸. د/۸۹. د/۹۰. د/۹۱. الف/۹۲. ب/۹۳. ج/۹۴. ب/۹۵. ب/۹۶. ب/۹۷. ب
۹۸. ج/۹۹. ج/۱۰۰. ب

۹. پاسخ تستهای آزمون پیشرفته

۱. ب / ۲. ج / ۳. ه / ۴. د / ۵. ب / ۶. ب/ ۷. ب / ۸. ج / ۹. الف/ ۱۰. د/
۱۱. الف / ۱۲. ج / ۱۳. ج / ۱۴. الف / ۱۵. ه / ۱۶. د / ۱۷. ج / ۱۸. الف/
۱۹. ج/۲۰. ج/۲۱. ب /۲۲. ب/۲۳. د/۲۴. ه/۲۵. ج/۲۶. ج/۲۷. الف/۲۸. ه

پایان

فهرست منابع

1· Solving Problems in ALGEBRA and TRIGONOMETRY by V·Litvinenko A·Mordkovich ،Mir Publishers Moscow

2· THE CONTEST PROBLEM BOOK problems from the Annual High School Contests of the Mathematical Association of America Compiled and with solutions by GHARLEST – SAIKIND·

3· Hungarian Problem Book (1) and (2)
New mathematical Library (11) ،(12)
The Mathematical Association of America, 1963.

4· Questions and Problems in High – School Mathematics
L·A·KONDRATYEVA V·S·SOLOMONIK
MIR PUBLISHERS·

5· High – School MATHEMATICS Under the editorship of Professor G·N· YAKOVLEV, D·Sc· Part 1
MIR PUBLISHERS· MOSCOW

6· ELEMENTARY MATHEMATICS SELECTED – TOPICS AND PROBLEM SOLVING G·DOROFEEV, M· POTAPOV, N· ROZOV ،MIR PUBLISHERS MOSCOW

7· THE USSR OLYMPIAD PROBLEM BOOK·
D· O· SHKLARSKY ،N· N· CHENTZOV ،I· M· YAGLOM

W. H. FREEMAN AND COMPANY SAN FRANCISCO AND LONDON.

8. ELEMENTARY MATHEMATICS
V. V. ZAITSEV V. V. RYZHKOV M. I. SKANAVI MIR PUBLISHRS MOSCOW

۹. تئوری مقدماتی اعداد جلد اول قسمت I و قسمت II دکتر غلامحسین مصاحب.

۱۰. آنالیز ریاضی، جلد اول قسمت I و II دکتر غلامحسین مصاحب.

۱۱. مجلات رشدآموزش ریاضی نشریه‌گروه ریاضی دفتر تحقیقات وبرنامه‌ریزی وتألیف کتب درسی وزارت آموزش وپرورش.

۱۲. مجلات مختلف خارجی.

مبتکران، ناشر برگزیده سال ۱۳۷۵

منتشر کرده است

۱ - مجموعهٔ جبر و آنالیز	تألیف: محمود نصیری
۲ - هندسه در مسائل و تمرینات	ترجمه و تدوین: ابراهیم دارابی
۳ - درسهایی از ریاضیات جدید (تئوری اعداد)	تألیف: حسین سیدموسوی - شمس‌الدین انوار
۴ - مجموعه تستهای کلیدی ریاضیات جدید	تألیف: مهندس نادر جعفرنیا
۵ - فرمولها و قضایای ریاضی	تألیف و ترجمه: افسر صفائیان
۶ - آشنایی با مبانی شیمی (معدنی - آلی)	تألیف: حسام امینی - دکتر محمدرضا ملاردی
۷ - زیست‌شناسی گیاهی	تألیف: مهدی انوری
۸ - زیست‌شناسی جانوری	تألیف: مهدی انوری
۹ - مجموعه تستهای هدفدار زیست‌شناسی جانوری	تألیف: دکتر پیمان متین
۱۰ - ادبیات فارسی	تألیف: دکتر علی سلطانی گردفرامرزی
۱۱ - مفاهیم عربی چهارم دبیرستان	تألیف: ایاد فیلی
۱۲ - نکات گرامری و علائم تشخیص زمانها در انگلیسی	تألیف: حسن رجب‌ترقی
۱۳ - زبان انگلیسی	تألیف: مسعود آریانیا
۱۴ - آشنایی با فلسفهٔ اسلامی	تألیف: محمد اکوان

پاسخ تحلیلی و تشریحی پرسشهای آزمون سراسری:

۱۵ - ریاضیات علوم ریاضی و فنی	تألیف: حلی - نصیری - سیدموسوی
۱۶ - ریاضیات علوم تجربی	تألیف: حلی - نصیری - سیدموسوی
۱۷ - فیزیک و مکانیک	تألیف: غلامعلی محمودزاده - امیربیژن عدالت
۱۸ - فیزیک تجربی	تألیف: محمودزاده - عدالت
۱۹ - شیمی	تألیف: حسام امینی - رجب تشارجی
۲۰ - زیست‌شناسی	تألیف: تیمور زمان‌نژاد

ISBN 964-5993-16-4
9789645993168

مبتکران

تهران، انتهای خیابان طالقانی، کوچه طباطبایی مقدم
پلاک ۳۹ طبقه اول، کدپستی: ۱۵۶۱۹ تلفن: ۷۶۲۸۲۳
دورنویس: ۷۶۷۵۶۴