

اتحادها و روشهای تجزیه

منصور سعیدی  
سید محمد حاج میر صادقی



$$by^2 + ay^2 + bx^2 \cdot x^2 y^2 - \phi = 2(\Delta x^2 y^2 - 3) = 2(\Delta xy + \dots) (\Delta xy - 1) 2a^5 - 5 \cdot a =$$

$$ab^2 = ab(a^2 - \dots) ab(\dots) 4x^2 \dots + 2 a^2 b - ab^2 = a$$

$$fx^2 + fx + 3) \dots 1x^2 y) (\Delta ab^2 -$$

$$-a) (\Delta y^2 - a)$$

$$+ y^2 x + zx - \dots x + 2) 2x^2 + \Delta x +$$

$$^2 - \phi = 2(\Delta x \dots + \sqrt{3},$$

$$(x+3)(2y^2 + \dots ^2 + 9y^2) (4x^2 -$$

$$\circ a = 2a(a^2 \dots (a + \sqrt{\Delta})(a$$



# اتحادها و روشهای تجزیه

مؤلفان:

منصور سعیدی

سید محمد حاج میر صادقی

مؤسسه کتاب همراه

سعیدی، منصور، ۱۳۴۷ -

اتحادها و روشهای تجزیه / مؤلفان منصور سعیدی، محمد حاج میرصادقی. - تهران: مؤسسه کتاب همراه، ۱۳۷۵.  
۹۶ ص. - (کتابهای کمک درسی؛ شماره ۱)

بها: ۱۵۰۰ ریال

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا (فهرست نویسی پیش از انتشار)

۱. اتحادهای ترکیبی. ۲. تجزیه (ریاضیات). الف. حاج میرصادقی، محمد. ۱۳۴۶ - ب. عنوان.

۵۱۲/۹۲۵

QA۱۶۴/۹/ س ۷ الف ۲

۵۸۲۲ - ۷۵ م

کتابخانه ملی ایران

شماره ۱

کتابهای کمک درسی



## اتحادها و روشهای تجزیه

- مؤلفان: منصور سعیدی؛ سید محمد حاج میرصادقی
- ناشر: مؤسسه کتاب همراه
- چاپ اول: پاییز ۱۳۷۵
- تیراژ: ۱۵/۰۰۰ نسخه
- طرح روی جلد: اعظم الملوک احسانی
- لیتوگرافی، چاپ و صحافی: چاپ گستر
- حق چاپ برای ناشر محفوظ است

نشانی: تهران - خ دکتر فاطمی - سین دخت شمالی

کوی ولی عصر شماره ۲۷

تلفن پخش: ۸۰۰۷۹۶۲ - ۸۰۰۷۰۸۷

فاکس: ۸۰۰۷۹۶۲

صندوق پستی ۵۳۵۱ - ۱۴۱۵۵

ISBN: 964-6034-00-4

شابک: ۹۶۴-۶۰۳۴-۰۰-۴

## سخن ناشر

خانم مُلک سلیمانست علم  
جمله عالم صورت و جانست علم  
«مولوی»

پیشرفتهای شگفت‌انگیز و دم‌افزون دانش در دنیای امروز، ایجاب می‌کند که زمینه‌هایی فراهم شود تا نوجوانان و جوانان به‌عنوان آینده‌سازان جامعه، به درک درست، سریع، گسترده و خلاقانه‌ای از علوم گوناگون دست یابند و نقش اساسی خود را در توسعه همه‌جانبه جامعه ایفا کنند. از آنجا که آموزش علمی و روشمند، شرط بنیادی پرورش دانشوران آینده، تقویت روحیه علمی و تأمین سعادت جامعه است؛ توجه به این ضرورت از مهمترین نیازهای علمی و آموزشی کشور ماست. انتشار کتابهای کمک‌درسی و عادت‌دادن دانش‌آموزان به مطالعه و تعمق بیشتر به عنوان بخشی از این مهم، نقشی اساسی در شکوفایی ذهنی جامعه دارد؛ زیرا این کتابها می‌توانند در کنار کتابهای درسی، پاسخگوی ذهنهای کنجکاو و کاوشگر باشند. مؤسسه‌کتاب همراه، به یاری خداوند، در پاسخگویی به این ضرورت با همکاری استادان، متخصصان و کارشناسان زبده دانشگاهها و آموزش و پرورش، اقدام به انتشار این نوع کتابها در رشته‌های مختلف نموده است. هدفهای این مجموعه به اختصار عبارتند از:

- ۱- فراهم آوردن زمینه برای درک و یادگیری دروس به صورت خودآموز.
  - ۲- ارائه آموزشهای تکمیلی برای فهم گسترده‌تر و ژرف‌تر مواد درسی.
  - ۳- ارائه روشهای متنوع حل مسائل در جهت فعال‌کردن نیروی خلاقیت دانش‌آموزان.
  - ۴- آماده‌کردن دانش‌آموزان برای موفقیت در آزمونهای گوناگون علمی.
- باتوجه به موارد بالا، هر دانش‌آموزی در هر سطح علمی، می‌تواند از این کتابها استفاده کند و معلمان گرامی نیز باتوجه به مباحث تکمیلی و تمرینهای فراوان این کتابها، زمینه‌های مناسب و امکان بهره‌برداری از آنها را خواهند یافت.
- مؤسسه‌کتاب همراه برای پربرتر شدن این مجموعه کتب، دست‌یاری به سوی تمامی دست‌اندرکاران امر آموزش و پرورش و مخاطبان این کتابها دراز می‌کند و پیشرفت خود را مرهون پیشنهادهای و انتقادهای سازنده می‌داند.

## مقدمه

پس از چندین سال تدریس و تجربه در مدارس تهران و برخورد با دانش‌آموزان مختلف، به این نتیجه رسیدیم که دانش‌آموزان برای فهم بیشتر ریاضیات نیاز به کتب کمک‌آموزشی دارند. در این مجموعه سعی خواهد شد که دانش‌آموزان در صورت داشتن اطلاعات اولیه به‌تنهایی قادر به استفاده از این کتب باشند. کتب ریاضی تهیه شده، برای هر دو نظام جدید و قدیم قابل استفاده می‌باشد و سرفصلهای آن با کتب ریاضی نظام جدید (ریاضی ۱ و ۲ و ۳ و ۴؛ جبر و احتمال، حسابان ۱ و حسابان ۲) هماهنگ است.

این مجموعه با اهداف زیر تهیه شده است:

۱- توضیح بیشتر مباحث؛ زیرا کتابهای درسی در بعضی مباحث دارای دو نقص می‌باشند: الف - عدم توضیح مناسب و کافی ب - عدم ارائه مثالهای متنوع که به تفهیم درس کمک کند.

۲- ارائه مسائل و تمرینهای مختلف در سطوح مختلف علمی؛ در ریاضیات هرچه تمرین بیشتر حل شود مطلب عمیقتر فهمیده خواهد شد. لذا در آخر هر مبحث و هر فصل، تمرینهای متنوعی ارائه شده که حل بعضی از آنها در پایان کتاب آمده است. بدین ترتیب دانش‌آموزانی هم که بنیة علمی ضعیف‌تری دارند، می‌توانند به آسانی از این مجموعه استفاده کنند.

۳- بعضی از روشهایی که در حل تمرینها به کار می‌آید و در کتب درسی وجود ندارد، یا در مورد آنها توضیح کافی داده نشده است، در این مجموعه مورد بررسی قرار گرفته است.

۴- آمادگی دانش‌آموزان جهت شرکت در کنکور سراسری؛ در آخر هر کتاب تعدادی تست همراه با جواب تشریحی وجود دارد که این جوابها تقریباً تمام نکات مورد نیاز برای حل تست را دربردارد. این قسمت بیشتر جهت استفاده دانش‌آموزان سال سوم و پیش‌دانشگاهی (چهارم نظام قدیم) می‌باشد.



و اما کتاب حاضر؛ اتحاد و تجزیه دو مبحث کاربردی و مهم برای فهم دیگر مباحث ریاضیات هستند. این دو مبحث هم آسان و هم دشوار است. آسان از آن جهت که متن درس آن به آسانی فهمیده می‌شود و یک دانش‌آموز در سر کلاس احساس می‌کند که مطالب را به خوبی فهمیده است؛ دشوار از آن جهت که این مبحث دارای مسائل بسیار متنوعی است که یک دانش‌آموز فقط در صورتی که تمرینهای متنوع و فراوانی حل کند، می‌تواند در این مبحث ورزیدگی و تسلط لازم را کسب کند.

**مؤلفان**

## فهرست

### فصل اول: اتحادها

۸	۱.۱- اتحاد مربع مجموع دو جمله
۱۲	۱.۲- اتحاد دوم: اتحاد مزدوج
۱۵	۱.۳- اتحاد سوم: مکعب مجموع دو جمله
۱۸	۱.۴- اتحاد مجموع مکعب دو جمله
۲۰	۱.۵- اتحاد یک جمله مشترک
۲۲	تمرینهای فصل اول
۲۴	تمرینهای تکمیلی

### فصل دوم: تجزیه عبارتهای جبری

۳۲	۲.۱- روشهای تجزیه: فاکتورگیری
۳۳	۲.۲- دسته بندی
۳۵	۲.۳- اتحاد مزدوج
۳۶	۲.۴- اتحاد اول
۳۸	۲.۵- اتحاد مجموع مکعب دو جمله
۳۹	۲.۶- اتحاد یک جمله مشترک
۴۱	۲.۷- مربع کامل
۴۳	۲.۸- تبدیل یک جمله به چند جمله
۴۵	۲.۹- روش تقسیم
۴۷	۲.۱۰- تجزیه عبارتهای $a^n \pm b^n$
۴۹	تمرینهای تکمیلی
۵۵	تستهای اتحادها و تجزیه
۶۲	جواب تمرینهای فصل اول
۸۶	جواب تشریحی تستها

# فصل ۱

## اتحادهای

تعریف: اتحاد یک تساوی حرفی را گویند که به ازای تمام مقادیر حروف همواره برقرار باشد.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{مثال:}$$

$$2(a+b) = 2a + 2b$$

در دو مثال فوق، به جای دو حرف  $a$  و  $b$  هر عدد دلخواهی گذاشته شود، تساوی همواره برقرار خواهد بود.

تفاوت اتحاد و معادله: معادله یک تساوی حرفی را گویند که به ازای بعضی از مقادیر حروف (و گاهی به ازای هیچ مقدار) برقرار باشد. در صورتی که اتحاد طبق تعریف بالا، به ازای تمام مقادیر حروف برقرار است.

مثال: تساوی  $x^2 + 5x + 6 = 0$  یک معادله می باشد زیرا به ازای  $x = -2$  تساوی برقرار است:  $(-2)^2 + 5(-2) + 6 = 0$

ولی به ازای  $x = 5$  تساوی برقرار نیست:  $5^2 + 5(5) + 6 \neq 0$

باتوجه به تعریف اتحاد، می توان گفت بی شمار از این نوع تساویها وجود دارد. ولی در این مبحث به تساویهایی اشاره می شود که کاربرد بیشتری دارند. قبل از ورود به بحث انواع اتحادها، لازم است اشاره شود که علت انتخاب این موضوع چیست.



یکی از کاربردهای مهم اتحادها این است که به ما کمک می‌کنند عبارتهای جبری را سریعتر ساده کنیم. به عنوان مثال، اگر در مسأله‌ای بخواهیم حاصل  $(a+b)^4$  را به دست آوریم و با مبحث اتحادها آشنا نباشیم، باید بدین صورت عمل کنیم:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

و بعد چهار پرانتز را در هم ضرب کرده و حاصل آن را به دست آوریم. در صورتی که اگر با فرمولهای اتحادها آشنا باشیم، می‌توانیم مستقیماً جواب را بنویسیم.

اتحادها کاربردهای زیادی در ریاضیات دارند از آن جمله می‌توان تجزیه عبارتهای جبری، حل معادلات و ساده کردن کسرها را نام برد.

## انواع اتحادها

### ۱.۱- اتحاد مربع مجموع دو جمله

(مربع جمله دوم) + (جمله دوم) × (جمله اول) × ۲ + (مربع جمله اول) = مربع مجموع دو جمله

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

اثبات:  $(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثالها: ۱)  $(x+2y)^2$

با مقایسه با صورت اتحاد:  $x =$  جمله اول و  $2y =$  جمله دوم

$$(x+2y)^2 = (x)^2 + 2(x)(2y) + (2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$$

$$۲) (x^2 + 4xy)^2 = x^4 + 8x^3y + 16x^2y^2$$

$$۳) (2x - 4y)^2$$

می‌توان گفت صورت این مسأله به شکل روبه‌رو می‌باشد:  $[2x + (-4y)]^2$

که در آن  $2x =$  جمله اول و  $-4y =$  جمله دوم

$$(2x-4y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(-4y) + (-4y)^2 = 4x^2 - 16xy + 16y^2$$

توجه: می دانیم هر عدد منفی اگر به توان زوج برسد، حاصلش مثبت و اگر به توان فرد برسد حاصلش منفی خواهد بود.

$$۴) (2a^2y - 3ax^2)^2 = 4a^4y^2 - 12a^2yx^2 + 9a^2x^4$$

$$۵) \left(\frac{1}{2}ab^2 - 4ab\right)^2 = \frac{1}{4}a^2b^4 - 4a^2b^2 + 16a^2b^2$$

$$۶) \left(\frac{3}{2}ab - \frac{2}{3}a^2b\right)^2 = \frac{9}{4}a^2b^2 - 2a^2b^2 + \frac{4}{9}a^4b^2$$

$$۷) [(a+b)^2 + (a-b)^2]^2 = (a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2)^2 \\ = (2a^2 + 2b^2)^2 = 4a^4 + 8a^2b^2 + 4b^4$$

$$۸) [2a(a+2b) - b(4a+b^2)]^2 = (2a^2 + 4ab - 4ab - b^2)^2 \\ = (2a^2 - b^2)^2 = 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$$

$$۹) (-\sqrt{2}a^2b - \frac{1}{2}b)^2 = 2a^4b^2 + \sqrt{2}a^2b^2 + \frac{1}{4}b^2$$

$$۱۰) (a^m + a^{2m})^2 = (a^m)^2 + 2a^m \times a^{2m} + (a^{2m})^2 = a^{2m} + 2a^{3m} + a^{4m}$$

تمرین: حاصل عبارتهای زیر را به کمک اتحاد به دست آورید.

$$۱) \left(\frac{1}{2}a^2b^2 + \frac{1}{4}ab\right)^2$$

$$۲) (-4a^2b - 3ab^2)^2$$

$$۳) (\sqrt{2}ab - \sqrt{3}a^2b)^2$$

$$۴) \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4x^2 + 5x\right)^2$$

$$۵) \left(2xy - \frac{1}{2}x^2y^2\right)^2$$

$$۶) \left( \frac{\sqrt{۳}}{۴} ab^۲ - ۴ab^{\wedge} \right)^۲$$

$$۷) (۲a^{m-۱} - ۴)^۲$$

$$۸) \left( \frac{۱}{۲} a^{۲m-۱} - \frac{۱}{۳} a^{m+۵} \right)^۲$$

$$۹) \left( -\frac{۱}{۲} a^b + \frac{۱}{۴} b^a \right)^۲$$

$$۱۰) \left( \frac{۱}{۲} a^{۲m+۱} b^n - \frac{۱}{۴} a^{\frac{m}{۲}} b^{\frac{۲n}{۲}} \right)^۲$$

### تعمیم اتحاد اول:

$$(a+b+c)^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲ac + ۲bc$$

اثبات: می توان طبق اتحاد اول، مربع مجموع سه جمله را به دست آورد:

$$(a+b+c)^۲ = [(a+b)+c]^۲ = (a+b)^۲ + ۲(a+b)c + c^۲$$

$$= a^۲ + ۲ab + b^۲ + ۲ac + ۲bc + c^۲ = a^۲ + b^۲ + c^۲ + ۲ab + ۲ac + ۲bc$$

مثالها:

$$۱) (x+۲y+z)^۲ = x^۲ + ۴y^۲ + z^۲ + ۴xy + ۲xz + ۴yz$$

$$۲) (۲x-۱+x^۲)^۲ = ۴x^۲ + ۱ + x^۴ - ۴x + ۴x^۳ - ۲x^۲ = x^۴ + ۴x^۳ + ۲x^۲ - ۴x + ۱$$

$$۳) (۲x^۲-x+x^۳)^۲ = ۴x^۴ + x^۲ + x^۶ - ۴x^۳ + ۴x^۵ - ۲x^۴ = x^۶ + ۴x^۵ + ۲x^۴ - ۴x^۳ + x^۲$$

$$۴) (۲ab^۲-ab-b^۲)^۲ = ۴a^۲b^۴ + a^۲b^۲ + b^۴ - ۴a^۲b^۳ - ۴ab^۴ + ۲ab^۳$$

$$۵) \left( -\frac{۱}{۲} ab^۲ - ۲ + \frac{۱}{۴} b^۳ \right)^۲ = \frac{۱}{۴} a^۲b^۴ + ۴ + \frac{۱}{۱۶} b^۶ + ۲ab^۳ - \frac{۱}{۴} ab^۴ - b^۳$$

و اگر تعداد جملات افزایش یابد دوباره می توان مثل روش بالا عمل کرد و بطور کلی

می توان قاعده زیر را بیان کرد:

مجموع دو برابر حاصلضرب دوه دوی جملات + مجموع مربعات هر جمله = مربع مجموع چند جمله

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

$$\begin{aligned} 6) (x-1+x^2-x^3)^2 &= x^2 + 1 + x^4 + x^6 - 2x + 2x^3 - 2x^4 - 2x^2 + 2x^3 - 2x^5 \\ &= x^6 - 2x^5 - x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) (2a-b^2-4a^2-6a+b)^2 &= (-4a-b^2-4a^2+b)^2 \\ &= 16a^2 + b^4 + 16a^4 + b^2 + 8ab^2 + 32a^2 - 8ab + 8a^2b^2 - 2b^2 - 8a^2b \end{aligned}$$

$$8) (2ab^2-4a^2-1)^2 = 4a^2b^4 + 16a^4 + 1 - 16a^2b^2 - 4ab^2 + 8a^2$$

$$\begin{aligned} 9) \left(-\frac{1}{3}ab^2 - \frac{1}{3}a^2b - 1\right)^2 \\ = \frac{1}{9}a^2b^4 + \frac{1}{9}a^4b^2 + 1 + \frac{1}{3}a^2b^2 + ab^2 + \frac{2}{3}a^2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10) (x^4-x^2+x^2-x+1)^2 \\ = x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 - 2x^4 + 2x^6 - 2x^5 + 2x^4 - 2x^5 \\ + 2x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 2x^2 - 2x \\ = x^8 - 2x^4 + 2x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 2x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

تمرین: حاصل عبارات زیر را به کمک اتحاد به دست آورید.

$$1) (2ab - b^2 + b^2)^2$$

$$2) (-a^2b - 3ab^2 + 2)^2$$

- ۳)  $(\frac{1}{3}a - \frac{1}{4}b^2 + 1)^2$   
 ۴)  $[(x-1)^2 + (x+1)^2]^2$   
 ۵)  $(2x - x^2 + 1 - x)^2$   
 ۶)  $(x^2 - 2x + 1 - 2x^2)^2$   
 ۷)  $(\frac{1}{4}a^{2m} - \frac{1}{3}a^{2m} - 1)^2$   
 ۸)  $(2a^{n-1} - a^{2n+1} - 3)^2$   
 ۹)  $(2a - b + 1 - 3a^2 + b)^2$   
 ۱۰)  $(2x - x^2 - 3x^2 - 1 + x^4)^2$

## ۱.۲ - اتحاد دوم (اتحاد مزدوج)

تعریف دو عبارت مزدوج: دو عبارت را مزدوج یکدیگر گویند، هرگاه تک جمله‌ایهای آن دو مشابه یکدیگر باشند و فقط بعضی از علامتهای تک جمله‌ایها قرینه باشند.

مثال: مزدوج عبارت  $a - 2b + c$  می‌تواند عبارت‌های زیر باشد:

$$a + 2b + c \quad \text{و} \quad a + 2b - c \quad \text{و} \quad a - 2b - c \quad \text{و} \quad -a - 2b + c$$

صورت اتحاد:

مربع جمله دوم - مربع جمله اول = حاصلضرب دو عبارت مزدوج

جمله اول: جمله‌ای را گویند که علامت آن در هر دو عبارت یکسان باشد.

جمله دوم: جمله‌ای را گویند که علامت آن در دو عبارت یکسان نباشد.

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

$$(a+b)(a-b)=a^2-ab+ba-b^2=a^2-b^2 \quad \text{اثبات:}$$

تذکر: توان ۲ بر روی b قرار دارد و منفی به توان ۲ نمی‌رسد، لذا علامت بین  $a^2$  و  $b^2$  در این اتحاد همیشه منفی خواهد بود.

مثالها:

$$۱) (3x+2y)(3x-2y)$$

$-2y$  یا  $2y =$  جمله دوم و  $3x =$  جمله اول

$$(3x+2y)(3x-2y)=(3x)^2-(2y)^2=9x^2-4y^2$$

$$۲) (2y-z^2)(z^2+2y)$$

$-z^2$  یا  $z^2 =$  جمله دوم و  $2y =$  جمله اول

$$(2y-z^2)(z^2+2y)=(2y)^2-(z^2)^2=4y^2-z^4 \quad \text{یا}$$

$$(2y-z^2)(z^2+2y)=(2y)^2-(-z^2)^2=4y^2-z^4$$

یعنی جمله دوم را  $z^2$  یا  $-z^2$  بگیریم، تفاوتی نمی‌کند. به مثال زیر توجه نمایید:

$$۳) (x+y-z)(x-y+z)$$

$-y+z$  یا  $y-z =$  جمله دوم و  $x =$  جمله اول

ولی جمله دوم را نمی‌توان  $y+z$  یا  $-y-z$  انتخاب کرد، پس می‌توان چنین گفت که جمله دوم را باید تماماً از یک پرانتز انتخاب نماییم.

$$\begin{aligned} (x+y-z)(x-y+z) &= x^2 - (y-z)^2 = x^2 - (y^2 - 2yz + z^2) \\ &= x^2 - y^2 + 2xy - z^2 \end{aligned}$$

$$۴) (-۲x^۲y + ۵z^۲y^۴)(۵z^۲y^۴ + ۲x^۲y) = ۲۵z^۴y^۸ - ۴x^۴y^۶$$

$$۵) (۴x + ۲y - x + z)(۳y - ۳x + z - y) = (۳x + ۲y + z)(۲y - ۳x + z) \\ = (۲y + z)^۲ - (۳x)^۲ = ۴y^۲ + ۴yz + z^۲ - ۹x^۲$$

$$۶) (۲a - b + ۱ - c)(-۲a + b + ۱ + c) = ۱ - (۲a - b - c)^۲ \\ = ۱ - (۴a^۲ + b^۲ + c^۲ - ۴ab - ۴ac + ۲bc) \\ = ۱ - ۴a^۲ - b^۲ - c^۲ + ۴ab + ۴ac - ۲bc$$

$$۷) (۲x - y + z - ۱)(y - ۱ - z + ۲x) = (۲x - ۱)^۲ - (y - z)^۲ \\ = ۴x^۲ - ۴x + ۱ - y^۲ + ۲yz - z^۲$$

$$۸) (-x^۳y - x^۲y^۲ + ۲x^۲y^۳ + ۱)(۲x^۳y + ۱ - x^۲y^۲ - x^۳y) \\ = (-x^۳y + x^۲y^۲ + ۱)(x^۳y - x^۲y^۲ + ۱) = ۱ - (-x^۳y + x^۲y^۲)^۲ \\ = ۱ - x^۶y^۲ + ۲x^۵y^۳ - x^۴y^۴$$

$$۹) (۲x - ۱)(۴x^۲ + ۱)(۲x + ۱)$$

در ضرب چند پرانتز در یکدیگر می‌توانیم هر دو پرانتز دلخواه را در هم ضرب کنیم و سپس حاصل را در پرانتز بعدی ضرب نماییم. (به دلیل خاصیت جابه‌جایی و شرکت‌پذیری در ضرب) لذا برای حل مثال فوق، ابتدا پرانتز اول و سوم را در هم ضرب می‌کنیم، بدین علت که مزدوج یکدیگر هستند.

$$(۲x - ۱)(۲x + ۱)(۴x^۲ + ۱) = (۴x^۲ - ۱)(۴x^۲ + ۱) = ۱۶x^۴ - ۱$$

$$۱۰) (۳x - ۱)^۲(۳x + ۱)^۲$$

می‌دانیم که  $a^۲b^۲ = (ab)^۲$  پس داریم:

$$(3x-1)^2(3x+1)^2 = [(3x-1)(3x+1)]^2 = (9x^2-1)^2 = 81x^4 - 18x^2 + 1$$

تمرین:

حاصل عبارات زیر را به کمک اتحاد به دست آورید:

$$1) \left(\frac{1}{4} a^2b - 9ab^2\right) \left(-9ab^2 - \frac{1}{4} a^2b\right)$$

$$2) (2x^2y + 4xy)(-4xy + 2x^2y)$$

$$3) \left(\frac{1}{4} a^2b - \frac{2}{3} b^2c^2\right) \left(-\frac{2}{3} b^2c^2 - \frac{1}{4} a^2b\right)$$

$$4) (2xy - z + x)(-x - 2xy - z)$$

$$5) (4x^2y - a - y + 1)(-a + y - 1 + 4x^2y)$$

$$6) (x^2 - x + 4x^2 + 2x - 1)(\Delta x + 2 + \Delta x^2 - 6x - 1)$$

$$7) (2xy - x + y - xy)(xy + \Delta x - y - 4x)$$

$$8) (2x - y + z + 4y - t)(\Delta t + 2y - 4t + z + 2x)$$

$$9) (3x+1)(3x-1)(9x^2+1)(81x^4+1)$$

$$10) (\Delta x + 10)(x-2)(x^2+4)$$

۱.۳- اتحاد سوم: مکعب مجموع دو جمله

صورت اتحاد:

(جمله دوم) (مربع جمله اول) + مکعب جمله اول = مکعب مجموع دو جمله

مکعب جمله دوم + (مربع جمله دوم) (جمله اول) + ۳



$$(a+b)^r = a^r + r a^{r-1} b + r a^{r-2} b^2 + \dots + b^r$$

اثبات:

$$\begin{aligned} (a+b)^r &= (a+b)(a+b)^{r-1} = (a+b)(a^{r-1} + r a^{r-2} b + \dots + b^{r-1}) \\ &= a^r + r a^{r-1} b + a b^{r-1} + \dots + r a b^{r-2} + b^r \\ &= a^r + r a^{r-1} b + r a^{r-2} b^2 + \dots + b^r \end{aligned}$$

مثالها:

$$\begin{aligned} 1) (r x + r y)^r &= (r x)^r + r (r x)^{r-1} (r y) + r (r x)^{r-2} (r y)^2 + \dots + (r y)^r \\ &= \lambda x^r + r \rho x^{r-1} y + \Delta^2 x^{r-2} y^2 + \dots + r \gamma y^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) (x^r y + r x y^r)^r &= (x^r y)^r + r (x^r y)^{r-1} (r x y^r) + r (x^r y)^{r-2} (r x y^r)^2 + \dots + (r x y^r)^r \\ &= x^r y^r + r x^{r-1} y^{r+1} + r^2 x^{r-2} y^{r+2} + \dots + r^r x^r y^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) (r x y - a)^r &= (r x y)^r + r (r x y)^{r-1} (-a) + r (r x y)^{r-2} (-a)^2 + \dots + (-a)^r \\ &= \lambda x^r y^r - r x^{r-1} y^{r-1} a + r^2 x^{r-2} y^{r-2} a^2 - \dots - a^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \left(-r a^r b - \frac{1}{r}\right)^r &= \left(-r a^r b\right)^r + r \left(-r a^r b\right)^{r-1} \left(-\frac{1}{r}\right) \\ &+ r \left(-r a^r b\right)^{r-2} \left(-\frac{1}{r}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{1}{r}\right)^r = -\lambda a^r b^r - r a^{r-1} b^{r-1} - \frac{r}{r} a^r b - \frac{1}{r^r} \end{aligned}$$

$$5) (-1 + a^r b^r)^r = -1 + r a^r b^r - r a^{r-1} b^r + a^{r-1} b^r$$

$$6) (\sqrt{r} a - 1)^r = r \sqrt{r} a^r - r a^r + r \sqrt{r} a - 1$$

$$7) (\sqrt{r} a^r b - \sqrt{r} a^r)^r = r \sqrt{r} a^r b^r - r \sqrt{r} a^r b^r + r \sqrt{r} a^r b - r \sqrt{r} a^r$$

$$8) (r a^r b + \Delta x y^r)^r = r \gamma a^r b^r + r \Delta a^r b^r x y^r + r \Delta^2 a^r b^r x^2 y^r + \dots + r \Delta^r x^r y^r$$

$$9) \left(-\frac{1}{r}xy^r - \frac{1}{r}x^r y\right)^r = \frac{-1}{\lambda}x^r y^{1r} - \frac{1}{\frac{1}{r}}x^r y^r - \frac{1}{\frac{1}{r}}x^r y^r - \frac{1}{\frac{1}{r}}x^{1r} y^r$$

$$10) (x-2)^r(x+2)^r(x^r+4)^r = [(x-2)(x+2)(x^r+4)]^r$$

$$= [(x^r-4)(x^r+4)]^r = (x^r-16)^r = x^{1r} - 4\lambda x^\lambda + 76\lambda x^r - 4096$$

تمرین:

حاصل عبارات زیر را به کمک اتحاد به دست آورید.

$$1) (2xy^r + y)^r$$

$$2) (2ab + 3a^r)^r$$

$$3) \left(\frac{1}{r}ab^r + \frac{r}{r}a^r b\right)^r$$

$$4) (2x^r y - \frac{1}{r}x^r y^r)^r$$

$$5) \left(-\frac{1}{r}x^r y - \frac{1}{r}a^r b^r\right)^r$$

$$6) \left(-2a^r b - \frac{1}{\Delta}a^r b\right)^r$$

$$7) \left(\frac{1}{r}a^{rn-1} - 1\right)^r$$

$$8) \left(2a^{\frac{n}{r}-1} + a^{\frac{rn}{r}-1}\right)^r$$

$$9) (\sqrt{r}ab - 2a)^r$$

$$10) (\sqrt{r}x^r y - \sqrt{r}y^r)^r$$

\* مکعب مجموع سه جمله

$$(a+b+c)^r = a^r + b^r + c^r + r a^r b + r a b^r + r a^r c + r a c^r$$

$$+ r b^r c + r b c^r + 6abc$$

اتحاد فوق را براحتی می‌توانید ثابت کنید.

## ۱.۴- اتحاد مجموع مکعب دو جمله

صورت اتحاد:

(مربع جمله دوم + جمله دوم × جمله اول - مربع جمله اول) (مربع جمله دوم + جمله اول)

= مکعب جمله دوم + مکعب جمله اول

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

اثبات:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3=a^3+b^3$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3=a^3-b^3$$

مثالها:

$$۱) (x+2)(x^2-2x+4)=x^3+8$$

$$۲) (3x^2y+4xy^2)(9x^2y^2+16x^2y^2-12x^2y^2)=27x^6y^2+64x^2y^6$$

$$۳) (2-3a^2b)(4+9a^2b^2+6a^2b)=8-27a^6b^3$$

$$۴) (-2ab+1)(4a^2b^2+1+2ab)=-8a^3b^3+1$$

$$۵) (9a^2-3a+1)(1+3a)=1+27a^3$$

$$۶) (a+b+1)[(a+b)^2-(a+b)+1]=(a+b)^3+1$$

$$. = a^r + r a^r b + r a b^r + b^r + 1$$

$$7) (x-y-z)[(x-z)^r + y(x-z) + y^r] = (x-z)^r - y^r \\ = x^r - r x^r z + r x z^r - z^r - y^r$$

$$8) (r x + y - 1)[(r x - 1)^r - y(r x - 1) + y^r] \\ = (r x - 1)^r + y^r = r x^r - 1 r x^r + r x - 1 + y^r$$

$$9) (a^r - a + 1)(a^r - 1)(a^r + a + 1)$$

روش اول :

$$= [(a^r + 1)^r - a^r](a^r - 1) = (a^r + a^r + 1)(a^r - 1) = a^r - 1$$

روش دوم :

$$= (a^r - a + 1)(a + 1)(a - 1)(a^r + a + 1) \\ = (a^r + 1)(a^r - 1) = a^r - 1$$

$$10) (x+y+1)(x^r + y^r + 1 - y - yx + rx) \\ = [(x+1) + y][(x+1)^r - y(x+1) + y^r] = (x+1)^r + y^r \\ = x^r + r x^r + r x + 1 + y^r$$

تمرین:

حاصل عبارات زیر را به کمک اتحاد به دست آورید.

$$1) (rx-1)(rx^r+1+rx)$$

- ۲)  $(-۲ab+y)(fa^r b^r + ۲aby+y^r)$
- ۳)  $(-\frac{1}{۲}x-۱)(\frac{1}{۴}x^r - \frac{1}{۲}x+۱)$
- ۴)  $(\frac{1}{۴}ab^r + \frac{1}{۲}ab)(\frac{1}{۱۶}a^r b^r - \frac{1}{۸}a^r b^r + \frac{1}{۴}a^r b^r)$
- ۵)  $(۲\Delta x^r - \Delta x + ۱)(۱ + \Delta x)$
- ۶)  $(x-a-۲b)[(x-۳b)^r + a(x-۳b) + a^r]$
- ۷)  $(۲y-۱+۳x^r)[(۲y-۱)^r - ۳x^r(۲y-۱) + ۹x^r]$
- ۸)  $(a+b+c)[(a+b)^r - ac - bc + c^r]$
- ۹)  $(x-y)^r(x^r + xy + y^r)^r$
- ۱۰)  $(x-y)^r(x^r + xy + y^r)^r$

## ۱.۵- اتحاد یک جمله مشترک

صورت اتحاد:

(جمله غیرمشترک دوم + جمله مشترک)(جمله غیرمشترک اول + جمله مشترک)  
 = مجموع جملات غیرمشترک  $\times$  جمله مشترک + مربع جمله مشترک  
 حاصل ضرب جملات غیرمشترک +

$$(x+a)(x+b) = x^r + (a+b)x + ab$$

$$(x+a)(x+b) = x^r + bx + ax + ab = x^r + (a+b)x + ab \quad \text{اثبات:}$$

$$۱) (x+۲)(x-۱) = x^r + [۲+(-۱)]x + ۲(-۱) = x^r + x - ۲ \quad \text{مثالها:}$$

$$۲) (x+۳)(x+۲) = x^r + ۵x + ۶$$

$$۳) (۲x+۱)(۲x+۳) = ۴x^r + ۸x + ۳$$

$$۴) (ax^r - ۱)(\Delta + ax^r) = a^r x^r + \Delta ax^r - \Delta$$

$$۵) (۲ab-x)(۲ab+\Delta x) = ۴a^r b^r + \Delta abx - \Delta x^r$$

$$۶) \left(\frac{1}{r} a^r b - 1\right)\left(\frac{1}{r} a^r b + \Delta\right) = \frac{1}{r} a^r b^2 + \Delta a^r b - \Delta$$

$$۷) (2a^r x - y)(7y + 2a^r x) = 14a^r x^2 + 12a^r xy - 7y^2$$

$$۸) (x-1)(x+1)(x+2)(x-2) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4 - \Delta x^2 + 4$$

$$۹) (x-1)(x+1)(x^2+\Delta) = (x^2-1)(x^2+\Delta) = x^4 + \Delta x^2 - \Delta$$

$$۱۰) (x+y+1)(x+y-2) = (x+y)^2 - (x+y) - 2 = x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 2$$

تمرین:

۱)  $(x-4)(x+5)$  حاصل عبارات را به کمک اتحاد به دست آورید.

۲)  $(x^2+1)(x^2+6)$

۳)  $(ay^2-1)(4+ay^2)$

۴)  $\left(\frac{1}{r} a - 4\right)\left(\frac{1}{r} a + \Delta\right)$

۵)  $(1+a)(1+\Delta a)$

۶)  $(4xy^2-x)(4xy^2+\Delta x)$

۷)  $(x+2)(x-2)(x^2+\Delta)$

۸)  $(x^2+y-1)(x^2+\Delta+y)$

۹)  $(xy+y)(xy^2+y)$

۱۰)  $(x-3)(x+\Delta)(x+3)(x-\Delta)$

□ □ □

برای اینکه بتوانیم مسائل مربوط به اتحادها را بهتر حل کنیم، توجه به دو نکته حائز اهمیت است:

۱- صورت دیگری از اتحادهای اول و سوم - که کاربرد زیادی دارد - به شرح زیر است:

$$a^r + b^r = (a+b)^r - 2ab$$

$$a^r + b^r = (a-b)^r + 2ab$$

$$a^r + b^r = (a+b)^r - 2ab(a+b)$$

۲- می توان عباراتی را که به شکل  $a^n \pm b^n$  منتهی شود، به صورت زیر بیان کرد:

$$(a-b)(a^r + a^r b + a^r b^2 + \dots + b^r) = a^f - b^f$$

$$(a+b)(a^r - a^r b + a^r b^2 - a^r b^3 + \dots + b^r) = a^f + b^f$$

$$(a-b)(a^r + a^r b + a^r b^2 + a^r b^3 + \dots + b^r) = a^f - b^f$$

$$(a-b)(a^f + a^f b + a^f b^2 + a^f b^3 + \dots + ab^f + b^f) = a^f - b^f$$

یعنی اگر  $n$  فرد باشد، طرف راست اتحادهای فوق می تواند  $a^n + b^n$  و  $a^n - b^n$  باشد؛ ولی اگر  $n$  زوج باشد طرف راست اتحادهای فوق فقط  $a^n - b^n$  می تواند باشد.

### تمرینهای فصل اول:

بعد از اینکه مطمئن شدید تمام اتحادها را خوب یاد گرفته اید، حاصل عبارات

زیر را به کمک اتحادها به دست آورید.

۱)  $(\frac{1}{3}a^{1/25} - \frac{1}{2}a^{1/5})^2$

۲)  $[(x+2y)^2 + (x-2y)^2]^2$

۳)  $[(4x)^{1/5} - (4x)^{1/10}]^2$

۴)  $(x^2 - 4x + 2)^2$

۵)  $(\frac{1}{3} a^{2n-1} b^{\frac{n}{3}-1} - \frac{1}{4} a^{\frac{n}{2}+1} b^{2n+1})^2$

۶)  $(6a+5b-3a+d-4b+5c)(b-8d+3a+9d-5c)$

۷)  $[(x+1)^2(x-1)^2 - (x+2)^2(x-2)^2]^2$

۸)  $[(x+y)^2 + (x-y)^2](2x^2 - 2y^2)$

۹)  $(2x-5)(4x^2+25)(4x+10)$

$$10) (rx-f)(x^r+f)(rx^r+3r)(1+\frac{x}{r})$$

$$11) (ab-bc+ac+2ab+ac-1)(rac-1+3ab+bc-ac)$$

$$12) (x-y)^r(x^r+2xy+y^r)(x^r+y^r)^r$$

$$13) \{[(a+b)^r+(a-b)^r]^r+f(a^r-b^r)^r\}^r$$

$$14) (ry^m-2+y^m-2y^m+\Delta)(\Delta y^m-f-fy^m+3)$$

$$15) (\Delta a^{1/\Delta}-fa^{o/r\Delta})^r$$

$$16) (ab^{\frac{1}{r}}-ra^rb^{\frac{r}{r}})^r$$

$$17) (x+\frac{1}{x})^r$$

$$18) (x^r-\sqrt{r})^r(\sqrt{r}+x^r)^r$$

$$19) (a+b+rc)^r$$

$$20) (x^r+y^r+z^r)^r-(x^r+y^r)^r-(x^r+z^r)^r-(y^r+z^r)^r$$

$$21) \sqrt{r}(\frac{\sqrt{r}}{r}x^r+1)(x^r-\sqrt{r}x^r+2)$$

$$22) (rx+f)(x-f)[2(x^r-1r)^r+2x(x^r-1r)+2x^r]$$

$$23) (x^{\frac{m}{r}}+2)(x^{\frac{r}{r}m}+6f)(x^{\frac{m}{r}}-2)(x^m+1f+fx^{\frac{m}{r}})$$

$$24) (x^r+3)^r(x^r-3x^r+9)^r$$

$$25) (2x+y-3)[(2x+y)^r+3(2x+y)+9]$$

$$26) x(1-x)(1+x)(x^r+x^f+x^r)$$

$$27) (a^r-2a+1)^r(a^r+2a^r+1)^r(a^r+2a+1)^r(a^r+a^f+1)^r$$



$$۲۸) (x^{n+1} - x^n)(x^2 + x)(x^2 + x^2)(x^5 + x)(x^{17} + x^9 + x)$$

$$۲۹) (x-1)(x^2 + x + 1)(x^6 + 5)(x+1)(x^2 - x + 1)$$

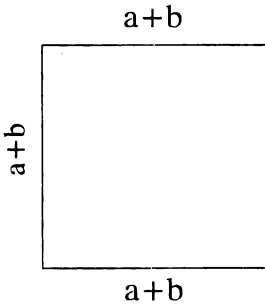
$$۳۰) (3x^2y - 4xy)^4$$

### تمرینهای تکمیلی

حال که تقریباً با اتحادهای مشهور آشنا شده‌اید، به طرح تمرینهایی می‌پردازیم که در حل آنها، این اتحادها استفاده می‌شود. بهتر است مسائل را به ترتیب حل نمایید. ابتدا مسأله را بطور کامل حل کنید و سپس به جواب آن مراجعه کنید.

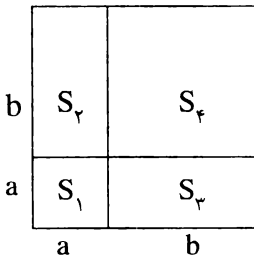
۱- اتحاد اول را به کمک یک شکل ثابت کنید.

جواب:



مساحت یک مربع را از دو روش به دست می‌آوریم؛  
الف - فرض می‌کنیم ضلع مربع  $a+b$  باشد:

$$\text{مساحت مربع} = (a+b)(a+b) = (a+b)^2$$



ب - با توجه به شکل، اندازه‌های فرضی  $a$  و  $b$  را بر روی اضلاع مربع، جدا می‌کنیم.

به سهولت نتیجه می شود:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = a^2 + ba + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \text{مساحت مربع}$$

مساحت مربع از هر دو راه باید یکسان باشد، پس:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

۲- اگر  $k = \frac{1}{x} + x$  باشد مقدار  $\frac{1}{x^2} + x^2$  را به دست آورید.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{جواب: طبق اتحاد اول داریم:}$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \quad \text{در نتیجه می توانیم بنویسیم:}$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 \times x \times \frac{1}{x} = k^2 - 2 \quad \text{پس:}$$

۳- اگر  $ab = 6$  و  $a+b = 6$  باشد مقدار  $a^2 + b^2$  را بدون به دست آوردن  $a$  و  $b$  محاسبه نمایید.

جواب: طبق مسأله بالا داریم:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 6^2 - 2 \times 6 = 36 - 12 = 24$$

۴- ثابت کنید اگر مجموع دو عدد مثبت مقداری ثابت باشد، حاصلضرب آن دو عدد وقتی بیشترین مقدار (ماکزیمم) است که آن دو عدد با یکدیگر مساوی باشند.

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab \quad \text{جواب: طبق اتحاد اول داریم:}$$

باتوجه به فرض داریم:  $a+b=k$  (مقداری ثابت است)، پس:

$$ab = \frac{k^2}{4} - \frac{1}{4} (a-b)^2$$

وقتی حاصلضرب  $ab$  بیشترین مقدار است که باتوجه به مثبت بودن مقدار عبارت  $\frac{1}{4}(a-b)^2$  این عبارت حداقل مقدار ممکن را بگیرد، پس:

$$\frac{1}{4} (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a=b$$

توجه: مسأله بالا را به صورت زیر می توان مطرح کرد:

ثابت کنید اگر حاصلضرب دو عدد مثبت مقداری ثابت باشد، مجموع آن دو عدد وقتی کمترین مقدار (مینیمم) است که آن دو عدد با هم برابر باشند.

۵- اگر داشته باشیم  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$  مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید:

$$k = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

جواب: طرفین رابطه  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$  را در عدد دو ضرب می کنیم:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$$

$$a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = 0$$

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$$

مجموع چند عبارت مثبت وقتی صفر است که هر کدام صفر باشند، پس:

$$a-b=0 \quad \text{و} \quad a-c=0 \quad \text{و} \quad b-c=0$$

$$a=b=c$$

در نتیجه:

$$k = \frac{a+a}{a} + \frac{a+a}{a} + \frac{a+a}{a} = 6$$

۶- مقدار  $P$  را با زاء  $A = \sqrt{x+y}$  و  $B = \sqrt{x-y}$  به دست آورید:

$$P = (A+B)[(A+B)^2 - 2AB](A-B)$$

جواب: ابتدا عبارت  $P$  را تا حد امکان ساده می کنیم:

$$P = (A+B)(A^2 + B^2 + 2AB - 2AB)(A-B)$$

$$=(A+B)(A^r+B^r)(A-B)=(A^r-B^r)(A^r+B^r)=A^r-B^r$$

حال به جای A و B عبارتهای معادل آن را قرار می دهیم:

$$P=A^r-B^r=(\sqrt{x+y})^r-(\sqrt{x-y})^r$$

$$=(x+y)^{r/2}-(x-y)^{r/2}=rxy$$

۷- حاصل عبارت P را به ازاای مقادیر داده شده A و B محاسبه کنید.

$$P=(A-B)(A^r+B^r+AB)$$

$$A=(x+1)^r-2(x+1)+1 \quad \text{و} \quad B=(y^r-3)(y^r+3y^r+9)+27$$

جواب: ابتدا P، A و B را تا حد امکان ساده می کنیم:

$$P=A^r-B^r \quad \text{و} \quad A=x^r+2x+1-2x-2+1=x^r$$

$$B=y^r-27+27=y^r$$

$$P=(x^r)^r-(y^r)^r=x^r-y^{r^2}$$

۸- اگر  $a^r+b^r=1$  باشد، مقدار عبارت  $\frac{a^r+b^r-1}{a^r+b^r-1}$  را به دست آورید.

جواب: صورت مسأله را به کمک اتحادهای خوانده شده، تغییر شکل داده، سپس به جای  $a^r+b^r$  مقدار (۱) قرار می دهیم.

$$\frac{a^r+b^r-1}{a^r+b^r-1} = \frac{(a^r+b^r)^r-2a^r b^r-1}{(a^r+b^r)^r-3a^r b^r-3a^r b^r-1}$$

$$= \frac{1-2a^r b^r-1}{1-3a^r b^r(a^r+b^r)-1} = \frac{-2a^r b^r}{-3a^r b^r} = \frac{2}{3}$$

۹- اگر  $a^r+b^r=3ab$  باشد مقدار عددی  $\frac{a^r-b^r}{a^r+b^r}$  را به دست آورید. (a و b دو عدد

طبیعی و  $a > b$  می باشد).

$$a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} = \sqrt{3ab} \Rightarrow (a+b)^{\sqrt{}} = \sqrt{5ab} \Rightarrow a+b = \sqrt{5ab} \quad \text{جواب:}$$

از طرف دیگر داریم:

$$a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} = \sqrt{3ab} \Rightarrow (a-b)^{\sqrt{}} = \sqrt{ab} \Rightarrow a-b = \sqrt{ab}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^{\sqrt{}} - b^{\sqrt{}}}{a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}}} &= \frac{(a-b) [(a-b)^{\sqrt{}} + \sqrt{3ab}]}{(a+b) [(a+b)^{\sqrt{}} - \sqrt{3ab}]} = \frac{\sqrt{ab} (ab + \sqrt{3ab})}{\sqrt{5ab} (\sqrt{5ab} - \sqrt{3ab})} \\ &= \frac{\sqrt{ab} (\sqrt{ab})}{\sqrt{5} \sqrt{ab} (\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{5} (\sqrt{5} - \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{ab}}{5 - \sqrt{15}} \end{aligned}$$

۱۰. اگر  $a+b+c=0$  و  $a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} + c^{\sqrt{}} = 1$  باشد، مقدار عبارت  $a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} + c^{\sqrt{}}$  را محاسبه کنید.

$$a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} + c^{\sqrt{}} = 1 \Rightarrow (a+b+c)^{\sqrt{}} - 2(ab+ac+bc) = 1 \quad \text{جواب:}$$

$$\Rightarrow ab+ac+bc = -\frac{1}{2}$$

طرفین را به توان دو می رسانیم:

$$a^{\sqrt{}} b^{\sqrt{}} + a^{\sqrt{}} c^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} c^{\sqrt{}} + 2abc(a+b+c) = \frac{1}{4} \Rightarrow a^{\sqrt{}} b^{\sqrt{}} + a^{\sqrt{}} c^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} c^{\sqrt{}} = \frac{1}{4}$$

$$a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} + c^{\sqrt{}} = (a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} + c^{\sqrt{}})^{\sqrt{}} - 2(a^{\sqrt{}} b^{\sqrt{}} + a^{\sqrt{}} c^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}} c^{\sqrt{}}) = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۱. اگر  $a=b+1$  باشد، ثابت کنید:  $(a+b)(a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}})(a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}}) = a^{\sqrt{}} - b^{\sqrt{}}$

جواب: از فرض مسأله داریم:  $a-b=1$  پس:

$$(a+b)(a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}})(a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}}) = 1 \times (a+b)(a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}})(a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}})$$

$$= (a-b)(a+b)(a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}})(a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}})$$

$$= (a^{\sqrt{}} - b^{\sqrt{}})(a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}})(a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}}) = (a^{\sqrt{}} - b^{\sqrt{}})(a^{\sqrt{}} + b^{\sqrt{}})^2 = a^{\sqrt{}} - b^{\sqrt{}}$$

۱۲- مقدار  $x$  را طوری تعیین کنید که عبارت  $a^{2x} + 2a^y + a^{2x+2}$  مربع کامل گردد.  
 جواب: طبق اتحاد اول اگر  $a^m + 2a^p + a^n$  بخواهد مربع کامل باشد، باید  
 $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} = p$  باشد پس:

$$x+x+1=7 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$$

### مسائل زیر را حل کنید.

۱- ثابت کنید تفاضل مربع دو عدد طبیعی متوالی برابر است با مجموع آن دو عدد.  
 ۲- اگر داشته باشیم  $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3$  تحقیق کنید که رابطه زیر برای  $n$  های فرد، درست است:

$$a^n + b^n + c^n = (a+b+c)^n$$

۳- جای خالی را با جملات مناسب پر کنید. (توانها منفی نباشد)

الف)  $16x^4 + 7x^3y + \frac{5}{4}xy^2 + \dots + \dots + \dots = (\dots + \dots + \dots)^2$

ب)  $81x^2y^4 - 9x^2y^3 + \dots = (\dots - \dots)^2$

ج)  $a^2 - 2a + b^2 - 2b + 1 + \dots = (\dots + \dots - \dots)^2$

۴- اگر  $a$  عدد صحیح باشد، ثابت کنید عبارات زیر بر ۶ قابل قسمت می باشند.

$$a^3 - a \quad \text{و} \quad a^3 + 5a \quad \text{و} \quad a^3 + 11a \quad \text{و} \quad a^3 - 19a$$

راهنمایی: می دانیم حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی حتماً بر ۲ بخش پذیر است و حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی حتماً بر ۳ بخش پذیر است.

۵- با فرض  $x^2 + y^2 = z^2$  ثابت کنید:

$$(yz)^4 + (zx)^4 + (xy)^4 = (z^4 - x^2y^2)^2$$

۶- عبارت زیر را به خلاصه‌ترین شکل بنویسید.

$$k = (a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8) \dots (a^{2^n}+b^{2^n})$$

۷- به‌ازای چه مقداری از  $a$ ، عبارت  $M$ ، بیشترین مقدار می‌شود.

$$M = \frac{1}{a^2+4a+6}$$

۸- اگر  $a+b=5$  و  $ab=6$  باشد، بدون محاسبه مقادیر  $a$  و  $b$  مقدار عددی  $a^3+b^3$  را به‌دست آورید.

۹- اگر  $a+b+c=0$  باشد، ثابت کنید:  $a^3+b^3+c^3=3abc$

۱۰- اولاً مقدار عبارت زیر را به‌دست آورید:

$$(a+b)(a+c)+(a+b)(b+c)+(a+c)(b+c)-(a+b+c)^2$$

ثانیاً اگر  $a+b=3$  و  $a+c=5$  و  $b+c=2$  باشد، بدون محاسبه  $a$  و  $b$  و  $c$ :

الف) مقدار  $a+b+c$  را به‌دست آورید.

ب) مقدار  $ab+ac+bc$  را به‌دست آورید.

ج) مقدار  $a^2+b^2+c^2$  را به‌دست آورید.

د) مقدار  $a^3+b^3+c^3$  را به‌دست آورید.

۱۱- اتحاد  $(a+b+c)^3$  را به کمک اتحاد سوم به‌دست آورید.

۱۲- تحقیق کنید عبارت  $x^3+px+q$  به‌ازای

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

برابر صفر است. (در واقع عبارت فوق یکی از جوابهای معادله  $x^3+px+q=0$  است)

## فصل ۲

### تجزیه عبارتهای جبری

وقتی گفته می‌شود که یک عدد را به حاصلضرب عوامل اول تجزیه کنید، به این مفهوم است که آن را تبدیل به حاصلضرب اعدادی نماییم که خود این اعداد، دیگر قابل تجزیه نباشند. در مورد عبارتهای جبری نیز همین مفهوم وجود دارد، یعنی وقتی گفته می‌شود عبارت جبری را به حاصلضرب عاملهای اول تجزیه کنید یعنی آن عبارت را تبدیل به حاصلضرب عباراتی کنید که خود این عبارات قابل تجزیه نباشند.

تجزیه یکی از مباحث مشکل ریاضیات است، بدین جهت که مسائل آن بسیار متنوع است، یعنی یک دانش‌آموز باید آن قدر تمرین کند تا وقتی که با یک مسأله مواجه می‌شود، بتواند به کمک یکی از روشهایی که خوانده است آن را حل نماید. در بسیاری از موارد، تجزیه عکس اتحاد است و کسی می‌تواند خوب تجزیه کردن را یاد بگیرد که اتحادها را بخوبی فهمیده باشد.



## روشهای تجزیه:

### ۲.۱- فاکتورگیری:

برای فاکتورگیری از مجموع چند عبارت، بزرگترین مقسوم علیه مشترک ضریبها و حروف مشترک با توان کوچکتر را فاکتور می‌گیریم:

مثالها:

$$۱) ۲ax - ۴ax^2 = ۲ax(1 - 2x)$$

$$۲) -۲ab + ۹a^2 = ۳a(-b + 3a)$$

$$۳) ۶a^2b + ۱۲ab^2 = ۶ab(a^2 + 2b^2)$$

$$۴) -۴ab + ۱۲a^2b + ۸ab^2 = ۴ab(-1 + 3a^2 + 2b)$$

$$۵) ۱۷xy^2 - ۳۴x^2y + ۱۷ = ۱۷(xy^2 - 2x^2y + 1)$$

$$۶) ۱۶a^2b^5d - ۸a^2b^3d^2 + ۲۴a^2b^4 = ۸a^2b^4(2a^2bd - ad^2 + 3b^2)$$

$$۷) 2(a+b) + (a+b)^2 = (a+b)(2+a+b)$$

$$۸) 2x(a+b) + 6x^2(a+b) = 2x(a+b)(1+3x)$$

$$۹) 3a(x+y)^2 + 6(x+y)^2 = 3(x+y)^2(a+2x+2y)$$

$$۱۰) ۴a^2(x+y)^2 - ۴a^2(x+y) - ۸a(x+y)$$

$$= ۴a(x+y)(ax+ay-a-2)$$

تمرین: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$۱) 5x^2y - 10xy$$

$$۲) -3x^2y^2 + 12x^2y^2$$

$$۳) ۲a^r b - ۸a^r b$$

$$۴) a^r x^s + a^r x^r y^r - a^r xy^r$$

$$۵) x^r(m+n) + ۲y^r(m+n)$$

$$۶) ۴(x-۲y)^r + ۷y(x-۲y) - ۳x(x-۲y)$$

$$۷) ۲a^r(a-b) + ۵a(a-b)^r - ۶ab(a-b)^r$$

$$۸) -۲xy(x-y)^r + (x-y)(xy+۱)$$

$$۹) ۲a(a+b)^m - (a+b)^{m+۱}$$

$$۱۰) ۸a^r x^r y^r (۲x-۳y)^r - ۲۴a^r x^r y^r (۲x-۳y) + ۳۲a^r x^r y^r (۲x-۳y)$$

## ۲.۲ دسته‌بندی.

در روش دسته‌بندی جملات را طوری با یکدیگر در نظر می‌گیریم که بتوان باروش فاکتورگیری (یا روشهایی که بعداً خواهیم خواند) عبارات را تجزیه نمود.

**مثالها:**

$$۱) ax+by+ay+bx=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$$

$$۲) a^r+bc-ac-ab=a(a-c)-b(a-c)=(a-c)(a-b)$$

$$۳) az+bz+ay+by=z(a+b)+y(a+b)=(a+b)(z+y)$$

$$۴) a^r b - a + ab^r - b = a(ab-۱) + b(ab-۱) = (ab-۱)(a+b)$$

$$۵) ۲ax-۲ya-۲bx+۳yb=۲x(a-b)-۳y(a-b)=(a-b)(۲x-۳y)$$

$$۶) ۲x^r + ۲y + x + ۴x^r y = x(۲x^r + ۱) + ۲y(۱ + ۲x^r) = (۲x^r + ۱)(x + ۲y)$$

$$۷) a^r b x + a^r b + y x + a y = a^r b(x + a) + y(x + a) = (x + a)(a^r b + y)$$

$$\begin{aligned} ۸) ax^r + ۳xz + axy + ۳x^r + axz + ۳xy &= x(ax + ۳z + ay + az + ۳y + ۳x) \\ &= x[a(x + y + z) + ۳(x + y + z)] = x(x + y + z)(a + ۳) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۹) a^r xy + b^r xy + abx^r + aby^r &= ax(ay + bx) + by(ay + bx) \\ &= (ay + bx)(ax + by) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۰) a^r b + a^r b^r c - a^r b^r - a^r bc &= a^r b(a^r + bc - ab - ac) \\ &= a^r b[a(a - b) - c(a - b)] = a^r b(a - b)(a - c) \end{aligned}$$

تمرین: عبارات زیر را تجزیه نمایید.

$$۱) ۲ax + ۶ay - bx - ۳by$$

$$۲) ۲x^r + ۴xy^r - y^r x - ۲y^r$$

$$۳) a^r b^r + ۱ + a^r + b^r$$

$$۴) ۳xy - ۲x + ۲x^r y - ۳$$

$$۵) ۱۶abc - ۸aby + ۲c^r - cy$$

$$۶) a^r c^r + b^r d^r + a^r d^r + b^r c^r$$

$$۷) -۲x^r y^r + ۳xy + ۹$$

$$۸) -ax^r - b^r y - b^r x^r - ay$$

$$9) ax^2 + by^2 + ay^2 + bx^2$$

$$10) x^2 - xy + y^2x + zx - zy - y^2$$

### ۲.۳- اتحاد مزدوج

عباراتی را می توان به کمک این روش تجزیه کرد که شکل ظاهری آن به صورت  
تفاضل دو مربع کامل باشد.

مثالها:

$$1) 4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$$

$$2) 25y^2 - a^2 = (\Delta y^2 + a)(\Delta y^2 - a)$$

$$3) 10x^2y^2 - 6 = 2(\Delta x^2y^2 - 3) = 2(\sqrt{\Delta}xy + \sqrt{3})(\sqrt{\Delta}xy - \sqrt{3})$$

$$4) a^2b - ab^2 = ab(a^2 - b^2) = ab(a + b)(a - b)$$

$$5) 25a^2b^2 - 121x^2y^2 = (\Delta ab^2 + 11x^2y)(\Delta ab^2 - 11x^2y)$$

$$6) 16x^2 - 81y^2 = (4x^2 + 9y^2)(4x^2 - 9y^2) = (4x^2 + 9y^2)(2x + 3y)(2x - 3y)$$

$$7) 2a^{\Delta} - \Delta \cdot a = 2a(a^{\Delta} - \Delta) = 2a(a^{\Delta} + \Delta)(a + \sqrt{\Delta})(a - \sqrt{\Delta})$$

$$8) (2x + 3y)^2 - (\Delta x + \Delta y)^2 = (2x + 3y + \Delta x + \Delta y)(2x + 3y - \Delta x - \Delta y)$$

$$= (10x + \Delta y)(-6x - 2y) = -4(\Delta x + 4y)(3x + y)$$

$$9) (a + b)^2 - 1 = [(a + b)^2 + 1](a + b + 1)(a + b - 1)$$

$$10) x^2 - x - y^2 + y = (x + y)(x - y) - (x - y) = (x - y)(x + y - 1)$$

تمرین: عبارات زیر را تجزیه نمایید.

۱)  $4a^2 - 1$

۲)  $2a^2b^2 - 8a^2$

۳)  $6a^2b^5 - 24b$

۴)  $b^2 - a^{2m}$

۵)  $(a+b)^2 - 1$

۶)  $(a+b)^2 - 4(a+b)$

۷)  $16a^4 - 81$

۸)  $a^5x^2 - ab^2$

۹)  $5a(a-1)^2 - 20a$

۱۰)  $(x-y)^2 - (2x-y)^2$

## ۲.۴ اتحاد اول

برای تجزیه عبارات به کمک اتحاد اول، از دو رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

مثالها:

۱)  $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$

$$۲) x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

$$۳) 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

$$۴) x^2 + 9y^2 - 6xy = (x - 3y)^2$$

$$۵) x^2 - 2a^2x + a^4 = (x - a^2)^2$$

$$۶) x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$$

$$۷) 2x^2 + 16x^2y^2 + 32y^4 = 2(x^2 + 4x^2y^2 + 16y^4) = 2(x^2 + 4y^2)^2$$

$$۸) a^2 - 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2 = (a + b)^2(a - b)^2$$

$$۹) a^2 - 1 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 - 1 = (a + b + 1)(a + b - 1)$$

$$۱۰) a^2 - x^2 - 2a - y^2 + 1 - 2xy = (a - 1)^2 - (x + y)^2$$

$$= (a - 1 + x + y)(a - 1 - x - y)$$

تمرین: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$۱) x^2 + 6xy + 9y^2$$

$$۲) a^2 - 4ab + 4b^2$$

$$۳) 4x^2 - 8xy + 4y^2$$

$$۴) 9x^2 + 16y^2 - 24xy$$

$$۵) 2a^2 + 8b^2 + 8ab$$

$$۶) 12x^2 + 75y^2 - 60xy$$

$$۷) 16a^2 + 81b^2 - 72a^2b^2$$

$$۸) x^r - z^r + y^r - 2xy$$

$$۹) 1 - x^r + 4x - 4$$

$$۱۰) x^r - y^r - 2yz - z^r$$

## ۲.۵- اتحاد مجموع مکعب دو جمله

برای تجزیه عبارات به کمک این اتحاد، روابط زیر به کار می‌آیند:

$$a^r + b^r = (a+b)(a^r - ab + b^r)$$

$$a^r - b^r = (a-b)(a^r + ab + b^r)$$

مثالها:

$$۱) a^r + 27b^r = (a+3b)(a^r - 3ab + 9b^r)$$

$$۲) a^r - 27b^r = (a-3b)(a^r + 3ab + 9b^r)$$

$$۳) ۸ - 125y^r = (2-5y)(4+10y+25y^r)$$

$$۴) 2x^r y^r - 250 = 2(x^r y^r - 125) = 2(xy-5)(x^r y^r + 5xy + 25)$$

$$۵) (a+b)^r - 1 = (a+b-1)[(a+b)^r + (a+b) + 1]$$

$$۶) 8x^r a^r + 27y^r = (2ax+3y)(4a^r x^r - 6axy + 9y^r)$$

$$۷) 729a^r x^r - 64a^r = a^r(729x^r - 64) = a^r(9x-4)(81x^r + 16 + 36x)$$

$$۸) 16a^r - 2 = 2(8a^r - 1) = 2(2a-1)(4a^r + 2a + 1)$$

$$۹) a^r - b^r = (a^r + b^r)(a^r - b^r) = (a+b)(a^r - ab + b^r)(a-b)(a^r + ab + b^r)$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad a^2 - ax + b^2 - bx &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - x(a+b) \\
 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2 - x)
 \end{aligned}$$

تمرین: عبارات زیر را تجزیه کنید:

- 1)  $a^2b^2 + 1$
- 2)  $64x^6y^6 + 1$
- 3)  $27x^6 + 125$
- 4)  $2x^2y^2 - 16$
- 5)  $4a^2b^6 - 500x^2$
- 6)  $27a^3 - 1$
- 7)  $x^6y^6 + 1$
- 8)  $x^6y^6 - 1$
- 9)  $a^3 + ab^2 + b^3 + a^2b$
- 10)  $a^3 + a^2 + b^3 - b^2$

## ۲.۶ - اتحاد یک جمله مشترک

برای استفاده از این روش باید بتوانیم دو عدد را پیدا کنیم که مجموع و حاصلضربشان را می دانیم:

$$x^2 + Ax + B = (x+a)(x+b)$$

$$a+b=A \quad \text{و} \quad ab=B$$

مثالها:

$$1) \quad x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$$



$$۲) x^2 + 4x - 5 = (x-1)(x+5)$$

$$۳) -x^2 + 12x - 35 = -(x^2 - 12x + 35) = -(x-7)(x-5)$$

$$۴) b^2 + b^2 - 2 = (b^2 + 2)(b^2 - 1) = (b^2 + 2)(b+1)(b-1)$$

$$۵) a^2 - 13a^2 + 36 = (a^2 - 4)(a^2 - 9) = (a+2)(a-2)(a+3)(a-3)$$

$$۶) 2x^2 + 14x + 20 = 2(x^2 + 7x + 10) = 2(x+2)(x+5)$$

$$۷) 2x^2 + 5x + 2 \quad ; \quad A = 2x^2 + 5x + 2 \Rightarrow 2A = 4x^2 + 10x + 4$$

$$2A = (2x+4)(2x+1) \Rightarrow A = (x+2)(2x+1)$$

$$۸) 3x^2 + 4x + 1 \quad ; \quad A = 3x^2 + 4x + 1 \Rightarrow 3A = 9x^2 + 12x + 3$$

$$3A = (3x+3)(3x+1) \Rightarrow A = (x+1)(3x+1)$$

$$۹) (a+b)^2 + 5a + 5b + 6 = (a+b)^2 + 5(a+b) + 6 = (a+b+2)(a+b+3)$$

$$۱۰) (x^2 + \lambda x)^2 + 2\gamma(x^2 + \lambda x) + 1\lambda = (x^2 + \lambda x + 12)(x^2 + \lambda x + 15)$$

$$= (x+2)(x+6)(x+3)(x+5)$$

تمرین: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$۱) x^2 + 11x + 24$$

$$۲) x^2 - 8x + 15$$

$$۳) x^2 + 5x^2 + 6$$

$$۴) 2x^2 + 27x + 42$$

$$۵) (x+y)^2 + 3x + 3y + 2$$

$$۶) 4x^2 + 12x + 5$$

$$۷) 9x^2 + 3x - 2$$

$$۸) 2x^2 + 7x + 3$$

$$۹) 6x^2 + x - 1$$

$$۱۰) (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24$$

۲.۷- از دو رابطه زیر در بسیاری از عبارات می توان برای تجزیه استفاده کرد:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab(a+b)$$

و همچنین در صورتی که دو جمله از اتحاد اول را داشته باشیم، جمله سوم را اضافه و کم می کنیم، یعنی اگر عبارت  $a^2 + 2ab + b^2$  را داشته باشیم،  $b^2$  را اضافه و کم می کنیم که به صورت  $(a+b)^2 - b^2$  درآید و بعد می توانیم از اتحاد مزدوج استفاده نماییم. (این روش به روش مربع کامل مشهور است).

**مثالها:**

$$۱) x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)$$

$$۲) a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

$$۳) x^2 + 2x - 35 = (x+1)^2 - 1 - 35 = (x+1)^2 - 36$$

$$= (x+1+6)(x+1-6) = (x+7)(x-5)$$

$$۴) x^2 + 2x - 1 = (x+1)^2 - 1 - 1 = (x+1)^2 - 2 = (x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$$

$$\begin{aligned} \Delta) \quad f_x^r + f_x - 1 &= (rx+1)^r - 1 - 1 = (rx+1)^r - 2 \\ &= (rx+1+\sqrt{r})(rx+1-\sqrt{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ع) } x^r + \Delta x + r &= (x + \frac{\Delta}{r})^r - r\frac{\Delta}{r} + r = (x + \frac{\Delta}{r})^r - 1r\frac{\Delta}{r} \\ &= (x + \frac{\Delta}{r} + \sqrt{1r}\frac{\Delta}{r})(x + \frac{\Delta}{r} - \sqrt{1r}\frac{\Delta}{r}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ف) } a^r + a^r + 1 &= (a^r + 1)^r - 2a^r + a^r = (a^r + 1)^r - a^r \\ &= (a^r + 1 + a)(a^r + 1 - a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{گ) } a^r + a^r b^r + b^r &= (a^r + b^r)^r - a^r b^r = (a^r + b^r + a^r b^r)(a^r + b^r - a^r b^r) \\ &= [(a^r + b^r)^r - a^r b^r][(a^r + b^r)^r - 2a^r b^r] \\ &= (a^r + b^r + ab)(a^r + b^r - ab)(a^r + b^r + \sqrt{r}ab)(a^r + b^r - \sqrt{r}ab) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{د) } x^r + y^r + rxy - 1 &= (x+y)^r - rx^r y - rxy^r + rxy - 1 \\ &= [(x+y) - 1][(x+y)^r + (x+y) + 1] - rxy(x+y-1) \\ &= (x+y-1)(x^r + y^r + x+y+1 - xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ه) } x^r + y^r + z^r - rxyz &= (x+y)^r - rx^r y - rxy^r + z^r - rxyz \\ &= (x+y+z)[(x+y)^r + z^r - z(x+y)] - rxy(x+y+z) \\ &= (x+y+z)(x^r + y^r + z^r - xy - zx - zy) \end{aligned}$$

تمرین: عبارات زیر را تجزیه کنید.

۱)  $y^f + x^f$

۲)  $y^f + 16a^f$

$$۳) x^2 + 2x - 8$$

$$۴) x^2 + 2x - 3$$

$$۵) 4x^2 + 4x - 5$$

$$۶) 4x^2 + 2x - 2$$

$$۷) 9x^2 - 6x - 1$$

$$۸) 16y^2 + 1$$

$$۹) x^2 + x - 5$$

$$۱۰) x^2 - x - 1$$

### ۲.۸- تبدیل یک جمله به چند جمله

در این روش یک جمله را به چند جمله تبدیل کرده، از روش دسته‌بندی برای تجزیه استفاده می‌کنیم.

**مثالها:**

$$۱) 2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + 2x + x + 1 = 2x(x+1) + x + 1 = (x+1)(2x+1)$$

$$۲) 3x^2 - 4x + 1 = 3x^2 - 3x - x + 1 = 3x(x-1) - (x-1) = (x-1)(3x-1)$$

$$۳) 2x^2 - x - 10 = 2x^2 + 4x - 5x - 10 = 2x(x+2) - 5(x+2) \\ = (x+2)(2x-5)$$

$$۴) 6x^2 + x - 1 = 6x^2 - 2x + 3x - 1 = 2x(3x-1) + 3x-1 \\ = (3x-1)(2x+1)$$

$$\delta) 4x^2 - 14x - 60 = 2(2x^2 - 7x - 30) = 2(2x^2 - 12x + 5x - 30)$$

$$= 2[2x(x-6) + 5(x-6)] = 2(x-6)(2x+5)$$

$$e) 2x^2 - 11x - 21 = 2x^2 + 3x - 14x - 21 = x(2x+3) - 7(2x+3)$$

$$= (2x+3)(x-7)$$

$$v) 2x^2 - x^2 - 1 = 2x^2 + x^2 - 2x^2 - 1 = x^2(2x^2 + 1) - (2x^2 + 1)$$

$$= (2x^2 + 1)(x^2 - 1) = (2x^2 + 1)(x+1)(x-1)$$

$$a) 3x^2 + 5x + 2 = 3x^2 + 3x + 2x + 2 = 3x(x+1) + 2(x+1)$$

$$= (x+1)(3x+2)$$

$$9) x^2 + 2x + 3 = x^2 - x + 3x + 3 = x(x^2 - 1) + 3(x+1)$$

$$= x(x+1)(x-1) + 3(x+1) = (x+1)(x^2 - x + 3)$$

$$10) x^2 + 4x - 5 = x^2 - x + 5x - 5 = x(x^2 - 1) + 5(x-1)$$

$$= x(x+1)(x-1) + 5(x-1) = (x-1)(x^2 + x + 5)$$

تمرین: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$1) 2x^2 + 3x - 2$$

$$2) 3x^2 - 8x - 3$$

$$3) 2x^2 + 13x + 15$$

$$4) 3x^2 - 10x + 3$$

$$5) 2x^2 - 5x + 2$$

$$۶) ۶x^2 + 19x + 15$$

$$۷) 10x^2 - 3x - 4$$

$$۸) ۶x^2 + 13x - 28$$

$$۹) 2x^4 + 6x^3 + 8x$$

$$۱۰) x^3 + 6x - 7$$

## ۲.۹- روش تقسیم

برای تجزیه عبارتهایی که به صورت  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  هستند، می‌توان بدین صورت عمل کرد که اگر این عبارت بخواهد فاکتور  $(x - \alpha)$  داشته باشد. ( $\alpha$  یک عدد صحیح است) حتماً یکی از مقسوم علیه‌های  $a_0$  خواهد بود، در نتیجه، کفایت که مقسوم علیه‌های  $a_0$  (مثبت و منفی) را به دست آورده، در عبارت قرار دهیم؛ هر کدام عبارت را صفر کرد، عبارت  $x$  منهای آن، یکی از عاملهای عبارت اصلی می‌باشد.

**مثالها:**

$$۱) x^3 + 5x^2 + 3x - 9$$

اگر در این عبارت عدد ۱ را قرار دهیم، حاصل عبارت صفر خواهد شد، پس فاکتور  $(x - 1)$  را خواهد داشت. با تقسیم عبارت فوق بر  $(x - 1)$ ، عبارت  $(x^2 + 6x + 9)$  را خواهیم داشت. در نتیجه:

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = (x - 1)(x^2 + 6x + 9) = (x - 1)(x + 3)^2$$

$$۲) x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12$$

اگر در عبارت فوق عدد ۲ قرار دهیم، حاصل عبارت صفر خواهد شد، پس این عبارت عامل  $(x-2)$  را خواهد داشت. با تقسیم  $(x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12)$  بر  $(x-2)$  خواهیم داشت:

$$x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 28x + 12 = (x-2)(x^2 - 2x^2 - 17x - 6)$$

اگر در پیرانتز دوم عدد  $(-3)$  را قرار دهیم صفر خواهد شد، پس پیرانتز دوم فاکتور  $(x+3)$  را خواهد داشت. با تقسیم  $(x^2 - 2x^2 - 17x - 6)$  بر  $(x+3)$  خواهیم داشت:

$$(x-2)(x^2 - 2x^2 - 17x - 6) = (x-2)(x+3)(x^2 - 5x - 2)$$

$$۳) \quad x^2 - x^2 - x - 2 = (x-2)(x^2 + x + 1)$$

$$۴) \quad x^2 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)$$

$$۵) \quad x^2 + 7x^2 + 11x + 2 = (x+2)(x^2 + 5x + 1)$$

$$۶) \quad x^2 - x^2 + 2x - 8 = (x-2)(x^2 + x + 4)$$

$$۷) \quad x^2 + 6x^2 + 10x + 3 = (x+3)(x^2 + 3x + 1)$$

$$۸) \quad x^2 + 3x^2 - x - 3 = (x+3)(x^2 - 1) = (x+3)(x+1)(x-1)$$

$$۹) \quad x^2 + 4x^2 + x - 6 = (x+2)(x^2 + 2x - 3) = (x+2)(x-1)(x+3)$$

$$۱۰) \quad x^2 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+1)(x^2 + 5x + 6) = (x+1)(x+2)(x+3)$$

تمرین: عبارات زیر را تجزیه کنید:

$$۱) \quad x^2 + 2x^2 + 5x + 4$$

$$۲) \quad x^2 - 3x^2 + 10x - 16$$

$$۳) \quad x^2 + 2x^2 - x + 6$$

$$۴) \quad x^2 + 8x^2 + 13x + 2$$

$$۵) x^2 - 4x^2 - 4x - 5$$

$$۶) x^2 - x^2 - 41x + 6$$

$$۷) x^2 + 3x^2 + 2x + 24$$

$$۸) x^2 - 7x - 6$$

$$۹) x^2 - 7x + 6$$

$$۱۰) x^2 - x^2 - 10x - 8$$

۲.۱۰ - تجزیه عبارتهای  $a^n - b^n$  و  $a^n + b^n$  ( $n$  عدد طبیعی است).

الف) اگر  $n$  عدد فرد باشد، تجزیه عبارتها به صورت زیر خواهد بود:

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

ب) اگر  $n$  عدد زوج باشد فقط یک حالت آن قابل تجزیه است.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

باید توجه داشته باشیم که پرانتزهای دوم، هر کدام شامل  $n$  جمله است:

**مثالها:**

$$۱) a^2 + b^2 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$۲) a^2 - b^2 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$۳) a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$



$$۴) a^{\Delta} - b^{\Delta} = (a-b)(a^{\Gamma} + a^{\Gamma}b + a^{\Gamma}b^{\Gamma} + ab^{\Gamma} + b^{\Gamma})$$

$$۵) a^{\Upsilon} + b^{\Upsilon} = (a+b)(a^{\epsilon} - a^{\Delta}b + a^{\Gamma}b^{\Gamma} - a^{\Gamma}b^{\Gamma} + a^{\Gamma}b^{\Gamma} - ab^{\Delta} + b^{\epsilon})$$

$$۶) a^{\Upsilon} - b^{\Upsilon} = (a-b)(a^{\epsilon} + a^{\Delta}b + a^{\Gamma}b^{\Gamma} + a^{\Gamma}b^{\Gamma} + a^{\Gamma}b^{\epsilon} + ab^{\Delta} + b^{\epsilon})$$

$$۷) \lambda x^{\Gamma} - 1 = (\Upsilon x - 1)(\epsilon x^{\Gamma} + \Upsilon x + 1)$$

$$۸) \lambda x^{\Gamma} + 1 = (\Upsilon x + 1)(\epsilon x^{\Gamma} - \Upsilon x + 1)$$

$$۹) ۳۲x^{\Delta} + ۲۴۳ = (\Upsilon x + ۳)(16x^{\Gamma} - ۲۴x^{\Gamma} + ۳6x^{\Gamma} - ۵۴x + ۸1)$$

$$۱۰) a^{\Gamma} - b^{\Gamma} = (a-b)(a^{\Gamma} + a^{\Gamma}b + ab^{\Gamma} + b^{\Gamma})$$

$$= (a-b)[(a+b)(a^{\Gamma} - ab + b^{\Gamma}) + ab(a+b)] = (a-b)(a+b)(a^{\Gamma} + b^{\Gamma})$$

تذکر: در مثال ۱۰ با دو بار استفاده از اتحاد مزدوج، عبارت براحتی تجزیه می‌شود.

تمرین: عبارات زیر را تجزیه کنید:

$$۱) x^{\Upsilon} + y^{\Upsilon}$$

$$۲) x^{\Upsilon} - y^{\Upsilon}$$

$$۳) ۳۲a^{\Delta} + 1$$

$$۴) ۳۲a^{\Delta} - 1$$

$$۵) x^{\Delta}y^{\Delta} - ۲۴۳$$

$$۶) x^{\Delta}y^{10} + ۲۴۳$$

$$۷) ۱۲۸y^{\Upsilon} - 1$$

$$۸) ۱۲۸y^{\Upsilon} + 1$$

$$۹) a^{\Gamma} - b^{\Gamma}$$

$$۱۰) a^{\Delta} - b^{\Delta}$$

## تمرینهای تکمیلی

حال که با انواع روشهای تجزیه آشنا شدیم، چندین مثال متنوع را با حل و بدون حل ارائه می‌کنیم. قبل از حل تمرینها، تذکر این نکته ضروری است که برای تجزیه عبارتهای جبری روشهای زیادی وجود دارد که بعضی از آنها در این کتاب گفته نشده است. لذا حل یک مسأله به تسلط شما به تمام روشها و حل تمرین زیاد وابسته است و همیشه نمی‌توان روشی را ارائه کرد که به محض دیدن مسأله راه حل قطعی برای آن ارائه کرد. به همین دلیل، تمرینهای این قسمت مطابق ترتیب موجود در کتاب طرح نشده است تا دانش آموز بتواند خود تشخیص دهد که کدام روش را باید به کار ببرد.

$$۱) x^2(m+n) + 2y^2(m+n) = (m+n)(x^2 + 2y^2)$$

$$۲) 2a^2(a+b)^m + 4a^2(a+b)^{m+1} - 6a(a+b)^{m+2}$$

$$= 2a(a+b)^m [a^2 + 2a(a+b) - 3(a+b)^2]$$

$$= 2a(a+b)^m (a^2 + 2a^2 + 2ab - 3a^2 - 6ab - 3b^2)$$

$$= 2a(a+b)^m (-4ab - 3b^2) = -2ab(a+b)^m (4a + 3b)$$

$$۳) a^2x^2 - ab^2x^2 = ax^2(a^2 - b^2) = ax^2(a+b)(a-b)$$

$$۴) a^2x^4 - ab^4 = a(a^2x^4 - b^4) = a(ax+b)(ax-b)(a^2x^2 + b^2)$$

$$۵) (x+1)^2 + y^2 = (x+1+y)[(x+1)^2 - y(x+1) + y^2]$$

$$۶) 250 - 16x^2 = 2(125 - 8x^2) = 2(5-2x)(25 + 10x + 4x^2)$$

$$۷) (a+b)x^2 - (a+b)y^2 = (a+b)(x^2 - y^2) = (a+b)(x+y)(x-y)$$

$$۸) (a+b)^2 + 8(a+b) + 15 = (a+b+3)(a+b+5)$$

$$9) (x^r - 2xy + y^r) - r(x-y) + r = (x-y)^r - r(x-y) + r \\ = (x-y-r)(x-y-1)$$

$$10) (x^r + \gamma x)^r + r\gamma(x^r + \gamma x) + 1\gamma^0 = (x^r + \gamma x + 1^0)(x^r + \gamma x + 1\gamma) \\ = (x+r)(x+\Delta)(x+r)(x+f)$$

$$11) x^{r_{m+1}}y + xy^{r_{m+1}} = xy(x^{r_m} + y^{r_m}) = xy(x^m + y^m)(x^{r_m} - x^m y^m + y^{r_m})$$

$$12) a^r - 2a - 2b + b^r + 2ab - c^r + 1 = (a+b-1)^r - c^r \\ = (a+b-1+c)(a+b-1-c)$$

$$13) ax + bd + ab + dx = a(x+b) + d(b+x) = (x+b)(a+d)$$

$$14) a^r - y^r - 2xy - x^r = a^r - (y^r + 2xy + x^r) = a^r - (y+x)^r \\ = (a+y+x)(a-y-x)$$

$$15) \frac{1}{r} x^r + r x^r + f x + f = \frac{1}{r} (x^r + f x^r + 1 r x + \lambda) = \frac{1}{r} (x+r)^r$$

$$16) c^r + d - d^r - c = (c-d)(c+d) - (c-d) = (c-d)(c+d-1)$$

$$17) \lambda y^r - \lambda y^r + y - 1 = \lambda y^r (y-1) + (y-1) = (y-1)(\lambda y^r + 1) \\ = (y-1)(r y + 1)(f y^r - r y + 1)$$

$$18) x^r - 1^0 f x^r + f^0 = (x^r - f)(x^r - 1^0) \\ = (x+r)(x-r)(x+1^0)(x-1^0)$$

$$19) \sqrt{r} x^r - \frac{r f}{\sqrt{r}} = \sqrt{r} (x^r - \lambda) = \sqrt{r} (x-r)(x^r + r x + f)$$

$$20) bc(b-c) + ac(c-a) + ab(a-b)$$

$$\begin{aligned}
&=bc(b-c)+ac^r-a^r c+a^r b-ab^r \\
&=bc(b-c)-a(b^r-c^r)+a^r(b-c) \\
&=bc(b-c)-a(b-c)(b+c)+a^r(b-c) \\
&=(b-c)(bc-ab-ac+a^r)=(b-c)[c(b-a)-a(b-a)] \\
&=(b-c)(b-a)(c-a)
\end{aligned}$$

$$21) m^r - \gamma m^r - \lambda = (m^r + 1)(m^r - \lambda)$$

$$= (m+1)(m^r - m+1)(m-\gamma)(m^r + \gamma m + \epsilon)$$

$$22) a^r - c^r - \gamma(ad - bc) - b^r + d^r = a^r - c^r - \gamma ad + \gamma bc - b^r + d^r$$

$$= (a-d)^r - (c-b)^r = (a-d+c-b)(a-d-c+b)$$

$$23) \epsilon(ad+bc)^r - (a^r - b^r - c^r + d^r)^r$$

$$= [\gamma(ad+bc) + (a^r - b^r - c^r + d^r)] [\gamma(ad+bc) - (a^r - b^r - c^r + d^r)]$$

$$= [(a+d)^r - (b-c)^r] [(b+c)^r - (a-d)^r]$$

$$= (a+d+b-c)(a+d-b+c)(b+c+a-d)(b+c-a+d)$$

$$24) (x+1)(x+\gamma)(x+\Delta)(x+\Upsilon) + 1\Delta$$

$$= (x^r + \lambda x + \Upsilon)(x^r + \lambda x + 1\Delta) + 1\Delta$$

$$= (x^r + \lambda x)^r + \gamma \gamma (x^r + \lambda x) + 1 \circ \Delta + 1\Delta$$

$$= (x^r + \lambda x)^r + \gamma \gamma (x^r + \lambda x) + 1 \gamma \circ = (x^r + \lambda x + 1 \gamma)(x^r + \lambda x + 1 \circ)$$

$$= (x+\gamma)(x+\epsilon)(x^r + \lambda x + 1 \circ) = (x+\gamma)(x+\epsilon)(x+\epsilon + \sqrt{\epsilon})(x+\epsilon - \sqrt{\epsilon})$$

$$25) x^2 + 6x^2 + 12x^2 + 11x + 6 = (x+2)(x^2 + 4x^2 + 4x + 3) \\ = (x+2)(x+3)(x^2 + x + 1)$$

$$26) x^2 + 3x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x^2 + x + 3)$$

$$27) x^2 - 7xy + 12y^2 = (x-3y)(x-4y)$$

$$28) 2x^2 + 5x + 2 = 2x^2 + 4x + x + 2 = 2x(x+2) + (x+2) = (x+2)(2x+1)$$

$$29) 3x^2 + 7x + 2 = 3x^2 + 6x + x + 2 = 3x(x+2) + (x+2) \\ = (x+2)(3x+1)$$

$$30) (x^2 - 3x)^2 - 14(x^2 - 3x) + 40 = (x^2 - 3x - 4)(x^2 - 3x - 10) \\ = (x+1)(x-4)(x+2)(x-5)$$

## تمرینهای فصل دوم:

عبارات زیر را تجزیه کنید:

$$1) 4(x-2y)^2 + 7y(x-2y) - 3x(x-2y)$$

$$2) 289a^2x^2 - 81x^2$$

$$3) (x+y)^2 - (x+y)$$

$$4) (a+b)(c+d)^2 - (a+b)^2$$

$$5) 16x^2 - \frac{2}{x}$$

$$6) a^2x^2 + 3a^2x - 4a^2$$

$$7) a^{m+2} - 3a^{m+1} - 10a^m$$

$$8) z^r - rz^r a^r b^r + \lambda a^r b^r$$

$$9) a^r - b^r + 2a^r b - 2ab^r$$

$$10) fx^r + 6x^r + 3x + \frac{1}{r}$$

$$11) ab - \Delta + \Delta b - 3a$$

$$12) (b-c)^r + (c-a)^r + (a-b)^r$$

$$13) a^r(b-c) + b^r(c-a) + c^r(a-b)$$

$$14) \frac{r}{\sqrt{r}} x^r - \sqrt{r}$$

$$15) x^r - ax^r - 3x^r - 2a + 2x + 3ax$$

$$16) (x^r + 3x)^r - 2(x^r + 3x) - \lambda$$

$$17) x^r + 3x^r + \Delta x + 6$$

$$18) a^r(b-c) + b^r(c-a) + c^r(a-b)$$

$$19) (x-y)(x^r - z^r) - (x-z)(x^r - y^r)$$

$$20) 16x^r + fx^r + 1$$

$$21) a^r + 1$$

$$22) (x^r + 10x)^r + 37(x^r + 10x) + 336$$

$$23) (x^r + 3x)^r - 26(x^r + 3x) - 56$$

$$24) x^r - x^r + x^r - x$$

$$25) (z^r - 2z)^r - 14(z^r - 2z + 1) - 1$$

$$26) (2x^r - 2x)^r - (32x^r - 32x) + 48$$

$$۲۷) (x+۱)^r(x^r+2x-12)+36$$

$$۲۸) m^r-x^r+2xp-p^r$$

$$۲۹) a^r-c^r-2ad+2bc-b^r+d^r$$

$$۳۰) [(y+3)y-30](y+1)(y+2)+240$$

$$۳۱) x^r-4x-y^r+4$$

$$۳۲) (x+3)^r+(x+5)^r-8$$

$$۳۳) (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-8$$

$$۳۴) a^r-25a^r+144$$

$$۳۵) x^r+5x^r+3x-9$$

$$۳۶) (x^r-2x-8)+(x+2)^r+2(3x^r-12)$$

$$۳۷) (2x^r-2x-4)^r-(x^r-2x+5)^r$$

$$۳۸) x^r-7x-6$$

$$۳۹) x^r-5x^r+4$$

$$۴۰) x^r+12x^r+47x+60$$

۴۱- تساویهای زیر را ثابت کنید:

الف)  $a^r+b^r+c^r-3abc=(a+b+c)(a^r+b^r+c^r-ab-ac-bc)$

ب)  $(a+b+c)^r-a^r-b^r-c^r=3(a+b)(a+c)(b+c)$

۴۲- اگر  $ax^n=by^n=cz^n=x^n+y^n+z^n$  باشد، ثابت کنید:

$$ab+bc+ac=abc$$

## تستهای اتحادها و تجزیه

۱- حاصل عبارت  $\frac{x^3+y^3+z^3-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2}$  کدام است؟

- (الف)  $-\frac{1}{2}(x+y+z)$  (ب)  $-(x+y+z)$   
 (ج)  $\frac{1}{2}(x+y+z)$  (د)  $x+y+z$

۲- اگر  $a$  و  $b$  متحدالعلامه و غیر صفر باشند، حاصل عبارت  $-(a+b)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) - 4$  همواره:

- (الف) مثبت است (ب) منفی است  
 (ج) کوچکتر یا مساوی صفر است (د) بزرگتر یا مساوی صفر است

۳- حاصل عبارت  $(x^8+1)(x^4+1)(x^2+1)(x+1)$  برابر است با:

- (الف)  $x^{16}-1$  (ب)  $\frac{x^{16}-1}{x-1}$  (ج)  $x^{15}-1$  (د)  $\frac{x^{15}-1}{x-1}$

۴- حاصل عبارت  $\frac{a^2-b^2-c^2-2bc}{a^2+b^2-c^2+2ab} \div \frac{-a+b+c}{a+b-c}$  کدام است؟

- (الف)  $-1$  (ب)  $a-b-c$  (ج)  $1$  (د)  $a+b+c$

۵- اگر  $a+b+c=0$  و  $a^2+b^2+c^2=3$  باشد مقدار  $a^4+b^4+c^4$  برابر است با:

- (الف) صفر (ب)  $3$  (ج)  $2$  (د)  $\frac{9}{2}$

۶- اگر  $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$  باشد حاصل عبارت  $\frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b}$

کدام است؟

- (الف) صفر (ب)  $\frac{(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2}{(a+b)(a+c)(a+c)}$



ج) ۳

د) ۱

۷- حاصلضرب دو عدد فرد متوالی ۳۲۳ است، مجموع این دو عدد کدام است؟

الف) ۳۲      ب) ۳۴      ج) ۳۵      د) ۳۶

۸- اگر  $A+B=3$  باشد، مقدار عددی عبارت  $A^2+B^2+9AB$  کدام است؟

الف) ۲۷      ب) ۹      ج) ۱۸      د) ۱۵

۹- اگر  $x + \sqrt[3]{x} = 1$  باشد، حاصل عبارت  $\frac{x+x^2-1}{3\sqrt[3]{x}}$  کدام است؟

الف)  $x$       ب)  $-x$       ج)  $\frac{x}{3}$       د)  $\frac{-x}{3}$

۱۰- کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف)  $a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} = x^2$

ب)  $a^5 + b^5 = (a-b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$

ج)  $a^6 - b^6 = (a-b)(a^5 - a^4b + a^3b^2 - ab^4 + b^5)$

د)  $a^2 + b^2 = (a-b)(a+b)$

۱۱- عبارت  $x^6 + 4x^2 + 5$  را به حاصلضرب دو عبارت تجزیه کرده‌ایم. اگر یکی از

عبارت‌ها  $(x^2 + 1)$  باشد، عبارت دیگر کدام است؟

الف)  $x^4 + x^2 + 5$       ب)  $x^4 - x^2 + 5$

ج)  $x^4 - 2x^2 + 5$       د)  $x^4 + 2x^2 + 5$

۱۲- اگر  $x = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}$  باشد، مقدار  $x^3 - 3x$  برابر است با:

الف) ۱      ب)  $\sqrt{2}$       ج) ۲      د)  $2\sqrt{2}$

۱۳- از رابطه  $(a-2b)^2 + (b-2c)^2 = 0$  مقدار  $\frac{(b+c-a)^2}{abc}$  کدام است؟

- (الف) ۸-      (ب) ۸      (ج)  $\frac{-1}{8}$       (د)  $\frac{1}{8}$

۱۴- در تجزیه عبارت  $a^2(1-x) + (b^2+c^2-2bc)(x-1)$  کدام عامل وجود ندارد؟

- (الف)  $a+b-c$       (ب)  $a-b+c$       (ج)  $b+c-a$       (د)  $x-1$

۱۵- اگر  $\frac{a+1}{\sqrt{a}} = \frac{y}{2}$  باشد حاصل  $\frac{a}{a^2+1}$  کدام است؟

- (الف)  $\frac{2}{31}$       (ب)  $\frac{31}{2}$       (ج)  $\frac{4}{41}$       (د)  $\frac{41}{4}$

۱۶- با فرض  $\frac{xz+1}{xz-1} = \frac{y+1}{1-y}$  حاصل عبارت  $\frac{1+z}{xy+1}$  کدام است؟

- (الف)  $z$       (ب)  $xy$       (ج)  $-z(xy)^{-1}$       (د)  $1 + \frac{1}{z}$

۱۷- اگر  $\frac{2b}{a} + \frac{a}{b} = 2\sqrt{2}$  باشد حاصل  $\frac{a+b}{a-b}$  برابر است با:

- (الف)  $3-2\sqrt{2}$       (ب)  $3+2\sqrt{2}$       (ج)  $3-\sqrt{2}$       (د)  $3+\sqrt{2}$

۱۸- عبارت  $x^8+x^4+1$  بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

- (الف)  $x^2+x+1$       (ب)  $x^2+x-1$       (ج)  $x^4+x^2-1$       (د)  $x^4-x^2-1$

۱۹- اگر  $a > 1$  و  $a > 0$  و  $b > 0$  باشد، آن گاه همواره عبارت  $a^2+b^2$ :

- (الف) بزرگتر از ۲      (ب) بزرگتر از  $\frac{1}{2}$       (ج) بزرگتر از ۱      (د) بزرگتر از  $\frac{1}{4}$

۲۰- اگر  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$  باشد، حاصل  $(x+y+z)^3$  کدام است؟

- (الف)  $3xyz$       (ب)  $-3xyz$       (ج)  $-27xyz$       (د)  $27xyz$

۲۱. عبارت  $(x^5-1)^2 + (x+1)^2$  بر کدام عبارت زیر همواره بخش پذیر است؟

(الف)  $x^3-1$  (ب)  $x^2+1$  (ج)  $x^2-1$  (د)  $x^4+1$

۲۲. با فرض  $a > 0$  و  $\sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} = a - \frac{1}{a}$  مقدار عبارت  $a + \frac{1}{a}$  کدام است؟

(الف)  $\sqrt{3}$  (ب)  $3$  (ج)  $-2$  (د)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۳. اگر  $a+b-c=1$  باشد کدامیک از گزینه‌های زیر درست است؟

(الف)  $a^2+b^2+c^2=2(\frac{1}{4}+ab+c)$  (ب)  $c^2+b^2-a^2=2(\frac{1}{4}+ab-c)$

(ج)  $a^2+b^2-c^2=2(\frac{1}{4}-ab+c)$  (د)  $a^2-b^2+c^2=2(\frac{1}{4}-ab-c)$

۲۴. از تناسب  $\frac{x-y}{x+y} = \frac{2}{3}$  نسبت  $\frac{x}{y}$  برابر است با:

(الف)  $\frac{1}{5}$  (ب)  $5$  (ج)  $-5$  (د)  $\frac{2}{3}$

۲۵. اگر  $a = x + \frac{1}{x}$  باشد  $x^3 + \frac{1}{x^3}$  برابر است با:

(الف)  $a^3$  (ب)  $a^3+3a$  (ج)  $3a$  (د)  $a^3-3a$

۲۶. اگر  $A = xy + yz + zx$  و  $x+y+z=0$  باشد همواره:

(الف)  $A \leq 0$  (ب)  $A \geq 0$  (ج)  $A < 0$  (د)  $A > 0$

۲۷. اگر  $x = \sqrt{3}-1$  و  $y = \sqrt{2}-1$  باشد حاصل عبارت  $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2+xy}$  کدام است؟

(الف)  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  (ب)  $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$  (ج)  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  (د)  $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$

۲۸. اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  غیر مساوی باشند در این صورت همواره:

الف)  $a^x + b^x + c^x \geq ab + ac + bc$  (ب)  $a^x + b^x + c^x \leq ab + ac + bc$

ج)  $a^x + b^x + c^x > ab + ac + bc$  (د)  $a^x + b^x + c^x < ab + ac + bc$

۲۹- حاصل عبارت  $(\frac{(a-b)^2}{ab} + 4) (\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2})$  برابر است با:

الف)  $2ab$  (ب)  $4$  (ج)  $a-b$  (د)  $-2$

۳۰- حاصل عبارت  $\frac{x^2 + y^2 + 2xy - 1}{x + y + 1}$  کدام است؟

الف)  $x + y + 1$  (ب)  $x + y - 1$  (ج)  $x - y - 1$  (د)  $x - y + 1$

۳۱- حاصل عبارت  $(\frac{a^2 + b^2}{a + b} - \frac{a^2 - b^2}{a - b}) \frac{a^2 - b^2}{2ab}$  کدام است؟

الف)  $a^2 - b^2$  (ب)  $b^2 - a^2$  (ج)  $\frac{a^2 - b^2}{2}$  (د)  $\frac{b^2 - a^2}{2}$

۳۲- اگر  $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = 1$  باشد، مقدار  $\frac{a^2 + a - 1}{a}$  برابر است با:

الف)  $1$  (ب)  $3$  (ج)  $-3$  (د)  $-1$

۳۳- بزرگترین عامل مشترک  $a^2 + 7ab + 12b^2$  و  $a^2 - 2ab - 15b^2$  کدام است؟

الف)  $a - 2b$  (ب)  $a + 3b$  (ج)  $a + 4b$  (د)  $a + 6b$

۳۴- اگر  $A = x^{\frac{t+1}{t}}$  و  $B = x^{t-1}$  (  $t \neq 0$  و  $t \neq -1$  ) کدام رابطه بین A و B برقرار است؟

الف)  $A^{t+1} = B^t$  (ب)  $A^{\frac{t}{t+1}} = B^{t+1}$

ج)  $A^t = B^{t+1}$  (د)  $A^{t+1} = B^{\frac{1}{t+1}}$

۳۵- بزرگترین مقسوم علیه مشترک  $(xyz - yz^2)^2$  و  $(x^2z - xz^2)^2$  کدام است؟

الف)  $(x-z)^2$  (ب)  $y(x-z)^2$  (ج)  $y^2(x-z)^2$  (د)  $z^2(x-z)^2$

۳۶- حاصل عبارت  $\frac{5}{1+x^4} + \frac{5}{1+x^{-4}}$  برابر است با:

- (الف) ۵ (ب) ۱ (ج)  $5x^4$  (د)  $5x^{-4}$

۳۷- اگر  $a^2 + b^2 + c^2 = 2(a+b+c) - 3$  باشد، آن‌گاه مقدار  $c$  کدام است؟

- (الف) صفر (ب) ۱ (ج) ۲ (د) ۴

۳۸- اگر  $5 = x^{\frac{n}{2}} + \frac{6}{x^{\frac{n}{2}}}$  باشد، مقدار  $x^n + \frac{36}{x^n}$  برابر است با:

- (الف) ۲۵ (ب) -۲۵ (ج) ۱۳ (د) -۱۳

۳۹- اگر  $ab = \frac{7}{\sqrt{2}}$  و  $a+b = \frac{5}{6}$  باشد، مقدار  $a^2 + b^2$  کدام است؟

- (الف)  $\frac{1}{4}$  (ب)  $-\frac{1}{4}$  (ج)  $\frac{1}{2}$  (د)  $-\frac{1}{2}$

۴۰- حاصل عبارت  $(1 - \frac{2ab}{(a+b)^2})(1 + \frac{2ab}{a^2+b^2})$  کدام است؟

- (الف) ۱ (ب) -۱ (ج)  $\frac{(a+b)^2}{(a^2+b^2)(a+b)}$  (د)  $\frac{(a-b)^2}{(a^2+b^2)(a+b)^2}$

۴۱- حاصل عبارت  $\frac{1-2x^2}{x} + x^2$  کدام است؟  
 $\frac{1+2x}{x} + x$

- (الف)  $(x-1)^2$  (ب)  $x^2-1$  (ج)  $x^2+1$  (د)  $(x+1)^2$

۴۲- عبارت  $b^4 + 1$  بر کدامیک از عبارتهای زیر همواره بخش پذیر است؟

- (الف)  $b^2 + 1$  (ب)  $b^2 - 1$  (ج)  $b^2 + b\sqrt{2} + 1$  (د)  $b + 1$

۴۳- با فرض  $4a = 5b$  حاصل  $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$  کدام است؟

- (الف)  $\frac{41}{9}$  (ب)  $-\frac{41}{9}$  (ج)  $\frac{-9}{41}$  (د)  $\frac{9}{41}$

۴۴. حاصل عبارت  $\frac{x^2+y^2-2xy}{x^2+y^2+2xy} \cdot \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} \cdot \frac{y}{x}$  کدام است؟

(الف)  $\frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-1}$  (ب)  $1-\frac{y}{x}$   
 (ج)  $\frac{x-y}{x+y}$  (د)  $\frac{x+y}{x-y}$

۴۵. عبارت  $2b^2+ab(b-a)-ab(a+b)$  با کدامیک از عبارتهای زیر مساوی است؟

(الف)  $2b(a-b)(a+b)$  (ب)  $2b(b-a)(a+b)$   
 (ج)  $2a(a-b)(a+b)$  (د)  $2b(a+b)^2$

۴۶. بزرگترین عامل مشترک دو عبارت  $x^2+x^2y^2+y^2$  و  $x^2+y^2$  کدام است؟

(الف)  $x+y$  (ب)  $x^2+xy+y^2$  (ج)  $x^2-xy+y^2$  (د)  $(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)$

۴۷. عبارت  $4x^4+x^3-3x^2-x-1$  بر کدامیک از عبارتهای زیر بخش پذیر است؟

(الف)  $x^2+1$  (ب)  $(x-1)^2$  (ج)  $(x+1)^2$  (د)  $4x^2+x+1$

۴۸. ضریب  $x^2$  در عبارت  $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$  کدام است؟

(الف) ۰ (ب) ۱ (ج) -۲ (د) -۳

۴۹. تجزیه عبارت  $a^4-a^2-a+1$  کدام است؟

(الف)  $(a-1)(a^2-2a^2)$  (ب)  $(a+2)(a^2+1)$   
 (ج)  $(a-1)(a^2+a^2-1)$  (د)  $(a^2-a+1)^2$

۵۰. اگر  $x + \frac{1}{x} = a$  باشد، حاصل  $x^4 + \frac{1}{x^4}$  کدام است؟

(الف)  $a^4$  (ب)  $a^4-2$  (ج)  $(a^2-2)^2$  (د)  $a^4-4a^2+2$

## جواب تمرینهای فصل اول

### جواب تمرینهای ۱.۱

$$۱) \frac{1}{4} a^r b^6 + \frac{1}{4} a^r b^r + \frac{1}{16} a^r b^r$$

$$۲) ۱۶a^r b^r + ۲۴a^r b^r + ۹a^r b^6$$

$$۳) ۲a^r b^r = ۲\sqrt{6} a^r b^r + ۳a^r b^r$$

$$۴) \left(\frac{9}{2} x^r + 3x\right)^2 = \frac{81}{4} x^r + ۲۷x^r + ۹x^r$$

$$۵) ۴x^r y^r - \frac{۲۸}{3} x^r y^5 + \frac{۴۹}{9} x^r y^8$$

$$۶) \frac{۳}{16} a^r b^8 - ۲\sqrt{3} a^r b^{12} + ۱۶a^r b^{16}$$

$$۷) ۴a^{r_m-2} - ۱۶a^{m-1} + ۱۶$$

$$۸) \frac{1}{4} a^{r_m-2} - \frac{1}{3} a^{r_m+4} + \frac{1}{9} a^{r_m+10}$$

$$۹) \frac{1}{4} a^{r_b} - \frac{1}{4} a^b b^a + \frac{1}{16} b^{r_a}$$

$$۱۰) \frac{1}{4} a^{r_m+r_b} b^{r_n} - \frac{1}{4} a^{\frac{\Delta m}{r} + 1} b^{\frac{\Delta n}{r}} + \frac{1}{16} a^m b^{r_n}$$

### جواب تمرینهای صفحه ۱۱ و ۱۲

$$۱) ۴a^r b^r + b^r + b^6 - ۴ab^r + ۴ab^r - ۲b^6$$

$$۲) a^r b^r + ۹a^r b^6 + ۴ + ۶a^r b^r - ۴a^r b - ۱۲ab^r$$

$$۳) \frac{1}{9} a^r + \frac{1}{16} b^r + ۱ - \frac{1}{6} ab^r + \frac{2}{3} a - \frac{1}{2} b^r$$

$$۴) (x^r - 2x + 1 + x^r + 2x + 1)^r = (2x^r + 2)^r = ۴x^r + 8x^r + ۴$$

$$۵) (x - x^r + 1)^r = x^r + x^r + 1 - 2x^r + 2x - 2x^r$$

$$۶) x^f + ۴x^r + 1 + ۴x^f - ۴x^f + 2x^r - ۴x^f - ۴x + 8x^r - ۴x^f \\ = x^f - ۴x^f + 1 + 8x^r - ۴x + 1$$

$$۷) \frac{1}{۴} a^{fm} + \frac{1}{9} a^{fm+1} - \frac{1}{۳} a^{\Delta m} - a^{rm} + \frac{r}{۳} a^{rm}$$

$$۸) ۴a^{rn-r} + a^{rn+r} + 9 - ۴a^{rn} - 12a^{n-1} + ۶a^{rn+1}$$

$$۹) (2a + 1 - 3a^r)^r = ۴a^r + 1 + 9a^r + ۴a - 12a^r - ۶a^r \\ = 9a^r - 12a^r - 2a^r + ۴a + 1$$

$$۱۰) ۴x^r + x^f + 9x^f + 1 + x^{\Delta} - ۴x^r - 12x^f - ۴x + ۴x^f + ۶x^f + 2x^r - 2x^f \\ + ۶x^r - ۶x^f - 2x^f = x^{\Delta} - ۶x^f + 7x^f + 1 + 8x^r + 2x^r + ۶x^f - ۴x + 1$$

## جواب تمرینهای ۱.۲

$$۱) 81a^r b^{10} - \frac{1}{۴} a^f b^r$$

$$۲) ۴x^f y^r - 16x^r y^f$$

$$۳) \frac{۴}{9} b^{1r} c^f - \frac{1}{16} a^{10} b^r$$

$$۴) (-z)^r - (2xy + x)^r = z^r - ۴x^r y^r - ۴x^r y - x^r$$



$$۵) (fx^r y - a)^r - (-y + 1)^r = 16x^f y^r - \lambda x^r y a + a^r - y^r + 2y - 1$$

$$۶) (\Delta x^r + x - 1)(-x + \Delta x^r + 1) = 2\Delta x^f - (x - 1)^r = 2\Delta x^f - x^r + 2x - 1$$

$$۷) (xy - x + y)(xy + x - y) = x^r y^r - x^r + 2xy - y^r$$

$$۸) (2x + 3y + z - t)(t + 3y + z + 2x) = (2x + 3y + z)^r - t^r$$

$$= 4x^r + 9y^r + z^r + 12xy + 4xz + 6yz - t^r$$

$$۹) (9x^r - 1)(9x^r + 1)(\lambda 1x^f + 1) = (\lambda 1x^f - 1)(\lambda 1x^f + 1) = 6561x^{\lambda} - 1$$

$$۱۰) \Delta(x + 2)(x - 2)(x^r + 4) = \Delta(x^r - 4)(x^r + 4)$$

$$= \Delta(x^f - 16) = \Delta x^f - \lambda 0$$

$$۱) \lambda x^r y^f + 12x^r y^{\Delta} + 6xy^f + y^r$$

جواب تمرینهای ۱.۳

$$۲) \lambda a^r b^r + 36a^{\Delta} b^r + \Delta f a^y b + 27a^{\Delta}$$

$$۳) \frac{1}{\lambda} a^r b^f + \frac{1}{r} a^{\Delta} b^{\Delta} + \frac{r}{r} a^y b^f + \frac{\lambda}{r\gamma} a^{\Delta} b^r$$

$$۴) \lambda x^f y^r - 6x^{\Delta} y^{\Delta} + \frac{r}{r} x^{10} y^y - \frac{1}{\lambda} x^{1r} y^{\Delta}$$

$$۵) -\frac{1}{\lambda} x^{\Delta} y^r - \frac{r}{16} x^f y^r a^f b^r - \frac{r}{32} a^{\Delta} b^f x^r y - \frac{1}{64} a^{1r} b^f$$

$$۶) -\lambda a^f b^r - \frac{12}{5} a^y b^r - \frac{6}{25} a^{\Delta} b^r - \frac{1}{125} a^{\Delta} b^r$$

$$۷) \frac{1}{\lambda} a^{fn-r} - \frac{r}{f} a^{fn-r} + \frac{r}{r} a^{rn-1} - 1$$

$$۸) \lambda a^{n-r} + 12a^{\frac{rn}{r}-r} + 6a^{\frac{\Delta n}{r}-r} + a^{rn-r}$$

$$۹) 2\sqrt{r} a^r b^r - 12a^r b^r + 12\sqrt{r} a^r b - \lambda a^r$$

$$۱۰) 3\sqrt{r} x^f y^r - 9\sqrt{r} x^f y^{\Delta} + 6\sqrt{r} x^r y^y - 2\sqrt{r} y^{\Delta}$$

جواب تمرینهای ۱.۴

۱)  $\lambda x^r - 1$

۲)  $-\lambda a^r b^r + y^r$

۳)  $-\frac{1}{\lambda} x^r - 1$

۴)  $\frac{1}{\epsilon \epsilon} a^r b^a + \frac{1}{\lambda} a^r b^r$

۵)  $1 + 12\Delta x^r$

۶)  $(x - 3b)^r - a^r = x^r - 9x^r b + 27x b^2 - 27b^3 - a^r$

۷)  $(2y - 1)^r + 27x^r = \lambda y^r - 12y^r + 6y - 1 + 27x^r$

۸)  $(a+b)^r + c^r = a^r + 3a^r b + 3ab^2 + b^3 + c^r$

۹)  $(x^r - y^r)^r = x^r - 2x^r y^r + y^r$

۱۰)  $(x^r - y^r)^r = x^3 - 3x^r y^r + 3x^r y^r - y^3$

۱)  $x^r + x - 2$

جواب تمرینهای ۱.۵

۲)  $x^r + 7x^r + 6$

۳)  $a^r y^r + 3ay^r - 4$

۴)  $\frac{1}{\epsilon} a^r + \frac{1}{\epsilon} a - 2$

۵)  $1 + 6a + 5a^r$

۶)  $16x^r y^r + 16x^r y^r - 5x^r$

۷)  $(x^r - 4)(x^r + 5) = x^r + x^r - 2$

۸)  $(x^r + y)^r + 4(x^r + y) - 5 = x^r + 2x^r y + y^r + 4x^r + 4y - 5$

۹)  $y^r + (xy + xy^r)y + (xy)(xy^r)$   
 $= y^r + xy^r + xy^r + x^r y^r$

۱۰)  $(x^r - 9)(x^r - 25) = x^r - 34x^r + 225$

$$۱) ۰/۰۹a^{۱/۵} - ۰/۱۲a^۲ + ۰/۰۴a^{۱/۵}$$

$$۲) (x^۲ + ۴xy^۲ + ۴y^۴ + x^۲ - ۴xy^۲ + ۴y^۴)^۲ = (۲x^۲ + ۸y^۴)^۲$$

$$= ۴x^۴ + ۳۲x^۲y^۴ + ۶۴y^۸$$

$$۳) (۴x)^۲ - ۲(۴x)^۲ + (۴x)^۱ = ۶۴x^۲ - ۳۲x^۲ + ۴x$$

$$۴) x^۴ + ۱۶x^۲ + ۴ - ۸x^۲ + ۴x^۲ - ۱۶x = x^۴ - ۸x^۲ + ۲۰x^۲ - ۱۶x + ۴$$

$$۵) \frac{1}{q} a^{rn-r} b^{\frac{rn}{r}-r} - \frac{1}{r} a^{\frac{\Delta n}{r}} b^{\frac{yn}{r}} + \frac{1}{f} a^{n+r} b^{rn+r}$$

$$۶) (۳a+b+d+\Delta c)(b+d+۳a-\Delta c)$$

$$= (۳a+b+d)^۲ - (\Delta c)^۲ = ۹a^۲ + b^۲ + d^۲ + ۶ab + ۶ad + ۲bd - ۲\Delta c^۲$$

$$۷) [(x^۲-۱)^۲ - (x^۲-۴)^۲]^۲ = (x^۴ - ۲x^۲ + ۱ - x^۴ + ۸x^۲ - ۱۶)^۲$$

$$= (۶x^۲ - ۱۵)^۲ = ۳۶x^۴ - ۱۸۰x^۲ + ۲۲۵$$

$$۸) (۲x^۲ + ۲y^۲)(۲x^۲ - ۲y^۲) = ۴x^۴ - ۴y^۴$$

$$۹) (۲x-۵)(۴x^۲+۲۵)۲(۲x+۵) = ۲(۴x^۲-۲۵)(۴x^۲+۲۵)$$

$$= ۲(۱۶x^۴ - ۶۲۵) = ۳۲x^۴ - ۱۲۵۰$$

$$۱۰) ۲(x-۲)(x^۲+۴)۲(x^۲+۱۶) \frac{1}{y} (۲+x) = ۲(x^۲-۴)(x^۲+۴)(x^۲+۱۶)$$

$$= ۲(x^۴-۱۶)(x^۲+۱۶) = ۲(x^۶-۲۵۶) = ۲x^۶ - ۵۱۲$$

$$۱۱) (۳ab-bc+۲ac-۱)(۲ac+bc+۳ab-۱)$$

$$= (۳ab+۲ac-۱)^۲ - (bc)^۲$$

$$= 9a^r b^r + fa^r c^r + 1 + 12a^r bc - 6ab - fac - b^r c^r$$

$$12) (x-y)^r (x+y)^r (x^r + y^r)^r = (x^r - y^r)^r = x^{\wedge} - r x^r y^r + y^{\wedge}$$

$$13) [(a^r + 2ab + b^r + a^r - 2ab + b^r)^r + f(a^r - 2a^r b^r + b^r)^r]^r$$

$$= [(2a^r + 2b^r)^r + fa^r - \lambda a^r b^r + fb^r]^r$$

$$= (fa^r + \lambda a^r b^r + fb^r + fa^r - \lambda a^r b^r + fb^r)^r$$

$$= (\lambda a^r + \lambda b^r)^r = 6fa^{\wedge} + 12\lambda a^r b^r + 6fb^{\wedge}$$

$$14) (2y^m + 3)(2y^m - 3) = 4y^{2m} - 9$$

$$15) 12\Delta a^{r/\Delta} - 3 \cdot a^{r/\Delta} + 2f \cdot a^r - 6fa^{r/\Delta}$$

$$16) a^r b - 6a^r b^{\frac{r}{\Delta}} + 12a^{\Delta} b^{\frac{\Delta}{r}} - \lambda a^r b^r$$

$$17) x^r + rx^r \left(\frac{1}{x}\right) + rx \left(\frac{1}{x}\right)^r + \left(\frac{1}{x}\right)^r = x^r + rx + \frac{r}{x} + \frac{1}{x^r}$$

$$18) (x^r - r)^r = x^{r^2} - rx^{\wedge} + 2rx^r - 2r$$

$$19) a^r + b^r + \lambda c^r + 2a^r b + 2ab^r + 6a^r c + 12ac^r + 6b^r c + 12bc^r + 12abc$$

$$20) x^3 + y^3 + z^3 + 3x^r y^r + 3x^r y^r + 3x^r z^r + 3x^r z^r + 3y^r z^r + 3y^r z^r + 6x^r y^r z^r$$

$$-x^3 - 3x^r y^r - 3x^r y^r - y^3 - x^3 - 3x^r z^r - 3x^r z^r - z^3 - y^3 - 3y^r z^r$$

$$-3y^r z^r - z^3 = -x^3 - y^3 - z^3 + 6x^r y^r z^r$$

$$21) (x^r + \sqrt{r})(x^r - \sqrt{r}x^r + r) = x^3 + 2\sqrt{r}$$

$$22) \quad 2(x+2)(x-4)2[(x^2-12)^2+x(x^2-12)+x^2]$$

$$= 4(x^2-12-x)[(x^2-12)^2+x(x^2-12)+x^2]$$

$$= 4[(x^2-12)^2-x^2] = 4(x^4-24x^2+432x^2-1728-x^2)$$

$$23) \quad (x^m-4)(x^m+16+4x^m)(x^m+64)$$

$$= (x^m-64)(x^m+64) = x^{2m} - 4096$$

$$24) \quad [(x^2+2)(x^2-2x^2+9)]^2 = (x^2+2)^2 = x^4 + 4x^2 + 4$$

$$25) \quad (2x+y)^2 - 2y = 4x^2 + 4xy + y^2 - 2y$$

$$26) \quad x(1-x^2)x^2(1+x^2+x^4) = x^2(1-x^2) = x^2 - x^4$$

$$27) \quad (a-1)^2(a^2+1)^2(a+1)^2(a^4+a^2+1)^2$$

$$= (a^2-1)^2(a^2+1)^2(a^4+a^2+1)^2 = (a^2-1)^2(a^4+a^2+1)^2$$

$$= (a^4-1)^2 = a^8 - 4a^4 + 4$$

$$28) \quad x^n(x-1)x(x+1)x^2(x^2+1)x(x^2+1)x(x^4+x^2+1)$$

$$= x^{n+5}(x^4-1)(x^4+x^2+1) = x^{n+5}(x^8-1) = x^{n+9} - x^{n+5}$$

$$29) \quad (x^2-1)(x^2+5)(x^2+1) = (x^2-1)(x^2+5) = x^4 + 4x^2 - 5$$

$$30) \quad 11x^4y^2 - 432x^2y^2 + 164x^2y^2 - 768x^4y^2 + 256x^2y^2$$

جواب تمرینهای تکمیلی فصل اول:

$$۱) \quad a=k \quad ; \quad b=k+۱$$

$$b^r - a^r = (k+1)^r - k^r = 2k+1 = (k+1) + k = b+a$$

$$۲) \quad (a+b+c)^r = a^r + b^r + c^r + 3(a+b)(a+c)(b+c) \quad \text{می دانیم که:}$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = 0 \Rightarrow a = -b \quad \text{یا} \quad a = -c \quad \text{یا} \quad b = -c$$

حال اگر  $a = -b$  و  $n$  فرد باشد:

$$a^n + b^n + c^n = (-b)^n + b^n + c^n = -b^n + b^n + c^n = c^n$$

$$(a+b+c)^n = (-b+b+c)^n = c^n$$

در نتیجه:  $a^n + b^n + c^n = (a+b+c)^n$

و یا اگر  $a = -c$  یا  $c = -b$  باشد، باز هم به نتایج یکسانی می‌رسیم.

۳)

$$\text{الف) } ۱۶x^۴ + ۷x^۲y + \frac{۵}{۴}xy^۲ + \frac{۴۹}{۶۴}x^۲y^۲ + \frac{۲۵}{۴۹}y^۴ + \frac{۴۰}{۷}x^۲y^۲$$

$$= (4x^۲ + \frac{۷}{۸}xy + \frac{۵}{۷}y^۲)^۲$$

$$\text{ب) } ۸۱x^۲y^۴ - ۹x^۲y^۲ + \frac{۱}{۴}x^۲y^۲ = (9xy^۲ - \frac{۱}{۲}xy)^۲$$

$$\text{ج) } a^r - 2a + b^r - 2b + 1 + 2ab = (a+b-1)^r$$

$$\text{۴) } a^r - a = (a-1)a(a+1)$$

می دانیم در هر سه عدد متوالی عاملهای ۲ و ۳ وجود دارد پس  $a^3 - a$  بر ۶ بخش پذیر می باشد، یعنی  $a^3 - a = 6k$  پس.

$$a^3 + 5a = a^3 - a + 6a = 6k + 6a = 6(k+a)$$

$$a^3 + 11a = a^3 - a + 12a = 6k + 12a = 6(k+2a)$$

$$a^3 - 19a = a^3 - a - 18a = 6k - 18a = 6(k-3a)$$

$$\delta) \quad x^f + y^f = z^f \Rightarrow (x^f + y^f)^f = (z^f)^f \Rightarrow x^f + 2x^f y^f + y^f = z^f$$

$$\Rightarrow x^f = z^f - y^f - 2x^f y^f$$

$$(yz)^f + (zx)^f + (xy)^f = y^f z^f + z^f x^f + x^f y^f$$

$$= y^f z^f + z^f (z^f - y^f - 2x^f y^f) + x^f y^f = y^f z^f + z^{2f} - z^f y^f - 2z^f x^f y^f + x^f y^f$$

$$= z^{2f} - 2z^f x^f y^f + x^f y^f = (z^f - x^f y^f)^2$$

۶) عبارت  $k$  را در  $\frac{a-b}{a-b}$  ضرب می کنیم.

$$k = \frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4) \dots (a^{2^n} + b^{2^n})}{a-b}$$

$$= \frac{(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \dots (a^{2^n} + b^{2^n})}{a-b}$$

و به همین ترتیب، حاصل صورت را به کمک اتحاد مزدوج به دست می آوریم، پس:

$$k = \frac{a^{2^{n+1}} - b^{2^{n+1}}}{a-b}$$

۷) عبارت  $M = \frac{1}{(a+2)^2 + 2}$  وقتی بیشترین مقدار را دارد که مخرج کسر  $M$

کمترین مقدار باشد، اگر عبارت  $(a+2)^2+2$  بخواهد کمترین مقدار خود را داشته باشد باید  $(a+2)^2=0$  شود، پس  $a=-2$  می‌شود.

$$۸) a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$a^3+b^3=۱۲۵-۱۸ \times ۵=۳۵$$

$$۹) a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$$

طرفین را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$$

۱۰) اولاً:

$$a^2+ac+ba+bc+ab+ac+b^2+bc+ab+ac+bc+c^2-a^2-b^2-c^2 \\ -2ab-2ac-2bc=ab+ac+bc$$

ثانیاً:

$$(a+b)+(a+c)+(b+c)=3+5+2 \quad \text{الف)}$$

$$2(a+b+c)=10 \Rightarrow a+b+c=5$$

ب) مفروضات مسأله و عدد به دست آمده از قسمت الف را در عبارت قسمت اولاً گذاشته، مقدار  $ab+ac+bc$  را به دست می‌آوریم:

$$ab+ac+bc=3 \times 5+3 \times 2+5 \times 2-5^2=6$$



$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) \quad \text{ج) می دانیم:}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 5^2 - 2 \times 6 = 13$$

د) خودتان می توانید ثابت کنید که:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a+b)(a+c)(b+c)$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times 2 = 35$$

$$11) a^2 + b^2 + c^2 + 2a^2b + 2ab^2 + 2a^2c + 2ac^2 + 2b^2c + 2bc^2 + 6abc$$

12) ابتدا  $x^2$  را از رابطه  $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab(a+b)$  بدست می آوریم:

$$x^2 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}\right)$$

$$+ 2\sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^2}{27}} \left(\sqrt{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}} + \sqrt{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^2}{27}}}\right)$$

$$= -q - px$$

$$\Rightarrow x^2 + px + q = -q - px + px + q = 0$$

## جواب تمرینهای فصل دوم

### جواب تمرینهای ۲.۱

$$۱) \Delta xy(x-2)$$

$$۲) 3x^2y^2(-1+4y)$$

$$۳) 2a^2b(1-4a)$$

$$۴) a^2x(x^2+x^2y^2-y^2)$$

$$۵) (m+n)(x^2+2y^2)$$

$$۶) (x-2y)(4x-7y+7y-3x)=(x-2y)(x-y)$$

$$\begin{aligned} ۷) a(a-b)(7a+5a-5b-6ab+6b^2) \\ = a(a-b)(7a-5b-6ab+6b^2) \end{aligned}$$

$$۸) (x-y)(-2x^2y+2xy^2+xy+1)$$

$$۹) (a+b)^m(2a-a-b)=(a+b)^m(a-b)$$

$$۱۰) 8a^2x^2y^2(2x-3y)(y-x)$$

### جواب تمرینهای ۲.۲

$$۱) (2a-b)(x+3y)$$

$$۲) (x+۲y^r)(۲x-y^r)$$

$$۳) (b^r+۱)(a^r+۱)$$

$$۴) (xy-۱)(۳+۲x)$$

$$۵) (۲c-y)(۷ab+c)$$

$$۶) (a^r+b^r)(c^r+d^r)$$

$$۷) (۲xy+۳)(۳-xy)$$

$$۸) -(a+b^r)(x^r+y)$$

$$۹) (a+b)(x^r+y^r)$$

$$۱۰) (x+z+y^r)(x-y)$$

### جواب تمرینهای ۲.۳

$$۱) (۲a+۱)(۲a-۱)$$

$$۲) ۲a^r(a^r b^r - ۴) = ۲a^r(ab+۲)(ab-۲)$$

$$۳) ۶b(a^r b^r - ۴) = ۶b(ab^r+۲)(ab^r-۲)$$

$$۴) (b+a^m)(b-a^m)$$

$$۵) (a+b+۱)(a+b-۱)$$

$$۶) (a+b)(a+b+۲)(a+b-۲)$$

$$۷) (fa^r+۹)(۲a+۳)(۲a-۳)$$

$$۸) a(a^r x^r + b^r)(ax+b)(ax-b)$$

$$۹) \Delta a(a-۱+۲)(a-۱-۲) = \Delta a(a+۱)(a-۳)$$

$$۱۰) (x-y+۲x-y)(x-y-۲x+y) = -x(۳x-۲y)$$

#### جواب تمرینهای ۲.۴

$$۱) (x+۳y)^r$$

$$۲) (a-۲b)^r$$

$$۳) (۲x-۲y)^r$$

$$۴) (۳x-۴y)^r$$

$$۵) ۲(a^r + fb^r + fab) = ۲(a+۲b)^r$$

$$۶) ۳(fx^r + ۲\Delta y^r - ۲ \cdot xy^r) = ۳(۲x - \Delta y^r)$$

$$۷) (fa^r - ۹b^r)^r = (۲a+۳b)^r (۲a-۳b)^r$$

$$۸) (x-y)^r - z^r = (x-y+z)(x-y-z)$$

$$۹) ۱ - (x^r - fx + f) = ۱ - (x-۲)^r = (۱+x-۲)(۱-x+۲) = (x-۱)(۳-x)$$

$$۱۰) x^r - (y^r + 2yz + z^r) = x^r - (y+z)^r = (x+y+z)(x-y-z)$$

### جواب تمرینهای ۲.۵

$$۱) (ab+۱)(a^r b^r - ab + ۱)$$

$$۲) (4x^r y^r + ۱)(۱۶x^r y^r - 4x^r y^r + ۱)$$

$$۳) (3x^r + ۵)(9x^r - ۱۵x^r + ۲۵)$$

$$۴) 2(xy-2)(x^r y^r + 2xy + 4)$$

$$۵) 4(ab^r - ۵x)(a^r b^r + ۵ab^r x + ۲۵x^r)$$

$$۶) (3a-۱)(9a^r + 3a + ۱)$$

$$۷) (x^r y^r + ۱)(x^r y^r - x^r y^r + ۱)$$

$$۸) (x^r y^r + ۱)(x^r y^r - ۱) = (xy + ۱)(x^r y^r - xy + ۱)(xy - ۱)(x^r y^r + xy + ۱)$$

$$۹) (a+b)(a^r - ab + b^r) + ab(a+b) = (a+b)(a^r + b^r)$$

$$۱۰) (a+b)(a^r - ab + b^r) + (a+b)(a-b) = (a+b)(a^r - ab + b^r + a - b)$$

### جواب تمرینهای ۲.۶

$$۱) (x+3)(x+۸)$$

$$۲) (x-۵)(x-۳)$$

$$۳) (x^r+۲)(x^r+۳)$$

$$۴) ۳(x^r+۹x+۱۴)=۳(x+۲)(x+۷)$$

$$۵) (x+y+۱)(x+y+۲)$$

$$۶) (۲x+۱)(۲x+۵)$$

$$۷) (۳x+۲)(۳x-۱)$$

$$۸) (۲x+۱)(x+۳)$$

$$۹) (۲x+۱)(۳x-۱)$$

$$۱۰) (x^r+۵x+۴)(x^r+۵x+۶)=(x+۱)(x+۴)(x+۲)(x+۳)$$

## جواب تمرینهای ۲.۷

$$۱) y^r+x^r+۲x^r y^r-۲x^r y^r=(x^r+y^r)^r-۲x^r y^r=$$

$$(x^r+y^r+\sqrt{r}xy)(x^r+y^r-\sqrt{r}xy)$$

$$۲) y^r+۱۶a^r+۸y^r a^r-۸y^r a^r=(y^r+۴a^r)^r-۸y^r a^r=$$

$$(y^r+۴a^r+\sqrt{r}ya)(y^r+۴a^r-\sqrt{r}ya)$$

$$۳) (x+۱)^r-۹=(x+۱-۳)(x+۱+۳)=(x-۲)(x+۴)$$

$$۴) (x+1)^2 - 4 = (x+1+2)(x+1-2) = (x+3)(x-1)$$

$$۵) (2x+1)^2 - 6 = (2x+1+\sqrt{6})(2x+1-\sqrt{6})$$

$$۶) (2x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} = (2x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2})(2x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}) = 2(2x-1)(x+1)$$

$$۷) (3x-1)^2 - 2 = (3x-1+\sqrt{2})(3x-1-\sqrt{2})$$

$$۸) (fy^x+1)^2 - \lambda y^x = (fy^x+1+\sqrt{\lambda}y)(fy^x+1-\sqrt{\lambda}y)$$

$$۹) (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{21}{4} = (x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2})(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2})$$

$$۱۰) (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4} = (x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2})(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2})$$

## جواب تمرینهای ۲.۸

$$۱) (x+2)(2x-1)$$

$$۲) (x-3)(3x+1)$$

$$۳) (2x+3)(x+5)$$

$$۴) (3x-1)(x-3)$$

$$۵) (x-2)(2x-1)$$

$$۶) (3x+5)(2x+3)$$

$$۷) (5x-4)(2x+1)$$

$$۸) (2x+7)(3x-4)$$

$$9) 2x(x+1)(x^2-x+4)$$

$$10) (x-1)(x^2+x+7)$$

### جواب تمرینهای ۲.۹

$$1) (x+1)(x^2+x+4)$$

$$2) (x-2)(x^2-x+8)$$

$$3) (x+3)(x^2-x+2)$$

$$4) (x+2)(x^2+6x+1)$$

$$5) (x-5)(x^2+x+1)$$

$$6) (x+6)(x^2-7x+1)$$

$$7) (x+4)(x^2-x+6)$$

$$8) (x+1)(x+2)(x-3)$$

$$9) (x-1)(x-2)(x+3)$$

$$10) (x+1)(x+2)(x-4)$$

### جواب تمرینهای ۲.۱۰

$$1) (x+y)(x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6)$$



$$۲) (x-y)(x^f + x^{\Delta}y + x^f y^r + x^r y^r + x^f y^f + xy^{\Delta} + y^f)$$

$$۳) (۲a+۱)(۱۳a^f - \lambda a^r + fa^r - ۲a+۱)$$

$$۴) (۲a-۱)(۱۶a^f + \lambda a^r + fa^r + ۲a+۱)$$

$$۵) (xy-۳)(x^f y^f + ۳x^r y^r + ۹x^f y^f + ۲۷xy + \lambda ۱)$$

$$۶) (xy^r + ۳)(x^f y^{\Delta} - ۳x^r y^f + ۹x^f y^f - ۲۷xy^r + \lambda ۱)$$

$$۷) (۲y-۱)(۶fy^f + ۳۲y^{\Delta} + ۱۶y^f + \lambda y^r + fy^r + ۲y+۱)$$

$$۸) (۲y+۱)(۶fy^f - ۳۲y^{\Delta} + ۱۶y^f - \lambda y^r + fy^r - ۲y+۱)$$

$$۹) (a-b)(a+b)(a^r + b^r)$$

$$۱۰) (a-b)(a+b)(a^r + b^r)(a^r + b^r)$$

### جواب تمرینهای آخر فصل دوم

$$۱) (x-۲y)(fx - \lambda y + \gamma y - ۳x) = (x-۲y)(x-y)$$

$$۲) x^r(۲\lambda ۹a^r - \lambda ۱) = x^r(۱۷a-۹)(۱۷a+۹)$$

$$۳) (x+y)[(x+y)^r - ۱] = (x+y)(x+y-۱)[(x+y)^r + x+y+۱]$$

$$۴) (a+b)[(c+d)^r - (a+b)^r] = (a+b)(c+d+a+b)(c+d-a-b)$$

$$۵) \frac{r}{x} (\lambda x^r - ۱) = \frac{r}{x} (۲x-۱)(fx^r + ۲x+۱)$$

$$۶) a^r(x^r + ۳x - f) = a^r(x+f)(x-۱)$$

$$۷) a^m(a^r - ۳a - ۱۰) = a^m(a-\Delta)(a+۲)$$

$$۸) (z^r - r a^r b^r)(z^r - r a^r b^r) = (z - r ab)(z + r ab)(z + \sqrt{r} ab)(z - \sqrt{r} ab)$$

$$۹) (a^r - b^r)(a^r + b^r) + r ab(a^r - b^r) = (a^r - b^r)(a^r + b^r + r ab)$$

$$= (a - b)(a + b)^r$$

$$۱۰) \frac{1}{r} (18x^r + 12x^r + 6x + 1) = \frac{1}{r} (2x + 1)^r$$

$$۱۱) b(a + \Delta) - r(\Delta + a) = (a + \Delta)(b - r)$$

$$۱۲) A^r + B^r + C^r = r ABC \text{ : قبلأ ثابت کردیم اگر } A + B + C = 0 \text{ باشد، آن گاه:}$$

حال از مجهولهای کمکی زیر استفاده می‌کنیم:

$$A = b - c \quad \text{و} \quad B = c - a \quad \text{و} \quad C = a - b$$

$$A + B + C = 0$$

خواهیم داشت:

$$(b - c)^r + (c - a)^r + (a - b)^r = r(b - c)(c - a)(a - b)$$

پس:

$$۱۳) a^r(b - c) + b^r c - b^r a + c^r a - c^r b$$

$$= a^r(b - c) + bc(b - c) - a(b^r - c^r)$$

$$= (b - c)(a^r + bc - ab - ac) = (b - c)(a - b)(a - c)$$

$$۱۴) \sqrt{r}(x^r - 1) = \sqrt{r}(x^r + 1)(x + 1)(x - 1)$$

$$۱۵) x^r(x - a) - r x(x - a) + r(x - a)$$

$$= (x - a)(x^r - r x + r) = (x - a)(x - 1)(x - r)$$

$$16) (x^r + rx - f)(x^r + rx + r) = (x+f)(x-1)(x+1)(x+r)$$

$$17) (x+r)(x^r + x + r)$$

$$18) a^r(b-c) + b^r c - b^r a + c^r a - c^r b$$

$$= a^r(b-c) + bc(b^r - c^r) - a(b^r - c^r)$$

$$= a^r(b-c) + bc(b-c)(b+c) - a(b-c)(b^r + bc + c^r)$$

$$= (b-c)(a^r + b^r c + bc^r - ab^r - abc - ac^r)$$

$$= (b-c)[a(a^r - c^r) - b^r(a-c) - bc(a-c)]$$

$$= (b-c)(a-c)(a^r + ac - b^r - bc)$$

$$= (b-c)(a-c)[(a-b)(a+b) + c(a-b)]$$

$$= (b-c)(a-c)(a-b)(a+b+c)$$

$$19) (x-y)(x-z)(x+z) - (x-z)(x-y)(x+y)$$

$$= (x-y)(x-z)(x+z-x-y) = (x-y)(x-z)(z-y)$$

$$20) 16x^f + fx^f + 1 = (fx^f + 1)^f - fx^f = (fx^f + 1 + rx)(fx^f + 1 - rx)$$

$$21) a^r + 1 = (a^r + 1)^r - ra^r = (a^r + 1 - \sqrt[r]{a})(a^r + 1 + \sqrt[r]{a})$$

$$22) (x^r + 1 \cdot x + r1)(x^r + 1 \cdot x + 1f) = (x+r)(x+V)(x+r)(x+l)$$

$$23) (x^r + rx - r1)(x^r + rx + r) = (x+V)(x-f)(x+1)(x+r)$$

$$24) x^r(x-1)+x(x-1)=(x-1)(x^r+x)=x(x-1)(x^r+1)$$

$$25) (z^r-2z)^r-14(z^r-2z)-15=(z^r-2z-15)(z^r-2z+1) \\ \doteq (z-5)(z+3)(z-1)^r$$

$$26) (2x^r-2x)^r-16(2x^r-2x)+48=(2x^r-2x-12)(2x^r-2x-4) \\ =4(x^r-x-6)(x^r-x-2)=4(x-3)(x+2)(x+1)(x-2)$$

$$27) (x^r+2x+1)(x^r+2x-12)+36 \\ = (x^r+2x)^r-11(x^r+2x)+24=(x^r+2x-3)(x^r+2x-8) \\ = (x-1)(x+3)(x+4)(x-2)$$

$$28) m^r-(x-p)^r=(m^r+x-p)(m^r-x+p)$$

$$29) (a-d)^r-(b-c)^r=(a-d+b-c)(a-d-b+c)$$

$$30) (y^r+3y-30)(y^r+3y+2)+240 \\ = (y^r+3y)^r-24(y^r+3y)+180 \\ = (y^r+3y-10)(y^r+3y-18)=(y+5)(y-2)(y+6)(y-3)$$

$$31) (x-2)^r-y^r=(x-2+y)(x-2-y)$$

$$32) (x+3)^r+(x+5-2)[(x+5)^r+4+2(x+5)] \\ = (x+3)(x^r+6x+9+x^r+10x+25+4+2x+10)$$

$$= 2(x+3)(x^2+9x+24)$$

$$٣٣) (x^2+\Delta x+4)(x^2+\Delta x+6)-8$$

$$=(x^2+\Delta x)^2+1\cdot(x^2+\Delta x)+16=(x^2+\Delta x+1)(x^2+\Delta x+2)$$

$$٣٤) (a^2-12)^2-a^2=(a^2-12+a)(a^2-12-a)$$

$$=(a+4)(a-3)(a+3)(a-4)$$

$$٣٥) (x-1)(x^2+6x+9)=(x-1)(x+3)^2$$

$$٣٦) (x-4)(x+2)+(x+2)^2+6(x-2)(x+2)$$

$$=(x+2)(x-4+x^2+4x+4+6x-12)$$

$$=(x+2)(x^2+11x-12)=(x+2)(x-1)(x+12)$$

$$٣٧) (2x^2-2x-4+x^2-2x+5)(2x^2-2x-4-x^2+2x-5)$$

$$=(3x^2-4x+1)(x^2-9)=(3x-1)(x-1)(x-3)(x+3)$$

$$٣٨) x^2+1-7x-7=(x+1)(x^2-x+1)-7(x+1)$$

$$=(x+1)(x^2-x-6)=(x+1)(x-3)(x+2)$$

$$٣٩) (x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$$

$$٤٠) (x+3)(x^2+9x+20)=(x+3)(x+4)(x+5)$$

(٤١)

$$\text{الف) } a^r+b^r+c^r-3abc=(a+b)^r+c^r-3a^r b-3ab^r-3abc$$

$$=(a+b+c)[(a+b)^r - c(a+b) + c^r] - r ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)(a^r + b^r + c^r - ab - ac - bc)$$

$$\text{ب) } (a+b+c)^r - a^r - b^r - c^r$$

$$=a^r + b^r + c^r + r a^r b + r a b^r + r a^r c + r a c^r + r b^r c + r b c^r$$

$$+ 6abc - a^r - b^r - c^r = r(a^r b + a b^r + a^r c + b^r c + 2abc + a c^r + b c^r)$$

$$= r[ab(a+b) + c(a+b)^r + c^r(a+b)]$$

$$= r(a+b)(ab + ca + cb + c^r)$$

$$= r(a+b)[a(b+c) + c(b+c)] = r(a+b)(b+c)(a+c)$$

(۴۲) طبق فرض داریم:

$$a = \frac{x^n + y^n + z^n}{x^n}, \quad b = \frac{x^n + y^n + z^n}{y^n}, \quad c = \frac{x^n + y^n + z^n}{z^n}$$

$$ab + ac + bc = (x^n + y^n + z^n)^r \left( \frac{1}{x^n y^n} + \frac{1}{x^n z^n} + \frac{1}{y^n z^n} \right)$$

$$= (x^n + y^n + z^n)^r \left( \frac{z^n + y^n + x^n}{x^n y^n z^n} \right)$$

$$= \left( \frac{x^n + y^n + z^n}{x^n} \right) \left( \frac{x^n + y^n + z^n}{y^n} \right) \left( \frac{x^n + y^n + z^n}{z^n} \right) = abc$$

## جواب تشریحی تستها

$$1. \frac{(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)}{2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)} = \frac{x+y+z}{2}$$

و یا اینکه  $z=1$  و  $y=x=0$

$$\text{آنگاه } \frac{x^2+y^2+z^2-3xyz}{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2} = \frac{0+0+1-0}{0+1+1} = \frac{1}{2}$$

مقادیر فوق را در جوابها بگذاریم گزینه «ج» درست می باشد.

$$2. (a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - 4 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2+b^2-2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$$

گزینه «د» درست می باشد.

3. عبارت را در  $\frac{x-1}{x-1}$  ضرب می کنیم:

$$\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}{(x-1)} = \frac{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)}{(x-1)}$$

$$= \frac{x^{16}-1}{x-1}$$

بنابراین، گزینه «ب» درست است.

$$4. \frac{a^2-(b+c)^2}{(a+b)^2-c^2} \times \frac{a+b-c}{-a+b+c} = \frac{(a-b-c)(a+b+c)}{(a+b-c)(a+b+c)} \times \frac{a+b-c}{-a+b+c} = -1$$

گزینه «الف» صحیح است.

5. حالت خاص را در نظر می گیریم.  $a=0$  و  $b^2=c^2=\frac{9}{4} \Rightarrow b=\sqrt{\frac{9}{4}}$  و  $c=-\sqrt{\frac{9}{4}}$

$$a^2+b^2+c^2=0 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

گزینه «د» صحیح است.

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 2ab + 2ac + 2bc \quad \text{ـ۶}$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Rightarrow a=b=c$$

$$\frac{a+b}{a+c} + \frac{b+c}{b+a} + \frac{c+a}{c+b} = \frac{a+a}{a+a} + \frac{a+a}{a+a} + \frac{a+a}{a+a} = 3$$

گزینه «ج» صحیح است.

۷- دو عدد فرد متوالی را  $(2k+1)$  و  $(2k-1)$  در نظر می‌گیریم:

$$(2k+1)(2k-1) = 4k^2 - 1 = 323 \Rightarrow 4k^2 = 324 \Rightarrow 2k = 18$$

$$\text{مجموع دو عدد فرد} = (2k+1) + (2k-1) = 4k = 36$$

گزینه «د» صحیح است.

$$A+B=3 \Rightarrow A^2+B^2+3AB(A+B)=27 \quad \text{ـ۸}$$

$$A^2+B^2+9AB=27$$

گزینه «الف» صحیح است.

$$x + \sqrt[3]{x} - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x + (-1)^2 = 3x\sqrt[3]{x} (-1) = -3x\sqrt[3]{x} \quad \text{ـ۹}$$

$$\frac{x+x^2-1}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{-3x\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}} = -x$$

گزینه «ب» صحیح است.

۱۰- گزینه‌های «ب» و «ج» و «د» غلط می‌باشد، پس گزینه «الف» صحیح است.

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4) \quad \text{زیرا:}$$



$$a^f - b^f = (a-b)(a^{\Delta} + a^f b + a^f b^f + a^f b^f + ab^f + ab^{\Delta})$$

$$x^f + 4x^f + 5 = (x^f + 1) + (4x^f + 4) \quad ۱۱$$

$$= (x^f + 1)(x^f - x^f + 1) + 4(x^f + 1) = (x^f + 1)(x^f - x^f + 5)$$

گزینه «ب» صحیح است.

$$A = a - b \Rightarrow A^r = a^r - b^r - 2ab(a - b) \quad ۱۲ \text{ می دانیم:}$$

$$x = \sqrt[3]{1 + \sqrt{7}} - \sqrt[3]{1 - \sqrt{7}} \Rightarrow x^3 = 1 + \sqrt{7} - (1 - \sqrt{7}) - 3\sqrt[3]{(1 + \sqrt{7})(1 - \sqrt{7})}.x$$

$$x^3 = 2\sqrt{7} - 3\sqrt[3]{-1} \quad x = 2\sqrt{7} + 3x \Rightarrow x^3 - 3x = 2\sqrt{7}$$

گزینه «د» صحیح است.

$$(a - 2b)^r + (b - 2c)^r = 0 \Rightarrow a = 2b \text{ و } b = 2c \quad ۱۳$$

$$a = fc \text{ و } b = 2c \Rightarrow \frac{(b+c-a)^r}{abc} = \frac{(2c+c-fc)^r}{(fc)(2c)c} = \frac{-c^r}{8c^3} = \frac{-1}{8}$$

گزینه «ج» صحیح است.

$$a^r(1-x) + (b^r + c^r - 2bc)(x-1) = (x-1)(-a^r + b^r + c^r - 2bc) \quad ۱۴$$

$$= (x-1)[(b-c)^r - a^r] = (x-1)(b-c-a)(b-c+a)$$

گزینه «ج» صحیح است.

$$\frac{a+1}{\sqrt{a}} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{a^r+1+2a}{a} = \frac{49}{4} \Rightarrow \frac{a^r+1}{a} = \frac{49}{4} - 2 = \frac{41}{4} \quad ۱۵$$

$$\frac{a}{a^r+1} = \frac{4}{41} \quad \text{گزینه «ج» صحیح است.}$$

$$\frac{xz+1}{xz-1} = \frac{y+1}{1-y} \Rightarrow xz+1-xyz-y=xyz+xz-y-1 \quad -16$$

$$\Rightarrow 2 = 2xyz \Rightarrow xy = \frac{1}{z}$$

$$\frac{1+z}{xy+1} = \frac{1+z}{1/z+1} = \frac{1+z}{(1+z)/z} = z$$

گزینه «الف» صحیح است.

$$\frac{a^2+2b^2}{ab} = 2\sqrt{2} \Rightarrow a^2+2b^2-2\sqrt{2}ab=0 \quad -17$$

$$(a-\sqrt{2}b)^2=0 \Rightarrow a=\sqrt{2}b$$

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{a-b} &= \frac{\sqrt{2}b+b}{\sqrt{2}b-b} = \frac{(\sqrt{2}+1)b}{(\sqrt{2}-1)b} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \\ &= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1} = 3+2\sqrt{2} \end{aligned}$$

گزینه «ب» صحیح است.

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1-x)(x^2+1+x) \quad -18$$

$$=(x^2+1-x)[(x^2+1)^2-x^2]=(x^2+1-x)(x^2+1-x)(x^2+1+x)$$

گزینه «الف» صحیح است.

$$a+b>1 \Rightarrow (a+b)^2>1^2 \Rightarrow a^2+2ab+b^2>1 \quad -19$$

$$(a-b)^2>0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2>0$$

همچنین می دانیم:

اگر دو طرف نامساویهای فوق را نظیر به نظیر جمع کنیم، داریم:

$$(a^2+2ab+b^2)+(a^2-2ab+b^2)>0+1$$

$$2a^2 + 2b^2 > 1 \Rightarrow a^2 + b^2 > \frac{1}{2}$$

گزینه «ب» صحیح است.

۲۰- قبلاً دیدیم اگر  $a+b+c=0$  باشد، آن‌گاه داریم:

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0 \Rightarrow x+y+z = 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[3]{z}$$

پس:

$$(x+y+z)^3 = (3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \cdot \sqrt[3]{z})^3 = 27xyz$$

گزینه «د» صحیح است.

$$(x^2 - 1)^2 + (x+1)^2 = [(x^2 - 1) + (x+1)]^2 \quad ۲۱$$

$$\times [(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)(x+1) + (x+1)^2]$$

$$= (x^2 + x)[(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)(x+1) + (x+1)^2]$$

$$= x(x^2 + 1)[(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 1)(x+1) + (x+1)^2]$$

گزینه «د» صحیح است.

$$a - \frac{1}{a} = \sqrt{a} + \sqrt{\frac{1}{a}} \Rightarrow (a - \frac{1}{a})^2 = (\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}})^2 \quad ۲۲$$

$$a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 = a + \frac{1}{a} + 2 \Rightarrow (a + \frac{1}{a})^2 - 2 - 2 = (a + \frac{1}{a}) + 2$$

$$(a + \frac{1}{a})^2 - (a + \frac{1}{a}) - 6 = 0 \Rightarrow (a + \frac{1}{a} - 3)(a + \frac{1}{a} + 2) = 0$$

$$a + \frac{1}{a} = 3 \quad \text{و} \quad a + \frac{1}{a} = -2$$

غیر قابل قبول است.

گزینه «ب» صحیح است.

$$a+b-c=1 \Rightarrow (a+b-c)^2=1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc=1 \quad ۲۳$$

$$a^r + b^r + c^r + 2ab - 2c(a+b) = 1 \Rightarrow a^r + b^r + c^r + 2ab - 2c(c+1) = 1$$

$$a^r + b^r + c^r + 2ab - 2c^r - 2c = 1 \Rightarrow a^r + b^r - c^r = 2c - 2ab + 1$$

$$a^r + b^r - c^r = 2\left(c - ab + \frac{1}{2}\right)$$

گزینه «ج» صحیح است.

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x - 3y = 2x + 2y \Rightarrow x = 5y \Rightarrow \frac{x}{y} = 5 \quad ۲۴$$

گزینه «ب» صحیح است.

$$x + \frac{1}{x} = a \Rightarrow x^r + \frac{1}{x^r} + 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = a^r \quad ۲۵$$

$$x^r + \frac{1}{x^r} = a^r - 3a$$

گزینه «د» صحیح است.

$$(x+y+z)^r = x^r + y^r + z^r + 2(xy+yz+zx) \quad ۲۶$$

$$0 = x^r + y^r + z^r + 2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2} (x^r + y^r + z^r) \leq 0$$

گزینه «الف» صحیح است.

$$\frac{x^r - y^r}{x^r + y^r + xy} = \frac{(x-y)(x^r + xy + y^r)}{x^r + xy + y^r} = x - y \quad ۲۷$$

$$= \sqrt{3} - 1 - (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

گزینه «ج» صحیح است.

۲۸- اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  با یکدیگر مساوی نباشند، داریم:

$$(a-b)^r + (b-c)^r + (c-a)^r > 0$$

$$a^r - 2ab + b^r + b^r - 2bc + c^r + c^r - 2ac + a^r > 0$$

$$2(a^r + b^r + c^r) > 2(ab + bc + ac) \Rightarrow a^r + b^r + c^r > ab + bc + ac$$

گزینه «ج» صحیح است.

$$\left(1 - \frac{(a-b)^r}{(a+b)^r}\right) \left(\frac{(a-b)^r}{ab} + 4\right) \quad ۲۹$$

$$= \frac{(a+b)^r - (a-b)^r}{(a+b)^r} \times \frac{(a-b)^r + 4ab}{ab} = \frac{4ab}{(a+b)^r} \times \frac{(a+b)^r}{ab} = 4$$

گزینه «ب» صحیح است.

$$\frac{x^r + y^r + 2xy - 1}{x+y+1} = \frac{(x+y)^r - 1}{x+y+1} = \frac{(x+y-1)(x+y+1)}{x+y+1} = x+y-1 \quad ۳۰$$

گزینه «ب» صحیح است.

$$\left(\frac{(a+b)(a^r - ab + b^r)}{a+b} - \frac{(a-b)(a^r + ab + b^r)}{a-b}\right) \frac{(a-b)(a+b)}{2ab} \quad ۳۱$$

$$= (a^r - ab + b^r - a^r - ab - b^r) \frac{(a-b)(a+b)}{2ab}$$

$$= \frac{-2ab(a-b)(a+b)}{2ab} = b^r - a^r$$

گزینه «ب» صحیح است.

$$۳۲- \text{طرفین تساوی } \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2} = 1 \text{ را به توان سه می‌رسانیم:}$$

$$a + a^r + 3\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a^2}) = 1 \Rightarrow a + a^r + 3a = 1 \Rightarrow a + a^r - 1 = -3a$$

$$\frac{a^r + a - 1}{a} = \frac{-3a}{a} = -3$$

گزینه «ج» صحیح است.

$$a^r - 2ab - 15b^r = (a - 5b)(a + 3b) \quad ۳۳$$

$$a^r + 7ab + 12b^r = (a + 4b)(a + 3b)$$

گزینه «ب» صحیح است.

$$A = x^{\frac{t+1}{t}} \Rightarrow x = A^{\frac{t}{t+1}} \quad ۳۴$$

$$B = x^{\frac{1}{1+t}} \Rightarrow x = B^{t+1}$$

$$A^{\frac{t}{t+1}} = B^{t+1} \quad \text{پس:} \quad \text{گزینه «ب» صحیح است.}$$

$$(xyz - yz^r)^r = [yz(x-z)]^r = y^r z^r (x-z)^r \quad ۳۵$$

$$(x^r z - xz^r)^r = [xz(x-z)]^r = x^r z^r (x-z)^r$$

گزینه «د» صحیح است.

$$\frac{5}{1+x^f} + \frac{5}{1+x^{-f}} = \frac{5}{1+x^f} + \frac{5x^f}{x^f+1} = \frac{5(1+x^f)}{1+x^f} = 5 \quad ۳۶$$

گزینه «الف» صحیح است.

$$a^r + b^r + c^r - 2a - 2b - 2c + 1 + 1 + 1 = 0 \quad ۳۷$$

$$(a-1)^r + (b-1)^r + (c-1)^r = 0 \Rightarrow (c-1)^r = 0 \Rightarrow c=1$$

گزینه «ب» صحیح است.

$$x^{\frac{n}{r}} + \frac{6}{x^{\frac{n}{r}}} = 5 \Rightarrow x^n + 12 + \frac{36}{x^n} = 25 \Rightarrow x^n + \frac{36}{x^n} = 13 \quad ۳۸$$

گزینه «ج» صحیح است.

$$a^r + b^r = (a+b)^r - 2ab = \left(\frac{5}{6}\right)^r - 2 \times \frac{7}{72} = \frac{25}{36} - \frac{7}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \quad ۳۹$$

گزینه «ج» صحیح است.

$$\left(1 + \frac{2ab}{a^r + b^r}\right) \left(1 - \frac{2ab}{(a+b)^r}\right) = \left(\frac{(a+b)^r}{a^r + b^r}\right) \left(\frac{a^r + b^r}{(a+b)^r}\right) = 1 \quad ۴۰$$

گزینه «الف» صحیح است.

$$\frac{1 - 2x^r + x^{2r}}{x} = \frac{(x^r - 1)^r}{(x+1)^r} = \frac{(x-1)^r (x+1)^r}{(x+1)^r} = (x-1)^r \quad ۴۱$$

گزینه «الف» صحیح است.

$$b^r + 1 = b^r + 2b^r + 1 - 2b^r = (b^r + 1)^r - 2b^r \quad ۴۲$$

$$= (b^r + 1 - \sqrt{2}b)(b^r + 1 + \sqrt{2}b)$$

گزینه «ج» صحیح است.

$$a = \frac{5}{4}b \Rightarrow \frac{a^r - b^r}{a^r + b^r} = \frac{\frac{25}{16}b^r - b^r}{\frac{25}{16}b^r + b^r} = \frac{(\frac{25}{16} - 1)b^r}{(\frac{25}{16} + 1)b^r} = \frac{\frac{9}{16}b^r}{\frac{41}{16}b^r} = \frac{9}{41} \quad ۴۳$$

گزینه «د» صحیح است.

$$\frac{(x-y)^r}{(x+y)^r} \cdot \frac{(x+y)^r}{(x-y)^r} \cdot \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} \quad ۴۴$$

گزینه «الف» صحیح است.

$$2b^r + ab(b-a) - ab(a+b) = b(2b^r + ab - a^r - a^r - ab) \quad ۴۵$$

$$=b(2b^r - 2a^r) = 2b(b-a)(b+a)$$

گزینه «ب» صحیح است.

$$x^r + y^r = (x+y)(x^r - xy + y^r) \quad -46$$

$$x^r + x^r y^r + y^r = x^r + 2x^r y^r + y^r - x^r y^r = (x^r + y^r)^r - x^r y^r$$

$$= (x^r + y^r - xy)(x^r + y^r + xy)$$

گزینه «ج» صحیح است.

$$4x^r + x^r - 2x^r - x - 1 = 4x^r - 4x^r + x^r - x + x^r - 1 \quad -47$$

$$= 4x^r(x^r - 1) + x(x^r - 1) + (x^r - 1) = (x^r - 1)(4x^r + x + 1)$$

گزینه «د» صحیح است.

$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4) = (x^r - x - 2)(x^r - x - 12) \quad -48$$

$$= (x^r - x)^r - 14(x^r - x) + 24 = x^r - 2x^r + x^r - 14x^r + 14x + 24$$

گزینه «ج» صحیح است.

$$a^r - a^r - a + 1 = a^r(a^r - 1) - (a-1) = a^r(a-1)(a+1) - (a-1) \quad -49$$

$$= (a-1)(a^r + a^r - 1)$$

گزینه «ج» صحیح است.



$$x + \frac{1}{x} = a \Rightarrow x^r + \frac{1}{x^r} + r = a^r \Rightarrow x^r + \frac{1}{x^r} = a^r - r \quad -50$$

$$\left(x^r + \frac{1}{x^r}\right)^2 = (a^r - r)^2 \Rightarrow x^{2r} + \frac{1}{x^{2r}} + r = a^{2r} - 2ra^r + r^2$$

$$\Rightarrow x^{2r} + \frac{1}{x^{2r}} = a^{2r} - 2ra^r + r^2$$

گزینه «د» صحیح است.

پایان

انتشار کتابهای کمک درسی و عادت دادن دانش‌آموزان به مطالعه و تعمق بیشتر، نقشی اساسی در شکوفایی ذهنی جامعه دارد؛ زیرا این کتابها می‌توانند در کنار کتابهای درسی، پاسخگوی ذهنهای کنجکاو و کاوشگر باشند. مؤسسه کتاب همراه، به یاری خداوند، در پاسخگویی به این ضرورت با همکاری استادان، متخصصان و کارشناسان زبده دانشگاهها و آموزش‌وپرورش، اقدام به انتشار این نوع کتابها در رشته‌های مختلف نموده است. هدفهای مجموعه ریاضی به اختصار عبارتند از:

۱- فراهم آوردن زمینه برای درک و یادگیری مباحث ریاضی به صورت خودآموز.

۲- ارائه آموزشهای تکمیلی برای فهم گسترده‌تر و ژرف‌تر مواد درسی.

۳- ارائه روشهای متنوع حل مسائل در جهت فعال کردن نیروی خلاقیت دانش‌آموزان.

۴- آماده کردن دانش‌آموزان برای موفقیت در آزمونهای گوناگون علمی.

با توجه به موارد بالا، هر دانش‌آموزی در هر سطح علمی، می‌تواند از این کتابها استفاده کند و معلمان گرامی نیز با توجه به مباحث تکمیلی و تمرینهای فراوان این کتابها، زمینه‌های مناسب و امکان بهره‌برداری از آنها را خواهند یافت.

