مبانی هندسه

جلد اول

هندسهٔ اقلیدسی

تألیف

دکتر علی اکبر عالم‌زاده

انتشارات مدرسه

مبانی هندسه

جلد اول

هندسهٔ اقلیدسی

تألیف

دکتر علی اکبر عالم‌زاده

مبانی هندسه ــ جلد اول
(هندسهٔ اقلیدسی)
تالیف دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده

چاپ اول: بهار ۱۳۷۸

۲۲۴ صفحهٔ وزیری در ۲۰۰۰ نسخه، چاپ نصر

ویرایش و طراحی کتاب: آتلیهٔ انتشارات علمی و فنی
طرح روی جلد: امیرحسین مطاهری‌نیا

حروفچینی و صفحه‌آرایی: نوآور، تلفن: ۴۲ ۳۷ ۶۰۱

شابک: ۶ ــ ۰۷ ــ ۶۲۱۵ ــ ۹۶۴

تهران ــ صندوق پستی شمارهٔ ۱۴۴۵۵/۱۸۸، تلفن: ۴۲ ۱۵ ۹۳

قیمت: ۱۰۰۰۰ ریال

پیشگفتار

این کتاب برای دانشجویان رشتهٔ ریاضی نگاشته شده است و هدف از آن، آشنا ساختن مخاطب با روش اصل موضوعی است که امروزه این روش پایهٔ تمام علوم محسوب می‌شود.

کتاب با تاریخچه‌ای از هندسهٔ اقلیدسی آغاز شده و سپس روش اصل موضوعی مطرح می‌شود. نخستین علمی که با این روش بنا شده هندسهٔ اقلیدسی است. اما، به خاطر برداشت ناقص اقلیدس از این روش، هندسه‌اش پر از نقص است. این نواقص را نمی‌توان در چهارچوب روش اقلیدس رفع کرد. لذا، این هندسه قابل مرمت نبوده و باید آن را مجدداً بنا نمود. ریاضیدانان زیادی به ساخت مجدد این هندسه پرداخته‌اند که شاید در بین آنان «دیوید هیلبرت»، ریاضیدان آلمانی، از همه موفقتر باشد.

ما در جلد اول، هندسهٔ اقلیدسی را به سبک هیلبرت بنا می‌کنیم. این سبک چنان دقیق و قابل اعتماد است که می‌توان هر علم دیگر را نیز با آن ساخت.

جلد دوم اختصاص به هندسه‌های نااقلیدسی دارد. امروزه طرح هندسهٔ اقلیدسی

بدون ذکری از هندسه‌های نااقلیدسی بی‌معنی است. این هندسه‌ها چنان جالب و طبیعی‌اند که‌افراد خو گرفته با هندسهٔ اقلیدسی را مات می‌سازند. وصف هندسه‌های نااقلیدسی در چند کلمه مقدور نیست؛ تنها راه، مطالعهٔ آنهاست. ما مطالعهٔ این هندسه‌ها را به دانشجویان علوم توصیه کرده و شاگردان ریاضی را بدان ملزم می‌داریم. افلاطون روزی بر سردر آکادمی خود نوشت:

«هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود.»

ما نیز باید بر سردر دانشگاههایمان بنویسیم:

«هر کس هندسهٔ نااقلیدسی نمی‌داند خارج نشود.»

علی‌اکبر عالم‌زاده
گروه آموزشی ریاضی
دانشگاه تربیت معلم

فهرست

فصل یک ـ مقدمات ۱

۱.۱ تاریخچهٔ هندسه ۳

۲.۱ هندسه به سبک اقلیدس ۵

فصل دو ـ تعریفات ۱۵

۱.۲ تعریفات اولیهٔ هندسه ۱۷

۲.۲ مسائل ۲۷

فصل سه ـ هندسه به سبک هیلبرت ۴۵

۱.۳ هندسهٔ پایه ۴۷

۲.۳ مدلها ۵۰

۳.۳ مسائل ۵۴

فصل چهار ـ بینیت ۷۳

۱.۴ مقدمه ۷۵

۲.۴ اصول موضوع بینیت ۷۶
۳.۴ قضایای بینیت ۷۹
۴.۴ مسائل ۸۷

فصل پنج ـ قابلیت انطباق ۹۷
۱.۵ اصول موضوع مربوطه ۹۹
۲.۵ قضایای قابلیت انطباق ۱۰۱
۳.۵ مسائل ۱۱۲

فصل شش ـ پیوستگی، طول و درجه ۱۱۵
۱.۶ مقدمه ۱۱۷
۲.۶ اصول پیوستگی ۱۱۸
۳.۶ طول و درجه ۱۲۰
۴.۶ مسائل ۱۲۱

فصل هفت ـ هندسهٔ خنثی ۱۲۵
۱.۷ مقدمه ۱۲۷
۲.۷ گامهای نخستین ۱۲۸
۳.۷ اصل توازی ۱۵۱
۴.۷ کاستی مثلث ۱۶۰
۵.۷ مسائل ۱۶۵

فصل هشت ـ اصل توازی ۱۷۱
۱.۸ مقدمه ۱۷۳

۲.۸ متخصصان اصل توازی ۱۷۳
۳.۸ مسائل ۱۸۴
فهرست راهنما ۲۰۹
منابع ۲۱۴

۱

مقدمات

۱.۱ تاریخچهٔ هندسه

۲.۱ هندسه به سبک اقلیدس

۱.۱ تاریخچهٔ هندسه

هندسه شاخه‌ای از ریاضیات است که در آن خواص اشکال مسطح و فضایی بحث می‌شود. این علم سرچشمه‌ای کهن داشته و در دوران باستان تقریباً با ریاضیات برابر بوده است. واژهٔ فرنگی آن "*Geometry*" از کلمات یونانی "*Geos*" به معنی زمین و "*Metron*" به معنی سنجش پیدا شده است. به گفتهٔ هرودت (*Herodotus*)، مورخ سدهٔ پنجم قبل از میلاد، مصریان واضع هندسه بوده‌اند. ولی به گواه تاریخ، تمدنهای کهن دیگر مانند بابلیها، آشوریها، هندیها و چینیها نیز از آن اطلاع داشته‌اند.

هندسه در آغاز علمی تجربی بود و از چند قاعده برای سنجش و مسّاحی تشکیل می‌شد. این قواعد از طریق آزمایش، مطالعهٔ شباهتها، حدسها و شهود به دست آمده بودند که برای صحتشان هیچ دلیلی ارائه نمی‌شد. این علم جواب مسائل آن زمان را که زیربنای علمی پیچیده‌ای نداشتند می‌داد. مثلاً بابلیها حدود ۲ هزار سال پیش از میلاد نسبت محیط دایره به قطرش (یعنی π) را ۳ می‌گرفتند و محاسبات تقریبی برحسب این فرض در آن زمان مشکلی به بار نمی‌آورد. همین مقدار در نوشته‌های چینی نیز دیده شده است و چون در آن دوران تحولات علمی زیادی صورت نمی‌یافت، این مقدار پس

از گذشت ۲ هزار سال در کارهای رومیان هم آمده است. البته در آن زمان تلاشهایی نیز برای دقیق کردن این عدد صورت می‌گرفت. مثلاً با آنکه یهودیان عدد ۳= π را مقدس می‌شمردند، یکی از خاخامها سعی کرد آن را به $\frac{۲۲}{۷}$ بدل کند که موفق نشد. مصریان هم حدود ۱۸ قرن قبل از میلاد π را تقریباً ۳/۱۶ می‌گرفتند. این ملاک شاید به این دلیل بود که زیربنای تمدنشان را کشاورزی تشکیل می‌داد و به خاطر ارتباط با زمین و خرید و فروش و مسّاحی آن به مهارتهای زیادی در هندسه رسیده و اطلاعات دقیقتری از این علم کسب کرده بودند.

خلاصه آنکه، هندسه پیش از تمدن یونان جایگاه زیبنده‌ای نداشت و چیزی جز مجموعه‌ای از قواعد محاسبه، آن هم بدون هیچ توجیه استدلالی، نبود. این یونانیان بودند که حقایق هندسی را با دلایل منطقی و ایجاد روابط بین آنها نظام بخشیدند. این کار توسط تالس (*Thales*) آغاز شد. تالس پایه‌های علمی هندسه را بنا کرد. وی مواضع و لبه‌های راست را به صورت نقاط و خطوط فرض کرد و هندسه را به شکلی مجرد درآورد. تالس بر خلاف پیشینیان اصرار داشت که احکام هندسی از راه استدلال ثابت شوند نه از طریق آزمایش و خطا. وی با تلاش در شناسایی احکام درست و نادرست، نخستین هندسهٔ منطقی را بنا نهاد. کار وی توسط فیثاغورس (*Pythagoras*) و شاگردانش ادامه یافت و سپس بقراط (*Hippocrates*) هندسهٔ منطقی تالس را کامل ساخت. در این زمان با تشکیل آکادمی افلاطون (*Plato*) هندسه نضج بیشتری یافت. افلاطون به هندسه عشق می‌ورزید چنانکه بر سردر آکادمی خود نوشت: «هر کس هندسه نمی‌داند وارد نشود.» شاید بزرگترین منت افلاطون بر هندسه، تربیت نابغهٔ بزرگ بشریت، یعنی اقلیدس (*Euclid*) باشد.

اقلیدس (۳۰۶ ـ ۲۸۳ ق.م) از ریاضیدانان یونانی و شاگرد مکتب افلاطون بود. وی کارهای بقراط را اصلاح کرد و آثار پیشینیان را در کتابی سیزده جلدی به نام ***اصول اقلیدس*** (*Euclid's Elements*) گرد آورد. اقلیدس این کار را با چنان مهارتی انجام داد که خط بطلان بر آثار گذشته کشید. کتاب اصول، علی‌رغم داشتن نواقص، بیش از بیست قرن است که بر فکر آدمی تسلط دارد و همواره سرمشق سایر کتب علمی بوده است؛ مثلاً هندسه‌ای که اینک در دبیرستانها تدریس می‌شود بخشی از این کتاب است که فقط تغییرات مختصری یافته است. اقلیدس این هندسه را به ***روش اصل موضوعی*** بنا نهاد که امروزه روش ساختاری تقریباً همهٔ علوم است. به‌جرأت می‌توان گفت که بیشتر نواقص

این هندسه به خاطر عدم درک کامل اقلیدس از این روش بوده است.

ما در جلد اول، ابتدا هندسهٔ اقلیدسی را به صورتی که در اصول آمده است (ولی با الفاظ امروزی) ساخته و به بررسی مشکلات آن می‌پردازیم؛ بعد این هندسه را بطور دقیق ارائه می‌کنیم؛ سپس در جلد دوم به هندسه‌های نااقلیدسی خواهیم پرداخت.

۲.۱ هندسه به سبک اقلیدس

اقلیدس دریافت که هر چیز را نمی‌شود ثابت کرد و باید یک یا چند حکم را مفروض دانست و احکام دیگر را از آنها نتیجه گرفت. هر تلاش برای اثبات همهٔ احکام به دور یا تسلسل می‌انجامد و این اساس روش اصل موضوعی است. وی نخستین کسی بود که این روش را در ساختن هندسه به کار برد. اقلیدس درک کاملی از این روش نداشت و به همهٔ زوایایش پی نبرده بود. این روش از سه بخش تشکیل شده است.

بخش ۱. اختیار چند مفهوم به نام ***مفاهیم اولیه*** یا ***اصطلاحات تعریف نشده***؛

بخش ۲. مفروض دانستن چند حکم به نام ***اصول موضوع***؛

بخش ۳. انتخاب یک ***دستگاه منطقی*** برای استنتاج قضایا از اصول موضوع و احکام اثبات شده.

اقلیدس بخش ۱ را نادیده گرفت و همهٔ مفاهیم را تعریف کرد، که می‌دانیم این کار به دور یا تسلسل می‌انجامد. ولی بخش ۲ را رعایت کرده و چند حکم را به عنوان اصل گرفت. اقلیدس بین اصول خود تمایز قایل بود و آنها را به دو دستهٔ ***اصول موضوع*** و ***اصول متعارف*** تقسیم می‌کرد. اصول موضوعش رنگ و بوی هندسه داشته و اصول متعارفش ناظر به هر چیز هستند. و اما بخش ۳، چون در آن زمان منطق ریاضی وجود نداشت، وی به عقل سلیم پناه برد و با کمال تعجب ۴۶۵ حکم را ثابت کرد که امروزه صرف‌نظر از نقایص جزئی برقرارند. برداشت ناقص اقلیدس از روش اصل موضوعی را می‌توان در کتاب یکم (از سیزده جلد) اصول اقلیدس بوضوح دید. اقلیدس در کتاب یکم، بیست و سه تعریف آورده است که اینک به چند مورد از آنها می‌پردازیم.

۱. ***نقطه آن است که جزء ندارد.***

۲. ***خط طول بلاعرض است.***

۳. ***خط راست خطی است که به نحوی هموار بر نقاط خود قرار دارد.***

۴. ***دو انتهای هر خط نقطه‌اند.***

۵. ***زاویهٔ مستوی میل دو خط واقع در یک صفحه نسبت به یکدیگر است که همدیگر را قطع می‌کنند و بر یک خط راست واقع نیستند.***

۶. ***خطوط موازی خطهای راستی هستند که در یک صفحه واقعند و اگر آنها را بطور نامتناهی امتداد دهیم در هیچ‌طرف یکدیگر را قطع نمی‌کنند.***

این تعریفها بی‌نقص نیستند. مثلاً در تعریف ۱، اقلیدس نقطه را بر حسب مفهوم جزء تعریف کرده، ولی خود جزء را مشخص نساخته است. در تعریف ۲، طول و عرض را مفاهیمی معلوم و از پیش درک شده انگاشته است. از مقایسهٔ تعاریف ۲ و ۳ می‌بینیم که اقلیدس بین خط و خط راست تمایز گذارده است. در تعریف ۳، معنی هموار و قرار داشتن را مشخص نکرده است. در تعریف ۴، انتهای یک خط را معین نکرده و در تعریف ۵، مفهوم میل و صفحه و در تعریف ۶، مفاهیم بطور نامتناهی، امتداد دادن و طرف را رها ساخته است. در این تعریفها اقلیدس واقع بودن و قرار داشتن را مترادف گرفته و تقاطع دو خط را به معنی وجود نقطه‌ای واقع بر هر دو خط انگاشته و البته از همهٔ آنها برداشتی شهودی داشته است. این نوع نقایص در تعاریف وی موج می‌زنند. البته اکثر آنها جدی نیستند و به سهولت قابل رفع هستند.

حال به اصول اقلیدس می‌پردازیم. ابتدا اصول متعارف وی را مطرح می‌کنیم؛ این اصول پنج موردند و عبارتند از:

۱. ***هر دو شیء که با شیء ثالثی قابل انطباق باشند با یکدیگر قابل انطباقند.***

۲. ***اگر مقادیر مساوی به مقادیر مساوی افزوده شود مجموعها مساویند.***

۳. ***اگر مقادیر مساوی از مقادیر مساوی کم شود تفاضلها مساویند.***

۴. ***هر شیء بر خودش قابل انطباق است.***

۵. ***کل از هر جزء خود بزرگتر است.***

اقلیدس تلاش کرد هر مفهوم را تعریف کند، ولی در اصول فوق قابلیت انطباق را مفهومی تعریف نشده گرفته است. ضمناً در بسیاری از موارد، تساوی و قابلیت انطباق را به یک معنی دانسته است. مثلاً وقتی می‌گوید: «در مثلث متساوی الساقین زوایای مجاور به قاعده مساویند» منظورش قابلیت انطباق این زوایاست.

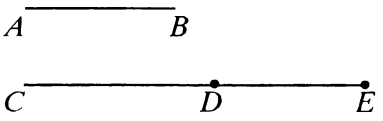
اصول فوق درست همانهایی نیست که اقلیدس گفته است و ما حتی‌المقدور آنها را دقیق و امروزی ساخته‌ایم. تقسیم اصول به اصول موضوع و اصول متعارف، امروزه معمول نیست، شاید از این باب که علوم گسترش بی‌حد یافته‌اند و لازم نیست در آنها

اصولی ناظر به هر چیز بیان شود.

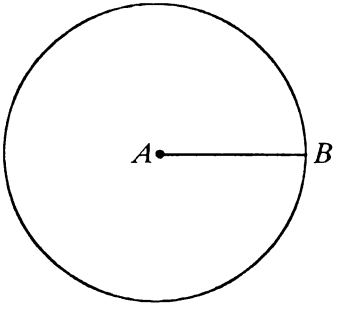
اکنون اصول موضوع اقلیدس را بیان می‌کنیم. این اصول نیز پنج موردند و به قرار زیر هستند:

۱. ***به ازای هر دو نقطهٔ متمایز A و B یک و فقط یک خط راست وجود دارد که از A و B می‌گذرد. این خط را با $\overleftrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم و آن را خط نظیر دو نقطهٔ A و B می‌نامیم.***

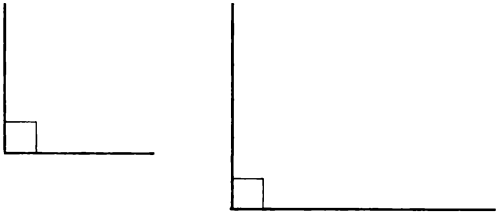
۲. ***به ازای هر دو پاره‌خط AB و CD یک و فقط یک نقطه مانند E وجود دارد که D بین C و E بوده و AB بر DE قابل انطباق است (علامت: $AB \cong DE$).***



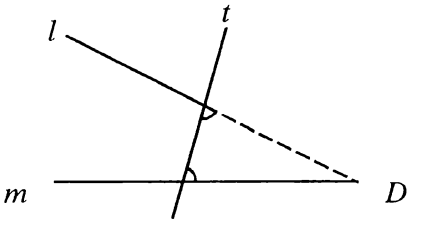
۳. ***به ازای هر دو نقطهٔ متمایز A و B دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB وجود دارد.***



۴. ***تمام زوایای قائمه دو به دو قابل انطباقند.***



۵. ***هرگاه موربی دو خط راست را طوری قطع کند که مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ درونی حادث در یک طرف مورب از حیث درجه از ۱۸۰° کمتر باشد، آنگاه این دو خط یکدیگر را در همان طرف مورب قطع خواهند کرد.***



اصول موضوع فوق جوهر هندسهٔ اقلیدسی هستند. لذا، این سؤال مطرح می‌شود که چرا اقلیدس این احکام را اصل موضوع گرفته است. (برای اصول متعارف وی نیز این سؤال قابل طرح است.) برای جواب دادن به این سؤال می‌گوییم:

اولاً اصول موضوع هر دستگاه اصل موضوعی باید از دو خصلت زیر برخوردار باشند:

(آ) ***با ابزار و مفاهیم اولیهٔ دستگاه قابل بیان باشند؛***

(ب) ***ریشهٔ تجربی داشته باشند.***

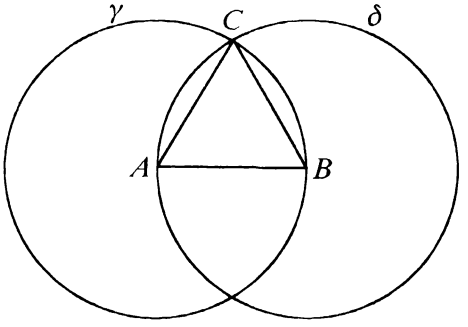
آیا اصول موضوع اقلیدس این دو خصلت را دارند؟ اصل اول با استفاده از مفاهیم اولیهٔ نقطه، خط و وقوع بیان شده است. اصل دوم پس از تعریف پاره‌خط و تعیین تکلیف مفاهیم بینیت و قابلیت انطباق پاره‌خطها بیان می‌شود. اصل سوم پس از تعریف دایره، مرکز و شعاع آن بیان می‌شود. اصل چهارم پس از تعریف زاویهٔ قائمه و قابلیت انطباق زوایا و اصل پنجم پس از تعریف مورب، زاویهٔ درونی، طرف و درجه قابل بیان است. پس این اصول تا حدودی از خصلت (آ) برخوردارند.

و اما خصلت (ب): اصل اول ناشی از کار با ستاره (خط کش نامدرج) است. اصل دوم اساس سنجش با مقیاس طول است. اصل سوم حاصل کار با پرگار است و اصل چهارم ناشی از کار با گونیاست. تنها اصل پنجم است که ریشهٔ تجربی ندارد و به این دلیل حتی در زمان خود اقلیدس نیز مورد انتقاد بوده است. اقلیدس به این اصل اعتماد نداشت و سعی کرد تا حکم بیست و نهمش از آن استفاده نکند. لذا، این اصول، جز اصل پنجم، تا حدودی از دو خصلت فوق برخوردارند.

ثانیاً اصول موضوع باید به نحوی باشند که (همراه با اصول متعارف) هر چه بیشتر قضیه ثابت کنند. اینها ابزارهای اصلی ما در اثبات قضایایند. برای مشاهدهٔ توان اصول اقلیدس، در زیر چند قضیه را که اقلیدس آنها را با استفاده از اصول خود ثابت کرده است ذکر می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۲.۱. ***پاره خط AB مفروض است. مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع AB وجود دارد.***

برهان. به مرکز A و شعاع AB دایرهٔ γ را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز B و شعاع BA دایرهٔ δ را می‌کشیم. این دو دایره در نقطهٔ C متقاطعند و مثلث $\Delta\ ABC$ جواب است.

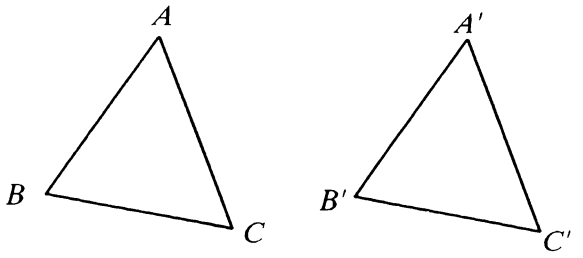


حال ببینیم این برهان طبق اصول اقلیدس صورت گرفته است یا نه. دوایر γ و δ طبق اصل موضوع سوم وجود دارند، اما ممکن است همدیگر را قطع نکنند. دایره به مرکز A و شعاع AB مجموعهٔ نقاطی چون P است که $AP \cong AB$، و از اصول اقلیدس پیوستگی و یکپارچه بودنش نتیجه نمی‌شود. دو دایره ممکن است زنجیروار از هم بگذرند و نقطهٔ تقاطعی هم نداشته باشند. پس برای اثبات این قضیه به اصلی نیاز داریم که پیوستگی دایره را تضمین نماید. متأسفانه این اصل در میان اصول اقلیدس دیده نمی‌شود. با داشتن این اصل هنوز مطلب تمام نیست، زیرا طبق تعریف دایره داریم $AC \cong AB$ و $BC \cong BA$. اگر $AB \cong BA$، طبق اصل اول متعارف خواهیم داشت $AC \cong BC$ و مثلث $\Delta\ ABC$ متساوی الاضلاع می‌شود. ولی $AB \cong BA$ را نمی‌توان از اصول اقلیدس نتیجه گرفت. برای روشن شدن این امر به تعریف پاره خط AB توجه می‌کنیم. پاره خط AB مجموعهٔ نقاط A و B و نقاط بین A و B است. برای اثبات $AB \cong BA$ باید نشان دهیم که هر نقطه

بین A و B بین B و A نیز هست و بالعکس. ولی اقلیدس در ارتباط با بینیت، اصلی را ندارد که این امر را تضمین کند. پس برای اثبات کامل قضیهٔ فوق به یک اصل در مورد پیوستگی دایره و یک اصل در مورد بینیت برای تضمین $AB \cong BA$ نیاز خواهیم داشت.

قضیهٔ ۲.۲.۱. **(محک ض ز ض برای انطباق مثلثها).**

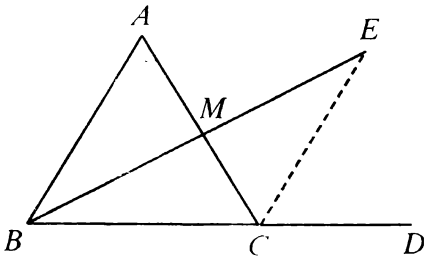
هرگاه در دو مثلث ΔABC و $\Delta A'B'C'$ داشته باشیم $AB \cong A'B'$، $AC \cong A'C'$ و $\angle A \cong \angle A'$، آنگاه این دو مثلث قابل انطباقند.



برهان. مثلث $\Delta A'B'C'$ را برداشته روی مثلث ΔABC می‌گذاریم بطوری که رأس A' روی A و ضلع $A'B'$ روی AB قرار گیرد. چون $AB \cong A'B'$، B' روی B قرار می‌گیرد و چون $\angle A \cong \angle A'$، ضلع $A'C'$ روی AC واقع می‌شود و چون $AC \cong A'C'$، C' روی C قرار می‌گیرد و بدین ترتیب دو مثلث بر هم منطبق می‌شوند.

سؤال این است که آیا این اثبات طبق اصول اقلیدس صورت یافته است؟ ما مثلث $\Delta A'B'C'$ را برداشته روی مثلث ΔABC می‌گذاریم. این یک حرکت مکانیکی است که اصول اقلیدس اجازه‌اش را به ما نمی‌دهند. ممکن است در این حرکت اندازهٔ پاره‌خطها و زوایا به هم بخورد. اصلی به نام ***اصل برهمنهش*** وجود دارد که این اندازه‌ها را تضمین می‌کند، ولی این اصل سرشت هندسی نداشته و از اصول اقلیدس نتیجه نمی‌شود و منضم کردن آن به اصول اقلیدس ماهیت هندسه را خدشه‌دار می‌کند. جان کلام، برهان فوق برهان قابل قبولی نخواهد بود.

قضیهٔ ۳.۲.۱. ***در هر مثلث یک زاویهٔ بیرونی از هر یک از زوایای درونی غیر مجاورش بزرگتر است.***



برهان. می‌خواهیم مثلاً ثابت کنیم که $\angle ACD$ از $\angle A$ بزرگتر است. برای این کار B را به M ، نقطهٔ میانی پاره‌خط AC وصل کرده و به اندازهٔ خودش تا E امتداد می‌دهیم. دو مثلث ΔABM و ΔMCE به حالت ض ز ض قابل انطباقند. درنتیجه $\angle A \cong \angle ACE$. اما نقطهٔ E درون $\angle ACD$ است. پس $\angle ACD$ از $\angle ACE$ بزرگتر است. لذا، $\angle ACD$ از $\angle A$ بزرگتر است.

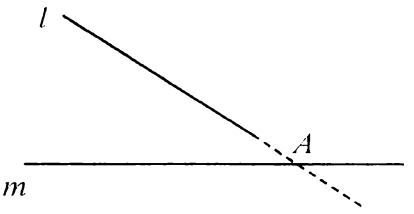
مجدداً می‌پرسیم: ***آیا این برهان طبق اصول اقلیدس صورت یافته است؟*** نکات مبهم در این برهان عبارتند از (۱): وجود نقطهٔ میانی یک پاره‌خط؛ (۲): امتداد دادن یک پاره‌خط به اندازهٔ خودش؛ (۳): محک ض ز ض برای انطباق مثلثها؛ (۴): درون یک زاویه؛ (۵): اگر در رابطهٔ بزرگتری بین دو زاویه، زاویهٔ کوچکتر را با زاویه‌ای قابل انطباق با آن عوض کنیم رابطه محفوظ می‌ماند.

در مورد (۱)، اقلیدس نقطهٔ میانی پاره‌خط را از پیوستگی دایره و خط نتیجه می‌گیرد که مجاز نیست. مورد (۲) مشکلی ندارد، زیرا وجود E طبق اصل موضوع ۲ اقلیدس محرز است. در مورد (۳)، به قضیهٔ ۲.۲.۱ استناد شده است که برهانش درست نیست. در مورد (۴)، اقلیدس درون زاویه را شهودی گرفته و تعریف دقیقی برایش عرضه نمی‌کند و در مورد (۵)، ما زاویهٔ $\angle ACD$ را در صورتی از $\angle A$ بزرگتر می‌گیریم که نقطه‌ای مانند E درون $\angle ACD$ باشد بطوری که $\angle A \cong \angle ACE$. اقلیدس نسبت بزرگتری بین زوایا را با مقایسهٔ اندازهٔ آنها به درجه تعریف می‌کند که درواقع با تعریف ما یک حاصل دارد و لذا مورد (۵) اشکالی جدی نخواهد داشت. (در این باب بعدها بحث دقیقتری خواهیم داشت.) خلاصه آنکه این برهان در کل نقص دارد و پذیرفتنی نیست.

کلاً می‌پرسیم: آیا همهٔ قضایای اقلیدس نقص دارند؟ آیا تمام ۴۶۵ حکم هندسی اقلیدس به همین نحو ثابت شده‌اند؟ در جواب می‌گوییم که متأسفانه چنین است و تقریباً

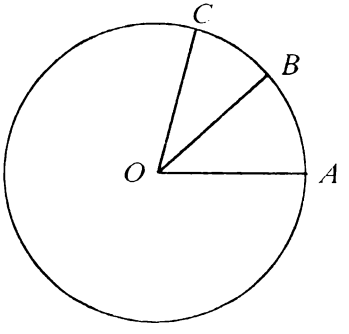
همهٔ قضایای هندسهٔ اقلیدسی دارای نواقصی از نوع فوقند و اساساً اصول اقلیدس توان کافی برای اثبات قضایا را ندارند و تنها می‌توانند قضایایی بدیهی و پیش پاافتاده‌ای چون دو قضیهٔ زیر را بی‌نقص اثبات نمایند که ارزش چندانی هم ندارند.

قضیهٔ ۴.۲.۱. ***هرگاه l و m دو خط راست ناموازی باشند، آنگاه l و m فقط یک نقطهٔ مشترک دارند.***



برهان. چون l و m موازی نیستند، پس لااقل یک نقطهٔ مشترک دارند. فرض می‌کنیم بیش از یک نقطهٔ مشترک داشته باشند. از بین نقاط اشتراکشان دو نقطه اختیار می‌کنیم. پس، از این دو نقطه دو خط l و m گذشته‌اند که با اصل موضوع ۱ در تضاد است.

قضیهٔ ۵.۲.۱. ***به ازای هر دو نقطهٔ B و C روی دایره به مرکز O و شعاع OA داریم $OB \cong OC$.***



برهان. طبق تعریف دایره، $OB \cong OA$ و $OC \cong OA$. لذا، طبق اصل متعارف ۱، $OB \cong OC$ و مطلب تمام است.

حقیقت آن است که اصول اقلیدس توان کافی برای اثبات قضایای هندسی را ندارند و شواهد نشان می‌دهند که این هندسه به طرز مناسبی که شایسته‌اش باشد ساخته نشده است. حتی می‌توان گفت که اقلیدس از پاسخ دادن به ساده‌ترین سؤال هندسی عاجز است. به دو سؤال سادهٔ زیر توجه نمایید:

۱. ***خط l مفروض است. آیا می‌توان به کمک اصول اقلیدس ثابت کرد که نقطه‌ای واقع بر l وجود دارد؟***

۲. ***خط l مفروض است. آیا می‌توان به کمک اصول اقلیدس ثابت کرد که نقطه‌ای غیر واقع بر l وجود دارد؟***

جواب هر دو سؤال منفی است، زیرا اصول اقلیدس ترکیباتی شرطی بوده، نه وجودی. درواقع می‌توان هندسهٔ اقلیدسی را بدون حتی یک نقطه یا یک خط ساخت. دو سؤال فوق حرکات اولیه در هندسهٔ اقلیدسی بوده و ابزار اصلی کار هستند. اگر اقلیدس نتواند به دو سؤال فوق پاسخ دهد باید از هندسه‌اش چشم پوشید و آن را به عنوان یک پدیدهٔ تاریخی در موزه گذارد و به ساختن هندسه به نحوی پرداخت که مشکلات فوق را نداشته باشد. برای ساختن یک خانهٔ زیبا فقط آجر و گچ و سیمان کافی نیست و چیزهایی دیگر نیز لازم است. اقلیدس هندسه‌اش را با کمترین ابزار و در ساده‌ترین شکل ساخته است و لذا نمی‌توان بدان دل بست. این هندسه سالهاست که بر ما حاکم است و از بخت بد زمانی که دانشمندان جرأت انتقاد از آن را یافتند و اسطورهٔ اقلیدس فرو ریخت، به جای مرمت به تخریب آن پرداختند و شعار «مرگ بر اقلیدس» گوش فلک را کر کرد. شاید مؤدبانه‌ترین انتقاد از برتراند راسل (*Bertrand Russell*) باشد که گفته است: «در ارزش‌گذاری اثر اقلیدس به عنوان یک شاهکار منطقی سخت مبالغه شده است».

پس از فروپاشی این هندسه، افراد مختلفی به ساخت مجدد آن پرداختند که از بین آنان دیوید هیلبرت (*David Hilbert*)، ریاضیدان آلمانی، از همه موفقتر بوده است. طرفه آنکه بعضی از این افراد به هندسه‌ای بهتر از اثر اقلیدس دست نیافتند و تلاش آنان موجب اعادهٔ حیثیت اقلیدس گردید.

ما در فصل ۳، هندسهٔ اقلیدسی را به سبک هیلبرت بنا می‌نهیم. پیش از این کار (یعنی در فصل ۲) تعاریف اولیهٔ هندسه را بطور دقیق، آن طور که شایستهٔ روش اصل موضوعی است، بیان می‌کنیم.

۲

تعریفات

۱.۲ تعریفات اولیهٔ هندسه

۲.۲ مسائل

۱.۲ تعریفات اولیهٔ هندسه

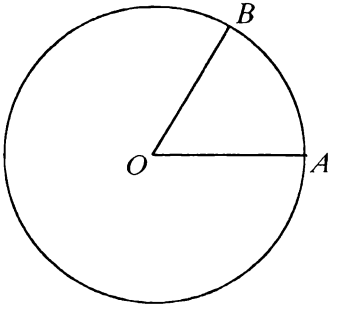
برای ساختن یک هندسهٔ دقیق باید مفاهیم هندسی دقیقاً تعریف شوند. به پیروی از هیلبرت، پنج مفهوم: ***نقطه***، ***خط***، ***وقوع***، ***بینیت*** و ***قابلیت انطباق*** را ***مفاهیم اولیه*** یا ***اصطلاحات تعریف نشده*** گرفته و سایر مفاهیم را به‌وسیلهٔ آنها تعریف می‌کنیم. چون هدف هندسهٔ مسطحه است، ***صفحه*** را مجموعهٔ تمام نقاط و خطوط گرفته و می‌گوییم همهٔ نقاط و خطوط ***بر این صفحه قرار دارند***. اگر منظور هندسهٔ فضایی می‌بود، صفحه را نیز اصطلاح تعریف نشده می‌گرفتیم.

حال به تعریفات اولیهٔ هندسه می‌پردازیم. در این راه از نظریهٔ مجموعه‌ها، که بسیار کارساز است، استفاده می‌کنیم. سایر مفاهیم هندسی به همین نحو تعریف می‌شوند (که به خواننده محول می‌نماییم).

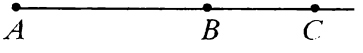
تعریف ۱.۱.۲. وقوع، قرار داشتن، گذشتن و مار و هر واژهٔ هم‌ارز دیگر بطور مترادف به کار می‌روند.

تعریف ۲.۱.۲. دو نقطهٔ A و B مفروضند. **پاره‌خط** AB عبارت است از مجموعهٔ تمام نقاط بین A و B به انضمام دو نقطهٔ A و B. نقاط A و B را دو **سر** AB نامیده و $\overleftrightarrow{AB}$ را **خط نظیر** دو نقطهٔ A و B یا پاره‌خط AB می‌نامیم. همچنین هر نقطهٔ متعلق به AB را ***واقع بر*** AB می‌گوییم.

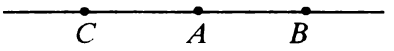
تعریف ۳.۱.۲. دو نقطهٔ O و A مفروضند. مجموعهٔ تمام نقاطی چون B، بطوری که OA بر OB قابل انطباق باشد ($OA \cong OB$)، ***دایره به مرکز*** O نام دارد. هر یک از OBها با خاصیت فوق را **شعاع** این دایره می‌نامیم. همچنین می‌گوییم B ***بر یا روی این دایره قرار دارد.***



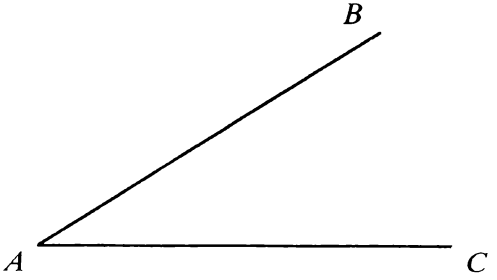
تعریف ۴.۱.۲. نیمخط $\overrightarrow{AB}$ عبارت است از مجموعهٔ نقاط متعلق به پاره‌خط AB و جمیع نقاطی چون C، که B بین A و C قرار دارد. A را ***رأس*** $\overrightarrow{AB}$ نامیده و می‌گوییم $\overrightarrow{AB}$ ***از*** A ***خارج یا صادر شده است.*** $\overleftrightarrow{AB}$ را ***خط نظیر*** $\overrightarrow{AB}$ می‌خوانیم. همچنین می‌گوییم هر نقطهٔ $\overrightarrow{AB}$ ***بر این نیمخط قرار دارد.***



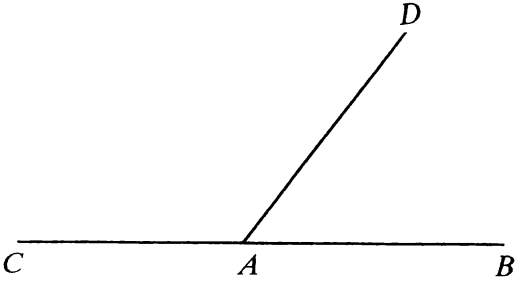
تعریف ۵.۱.۲. نیمخطهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را ***متقابل*** می‌گوییم هرگاه متمایز بوده و خط نظیر واحدی داشته باشند.



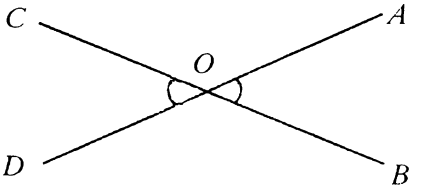
تعریف ۶.۱.۲. ***زاویه به رأس*** A عبارت است از یک سه‌تایی مانند $(A\ ,\ \overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AC})$ بطوری که نیمخطهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متقابل نباشند. نیمخطهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را ***اضلاع*** این زاویه نامیده و سه‌تایی $(A\ ,\ \overrightarrow{AC}\ ,\ \overrightarrow{AB})$ را نام دیگری برای این زاویه می‌گیریم. این زاویه را با $\angle A$ ، $\hat{A}$ ، $\angle BAC$ یا $\angle CAB$ نشان می‌دهیم.



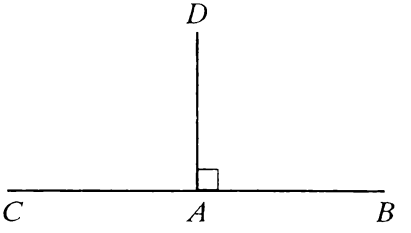
تعریف ۷.۱.۲. هرگاه در دو زاویهٔ $\angle BAD$ و $\angle CAD$ ، دو ضلع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متقابل باشند، این دو زاویه را ***مکمل*** می‌نامیم.



تعریف ۸.۱.۲. دو زاویه در صورتی ***متقابل به رأسند*** که اضلاع یکی متقابلهای اضلاع دیگری باشند. این هم‌ارز آن است که بگوییم هر دو مکملهای واحدی داشته باشند.

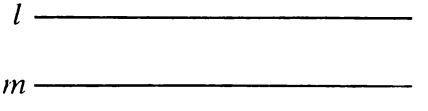


تعریف ۹.۱.۲. زاویهٔ $\angle BAD$ را در صورتی ***قائمه*** می‌گوییم که بر مکمل خود قابل انطباق باشد. در این صورت دو نیمخط $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ را **متعامد** یا **بر هم عمود** می‌نامیم و این امر را با $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ نشان می‌دهیم.



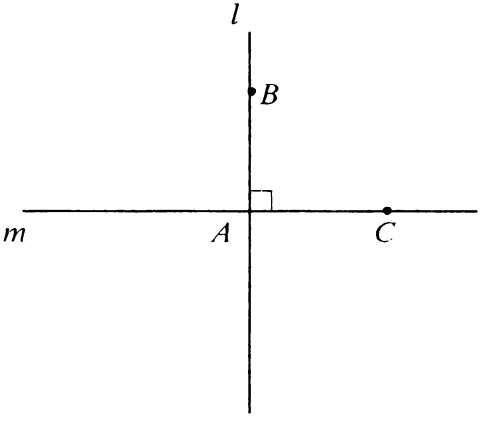
ما زاویهٔ قائمه را بدون توسل به درجه تعریف کرده‌ایم. تلاش می‌کنیم تا جایی که میسر است از انتساب درجه به زاویه و طول به پاره‌خط پرهیز کنیم. هدف اثبات آن است که درجه و طول مفاهیمی رکنی نیستند و لازم نیست در ابتدای هندسه عنوان شوند. زمانی این دو مفهوم را وارد می‌کنیم که این امر به ثبوت رسیده باشد. سپس از این مفاهیم در جهت تسهیل بیان استفاده خواهیم کرد.

تعریف ۱۰.۱.۲. دو خط l و m در صورتی ***موازیند*** که نقطهٔ مشترکی نداشته باشند. موازی بودن این دو خط را با $l \parallel m$ و عدم توازی آنها را با $l \nparallel m$ نشان می‌دهیم. هر دو خط که فقط یک نقطهٔ مشترک داشته باشند **متقاطع** نام خواهند داشت.



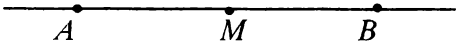
توازی مهمترین مفهوم در هندسه و شاید در تمام ریاضیات است. تقاطع و توازی یعنی برخورد و عدم برخورد بین خطوط. در زندگی انسانها نیز برخورد و عدم برخورد مهمترین عامل است و لذا اهمیت این مفهوم نباید موجب تعجب ما گردد.

تعریف ۱۱.۱.۲. دو خط l و m در صورتی **متعامد (بر هم عمود)** هستند که در نقطه‌ای مانند A متقاطع بوده و بتوان نقاط B و C را به ترتیب روی آنها چنان یافت که نیمخطهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامد (بر هم عمود) باشند. تعامد دو خط l و m را با $l \perp m$ نشان می‌دهیم.

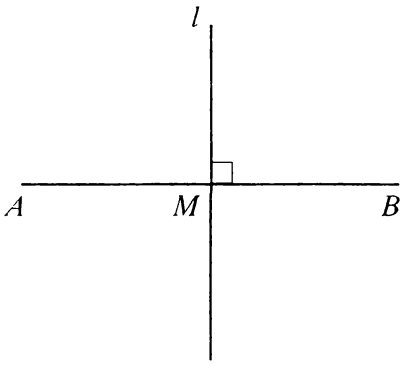


تعریف ۱۲.۱.۲. خط l در صورتی بر پاره‌خط AB **عمود** است که بر خط نظیر AB عمود باشد. تعامد l و AB را با $l \perp AB$ نشان می‌دهیم.

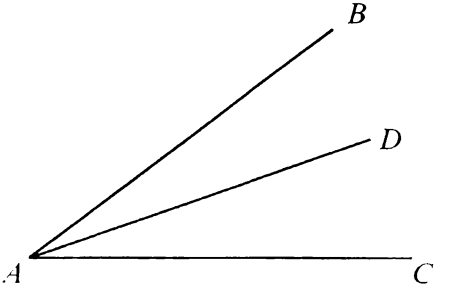
تعریف ۱۳.۱.۲. **نقطهٔ میانی** پاره‌خط AB نقطه‌ای است مانند M بین A و B بطوری که $AM \cong MB$.



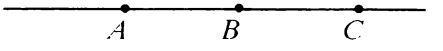
تعریف ۱۴.۱.۲. **عمود منصف** پاره‌خط AB خطی است مانند l که از نقطهٔ میانی AB گذشته و بر AB عمود باشد.



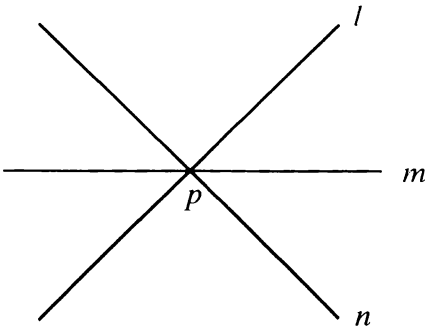
تعریف ۱۵.۱.۲. **نیمساز** زاویهٔ $\angle BAC$ نیمخطی است مانند $\overrightarrow{AD}$ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ (بینیت نیمخطها بعداً تعریف خواهد شد) بطوری که $\angle DAB \cong \angle DAC$.



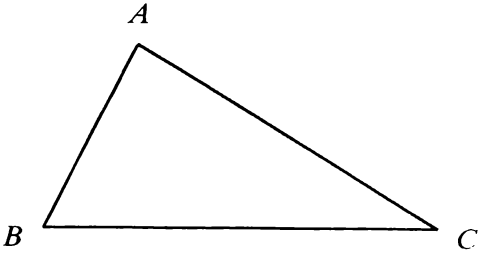
تعریف ۱۶.۱.۲. نقاط A، B، C و ... را **بر یک *استقامت*** می‌گوییم در صورتی که بر خط واحدی واقع باشند؛ در غیر این صورت می‌گوییم این نقاط ***غیرواقع بر یک استقامتند*** یا **بر یک *استقامت*** نیستند.



تعریف ۱۷.۱.۲. خطوط l، m، n و ... را **متقارب** می‌گوییم در صورتی که از نقطهٔ واحدی گذشته باشند.

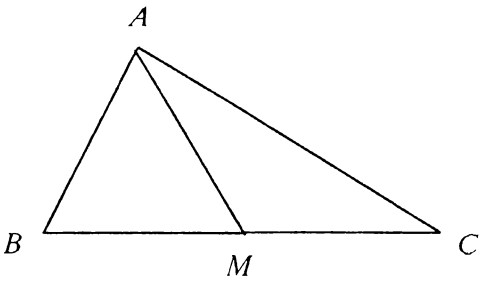


تعریف ۱۸.۱.۲. فرض می‌کنیم نقاط A، B و C غیرواقع بر یک استقامت باشند؛ در این صورت ΔABC عبارت است از شش‌تایی $(A , B , C , AB , AC , BC)$ که مرکب از سه نقطه و سه پاره‌خط است. سه نقطه را ***رؤوس*** و سه پاره‌خط را ***اضلاع*** مثلث می‌نامیم. هر شش‌تایی دیگر ناشی از جایگشت سه رأس با هم و جایگشت سه ضلع با هم نام دیگری از این مثلث است. زوایای $\angle BAC$ ، $\angle ABC$ و $\angle ACB$ را ***زوایای*** این مثلث می‌نامیم و

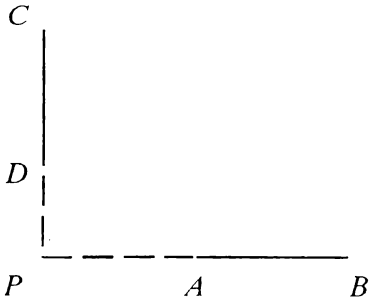


اغلب آنها را با $\angle A$ ، $\angle B$ و $\angle C$ نشان می‌دهیم. ضلع BC را **مقابل** به زاویهٔ $\angle A$ یا رأس A و اضلاع AB و AC را **مجاور** به زاویهٔ $\angle A$ یا رأس A می‌نامیم. مقابل و مجاور برای اضلاع، زوایا و رؤوس دیگر به همین نحو تعریف می‌شوند.

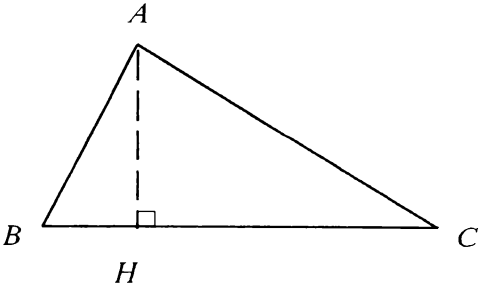
تعریف ۱۹.۱.۲. ***میانهٔ*** یک مثلث پاره‌خطی است که یک سرش یک رأس و سر دیگرش نقطهٔ میانی ضلع مقابل به آن رأس باشد.



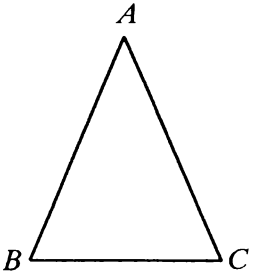
تعریف ۲۰.۱.۲. پاره‌خطهای AB و CD را در صورتی **متعامد** (یا **برهم عمود**) می‌گوییم که خطوط نظیرشان بر هم عمود باشند. این تعامد را با $AB \perp CD$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب تعامد بین یک پاره‌خط با یک نیمخط تعریف می‌شود.



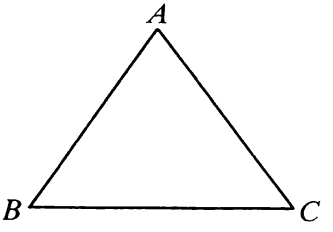
تعریف ۲۱.۱.۲. ***ارتفاع*** یک مثلث پاره‌خطی است که یک سرش یک رأس و سر دیگرش روی خط نظیر ضلع مقابل بوده و بر آن عمود باشد.



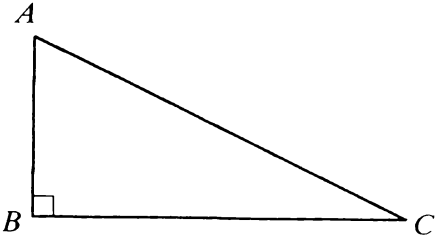
تعریف ۲۲.۱.۲. ***مثلث متساوی‌الساقین*** مثلثی است که لااقل دو ضلع قابل انطباق داشته باشد. این دو ضلع را ***ساقهای*** مثلث و ضلع سوم را ***قاعدهٔ*** مثلث می‌نامیم. دو زاویه از مثلث که رؤوسشان دو سر قاعده است ***زوایای مجاور به قاعده*** نام دارند.



تعریف ۲۳.۱.۲. ***مثلث متساوی‌الاضلاع*** مثلثی است که اضلاعش دو به دو قابل انطباق باشند.

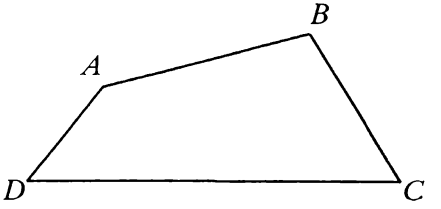


تعریف ۲۴.۱.۲. ***مثلث قائم‌الزاویه*** مثلثی است که لااقل یک زاویهٔ قائمه داشته باشد.

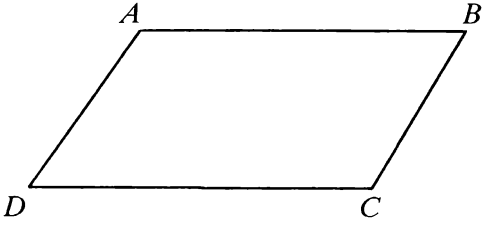


تعریف ۲۵.۱.۲. چهار نقطهٔ A، B، C و D چنانند که هیچ سه‌تای آنها بر یک استقامت نبوده و هر جفت از پاره‌خطهای AB، BC، CD و DA یا نقطهٔ مشترکی ندارند یا فقط در یک سر مشترکند.

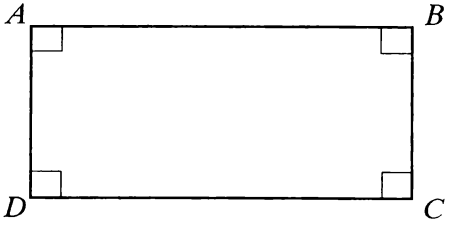
چهارضلعی $ABCD\square$ عبارت است از هشت‌تایی $(A, B, C, D, AB, BC, CD, DA)$. چهار مختص اول را **رؤوس** و چهار مختص دوم را **اضلاع** چهارضلعی می‌نامیم. هر جایگشت دوری رؤوس همان چهارضلعی را به ما خواهد داد؛ مثلاً $BCDA\square$ همان $ABCD\square$ است. زوایای $\angle DAB$ ، $\angle ABC$ ، $\angle BCD$ و $\angle CDA$ را **زوایای** این چهارضلعی می‌نامیم. اضلاعی چون AB و AD را **اضلاع مجاور**، اضلاعی مانند AB و DC را **اضلاع مقابل** و پاره‌خطهای AC و BD را **اقطار** چهارضلعی می‌نامیم.



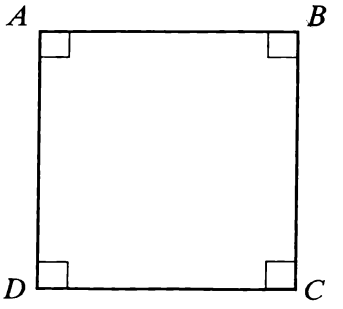
تعریف ۲۶.۱.۲. چهارضلعی $ABCD\square$ در صورتی **متوازی‌الاضلاع** است که خطوط نظیر اضلاع مقابل با هم موازی باشند.



تعریف ۲۷.۱.۲. **مستطیل** یک چهارضلعی است که هر چهار زاویه‌اش قائمه باشند.



تعریف ۲.۱.۲۸. **مربع** مستطیلی است که اضلاعش دو به دو قابل انطباق باشند.



تعریفهای به‌جا مانده باید با همین دقت و وسواس بیان شوند. ما این امر را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۲.۲ مسائل

ما در فصل بعد، هندسهٔ اقلیدسی را به روش اصل موضوعی و به سبک هیلبرت بنا می‌کنیم. پیش از این کار فرصتی است که با هندسهٔ اقلیدسی به سبک اقلیدس وداع کنیم. این امر را با حل چند مسأله به روش اقلیدس انجام می‌دهیم. خواهید دید که روش اقلیدس در عین جالب بودن، چیزی جز رسم شکل عمدتاً با خط‌کش و پرگار نیست و در آن تجرید و هندسهٔ ذهنی جایی ندارد. مسائلی که در اینجا حل می‌کنیم از جمله زیباترین مسائل هندسه‌اند؛ منتها به سبک اقلیدس. در این راه زبان ما حتی‌المقدور دقیق است، ولی گاهی جهت تسهیل در بیان ممکن است دقت کافی نداشته باشد. در فصلهای بعدی خواهید دید که هندسهٔ اصل موضوعی چقدر با هندسهٔ شهودی اقلیدس متفاوت بوده و اقلیدس تا چه حد در باب هندسهٔ خود قصور کرده است.

۱.۲.۲. ترسیمات زیر را به کمک ستاره (خط‌کش نامدرج) و پرگار انجام دهید.

(آ) پاره‌خط AB مفروض است. عمودمنصف آن را رسم کنید.

(ب) خط l و نقطهٔ P بر آن مفروضند. از P خطی بر l عمود کنید.

(پ) خط l و نقطهٔ P غیرواقع بر آن مفروضند. از P خطی بر l عمود کنید.

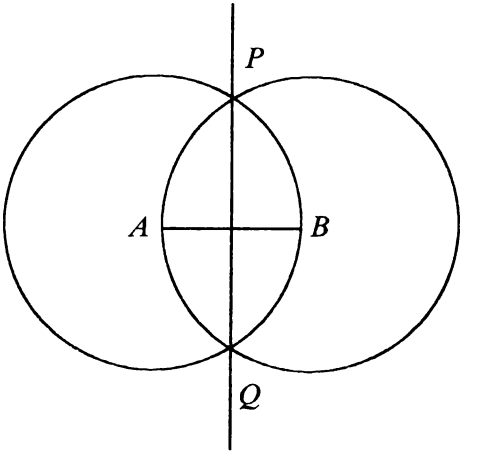
(ت) خط l و نقطهٔ P غیرواقع بر آن مفروضند. از P خطی به موازات l رسم کنید.

(ژ) نیمساز یک زاویه را رسم کنید.

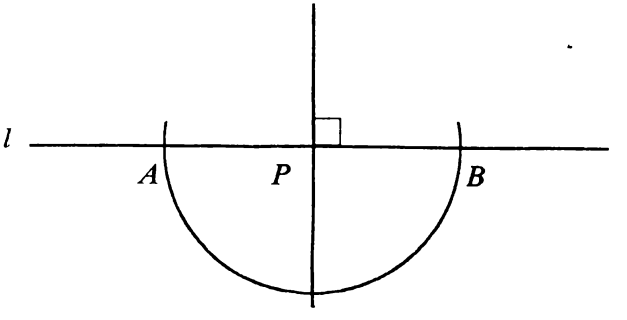
(ج) مثلث ΔABC و پاره‌خط $DE \cong AB$ داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند F در یک طرف مفروض خط $\overleftrightarrow{DE}$ چنان بیابید که $\Delta DEF \cong \Delta ABC$.

(چ) زاویهٔ $\angle ABC$ و نیمخط $\overrightarrow{DE}$ داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند F در یک طرف مفروض خط $\overleftrightarrow{DE}$ چنان بیابید که $\angle ABC \cong \angle EDF$.

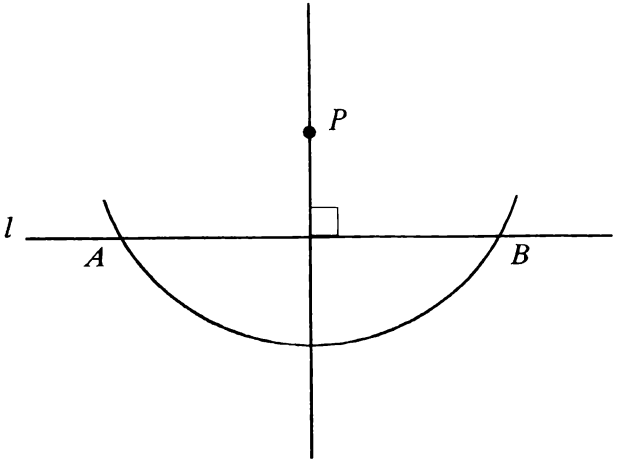
حل. (آ) به مرکز A و شعاع AB یک دایره و به مرکز B و شعاع BA دایره‌ای دیگر می‌زنیم. این دو دایره در دو نقطهٔ P و Q متقاطعند. خط $\overleftrightarrow{PQ}$ را با ستاره می‌کشیم که جواب قسمت (آ) است.



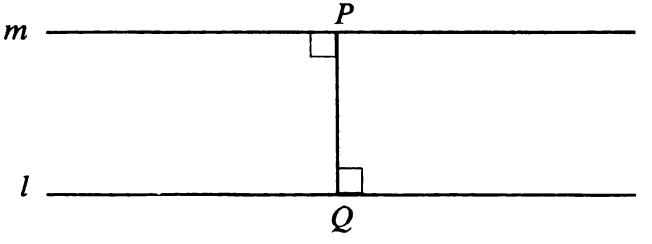
(ب) به مرکز P دایره‌ای می‌زنیم تا خط l را در نقاط A و B قطع کند. حال از قسمت (آ) استفاده کرده، عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف از P گذشته و بر l عمود است.



(پ) به مرکز P دایره‌ای می‌زنیم تا خط l را در نقاط A و B قطع کند. حال از قسمت (آ) استفاده کرده، عمودمنصف AB را می‌کشیم. این عمودمنصف از P گذشته و بر l عمود است.

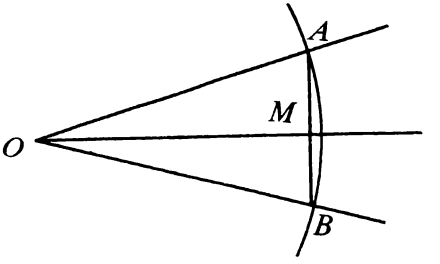


(ت) از P با استفاده از قسمت (پ)، خطی مانند $\overleftrightarrow{PQ}$ بر l عمود کرده و سپس با استفاده از قسمت (ب)، خطی مانند m بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود می‌کنیم. دو خط l و m به دلیل داشتن عمود مشترک (یعنی $\overleftrightarrow{PQ}$) موازیند.

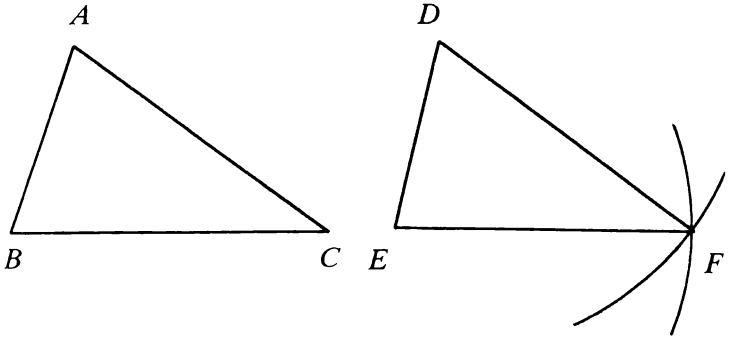


(ث) فرض می‌کنیم O رأس زاویهٔ مورد نظر ما باشد. به مرکز O دایره‌ای می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط A و B قطع کند. حال، با استفاده از قسمت (آ)، عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم. این خط از نقطهٔ O و نقطهٔ میانی AB

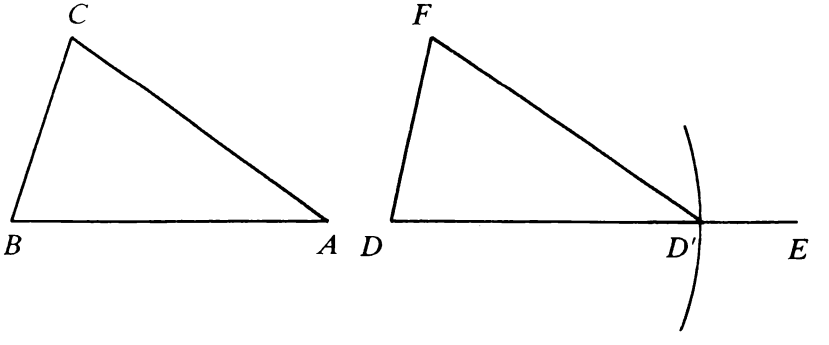
(نقطهٔ M) می‌گذرد و $\overrightarrow{OM}$ جواب مسأله خواهد بود.



(ج) به مرکز D و شعاع AC یک دایره و به مرکز E و شعاع BC دایره‌ای دیگر می‌زنیم. این دو دایره در طرف مفروض $\overleftrightarrow{DE}$ در نقطه‌ای مانند F متقاطعند بطوری که، بنا بر محک ض‌ض‌ض، $\Delta DEF \cong \Delta ABC$.



(چ) مثلث ΔABC را در نظر گرفته و به مرکز D و شعاع BA دایره‌ای می‌زنیم تا نیمخط $\overrightarrow{DE}$ را در نقطه‌ای مانند D' قطع کند. حال، با استفاده از قسمت (ج)، نقطهٔ F را در طرف مفروض $\overleftrightarrow{DD'} = \overleftrightarrow{DE}$ طوری می‌یابیم که $\Delta ABC \cong \Delta D'DF$، درنتیجه $\angle ABC \cong \angle EDF$ (زوایای نظیر).

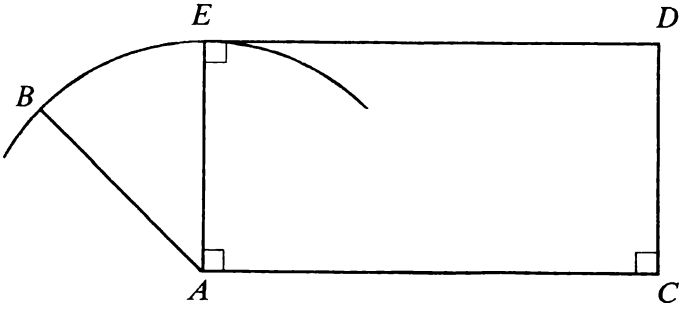


۲.۲.۲. پرگار دو نوع است: پرگار ثابت و پرگار فرو ریختنی. با پرگار ثابت می‌توان طولها را به هر نقطه انتقال داد، ولی این کار با پرگار فرو ریختنی میسر نیست. در مسألهٔ ۱.۲.۲ تحقیق کنید کدام قسمتها را می‌توان با ستاره و پرگار فرو ریختنی انجام داد.

حل. قسمتهای (آ)، (ب)، (پ)، (ت) و (ث) را می‌توان با ستاره و پرگار فرو ریختنی انجام داد، ولی قسمتهای (ج) و (چ) با این ابزارها ممکن نیست.

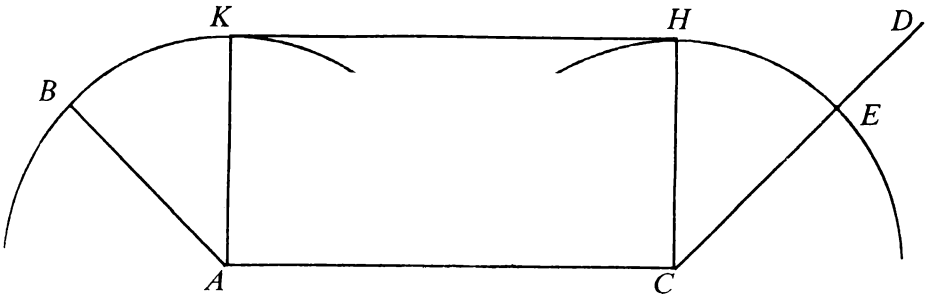
۳.۲.۲. سه نقطهٔ A ، B و C مفروضند. با ستاره و پرگار فرو ریختنی مستطیل $\square ACDE$ به ضلع AC را چنان رسم کنید که $CD \cong AE \cong AB$.

حل. به مرکز A و شعاع AB یک دایره رسم می‌کنیم. حال، طبق مسألهٔ ۱.۲.۲ قسمت (ب)، خطی بر $\overleftrightarrow{AC}$ عمود می‌کنیم تا این دایره را در نقطه‌ای مانند E قطع کند. سپس، طبق مسألهٔ ۱.۲.۲ قسمت (ب)، از E خطی بر $\overleftrightarrow{AE}$ و از C خطی بر $\overleftrightarrow{AC}$ عمود می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌ای مانند D قطع کنند. مستطیل $\square ACDE$ جواب مسأله خواهد بود.



۴.۲.۲. پاره‌خط AB و نیمخط $\overrightarrow{CD}$ مفروضند. با ستاره و پرگار فرو ریختنی نقطهٔ E را بر $\overrightarrow{CD}$ طوری بیابید که $AB \cong CE$.

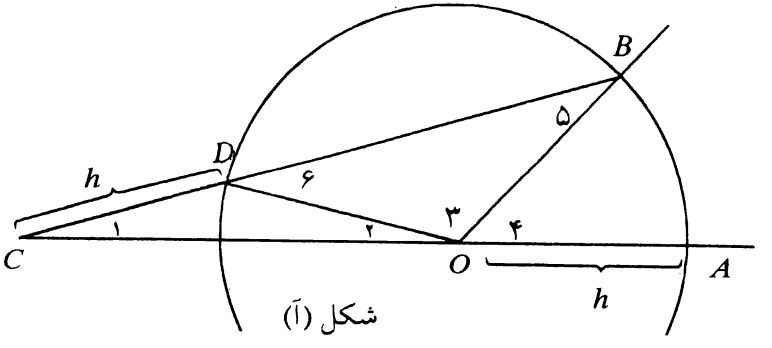
حل. با استفاده از مسألهٔ ۳.۲.۲، مستطیل $\square ACHK$ را طوری می‌سازیم که $CH \cong AK \cong AB$. حال به مرکز C و شعاع CH دایره‌ای می‌زنیم تا نیمخط $\overrightarrow{CD}$ را در نقطه‌ای مانند E قطع کند. E جواب مسأله خواهد بود.



این مسأله نشان می‌دهد که پاره‌خطها را می‌توان با استفاده از ستاره و پرگار فروریختنی نیز انتقال داد. پس همهٔ ترسیمات مسألهٔ ۱.۲.۲ با ستاره و پرگار فرو ریختنی نیز قابل انجام است؛ یعنی ستاره و پرگار فرو ریختنی با ستاره و پرگار ثابت همقوت هستند.

۵.۲.۲. ثابت کنید هر زاویه را می‌توان با خط‌کش و پرگار به سه قسمت مساوی تقسیم کرد.

حل. یک زاویه به رأس O را در نظر گرفته و دایره‌ای به مرکز O و شعاع h رسم می‌کنیم تا اضلاع آن را در نقاطی چون A و B قطع کند. حال، خط‌کش را طوری قرار می‌دهیم که یکی از نشانه‌هایش نقطه‌ای مانند C از خط $\overleftrightarrow{OA}$ باشد بطوری که O بین A و C قرار گیرد و نشانهٔ دیگر در نقطه‌ای مانند D بر دایره واقع شود بطوری که طول CD مساوی h بوده و امتداد خط‌کش از B بگذرد. در این صورت زاویهٔ $\angle COD$ یک سوم زاویهٔ $\angle AOB$ خواهد بود. برای اثبات این امر به دو شکل زیر که در اولی زاویهٔ ما حاده و در دومی زاویهٔ ما منفرجه است، توجه می‌کنیم. در شکل (آ)، با استفاده از قضیهٔ زاویهٔ بیرونی داریم



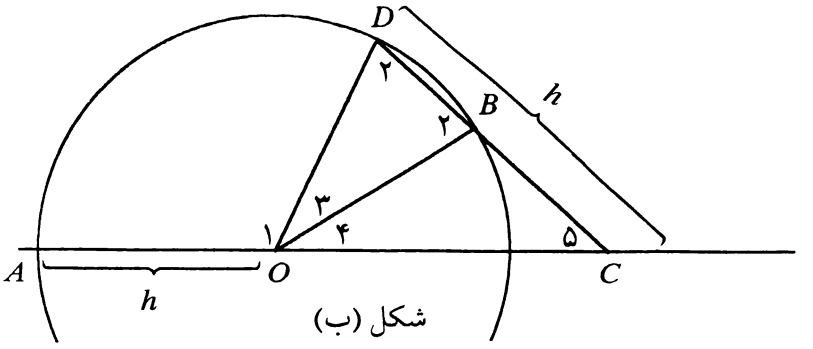
شکل (آ)

$$\hat{۴} = \hat{۱} + \hat{۵} = \hat{۱} + \hat{۶} = \hat{۱} + \hat{۱} + \hat{۲} = \hat{۲} + \hat{۲} + \hat{۲} = ۳ \times \hat{۲}.$$

پس

$$\angle AOB = ۳ \angle COD.$$

و در شکل (ب)، طبق قضیهٔ زاویهٔ بیرونی داریم



شکل (ب)

$$\hat{۱} = \hat{۲} + \hat{۵} = \hat{۴} + \hat{۵} + \hat{۵} = ۲ \times \hat{۵} + \hat{۴}.$$

پس

$$\hat{۱} + \hat{۳} = ۲ \times \hat{۵} + \hat{۳} + \hat{۴} = ۳ \times \hat{۵}.$$

لذا،

$$\angle AOB = ۳ \angle COD.$$

برای زاویهٔ قائمه می‌توان همان شکل (آ) را به کار برد (توضیح دهید).

۶.۲.۲. عدد $k = \frac{(۱ + \sqrt{۵})}{۲}$ **نسبت زرین** و مستطیلی که نسبت اضلاعش مساوی این عدد باشد، **مستطیل زرین** نام دارد. ثابت کنید با ستاره و پرگار می‌توان یک مستطیل زرین رسم کرد.

حل. پاره‌خط دلخواه AB را در نظر می‌گیریم. به کمک مسألهٔ ۱.۲.۲ قسمت (ب)، مربع $ABCD$ □ را روی AB می‌سازیم و به کمک مسألهٔ ۱.۲.۲ قسمت (آ)، نقطهٔ میانی AB (یعنی M) را به دست می‌آوریم. حال به مرکز M و شعاع MC دایره‌ای می‌زنیم تا $\overleftrightarrow{AB}$ را در نقطهٔ E، که B بین M و E است، قطع کند. سپس، طبق مسألهٔ ۱.۲.۲ قسمت (پ)،

عمود $\overleftrightarrow{EF}$ را بر $\overleftrightarrow{DC}$ فرود می‌آوریم. در این صورت مستطیل $AEFD$ □ یک مستطیل زرین است. چرا که اگر a طول ضلع مربع $ABCD$ □ باشد،

$$\overline{MB}\ (\text{طول پاره‌خط } MB) = \frac{a}{۲}$$

و

$$\overline{BE} = \overline{MC} - \overline{MB} = \sqrt{a^{۲} + \frac{a^{۲}}{۴}} - \frac{a}{۲}$$

$$= \frac{a\sqrt{۵}}{۲} - \frac{a}{۲} = a\left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right).$$

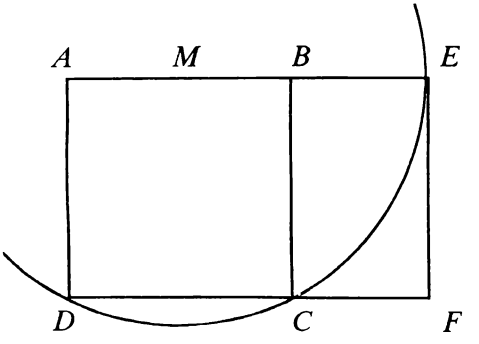
لذا،

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BE} = a + \frac{a\sqrt{۵}}{۲} - \frac{a}{۲} = \frac{a}{۲} + \frac{a\sqrt{۵}}{۲} = a\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right).$$

بنابراین در مستطیل $AEFD$ □ نسبت اضلاع مساوی است با

$$\frac{a\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)}{a} = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} = k;$$

یعنی این مستطیل یک مستطیل زرین است.



توجه کنید که مستطیل $BCFE$ □ نیز یک مستطیل زرین است. زیرا

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{a}{a\left(\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}\right)} = \frac{۲}{\sqrt{۵}-۱} = \frac{۲(\sqrt{۵}+۱)}{۵-۱} = \frac{۲(۱+\sqrt{۵})}{۴}$$

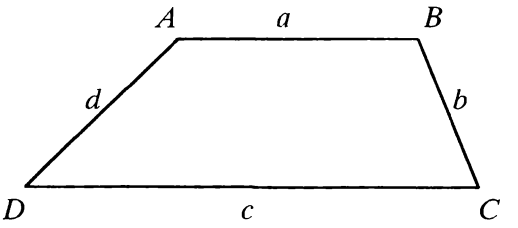
$$= \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲} = k.$$

۷.۲.۲. ثابت کنید هرگاه طولهای اضلاع یک چهارضلعی a، b، c و d باشند، مساحتش (S) در نامساوی

$$۴S \leq (a + c)(b + d)$$

صدق می‌کند و این نامساوی در صورت مستطیل بودن چهارضلعی به تساوی بدل می‌شود.

حل.



داریم

$$S_{\Delta ABC} = \frac{ab \sin B}{۲} \leq \frac{ab}{۲};$$

$$S_{\Delta ACD} = \frac{cd \sin D}{۲} \leq \frac{cd}{۲};$$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{ad \sin A}{۲} \leq \frac{ad}{۲};$$

$$S_{\Delta BCD} = \frac{bc \sin C}{۲} \leq \frac{bc}{۲}.$$

بنابراین،

$$(*) \qquad ۲S = \frac{ab \sin B}{۲} + \frac{cd \sin D}{۲} + \frac{ad \sin A}{۲} + \frac{bc \sin C}{۲}$$

$$\leq \frac{ab + cd + ad + bc}{۲}.$$

لذا، داریم

$$۴S \leq ab + cd + ad + bc = (a + c)(b + d).$$

اگر چهارضلعی مستطیل باشد،

$$\sin A = \sin B = \sin C = \sin D = ۱ .$$

پس، از رابطهٔ (*) داریم

$$۲S = \frac{ab}{۲} + \frac{cd}{۲} + \frac{ad}{۲} + \frac{bc}{۲}$$
$$= \frac{(a+c)(b+d)}{۲}$$

یا

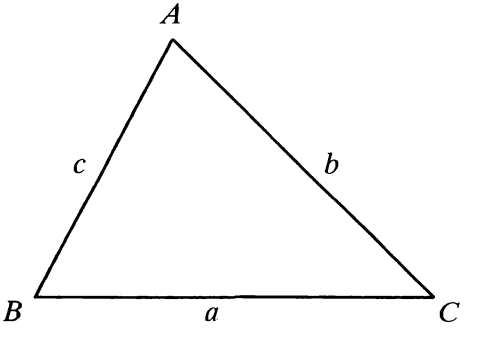
$$۴S = (a+c)(b+d) .$$

۸.۲.۲. ثابت کنید هرگاه طولهای اضلاع مثلث ΔABC برابر a، b و c باشند، مساحتش (S) در نامساوی

$$۴S\sqrt{۳} \leq a^۲ + b^۲ + c^۲$$

صدق می‌کند و این نامساوی در صورت متساوی‌الاضلاع بودن مثلث، به تساوی بدل می‌شود.

حل. از فرمول کسینوسها داریم



$$a^{۲} = b^{۲} + c^{۲} - ۲bc \cos A.$$

پس

$$\cos A = \frac{b^{۲} + c^{۲} - a^{۲}}{۲bc}. \qquad (*)$$

اما،

$$۲S = bc \sin A.$$

لذا،

$$\sin A = \frac{۲S}{bc}. \qquad (**)$$

از طرفی داریم

$$\cos(۶۰ - A) = \cos ۶۰ \cos A + \sin ۶۰ \sin A$$

$$= \frac{۱}{۲} \cos A + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \sin A.$$

حال در فرمول فوق به جای $\cos A$ و $\sin A$، مقادیر (*) و (**) را می‌گذاریم:

$$\cos(۶۰-A) = \frac{۱}{۲} \frac{b^{۲} + c^{۲} - a^{۲}}{۲bc} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} \cdot \frac{۲S}{bc} = \frac{b^{۲} + c^{۲} - a^{۲}}{۴bc} + \frac{۴S\sqrt{۳}}{۴bc}.$$

ولی، $\cos(۶۰ - A) \leq ۱$. پس داریم

$$\frac{b^{۲} + c^{۲} - a^{۲}}{۴bc} + \frac{۴S\sqrt{۳}}{۴bc} \leq ۱$$

یا

$$b^{۲} + c^{۲} - a^{۲} + ۴S\sqrt{۳} \leq ۴bc$$

یا

$$۴S\sqrt{۳} \leq ۴bc + a^{۲} - b^{۲} - c^{۲}.$$

اما،

$$۴bc + a^{۲} - b^{۲} - c^{۲} \leq a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}.$$

زیرا نامساوی فوق با نامساویهای زیر هم‌ارز است.

$$۴bc \leq ۲(b^{۲} + c^{۲})$$

$$۲bc \leq b^{۲} + c^{۲}$$

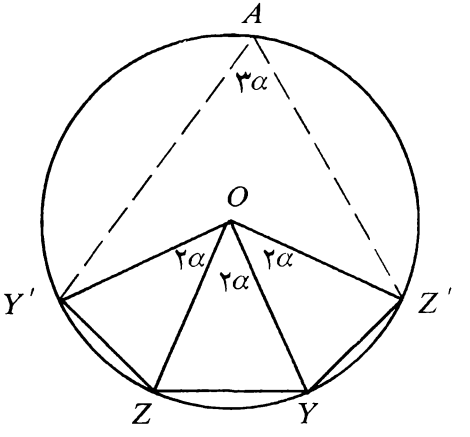
$$(b-c)^{۲} \geq ۰.$$

لذا، رابطهٔ

$$۴S\sqrt{۳} \leq a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}$$

برقرار است. اگر مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، $a = b = c$. پس، مثلث به قاعدهٔ a و ارتفاع $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ خواهد بود. لذا، $S = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{a}{۲}$ یا $S = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$. پس، طرف اول با $۴S\sqrt{۳} = ۳a^{۲}$ مساوی است و طرف دوم نیز برابر است با $a^{۲} + a^{۲} + a^{۲} = ۳a^{۲}$ و تساوی را خواهیم داشت.

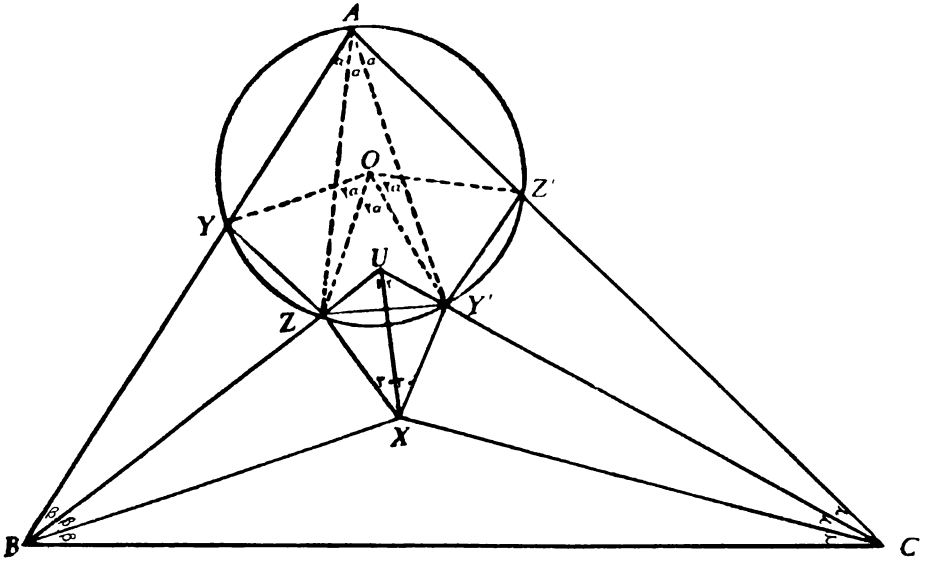
۹.۲.۲. چهار نقطهٔ Y'، Z، Y و Z' چنانند که $\overline{Y'Z} = \overline{ZY} = \overline{YZ'}$ (یعنی طول پاره‌خطها مساویند) و نیز داریم $\angle Y'ZY \cong \angle ZYZ' = \pi - ۲\alpha > \frac{\pi}{۳}$ که در آن $\alpha > ۰$. ثابت کنید این نقاط بر یک دایره قرار دارند؛ به علاوه هر نقطه مانند A که با Y در دو طرف خط $\overleftrightarrow{Y'Z'}$ واقع بوده و $\angle Y'AZ' = ۳\alpha$ نیز بر همان دایره قرار خواهد داشت.



حل. نیمسازهای دو زاویهٔ $\angle Y'ZY$ و $\angle ZYZ'$ را رسم می‌کنیم. چون هر یک از این دو زاویه برابر $\pi - ۲\alpha$ است، این دو نیمساز طبق اصل پنجم اقلیدس، در نقطه‌ای مانند O متقاطعند. سه مثلث $\Delta OY'Z$ ، ΔOZY و $\Delta OYZ'$ دو به دو به حالت ض ز ض، قابل انطباقند. پس $\overline{OY'} = \overline{OZ} = \overline{OY} = \overline{OZ'}$. لذا، چهار نقطهٔ Y'، Z، Y و Z' بر دایره‌ای به مرکز O و شعاع $\overline{OY'}$ قرار دارند. همچنین از اینکه $\angle OY'Z \cong \angle OZY'$ و هر

یک برابر $\frac{\pi}{۲} - \alpha$ است، زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر $Y'Z$ مساوی ۲α خواهد بود. به همین ترتیب معلوم می‌شود که زوایای مرکزی مقابل به وترهای ZY و YZ' نیز ۲α هستند؛ یعنی زاویهٔ مرکزی $\angle Y'OZ'$ برابر ۶α خواهد بود. چون طبق فرض $\pi - ۲\alpha > \frac{\pi}{۳}$، پس $\alpha < \frac{\pi}{۳}$. لذا، $\angle Y'OZ' = ۶\alpha < ۲\pi$. حال، فرض می‌کنیم A نقطه‌ای باشد که با Y در دو طرف خط $\overleftrightarrow{Y'Z'}$ بوده و $\angle Y'AZ' = ۳\alpha < \pi$. چون این زاویه مقابل به قوس $Y'Z' = ۶\alpha$ بوده و برابر ۳α است، پس باید یک زاویهٔ محاطی باشد؛ درنتیجه روی دایرهٔ فوق‌الذکر قرار دارد.

۱۰.۲.۲. قضیهٔ مورلی (*Morley*) را ثابت کنید: در مثلث ΔABC از هر رأس دو نیمخط رسم می‌کنیم تا زاویهٔ مربوط را به سه قسمت مساوی تقسیم کنند. ثابت کنید این نیمخطها یک مثلث متساوی‌الاضلاع پدید می‌آورند.



حل. مطابق شکل، نیمخطهایی که زوایای $\angle B$ و $\angle C$ را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند در نقاط U و X متقاطعند. در مثلث ΔBCU، X محل برخورد نیمسازهای دو زاویهٔ درونی است. پس $\overrightarrow{UX}$ نیمساز زاویهٔ $\angle U$ است ($\angle U_۱ \cong \angle U_۲$). روی نیمخطهای $\overrightarrow{CU}$ و $\overrightarrow{BU}$ نقاط Y و Z را به ترتیب چنان می‌گیریم که $\overrightarrow{XY}$ و $\overrightarrow{XZ}$ با $\overrightarrow{XU}$ و در طرفین آن زوایای ۳۰ درجه بسازند. مثلثهای ΔUXY و ΔXUZ قابل انطباقند (محک

ز ض ز) و چون زاویهٔ $\angle YXZ$ مساوی ۶۰ درجه است، پس ΔXYZ متساوی‌الاضلاع است.

حال ثابت می‌کنیم سه نقطهٔ X، Y و Z درواقع نقاط تلاقی نیمخطهایی هستند که زوایای مثلث ΔABC را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. برای این کار می‌گوییم مثلث ΔUZY متساوی‌الساقین است. چون اندازه‌های دو زاویه از مثلث ΔUBC برابر ۲β و ۲γ است، پس اندازهٔ هر یک از زوایای $\angle Y$ و $\angle Z$ در مثلث ΔUYZ برابر است با $\beta + \gamma$. زیرا در مثلث ΔUZY داریم

$$\angle Y + \angle Z = \pi - \angle U = \pi - (\pi - ۲\beta - ۲\gamma) = ۲\beta + ۲\gamma .$$

چون $\angle Y \cong \angle Z$، پس

$$۲\angle Y = ۲\beta + ۲\gamma .$$

لذا،

$$\angle Y \cong \angle Z = \beta + \gamma .$$

ازطرفی طبق فرض داریم $\angle A = ۳\alpha$. با توجه به‌اینکه $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$ و $\angle A = ۳\alpha$، $\angle B = ۳\beta$ و $\angle C = ۳\gamma$، نتیجه می‌شود که $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{۳}$. لذا، $\beta + \gamma = \frac{\pi}{۳} - \alpha$. بنابراین

$$\angle XZU = \pi - (\frac{\pi}{۲} - \beta - \gamma + \frac{\pi}{۶}) = \frac{\pi}{۳} + \beta + \gamma = \frac{۲\pi}{۳} - \alpha \cdot$$

حال، روی BA و CA نقاط Y' و Z' را به ترتیب طوری اختیار می‌کنیم که $\overline{BY'} = \overline{BX}$ و $\overline{CZ'} = \overline{CX}$. داریم $\Delta BZX \cong \Delta BZY'$ (محک ض‌زض) و $\Delta CYX \cong \Delta CYZ'$ (محک ض ز ض). پس،

$$\overline{Y'Z} = \overline{ZX} = \overline{ZY} = \overline{YZ'} .$$

چون $\angle YZU = \beta + \gamma = \frac{\pi}{۳} - \alpha$، پس

$$\angle Y'ZY \cong \angle YZU + \angle UZY' \ (\cong \angle XZU) = (\frac{\pi}{۳} - \alpha) + (\frac{۲\pi}{۳} - \alpha) = \pi - ۲\alpha .$$

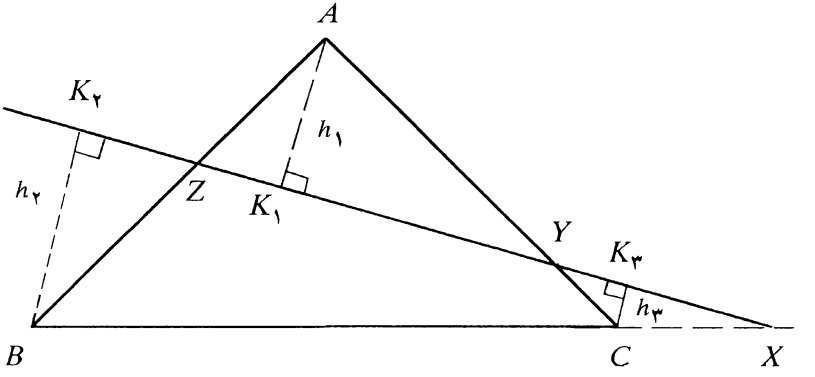
همچنین اندازهٔ زاویهٔ $\angle ZYZ'$ نیز برابر $\pi - ۲\alpha$ است و $\alpha = \frac{\angle A}{۳} < \frac{\pi}{۳}$. بنابراین $\pi - ۲\alpha > \frac{\pi}{۳}$. و با توجه به مسألهٔ ۹.۲.۲، پنج نقطهٔ Y'، Z، Y، Z' و A بر یک دایره واقعند و وترهای مساوی $\overline{Y'Z}$، $\overline{ZY}$ و $\overline{YZ'}$ روبرو به زاویه‌های به اندازهٔ α و به رأس A

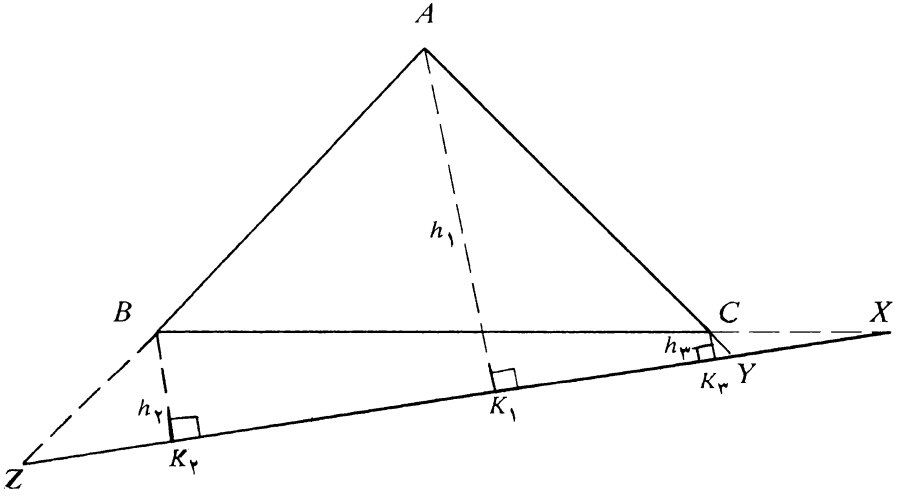
هستند و نیمخطهای $\overrightarrow{AZ}$ و $\overrightarrow{AY}$ زاویهٔ $\angle A$ را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. به عبارت دیگر، نقاط X، Y و Z را چنان تعیین کرده‌ایم که رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاعند و در نقاط تلاقی نیمخطهایی هستند که هر یک از زوایای مثلث ΔABC را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند.

۱۱.۲.۲. قضیهٔ منلائوس (*Menelaus*) را ثابت کنید: شرط لازم و کافی برای آنکه سه نقطهٔ X، Y و Z واقع بر اضلاع BC، CA و AB (یا بر امتداد آنها) از مثلث ΔABC بر یک استقامت باشند آن است که

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = ۱ . \qquad (*)$$

حل.





خطوط $\overleftrightarrow{BK_۲}$ و $\overleftrightarrow{CK_۳}$ موازیند. پس داریم $\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} = \frac{h_۲}{h_۳}$.

خطوط $\overleftrightarrow{AK_۱}$ و $\overleftrightarrow{CK_۳}$ موازیند. پس داریم $\frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} = \frac{h_۳}{h_۱}$.

خطوط $\overleftrightarrow{AK_۱}$ و $\overleftrightarrow{BK_۲}$ موازیند. پس خواهیم داشت $\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{h_۱}{h_۲}$.

از ضرب طرفین این تساویها رابطهٔ (*) به دست می‌آید.

حال، فرض می‌کنیم رابطهٔ (*) برقرار باشد. اگر Z' محل برخورد $\overleftrightarrow{AB}$ با $\overleftrightarrow{XY}$ باشد، طبق استدلال فوق داریم

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{CX}} \cdot \frac{\overline{CY}}{\overline{AY}} \cdot \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} = ۱ .$$

از مقایسهٔ این رابطه با (*) معلوم می‌شود که

$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{AZ'}}{\overline{BZ'}} .$$

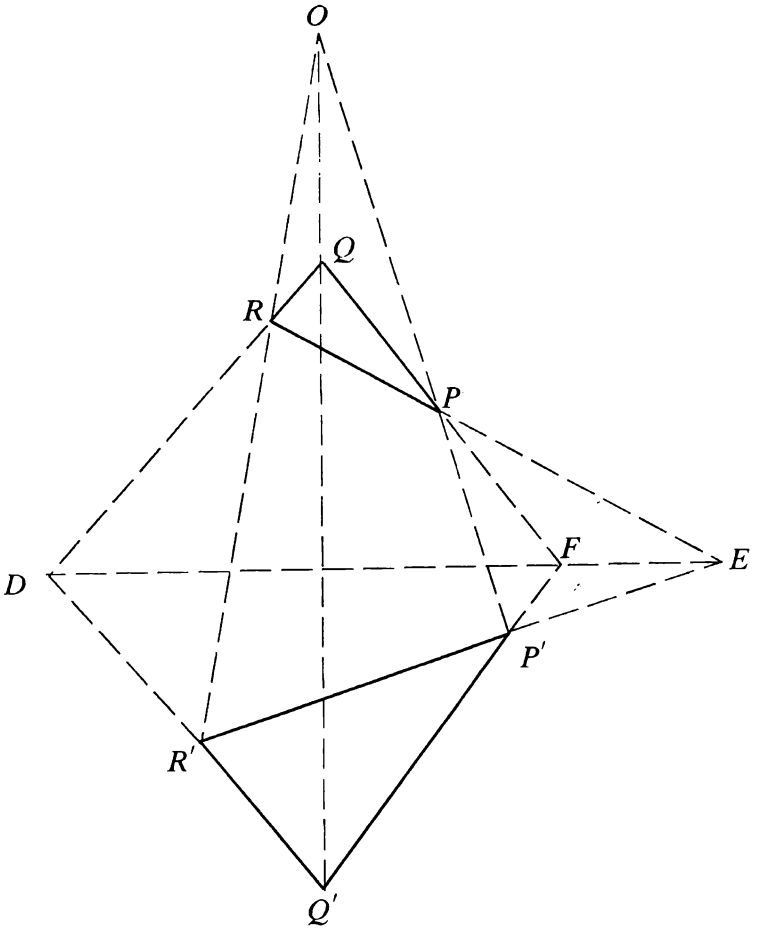
لذا، نقاط Z و Z' یکی‌اند (چرا؟) و سه نقطهٔ X، Y و Z بر یک استقامتند.

۱۲.۲.۲. قضیهٔ دزارگ (*Dezargues*) را ثابت کنید: هرگاه رؤوس دو مثلث چنان متناظر بوده که خطوط واصل بین رؤوس متناظر متقارب باشند، آنگاه نقاط تلاقی اضلاع متناظر بر یک استقامت قرار دارند.

حل. در مثلث $\Delta\, OQR$ سه نقطهٔ Q'، R' و D روی امتداد اضلاع واقعند. پس، طبق قضیهٔ منلائوس، خواهیم داشت

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{RR'}}{\overline{OR'}} \cdot \frac{\overline{OQ'}}{\overline{QQ'}} = ۱ .$$

در مثلث $\Delta\ ORP$ سه نقطهٔ R'، P' و E روی امتداد اضلاع واقعند. پس، طبق قضیهٔ منلائوس، خواهیم داشت



$$\frac{\overline{RE}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP'}} \cdot \frac{\overline{OR'}}{\overline{RR'}} = ۱ .$$

و در مثلث ΔOPQ سه نقطهٔ P'، Q' و F روی امتداد اضلاع واقعند. پس، طبق قضیهٔ منلائوس، خواهیم داشت

کتابخانه مجازی ریاضیات

$$\frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} \cdot \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ'}} \cdot \frac{\overline{OP'}}{\overline{PP'}} = ۱ .$$

از ضرب نظیر به نظیر این تساویها و ساده‌سازی خواهیم داشت.

$$\frac{\overline{QD}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{RE}}{\overline{PE}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{QF}} = ۱ .$$

پس، طبق قضیهٔ منلائوس، سه نقطهٔ D، E و F که بر امتداد اضلاع مثلث $\Delta\ QRP$ قرار دارند بر یک استقامتند.

لحظهٔ وداع. حال وقت آن است که با هندسه به سبک اقلیدس وداع کنیم. دل کندن از مسائل جالب فوق آسان نیست. ما این سبک و این مسائل را پشت سر می‌گذاریم و به هندسهٔ اصل موضوعی هیلبرت می‌پردازیم. کمی که جلو برویم، روش کسالتبار هیلبرت و سبک جذاب اقلیدس دست به دست هم داده و ما را به یاد مسائل جالب فوق خواهند انداخت. شاید در آن لحظه متقاعد شویم که پایداری چند هزار سالهٔ سبک اقلیدس در برابر روش اصل موضوعی بی‌دلیل نبوده است.

۳

هندسه به سبک هیلبرت

۱.۳ هندسهٔ پایه

۲.۳ مدلها

۳.۳ مسائل

۱.۳ هندسهٔ پایه

در فصل ۱، دیدیم که اقلیدس در اثبات قضایا تا چه حد عاجز است؛ زیرا، تقریباً هر ۴۶۵ حکمی که ثابت کرده است دارای نقصند. یک دلیل عمده، اصول اقلیدس است که مناسب انتخاب نشده‌اند. حال هندسه را به سبک هیلبرت و به نحوی بنا می‌کنیم که بتواند قضایای هندسی را دقیق و بی‌نقص اثبات کند. روش ما اصل موضوعی است و می‌تواند در مباحثی غیر از هندسه نیز به‌کار رود. در فصل ۲، پنج اصطلاح تعریف نشده را اختیار کرده و به کمک آنها مفاهیم اساسی هندسه را تعریف کردیم. این کار از این پس نیز ادامه می‌یابد. در این راه از نظریهٔ مجموعه‌ها که در آسان کردن کار بسیار مؤثر بود،استفاده شد و این در آینده نیز ادامه خواهد داشت. حال اصول هیلبرت را وارد کار می‌کنیم. هیلبرت میان اصولش تمایزی نمی‌گذارد و اصول متعارف ندارد. سبک وی در معرفی اصول، گام به گام است؛ بدین ترتیب که ابتدا بر مفاهیم نقطه، خط و وقوع که در ابتدای هندسه مطرح شده و رابطهٔ تنگاتنگی با هم دارند، سه اصل موضوع گذارده و هندسه‌ای به نام **هندسهٔ پایه** می‌سازد. این سه اصل موضوع به قرار زیر هستند:

پ ۱. *به ازای هر دو نقطهٔ متمایز A و B یک و فقط یک خط وجود دارد که از A و B*

می‌گذرد. این خط را با $\overleftrightarrow{AB}$ نشان می‌دهیم و آن را ***خط نظیر*** دو نقطهٔ A و B یا پاره‌خط AB می‌نامیم (این همان اصل موضوع اول اقلیدس است).

پ ۲. ***بر هر خط لااقل دو نقطه قرار دارد.***

پ ۳. ***لااقل سه نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت وجود دارد.***

هندسهٔ متشکل از سه اصطلاح تعریف نشدهٔ نقطه، خط و وقوع و سه اصل موضوع فوق را **هندسهٔ پایه** می‌نامیم. ابتدا باید استقلال این اصول از یکدیگر ثابت شود. این کار پس از تعریف ***مدل*** صورت خواهد گرفت. با قبول این امر به اثبات قضایا در این هندسه می‌پردازیم. قضایایی که در این هندسه ثابت می‌شوند، صورت بسیار ساده‌ای دارند، ولی از دو نظر ما را شاد می‌سازند: یکی اینکه می‌توانیم آنها را دقیقاً ثابت کنیم و دیگر آنکه اقلیدس قادر به اثبات آنها نبوده است.

به چند قضیه توجه نمایید:

قضیهٔ ۱.۱.۳. ***بر هر خط لااقل یک نقطه قرار دارد.***

برهان. طبق پ ۲.

قضیهٔ ۲.۱.۳. ***به ازای هر خط، نقطه‌ای غیرواقع بر آن وجود دارد.***

برهان. خط دلخواه l را در نظر می‌گیریم. طبق پ ۳، سه نقطه مانند A، B و C غیرواقع بر یک استقامت وجود دارد. می‌گوییم از این سه نقطه لااقل یکی بر l واقع نیست؛ زیرا که اگر هر سه بر l واقع باشند، این نقاط بر یک استقامتند که تناقض است.

قضیهٔ ۳.۱.۳. ***به ازای هر نقطه لااقل یک خط هست که از آن نقطه نمی‌گذرد.***

برهان. نقطهٔ دلخواه P را در نظر می‌گیریم. بنابر پ ۳، سه نقطه مانند A، B و C وجود دارند که بر یک استقامت نیستند. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. P مساوی A یا B یا C است؛

حالت ۲. $P \neq A\ ,\ B\ ,\ C$.

در حالت ۱، فرض می‌کنیم P مثلاً مساوی A باشد (موارد دیگر به همین نحو ثابت می‌شوند). پس $P \neq B\ ,\ C$. خط $\overleftrightarrow{BC}$ را طبق پ ۱ در نظر می‌گیریم. $\overleftrightarrow{BC}$ جواب است و از P نمی‌گذرد؛ زیرا که اگر $\overleftrightarrow{BC}$ از $P = A$ بگذرد، سه نقطهٔ A، B و C بر یک استقامتند که تناقض است.

در حالت ۲، خطوط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ را طبق پ ۱ در نظر می‌گیریم. از این دو خط لااقل یکی جواب است و از P نمی‌گذرد؛ زیرا که اگر هر دو از P بگذرند، $\overleftrightarrow{AB}$ از A و P گذشته و $\overleftrightarrow{AC}$ نیز از A و P گذشته است. پس طبق یکتایی پ ۱، این دو خط یکی‌اند. اما نقاط A و B بر $\overleftrightarrow{AB}$ و نقاط A و C بر $\overleftrightarrow{AC}$ قرار دارند. لذا، سه نقطهٔ A، B و C بر یک استقامتند که تناقض است.

قضیهٔ ۴.۱.۳. ***از هر نقطه لااقل دو خط متمایز می‌گذرد.***

برهان. فرض می‌کنیم P نقطهٔ دلخواهی باشد. بنابر پ ۳، سه نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت مانند A، B و C وجود دارند. دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. P یکی از نقاط سه‌گانهٔ فوق است؛

حالت ۲. P هیچ‌یک از این نقاط نیست.

در حالت ۱، فرض می‌کنیم P مثلاً مساوی A باشد (موارد دیگر به همین نحو ثابت می‌شوند). در این صورت خطوط $\overleftrightarrow{PB}$ و $\overleftrightarrow{PC}$ دو خط مار بر P اند که متمایزند؛ زیرا که اگر این دو خط یکی باشند، سه نقطهٔ A، B و C بر یک استقامتند که تناقض است.

در حالت ۲، از خطوط $\overleftrightarrow{PA}$، $\overleftrightarrow{PB}$ و $\overleftrightarrow{PC}$ که همه از P می‌گذرند لااقل دو تا متمایزند؛ زیرا که اگر هر سه یکی باشند، نقاط A، B و C بر یک استقامتند که تناقض است.

قضیهٔ ۵.۱.۳. ***سه خط دو به دو متمایز وجود دارند که متقارب نیستند (یعنی از نقطهٔ واحدی نمی‌گذرند).***

برهان. بنابر پ ۳، سه نقطه مانند A، B و C وجود دارند که بر یک استقامت نیستند. خطوط $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ را طبق پ ۱ در نظر می‌گیریم. اولاً این سه خط دو به دو متمایزند؛ زیرا که اگر دو تای آنها یکی باشند، سه نقطهٔ A، B و C بر یک استقامت می‌شوند که تناقض است. حال می‌گوییم این سه خط متقارب نیستند. فرض می‌کنیم این

سه خط از نقطه‌ای مانند P بگذرند. P لااقل مخالف یکی از نقاط A، B و C است. مثلاً فرض می‌کنیم $P \neq A$ (موارد دیگر به همین نحو سامان می‌یابند). دو خط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ از A و P می‌گذرند. پس طبق یکتایی پ ۱، $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ لذا، A، B و C بر یک استقامتند که تناقض است.

می‌پرسیم: آیا قضایای دیگری نیز در این هندسه قابل اثباتند؟ جواب تقریباً منفی است. یعنی هیجانی که در اثر اثبات قضایای فوق ایجاد شده بسرعت فروکش می‌کند. این هیجان بیشتر ناشی از آن بود که اقلیدس نمی‌توانست قضایای فوق را ثابت کند. پس اگر در هندسهٔ پایه نتوان پیش رفت و قضایای هندسی را ثابت کرد، این هندسه نمی‌تواند همهٔ هندسهٔ اقلیدسی باشد. این حدس درست است ولی باید آن را ثابت کرد. ما این کار را پس از معرفی مدلها خواهیم کرد. به عبارت دیگر، با استفاده از مدلها ثابت می‌کنیم که هندسهٔ پایه تام نیست. پس از این کار، گام دیگری برداشته و هندسهٔ پایه را به امید رساندن به هندسهٔ اقلیدسی بسط می‌دهیم. حال به مدلها می‌پردازیم.

۲.۳ مدلها

ما قبلاً با دستگاههای اصل موضوعی آشنا شده‌ایم. مثلاً گروه، حلقه، میدان و فضای برداری، چند دستگاه اصل موضوعی در جبر هستند. **گروه**، یک دستگاه اصل موضوعی است مرکب از دو اصطلاح تعریف نشدهٔ **مجموعه** و **عمل** و سه ***اصل موضوع***. در گروهها دیدیم که مجموعه و عمل به عناوین مختلف تعبیر می‌شوند. اگر تعبیر چنان باشد که اصول موضوع گروه درست باشند، می‌گوییم این تعبیر یک مثال یا یک مدل از گروههاست؛ در غیر این صورت در حد تعبیر باقی می‌ماند. مثلاً مجموعهٔ اعداد حقیقی با عمل جمع یک مثال یا یک مدل از گروههاست. ولی مجموعهٔ اعداد طبیعی با عمل جمع یک مدل از گروهها نیست و فقط یک تعبیر ناموفق است. وضع در هندسه به همین منوال است. می‌توان اصطلاحات تعریف نشدهٔ هندسهٔ پایه را تعبیر کرد و به یک **تعبیر** از دستگاه رسید. اگر در این تعبیر اصول سه‌گانهٔ این هندسه درست بودند، تعبیر را یک ***مدل*** از این دستگاه می‌نامیم؛ در غیر این صورت تعبیر در حد **تعبیر** باقی خواهد ماند. مدلها فواید بیشماری دارند که پس از چند مثال به خواصی از آنها اشاره خواهیم کرد.

مثال ۱.۲.۳. **(نخستین مدل اقلیدسی).**

نقطه را نقطهٔ اقلیدسی، خط را خط اقلیدسی و وقوع را به‌معنی اقلیدسی می‌گیریم. بدین ترتیب به تعبیری از هندسهٔ پایه می‌رسیم که همان دیدگاه اقلیدس از هندسه است. حال ببینیم این تعبیر یک مدل است یا نه. باید اصول سه‌گانهٔ هندسهٔ پایه را امتحان کنیم. این اصول دقیقاً احکام صحیحی نیستند، ولی به صورت احکام صحیحی **جلوه** می‌کنند. پس این تعبیر با کمی اغماض (که در ریاضیات جایز نیست) یک مدل برای هندسهٔ پایه است که آن را ***نخستین مدل اقلیدسی*** می‌نامیم. نکتهٔ مهم و تأسف‌بار این است که تمام دیدگاه اقلیدس از هندسه در همین مدل خلاصه می‌شود. یعنی بیش از ۲ هزار سال است که اقلیدس ما را در این مدل تنگ و تاریک حبس کرده است. دیدگاه اقلیدس از هندسه همانند محدود شدن به مجموعهٔ اعداد حقیقی و عمل جمع و چشم‌پوشی از گروه، حلقه، ... و سایر دستگاههای اصل موضوعی جبر است. سؤال این است که مگر هندسهٔ پایه مدلهای جالبتری دارد؟ در زیر به چند مدل دیگر از این هندسه می‌پردازیم که نه تنها مدلهای کاملی از این هندسه‌اند، بلکه از جهاتی از نخستین مدل اقلیدسی جالبترند.

مثال ۲.۲.۳ **(مدل سه نقطه‌ای).**

سه حرف A، B و C را نقطه و سه مجموعهٔ $\{A, B\}$، $\{A, C\}$ و $\{B, C\}$ را خط می‌گیریم و فرض می‌کنیم وقوع به معنی تعلق باشد، بدین معنی که نقاط A و B به دلیل تعلق به مجموعهٔ $\{A, B\}$ روی این خط واقعند، ولی C روی این خط قرار ندارد. ترسیم هندسی این خطوط مانند خطوط اقلیدسی مقدور نیست و درنتیجه به ما که با سبک اقلیدس خو گرفته‌ایم، احساس هندسی نمی‌بخشد. آنچه در این فضا می‌گوییم باید متکی بر تعریفها باشد.این یک تعبیر از هندسهٔ پایه است. حال ببینیم این تعبیر مدل است یا نه. اصل اول درست است، زیرا از هر دو نقطه (مثلاً A و B) یک خط و فقط یک خط ($\{A, B\}$) می‌گذرد. اصل دوم نیز درست است، زیرا هر خط (مثلاً $\{A, B\}$) درست دو نقطه (A و B) برخود دارد. اصل سوم نیز برقرار است، زیرا سه نقطهٔ A، B و C بر یک استقامت نیستند. پس این تعبیر یک مدل برای هندسهٔ پایه است. این مدل نسبت به مدل ناقص اقلیدسی دارای این مزیت است که اصول سه‌گانهٔ هندسهٔ پایه در آن کاملاً برقرارند. ولی مشکل این مدل آن است که دید سالمی از هندسهٔ اقلیدسی به ما نمی‌دهد که بتوان آن را جایگزین مدل اقلیدسی کرد. مثلاً، در این مدل خطوط موازی

نداریم و هر دو خط متقاطع هستند. مدلها درواقع بخشی از خواص دستگاه اصلی را منعکس می‌کنند و بدترین‌شان آنهایی هستند که خواص اصلی دستگاه را کور نمایند. مثلاً، فرض کنید بخواهیم مجموعه‌ای از خطوط فضایی را از روی تصویرشان روی صفحات مختصات مطالعه کنیم. این تصاویر، به نوعی مدلهای دستگاه ما هستند. حال اگر تصویر روی صفحه‌ای مطالعه شود که بر بسیاری از خطوط عمود است، این تصویر گویای دستگاه ما نیست؛ چراکه بسیاری از خطوط به نقطه خفه شده‌اند. همین وضع در مورد مدلها نیز رخ می‌دهد. مثلاً با آنکه مدل سه نقطه‌ای مدل کاملی است، ولی مفهوم توازی در آن کور شده و آن را از سکه انداخته است. خوشبختانه این مشکل را می‌توان بآسانی و با افزودن فقط یک نقطه مرتفع ساخت.

مثال ۳.۲.۳. **(مدل چهار نقطه‌ای).** چهارحرف A، B، C و D را نقطه و شش مجموعهٔ دوحرفی $\{A, B\}$، $\{A, C\}$، $\{A, D\}$، $\{B, C\}$، $\{B, D\}$ و $\{C, D\}$ را خط می‌گیریم و فرض می‌کنیم وقوع به معنی تعلق باشد. این یک تعبیر در هندسهٔ پایه است و بآسانی معلوم می‌شود که مدل نیز هست (تحقیق کنید!). در این مدل نه تنها خطوط موازی داریم بلکه اصل توازی اقلیدسی نیز برقرار است؛ یعنی ***از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط تنها یک خط به موازات خط اول می‌گذرد.*** ولی اثبات این اصل در نخستین مدل اقلیدسی تنها یک آرزوست که هزاران سال بهترین مغزهای ریاضی را به مبارزه طلبیده است. این امر، مدل چهارنقطه‌ای را بر نخستین مدل اقلیدسی رجحان می‌دهد. ولی این خاصیت که با افزودن یک نقطه به دست آمد با اضافه کردن یک نقطهٔ دیگر از بین می‌رود. مانند مثال زیر:

مثال ۴.۲.۳. **(مدل پنج نقطه‌ای).** پنج حرف A، B، C، D و E را نقطه و ده مجموعهٔ $\{A, B\}$، $\{A, C\}$، $\{A, D\}$، $\{A, E\}$، $\{B, C\}$، $\{B, D\}$، $\{B, E\}$، $\{C, D\}$، $\{C, E\}$ و $\{D, E\}$ را خط و وقوع را به معنی تعلق می‌گیریم. بآسانی معلوم می‌شود که این تعبیر، یک مدل برای هندسهٔ پایه است (تحقیق کنید!). در این مدل، از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط، درست دو خط به موازات خط اول می‌گذرد؛ یعنی در این مدل، اصل توازی اقلیدسی برقرار نیست. به همین نحو می‌توان مدلهای شش نقطه‌ای، هفت نقطه‌ای و غیره داشت

که در آنها نیز اصل توازی اقلیدسی برقرار نیست.

در رابطه با توازی، سه خاصیت زیر قابل ذکر است:

۱. **خاصیت توازی بیضوی.**

از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط صفر خط به موازات خط اول می‌گذرد؛ یعنی هر دو خط متقاطع بوده و خطوط موازی نداریم.

مدلی که دارای این خاصیت باشد یک ***مدل بیضوی*** از ***هندسهٔ بیضوی*** است که آن نیز یک ***هندسهٔ نااقلیدسی*** است. مدل سه نقطه‌ای یک مدل بیضوی است.

۲. **خاصیت توازی اقلیدسی.**

از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط تنها یک خط به موازات خط اول می‌گذرد.

مدلی که دارای این خاصیت باشد یک ***مدل اقلیدسی*** است از ***هندسهٔ اقلیدسی***. مدل چهار نقطه‌ای یک مدل اقلیدسی است. ولی چون تکلیف اصل توازی اقلیدسی (لااقل تا این لحظه) در نخستین مدل اقلیدسی معلوم نیست، به اکراه آن را یک مدل اقلیدسی به حساب می‌آوریم.

۳. **خاصیت توازی هذلولوی.**

از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط بیش از یک خط به موازات خط اول می‌گذرد.

مدلی که دارای این خاصیت باشد یک ***مدل هذلولوی*** است از ***هندسهٔ هذلولوی*** که یک ***هندسهٔ نااقلیدسی*** است. مدلهای پنج نقطه‌ای و بیش از پنج نقطه مدلهایی هذلولوی هستند.

مدلها خواص بیشماری دارند و نمونه‌های ملموس دستگاه اصل موضوعی هستند. یکی از خواص آنها، پیشنهاد قضیه در دستگاه اصل موضوعی مربوطه است. مدلها محل استراحت و تفکر ریاضیدان است و از آنجاست که وی چشم به دستگاه اصل موضوعی می‌دوزد. مدلها آزمایشگاههایی هستند برای تجربه کردن. یکی از خواص مهم آنها در مسألهٔ ۱.۳.۳ به کار گرفته شده است. خاصیت دیگر مدلها این است که تمام قضایای یک دستگاه اصل موضوعی در هر مدل آن برقرارند. لذا، هر مدل را می‌توان تجسم ملموسی از دستگاه اصلی گرفت. خاصیت دیگر و تا حدی اعجاب‌آور، اثبات تام بودن یک

دستگاه به‌وسیلهٔ مدلهاست. یک دستگاه اصل موضوعی در صورتی **تام** است که برای هر حکم مطرح شده در آن اثبات یا انکاری وجود داشته باشد.

حال ثابت می‌کنیم هندسهٔ پایه تام نیست.

قضیهٔ ۵.۲.۳. ***هندسهٔ پایه تام نیست.***

برهان. فرض می‌کنیم این هندسه تام باشد. اصل توازی اقلیدسی را در نظر می‌گیریم: *از یک **نقطهٔ غیرواقع بر یک خط تنها یک خط به موازات خط اول می‌گذرد.*** این حکم در هندسهٔ پایه قابل بیان است. پس باید برای آن اثبات یا انکاری موجود باشد. فرض می‌کنیم برای آن اثباتی وجود داشته باشد. این اثبات را می‌توان در مدل سه نقطه‌ای برد و یک اثبات در این مدل به دست آورد. اما در این مدل خطوط موازی وجود ندارند و این یک تناقض است.

حال فرض می‌کنیم برای حکم فوق یک انکار وجود داشته باشد.این انکار را در مدل چهار نقطه‌ای برده و انکاری در این مدل به دست می‌آوریم. اما اصل توازی اقلیدسی در مدل چهار نقطه‌ای قابل اثبات است و این نیز یک تناقض است.

لذا، هندسهٔ پایه تام نیست و نمی‌تواند تمام هندسهٔ اقلیدسی باشد. پس برای رسیدن به هندسهٔ اقلیدسی، باید هندسهٔ پایه را وسعت داد و این کار برنامهٔ ما در فصل بعد است. توجه کنید که در قضیهٔ فوق اگر به جای مدل چهار نقطه‌ای، نخستین مدل اقلیدسی را اختیار می‌کردیم نتیجهٔ قانع کننده‌ای به دست نمی‌آمد، زیرا تکلیف اصل توازی اقلیدسی در این مدل روشن نیست و از شروط لازم برای برقراری آن در این مدل فعلاً بی‌اطلاعیم. اینجاست که مزیت مدل چهار نقطه‌ای بر مدل اقلیدسی روشن می‌شود. نتیجه آنکه اقلیدس بیش از ۲ هزار سال ما را در خانه‌ای حبس کرده است که برای یافتن آرامش چشم به خانهٔ همسایه دوخته‌ایم.

۳.۳ مسائل

۱.۳.۳. ثابت کنید اصول سه‌گانهٔ هندسهٔ پایه از یکدیگر مستقلند.

حل. برای اثبات.کافی است سه تعبیر از هندسهٔ پایه بیابیم که در هر یک، دو اصل موضوع

صادق بوده و سومی برقرار نباشد (چرا؟).

تعبیر ۱. فرض می‌کنیم A و B نقطه، $\{A , B\}$ خط و وقوع به معنی تعلق باشد. در این تعبیر اصول اول و دوم هندسهٔ پایه برقرارند، ولی اصل سوم برقرار نیست، زیرا فقط دو نقطه بیشتر نداریم. پس، اصل سوم از اصول اول و دوم مستقل است.

تعبیر ۲. نقاط را نقاط اقلیدسی روی کرهٔ ثابتی گرفته، خطوط را قوسهای دوایر عظیمه بین نقاط روی این کره می‌گیریم و فرض می‌کنیم وقوع به معنی اقلیدسی باشد. در این تعبیر اصول دوم و سوم هندسهٔ پایه برقرارند، ولی اصل اول برقرار نیست، زیرا مثلاً از قطبهای شمال و جنوب بی‌نهایت خط می‌گذرد. پس، اصل اول از اصول دوم و سوم مستقل است.

تعبیر ۳. فرض می‌کنیم A، B و C نقاط، $\{A , B\}$، $\{A , C\}$، $\{B , C\}$ و مجموعهٔ تهی ϕ خطوط و وقوع به معنی تعلق باشد. در این تعبیر، اصول اول و سوم هندسهٔ پایه برقرارند ولی اصل دوم برقرار نیست، زیرا باید روی ϕ لااقل دو نقطه واقع باشند که حتی یک نقطه هم واقع نیست، پس اصل دوم نیز از اصول اول و سوم مستقل است. لذا، اصول سه‌گانهٔ هندسهٔ پایه از یکدیگر مستقلند.

۲.۳.۳. تعبیرهای زیر را از هندسهٔ پایه در نظر گرفته و در هر یک، اصول موضوع این هندسه را تحقیق کنید. همچنین در هر تعبیر، خواص توازی بیضوی، اقلیدسی و هذلولوی را تعیین تکلیف نمایید.

(آ) «نقاط» نقاط واقع بر یک کرهٔ ثابت، «خطوط» دوایر عظیمهٔ این کره و «وقوع» به معنی اقلیدسی.

(ب) «نقاط» نقاط واقع بر یک صفحهٔ کاغذ، «خطوط» دوایر مرسوم در آن صفحه و «وقوع» به معنی اقلیدسی.

(پ) «نقاط» مجموعه‌های دو عضوی $\{A , B\}$، $\{A , C\}$ و $\{B , C\}$، «خطوط» سه حرف A، B و C و «وقوع» به معنی عضویت عکس.

(ت) «نقاط» خطوط فضای سه بعدی اقلیدسی، «خطوط» صفحات فضای سه

بعدی اقلیدسی و «وقوع» نسبت معمولی وقوع یک خط بر یک صفحه.

(ث) همان تمرین (ت) با این تفاوت که مسأله را به خطوط و صفحاتی محدود کنید که از نقطهٔ ثابتی مانند O می‌گذرند.

(ج) دایرهٔ ثابتی در صفحهٔ اقلیدسی اختیار کنید. «نقطه» را نقطهٔ معمولی اقلیدسی درون این دایره و «خط» را وتری از این دایره تعبیر و فرض کنید «وقوع» بدین معنی باشد که نقطه به معنی معمولی بر وتر قرار دارد (وتر دایره پاره خطی است که دو سرش بر دایره واقعند).

(چ) کرهٔ ثابتی در فضای سه بعدی اقلیدسی در نظر بگیرید. دو نقطه بر این کره را متقاطر می‌گوییم اگر بر یک قطر از کره واقع باشند. مثلاً قطبهای شمال و جنوب این کره متقاطرند. «نقطه» را مجموعهٔ $\{P\ ,\ P'\}$ مرکب از دو نقطهٔ متقاطر از این کره، «خط» را دایرهٔ عظیمهٔ C واقع بر این کره و «وقوع» را این‌طور تعبیر کنید که نقطهٔ $\{P\ ,\ P'\}$ بر خط C واقع است، اگر یکی از دو نقطهٔ P و P' (و درنتیجه دیگری) بر دایرهٔ عظیمهٔ C واقع باشد.

حل. (آ) پ ۱ برقرار نیست، ولی پ ۲ و پ ۳ برقرارند. این تعبیر دارای خاصیت توازی بیضوی است.

(ب) پ ۱ برقرار نیست، ولی پ ۲ و پ ۳ برقرارند. این تعبیر دارای خاصیت توازی هذلولوی است.

(پ) این تعبیر یک مدل است و دارای خاصیت توازی بیضوی است.

(ت) پ ۱ برقرار نیست، ولی پ ۲ و پ ۳ برقرارند. این تعبیر هیچ‌یک از خواص توازی را ندارد.

(ث) این تعبیر یک مدل است و دارای خاصیت توازی بیضوی است.

(ج) این تعبیر یک مدل است و دارای خاصیت توازی هذلولوی است.

(چ) این تعبیر یک مدل است و دارای خاصیت توازی بیضوی است.

۳.۳.۳. مدلهای M و M' از هندسهٔ پایه را در صورتی **یکریخت** می‌گوییم که تناظری یک به یک مانند f بین نقاط و تناظری یک به یک مانند g بین خطوط دو مدل وجود داشته باشند بطوری که نقطهٔ A روی خط l در M بوده، اگر و فقط اگر $f(A)$ روی خط $g(l)$ در

M' قرار داشته باشد. در این صورت (f, g) را یک **یکریختی** بین مدلهای M و M' می‌نامیم. این تعریف شبیه تعریف یکریختی در گروههاست. ثابت کنید هرگاه M مدل سه نقطه‌ای (مثال ۲.۲.۳) و M^* مدل حاصل از M به‌وسیلهٔ تبدیل نام نقطه به خط و خط به نقطه [مدل مسألهٔ ۲.۳.۳ (پ)] باشد، آنگاه M با M^* یکریخت است. همچنین یک تناظر یک به یک بین نقاط و خطوط این دو مدل مثال بزنید که یکریختی نباشد. مدل M^* را ***دوگان*** M می‌نامند.

حل. فرض می‌کنیم مدل M از نقاط A، B و C و خطوط $\{A , B\}$، $\{A , C\}$ و $\{B , C\}$ تشکیل شده باشد. در این صورت M^* از نقاط $\{A , B\}$، $\{A , C\}$ و $\{B , C\}$ و خطوط A، B و C تشکیل شده است. تناظرهای f و g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(A) = \{A , B\} \qquad g(\{A , B\}) = B$$
$$f(B) = \{B , C\} \qquad g(\{B , C\}) = C$$
$$f(C) = \{A , C\} \qquad g(\{A , C\}) = A$$

بآسانی معلوم می‌شود که (f , g) یک یکریختی است (ثابت کنید!). پس M و M^* یکریخت هستند. هرگاه به جای g تناظر h را به صورت زیر اختیار کنیم

$$h(\{A , B\}) = A \ , \ h(\{B , C\}) = B \ , \ h(\{A , C\}) = C$$

(f , h) یک یکریختی نیست، زیرا مثلاً نقطهٔ A بر خط $\{A , C\}$ واقع است ولی نقطهٔ متناظرش $f(A) = \{A , B\}$ بر خط متناظر $h(\{A , C\}) = C$ واقع نیست.

۴.۳.۳. ثابت کنید هیچ دو مدل که دارای خاصیت توازی متفاوت باشند با هم یکریخت نیستند.

حل. فرض می‌کنیم M مثلاً خاصیت توازی اقلیدسی و M' خاصیت توازی بیضوی داشته باشد. همچنین M و M' تحت یکریختی (f , g) یکریخت باشند. خط l و نقطهٔ P غیرواقع بر آن را در M اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم m تنها خط مار بر P به موازات l باشد. چون این دو مدل یکریختند، $g(m)$ خطی است مار بر نقطهٔ $f(P)$ غیرواقع بر

$g(l)$ در M'. $g(m)$ نمی‌تواند $g(l)$ را قطع کند، زیرا در غیر این صورت l و m نیز متقاطع می‌شوند؛ یعنی $g(l)$ و $g(m)$ در M' موازیند که تناقض است. سایر حالات به همین نحو ثابت می‌شوند (ثابت کنید!).

۵.۳.۳. (آ) ثابت کنید هر دو مدل از هندسهٔ پایه که سه نقطه داشته باشند یکریختند؛

(ب) آیا هر دو مدل که چهار نقطه دارند نیز یکریختند؟

حل. (آ) فرض می‌کنیم A، B و C نقاط مدل اول و A'، B' و C' نقاط مدل دوم باشند. تناظر یک به یک زیر را بین نقاط در نظر می‌گیریم.

$$f \begin{cases} A \longleftrightarrow A' \\ B \longleftrightarrow B' \\ C \longleftrightarrow C' \end{cases}$$

فرض می‌کنیم مثلاً l_{AB} خط مار بر دو نقطهٔ A و B باشد. ما در هر مدل سه خط و سه نقطه بیشتر نداریم (چرا؟). حال تناظر یک به یک زیر را بین خطوط در نظر می‌گیریم.

$$g \begin{cases} l_{AB} \longleftrightarrow l_{A'B'} \\ l_{AC} \longleftrightarrow l_{A'C'} \\ l_{BC} \longleftrightarrow l_{B'C'} \end{cases}$$

بآسانی معلوم می‌شود که (f, g) یک یکریختی بین این دو مدل است (ثابت کنید!).

(ب) فرض می‌کنیم M مدل چهارنقطه‌ای (مثال ۳.۲.۳) بوده و M' مدلی باچهار نقطهٔ A، B، C و D و خطوط $\{A, B\}$، $\{A, C\}$، $\{A, D\}$ و $\{B, C, D\}$ باشد. این دو مدل هر دو چهار نقطه دارند، ولی یکی دارای چهار خط و دیگری دارای شش خط است. پس این دو مدل نمی‌توانند یکریخت باشند.

۶.۳.۳. مدلهای یکریخت ساختار هندسی یکسانی دارند و در هر دو می‌توان اعمال هندسی مشابهی انجام داد. لذا، اگر در یک مدل راحت نیستید می‌توانید مدلی یکریخت ولی آشنا یافته و در آن اعمال مورد نظرتان را انجام دهید و سپس به مدل اصلی بازگردید. مثلاً تعبیر زیر از هندسهٔ پایه را در نظر بگیرید: یک کرهٔ سوراخ شده در فضای سه بعدی اقلیدسی، (یعنی یک کره که از آن نقطه‌ای مانند N برداشته شده است) را اختیار کنید. «نقاط» را نقاط این کرهٔ سوراخ شده گرفته و به ازای هر دایره از کرهٔ اصلی که از N می‌گذرد، دایرهٔ سوراخ شده‌ای را که از حذف N حاصل می‌شود، یک «خط» بگیرید و «وقوع» را به معنی اقلیدسی قرار گرفتن یک نقطه روی یک دایرهٔ سوراخ شده تلقی کنید. آیا این تعبیر یک مدل است؟ آیا این مدل با هیچ‌یک از مدلهایی که می‌شناسید یکریخت است؟

حل. این تعبیر یک مدل است زیرا پ ۱ ، پ ۲ و پ ۳ برقرارند (تحقیق کنید!). این مدل در تصویر گنجنگار به نخستین مدل اقلیدسی بدل می‌شود که با این مدل یکریخت است.

همان طور که ذکر شد، مدلها محل استراحت و تفکر ریاضیدان است. اما اتراق بیش از حد در آنها ما را از منزل اصلی که همان دستگاه اصل موضوعی است دور می‌سازد. زندگی ابدی در مدلها ممکن است این توهّم را ایجاد کند که مدل همان دستگاه اصل موضوعی است و هر خاصیتش در دستگاه اصلی برقرار است. ما سالهاست هندسه را با دید اقلیدسی که درواقع نخستین مدل اقلیدسی است، مطالعه کرده‌ایم و این تصور تنگ ما را از دستگاه اصل موضوعی هندسه دور ساخته است. هر حرکت ما در هندسه با رسم شکل صورت می‌گیرد و این یعنی استفادهٔ بیش از حد از مدل. این تصور باطل گاهی با تمایلات زیباپرستی ما در هم آمیخته و نتایج اسفناکی به بار می‌آید. ما فیزیکدانان را به تمسخر می‌گیریم که چرا بی‌نهایت را چند متر می‌گیرند، در حالی که خودمان با رسم محورها که معمولاً بیش از چند سانتیمتر نیستند، فاصلهٔ $-\infty$ تا $+\infty$ را نمایش می‌دهیم. همچنین در رسم پاره‌خطها هیچ‌گاه تناسب را رعایت نمی‌کنیم و یک پاره‌خط چند سانتیمتری را کمی کوتاهتر از یک پاره‌خط چند کیلومتری رسم می‌کنیم. و نیز مثلثهای ما اغلب متساوی‌الساقین و زوایای ما اکثراً ۳۰، ۴۵، ۶۰ یا ۹۰ درجه‌اند. این تمایلات نادرست و نیز اتکای بیش از حد به شکل گاهی فاجعه‌آمیز است، مانند فاجعهٔ مسألهٔ زیر.

۷.۳.۳. ثابت می‌کنیم هر مثلث (ولو آنکه یک ضلعش ۱ سانتیمتر، یک ضلعش ۲ متر و یک ضلعش ۱۰ کیلومتر باشد) متساوی‌الساقین است! ایراد این اثبات را بگیرید.

حل. در این اثبات بیان ما سنتی و کمی نادقیق است. ولی فساد در این بیان نیست و از جای دیگر نشأت می‌گیرد.

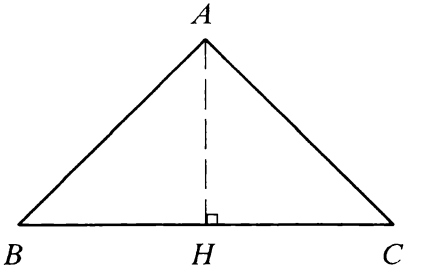
مثلث ΔABC را در نظر می‌گیریم. نیمساز زاویهٔ $\angle A$ و عمودمنصف ضلع BC را رسم می‌کنیم. سه حالت رخ می‌دهد:

حالت ۱. این دو خط بر هم منطبقند؛

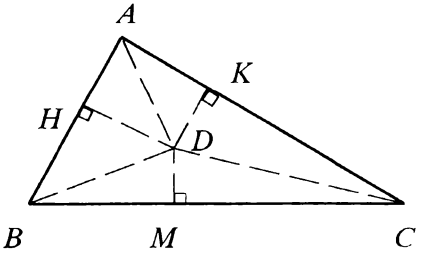
حالت ۲. این دو خط با هم موازیند؛

حالت ۳. این دو خط در نقطه‌ای مانند D متقاطعند.

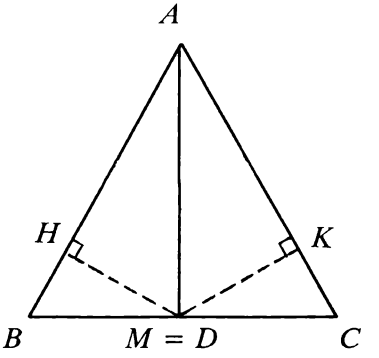
در حالات ۱ و ۲، نیمساز $\angle A$ ارتفاع مرسوم از رأس A نیز هست. فرض می‌کنیم این نیمساز ضلع BC را در نقطه‌ای مانند H قطع کند. دو مثلث ΔABH و ΔAHC به حالت دو زاویه و ضلع بین قابل انطباقند. پس $AB \cong AC$ و مثلث متساوی‌الساقین است.



اینک به حالت ۳ می‌پردازیم. فرض می‌کنیم نیمساز $\angle A$ و عمودمنصف BC در نقطهٔ D متقاطع باشند. نقطهٔ D می‌تواند درون مثلث، روی BC یا بیرون مثلث باشد. فرض می‌کنیم D درون مثلث باشد. از D عمودهای $\overleftrightarrow{DH}$ و $\overleftrightarrow{DK}$ را به ترتیب بر $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$



رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\Delta\ ADH$ و $\Delta\ ADK$ به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده قابل انطباقند. پس $AH \cong AK$. همچنین دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\Delta\ BDH$ و $\Delta\ DKC$ به حالت وتر و یک ضلع قابل انطباقند. پس $BH \cong KC$. بنابراین $AB \cong AC$ و مثلث $\Delta\ ABC$ متساوی‌الساقین است. حال فرض می‌کنیم D روی BC باشد. عمودهای $\overleftrightarrow{DH}$ و $\overleftrightarrow{DK}$ را به ترتیب بر $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ رسم می‌کنیم. مجدداً مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $\Delta\ ADH$ و $\Delta\ ADK$ (وتر و یک زاویهٔ حاده) و مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $\Delta\ BHD$ و $\Delta\ DKC$ (وتر و یک‌ضلع) قابل انطباقند. پس $AH \cong AK$ و $BH \cong CK$ و لذا $AB \cong AC$ و مثلث



$\Delta\ ABC$ متساوی‌الساقین می‌شود. حالتی که D بیرون مثلث باشد به همین نحو ثابت خواهد شد!

فساد برهان. شکلهای فوق غیرواقعی هستند و ایدهٔ غلط به ما می‌دهند. اگر مثلث $\Delta\ ABC$ متساوی‌الساقین باشد، نیمساز $\angle\ A$ و عمودمنصف BC منطبقند و نقطهٔ D ای وجود ندارد که استدلال فوق را بطلبد. اگر مثلث متساوی‌الساقین نباشد، نقطهٔ D بیرون مثلث است و نمی‌توان استدلال مذکور در حالات غیرواقعی درون مثلث یا روی BC بودن نقطهٔ D را در مورد آن به کار برد.

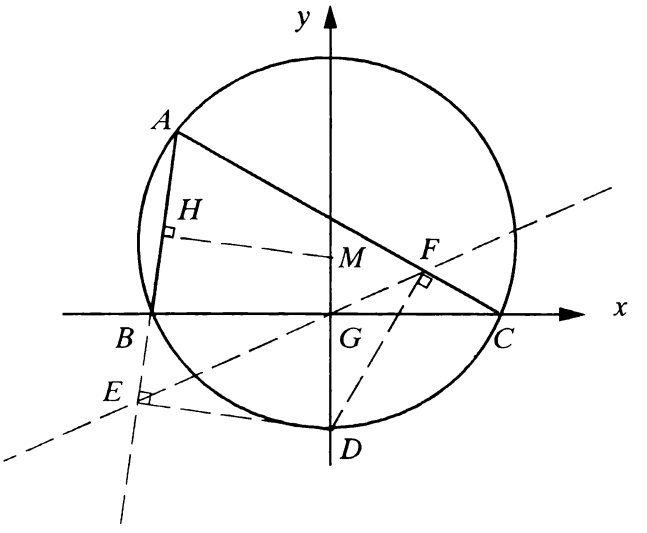
۸.۳.۳. در مثلث $\Delta\ ABC$ ضلع AB بر AC قابل انطباق نیست. فرض کنید D محل برخورد نیمساز $\angle\ A$ و عمودمنصف BC باشد. هرگاه E، F و G، به ترتیب پاهای عمود مرسوم از D بر $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ باشند، ثابت کنید:

(آ) D بیرون مثلث ΔABC و بر دایرهٔ محیطی آن قرار دارد؛

(ب) یکی از دو نقطهٔ E و F روی ضلع مربوطه و دیگری در امتداد ضلع مربوطه واقع است؛

(پ) E، F و G بر یک استقامتند.

حل.



(آ) اگر D درون مثلث یا روی BC باشد، طبق استدلال مسألهٔ ۷.۳.۳ داریم $AB \cong AC$ که با فرض متناقض است (مفاهیم درون و بیرون مثلث بعدها بطور دقیق تعریف می‌شوند). عمود منصف BC، قوس BC از دایرهٔ محیطی مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. چون $\angle A$ در دایرهٔ محیطی محاط شده است و هر زاویهٔ محاطی نصف قوس مقابل است، نیمساز این زاویه نیز باید قوس BC را نصف کند. پس نقطهٔ D محل برخورد نیمساز $\angle A$ و عمود منصف BC روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارد.

(ب) اگر E و F هر دو روی ضلعهای مربوطه یا هر دو بر امتداد اضلاع مربوطه واقع باشند، استدلال مسألهٔ ۷.۳.۳ نشان می‌دهد $AB \cong AC$ که با فرض تناقض دارد.

(پ) برای آنکه ارتباط هندسه را با جبر دکارتی نشان دهیم، این قسمت را از طریق

مختصات حل می‌کنیم. نکات مهم را ذکر کرده و شرح مطلب را به خواننده وامی‌گذاریم. محورهای مختصات را طوری می‌گیریم که G مبدأ مختصات بوده و BC بر محور x واقع باشد. دراین‌صورت $G(0 , 0)$ ، $C(d , 0)$ ، $B(-d , 0)$ و $A(a , b)$. فرض می‌کنیم M مرکز دایرهٔ محیطی و H نقطهٔ میانی AB باشد. پس $H(\frac{a-d}{2} , \frac{b}{2})$. از طرفی $m_{\overleftrightarrow{AB}} = \frac{b}{a+d}$. لذا، $m_{\overleftrightarrow{MH}} = -\frac{a+d}{b}$ ؛ چون M روی محور y است. با نوشتن معادلهٔ $\overleftrightarrow{MH}$ و قطع آن با محور y ، مختصات M به دست می‌آید و با توجه به اینکه $\overline{MB} = \overline{MD}$، مختصات D نیز یافت می‌شود. حال می‌توان معادلهٔ خط مار بر D و عمود بر $\overleftrightarrow{AB}$ را نوشت و از قطع آن با خط $\overleftrightarrow{AB}$ مختصات E را پیدا کرد. به همین ترتیب می‌توان مختصات F را به دست آورد. برای اتمام مسأله کافی است نشان دهیم که ضریب زاویهٔ خط $\overleftrightarrow{GE}$ مساوی ضریب زاویهٔ خط $\overleftrightarrow{GF}$ است (نشان دهید!).

۹.۳.۳. این حکم را در هندسهٔ پایه در نظر بگیرید: «به ازای هر دو خط l و l' یک تناظر یک به یک بین مجموعهٔ نقاط واقع بر l و مجموعهٔ نقاط واقع بر l' وجود دارد.» ثابت کنید این حکم از اصول موضوع هندسهٔ پایه مستقل است.

حل. کافی است دو مدل برای هندسهٔ پایه بسازیم که حکم فوق در یکی برقرار بوده و در دیگری برقرار نباشد (چرا؟). مدل M را مدل سه نقطه‌ای مرکب از سه نقطهٔ A، B و C و سه خط $\{A , B\}$ ، $\{A , C\}$ و $\{B , C\}$ و وقوع به معنی تعلق می‌گیریم و مدل M' را مرکب از چهار نقطهٔ A، B، C و D و چهار خط

$$\{A , B\} ، \{A , C\} ، \{A , D\} \text{ و } \{B , C , D\}$$

و وقوع را به معنی تعلق می‌انگاریم. حکم فوق در M برقرار است ولی در M' برقرار نیست. پس این حکم از هندسهٔ پایه مستقل است.

۱۰.۳.۳. فرض کنید M یک مدل برای هندسهٔ پایه بوده و دارای خاصیت توازی بیضوی باشد. همچنین هر خط در آن لااقل سه نقطه بر خود داشته باشد. در این صورت M را یک

صفحهٔ تصویر می‌نامیم. اگر تعداد نقاط صفحهٔ تصویر M متناهی باشد، M را یک **صفحهٔ تصویر متناهی** می‌خوانیم. ثابت کنید هرگاه M یک صفحهٔ تصویر متناهی بوده و M^* از M با اطلاق نقطه به خط و خط به نقطه به دست آمده باشد (M^* را **دوگان** M می‌نامیم)، M^* نیز یک صفحهٔ تصویر متناهی است.

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم M^* یک مدل است. فرض می‌کنیم l و m دو نقطه در M^* باشند. پس l و m دو خط در Mاند. چون M دارای خاصیت توازی بیضوی است، این دو خط در نقطه‌ای مانند A در M متقاطعند. این دو خط طبق پ ۱ فقط همین نقطهٔ مشترک را دارند. پس، از دو نقطهٔ l و m در M^* فقط خط A می‌گذرد. لذا، پ ۱ در M^* برقرار است. حال فرض می‌کنیم A خطی در M^* باشد. پس A نقطه‌ای در M است. بنا بر قضیهٔ ۴.۱.۳، از A لااقل دو خط l و m می‌گذرند. پس در M^* بر خط A لااقل دو نقطه مانند l و m واقعند. لذا، پ ۲ نیز در M^* برقرار است. حال فرض می‌کنیم A، B و C سه نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت در M باشند که طبق پ ۳ وجود دارند. خطوط $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ طبق قضیهٔ ۵.۱.۳، نقطهٔ مشترک ندارند. پس نقاط $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ در M^* بر یک استقامت نیستند و لذا پ ۳ در M^* برقرار است و بنابراین M^* یک مدل است.

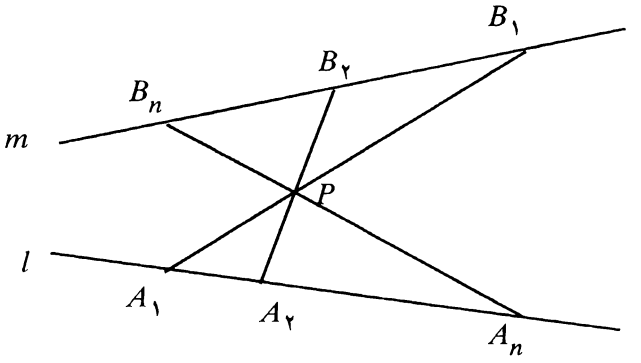
حال فرض می‌کنیم A و B دو خط در M^* باشند. پس A و B دو نقطه در Mاند. لذا، از A و B طبق پ ۱ خطی مانند l می‌گذرد. پس دو خط A و B در M^* در نقطهٔ l متقاطعند. بنابراین M^* دارای خاصیت توازی بیضوی است.

حال فرض می‌کنیم A خطی در M^* باشد. پس A یک نقطه در M است. طبق قضیهٔ ۳.۱.۳، خطی مانند l در M وجود دارد که از A نمی‌گذرد. چون M یک صفحهٔ تصویر است، بر l لااقل سه نقطه مانند B، C و D وجود دارند؛ پس خطوط $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{AD}$ طبق پ ۱ در M موجودند که دو به دو متمایزند (چرا؟). لذا، بر خط A در M^* لااقل سه نقطهٔ $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{AD}$ وجود دارند. بنابراین M^* یک صفحهٔ تصویر است.

بالاخره اگر تعداد نقاط M مساوی n باشد، تعداد خطوطش حداکثر $\frac{n(n-۱)}{۲}$ است. پس تعداد نقاط M^* نیز متناهی بوده و M^* یک صفحهٔ تصویر متناهی است.

۱۱.۳.۳. ثابت کنید هرگاه M یک صفحهٔ تصویر متناهی باشد، آنگاه همهٔ خطوطش از یک تعداد نقطه برخوردارند.

حل. دو خط l و m را در M در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم نقاط واقع بر l عبارت باشند



از A_1، A_2، ... ، A_n. نقطهٔ P را غیرواقع بر l و m اختیارمی‌کنیم (چگونه؟) و خطوط $\overleftrightarrow{PA_1}$، $\overleftrightarrow{PA_2}$، ... ، $\overleftrightarrow{PA_n}$ را طبق پ ۱ در نظر می‌گیریم. چون M خاصیت توازی بیضوی دارد، این خطوط m را در نقاط B_1، B_2، ... ، B_n قطع می‌کنند. این نقاط به خاطر پ ۱ متمایزند. بدین ترتیب تناظر یک به یکی بین نقاط l و m ایجاد می‌شود. پس تعداد نقاط l و m یکی است.

۱۲.۳.۳. هرگاه مدل M برای هندسهٔ پایه دارای خاصیت توازی اقلیدسی باشد، آن را یک ***صفحهٔ مستوی*** می‌نامیم. فرض می‌کنیم M یک صفحهٔ مستوی باشد. نقاط آن را ***نقاط معمولی*** و خطوط آن را ***خطوط معمولی*** می‌خوانیم. به M خط تازه‌ای به نام ***خط در بی‌نهایت*** افزوده و به ازای هر خانواده از تمام خطوط معمولی که با خط خاصی موازیند، یک ***نقطه در بی‌نهایت*** را بر همهٔ این خطوط موازی و بر خط در بی‌نهایت قرار می‌دهیم. دستگاه جدید ***مکمل تصویری*** M نام دارد.

(آ) ثابت کنید مکمل تصویری M یک صفحهٔ تصویر است؛

(ب) ثابت کنید هر صفحهٔ تصویر با مکمل تصویری یک صفحهٔ مستوی یکریخت است.

حل. (آ) فرض می‌کنیم M' مکمل تصویریِ M باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم M' یک مدل برای هندسهٔ پایه است. دو نقطهٔ A و B در M' اختیار می‌کنیم. اگر A و B

معمولی باشند، در M اند و چون M مدل است از آنها یک و فقط یک خط معمولی می‌گذرد. و چون بر خط در بی‌نهایت نقطهٔ معمولی نداریم، پس از این دو نقطه در M' یک و فقط یک خط خواهد گذشت. اگر A و B هر دو در بی‌نهایت باشند، روی خط در بی‌نهایت قرار دارند و چون بر یک خط معمولی بیش از یک نقطه در بی‌نهایت قرار ندارد، پس از A و B در این حالت یک و فقط یک خط در M' می‌گذرد. اگر یکی از این دو نقطه (مثلاً A) معمولی و دیگری (B) در بی‌نهایت باشد، از A یک و فقط یک خط موازی خانوادهٔ خطوط نظیر B می‌گذرد که B نیز روی آن است، پس از A و B در این حالت نیز یک و فقط یک خط در M' خواهد گذشت. لذا، پ ۱ در M' برقرار است.
حال خط d را در M' اختیار می‌کنیم. اگر d معمولی باشد، در M است و به خاطر مدل بودن M روی d لااقل دو نقطهٔ معمولی قرار دارد. پس d در M' لااقل دو نقطه بر خود دارد. اگر d خط در بی‌نهایت باشد، چون در M لااقل سه نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت مانند A، B و C داریم و نقطه در بی‌نهایت روی $\overleftrightarrow{AB}$ با نقطه در بی‌نهایت روی $\overleftrightarrow{AC}$ فرق دارد (زیرا با هم موازی نیستند)، پس بر d لااقل دو نقطه در بی‌نهایت قرار دارد. لذا، پ ۲ نیز در M' برقرار است.

برای پ ۳ می‌گوییم چون در M سه نقطه مانند A، B و C غیرواقع بر یک استقامت موجودند و این نقاط روی خط در بی‌نهایت قرار ندارند، پس این سه نقطه در M' غیرواقع بر یک استقامتند و درنتیجه پ ۳ در M' برقرار است. بنابراین M' یک مدل برای هندسهٔ پایه است.
حال دو خط در M' در نظر می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم هر دو خط معمولی باشند. این دو خط یا در یک نقطهٔ معمولی متقاطعند یا با هم موازی هستند. در حالت توازی نیز می‌توان آنها را در نقطهٔ بی‌نهایت اضافه شده به آنها متقاطع گرفت. اگر یکی از آنها معمولی و دیگری خط در بی‌نهایت باشد، آن دو را می‌توان در نقطهٔ بی‌نهایت واقع بر هر دوی آنها متقاطع گرفت. پس در هر حال این دو خط متقاطع بوده و M' دارای خاصیت توازی بیضوی است.
بالاخره خط دلخواه l را در M' در نظر می‌گیریم. اگر l یک خط معمولی باشد، طبق پ ۲ بر l لااقل دو نقطهٔ معمولی وجود دارد. ما به l یک نقطه در

بی‌نهایت نیز افزوده‌ایم. پس بر l لااقل سه نقطه وجود دارد. حال فرض می‌کنیم l خط در بی‌نهایت باشد. طبق پ ۳، سه نقطه مانند A، B و C در M وجود دارند که بر یک استقامت نیستند. سه خط $\overleftrightarrow{AB}$، $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ را طبق پ ۱ در M در نظر می‌گیریم. ما روی این سه خط سه نقطه در بی‌نهایت قرار داده‌ایم که با یکدیگر متفاوتند (زیرا هیچ دو خط از این سه خط با هم موازی نیستند). این سه نقطه روی خط در بی‌نهایت l نیز قرار دارند. پس در هر حال خط l لااقل دارای سه نقطه است. لذا، M' یک صفحهٔ تصویر است.

(ب) فرض می‌کنیم M' یک صفحهٔ تصویر باشد. خط دلخواه l را در M' اختیار کرده و آن را خط در بی‌نهایت می‌نامیم. می‌دانیم که همهٔ خطوط در M' خط l را قطع می‌کنند. محل برخورد هر خط با l را یک نقطه در بی‌نهایت می‌نامیم. حال با حذف خط l و نقاط در بی‌نهایت روی خطوط در M' به مدلی مانند M دست می‌یابیم که دارای خاصیت توازی اقلیدسی است (چرا؟) بآسانی معلوم می‌شود که مکمل تصویری M با M' یکریخت است (ثابت کنید!).

۱۳.۳.۳. ثابت کنید هرگاه M یک صفحهٔ مستوی متناهی باشد، آنگاه همهٔ خطوطش از یک تعداد نقطه برخوردارند.

حل. مکمل تصویری M' از M را طبق مسألهٔ ۱۲.۳.۳، بنا می‌کنیم. M' طبق مسألهٔ ۱۲.۳.۳ قسمت (آ)، یک صفحهٔ تصویر است. چون M متناهی است، M' نیز متناهی است (چرا؟). پس M' یک صفحهٔ تصویر متناهی است. لذا، طبق مسألهٔ ۱۱.۳.۳، همهٔ خطوطش از یک تعداد نقطه برخوردارند. ما روی هر خط معمولی یک نقطه در بی‌نهایت گذارده‌ایم. با حذف آنها معلوم می‌شود که همهٔ خطوط M نیز از یک تعداد نقطه برخوردارند.

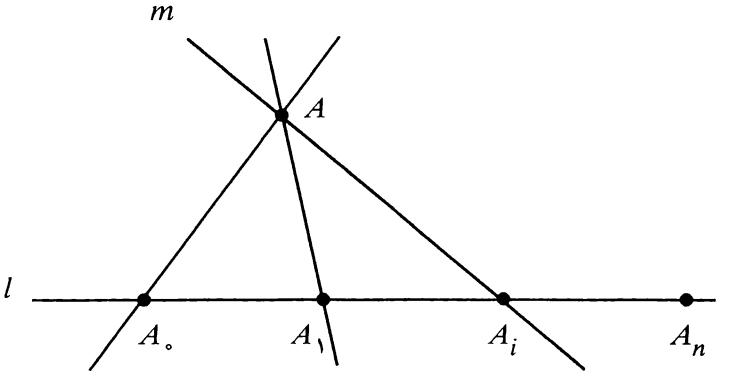
۱۴.۳.۳. فرض کنید M یک صفحهٔ تصویر متناهی باشد که بنا بر مسألهٔ ۱۱.۳.۳، همهٔ خطوطش از یک تعداد نقطه برخوردارند. این تعداد را $n + ۱$ می‌نامیم. ثابت کنید:

(آ) بر هر نقطه از M، $n + ۱$ خط می‌گذرد؛

(ب) تعداد کل نقاط M مساوی $n^۲ + n + ۱$ است؛

(پ) تعداد کل خطوط M نیز مساوی $n^۲ + n + ۱$ است.

حل. (آ) نقطهٔ A را اختیار و آن را ثابت می‌گیریم. فرض می‌کنیم خط l چنان باشد که A روی آن نباشد (قضیهٔ ۳.۱.۳). طبق فرض، روی l تعداد $n + ۱$ نقطه مانند $A_۰$، ...، A_n قرار دارند. خطوط $\overleftrightarrow{AA_۰}$، $\overleftrightarrow{AA_۱}$، ...، $\overleftrightarrow{AA_n}$ را طبق پ ۱ در نظر می‌گیریم. این خطوط دو به دو متمایز بوده و همه از A می‌گذرند. پس از A دست‌کم $n + ۱$ خط می‌گذرد. می‌گوییم از A خط دیگری نمی‌گذرد. زیرا که اگر m خط دلخواهی مار بر A باشد، m باید l را در نقطه‌ای مانند A_i ($۰ \le i \le n$) قطع کند. پس، طبق پ ۱، $m = \overleftrightarrow{AA_i}$. لذا، از A درست $n + ۱$ خط خواهد گذشت.



(ب) فرض می‌کنیم T نقطهٔ دلخواهی در M باشد. می‌گوییم T بر یکی از خطوط $\overleftrightarrow{AA_۰}$، $\overleftrightarrow{AA_۱}$، ...، $\overleftrightarrow{AA_n}$ مذکور در قسمت (آ) واقع است. فرض می‌کنیم چنین نباشد. پس $T \neq A$ و $\overleftrightarrow{TA}$ طبق پ ۱ وجود داشته و خط l را قطع نمی‌کند که خلاف خاصیت توازی بیضوی است. پس تعداد کل نقاط M عبارت است از نقاط واقع بر خطوط $\overleftrightarrow{AA_۰}$، $\overleftrightarrow{AA_۱}$، ...، $\overleftrightarrow{AA_n}$. هر یک از این خطوط غیر از A دارای n نقطه است. چون تعداد این خطوط $n + ۱$ است، پس تعداد کل نقاط واقع بر این خطوط جز A مساوی $n(n + ۱)$ است که اگر A را نیز حساب کنیم برابر $n(n + ۱) + ۱ = n^۲ + n + ۱$ می‌شود؛ یعنی تعداد کل نقاط M مساوی $n^۲ + n + ۱$ است.

(پ) فرض می‌کنیم M^* دوگان M باشد. طبق مسألهٔ ۱۰.۳.۳ ، M^* نیز یک صفحهٔ تصویر متناهی است. بنا بر قسمت (آ)، بر هر نقطه در M درست $n + ۱$ خط می‌گذرد. پس بر هر خط در M^* درست $n + ۱$ نقطه قرار دارد. لذا، طبق قسمت (ب)، تعداد نقاط M^* مساوی $n^۲ + n + ۱$ است. پس تعداد خطوط M برابر $n^۲ + n + ۱$ است.

۱۵.۳.۳. فرض کنید M یک صفحهٔ مستوی متناهی باشد که بنا بر مسألهٔ ۱۳.۳.۳، همهٔ خطوطش از یک تعداد نقطه برخوردارند. این تعداد را n می‌نامیم. ثابت کنید:

(آ) بر هر نقطه از M، $n + ۱$ خط می‌گذرد؛

(ب) تعداد کل نقاط M مساوی $n^۲$ است؛

(پ) تعداد کل خطوط M مساوی $n(n+۱) = n^۲ + n$ است.

حل. (آ) مکمل تصویری M' از M را طبق مسألهٔ ۱۲.۳.۳ در نظر می‌گیریم. بنابر مسألهٔ ۱۴.۳.۳ قسمت (آ)، از هر نقطهٔ M'، $n + ۱$ خط می‌گذرد. پس از هر نقطهٔ معمولی M' (که همان نقاط M اند) نیز $n + ۱$ خط می‌گذرد و قسمت (آ) برقرار است. برای قسمت (ب) می‌گوییم طبق مسألهٔ ۱۴.۳.۳ قسمت (ب)، تعداد نقاط M' مساوی $n^۲ + n + ۱$ است. ما $n + ۱$ نقطه در بی‌نهایت اضافه کرده‌ایم (چرا؟). پس تعداد نقاط M مساوی $(n^۲ + n + ۱) - (n + ۱) = n^۲$ است. و برای قسمت (پ) می‌گوییم طبق مسألهٔ ۱۴.۳.۳ قسمت (پ)، تعداد خطوط M' مساوی $n^۲ + n + ۱ = n(n + ۱) + ۱$ است. M' از M یک خط (خط در بی‌نهایت) بیشتر دارد. پس تعداد خطوط M مساوی $n(n + ۱)$ است.

۱۶.۳.۳. در ***صفحهٔ مستوی حقیقی*** M نقاط عبارتند از جفتهای مرتب (x, y) از اعداد حقیقی و هر خط با یک سه‌تایی مرتب مانند (m, v, w) از اعداد حقیقی معین می‌شود که $m \neq ۰$ یا $v \neq ۰$ و عبارت است از مجموعهٔ تمام (x, y)هایی که در معادلهٔ خطی

$$mx + vy + w = ۰$$

صدق می‌کنند. در اینجا وقوع به معنی عضویت در مجموعهٔ فوق است. ثابت کنید صفحهٔ

مستوی حقیقی یک صفحهٔ مستوی است.

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم M یک مدل برای هندسهٔ پایه است. برای این کار از جبر کمک می‌گیریم. فرض می‌کنیم $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ دو نقطه در M باشند. می‌دانیم که از این دو نقطه یک و تنها یک خط در صفحهٔ M می‌گذرد که می‌توان معادله‌اش را به صورت $mx + vy + w = 0$ نوشت که در آن $m \neq 0$ یا $v \neq 0$. پس پ ۱ برقرار است. برای پ ۲ یک خط به معادله $mx + vy + w = 0$ در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $v \neq 0$. پس مثلاً نقاط $(0, -\frac{w}{v})$ و $(1, -\frac{m+w}{v})$ در معادلهٔ فوق صدق می‌کنند. اگر $m \neq 0$، می‌توان به همین نحو دو نقطه روی این خط یافت (بیابید!). پس پ ۲ نیز برقرار است. برای پ ۳، سه نقطهٔ $(0, 0)$، $(1, 0)$ و $(0, 1)$ را در نظر می‌گیریم. از جبر می‌دانیم که از این سه نقطه خط واحدی نمی‌گذرد. لذا پ ۳ نیز برقرار است. پس M یک مدل برای هندسهٔ پایه است.

حال ثابت می‌کنیم M دارای خاصیت توازی اقلیدسی است. خط به معادلهٔ $mx + vy + w = 0$ و نقطهٔ (a, b) غیرواقع بر آن را در نظر می‌گیریم. از جبر می‌دانیم که از (a, b) یک و فقط یک خط با شیب خط فوق (موازی آن) می‌گذرد. لذا، M یک صفحهٔ مستوی است.

۱۷.۳.۳. در ***صفحهٔ تصویر حقیقی*** M نقطهٔ $[x, y, z]$ با سه‌تایی مرتب (x, y, z) از اعداد حقیقی که همه صفر نیستند معین می‌شود و از همهٔ سه‌تاییها به صورت (kx, ky, kz) که در آن $k \neq 0$ عدد حقیقی دلخواهی است تشکیل شده است. بنابراین $[kx, ky, kz] = [x, y, z]$. یک خط در صفحهٔ تصویر حقیقی M با سه‌تایی مرتبی مانند (m, v, w) از اعداد حقیقی که همه صفر نیستند معین و به عنوان مجموعهٔ تمام نقاط $[x, y, z]$ صادق در معادلهٔ خطی $mx + vy + wz = 0$ تعریف می‌شود. وقوع در M به عنوان عضویت در این مجموعه است. ثابت کنید M یک صفحهٔ تصویر است. همچنین اگر $z = 0$ را معادلهٔ «خط در بی‌نهایت» بگیریم، با نظیر قرار دادن خط مستوی با خطهای تصویری به طریق معمولی، ثابت کنید صفحهٔ تصویر حقیقی با مکمل تصویری صفحهٔ مستوی حقیقی یکریخت است. همچنین ثابت کنید که مدل (ژ) مسألهٔ ۲.۳.۳ با صفحهٔ تصویر حقیقی یکریخت است.

حل. ابتدا ثابت می‌کنیم M یک مدل برای هندسهٔ پایه است. در اینجا نقاط $[x, y, z]$ خطوط اقلیدسی مار بر مبدأ بدون مبدأ و خطوط $mx + vy + wz = 0$ صفحات مار بر مبدأ بدون مبدأ هستند. دو نقطهٔ $[x, y, z]$ و $[x', y', z']$ را در M اختیار می‌کنیم. از این دو خط اقلیدسی مار بر مبدأ یک صفحه می‌گذرد که منحصر به فرد است. پس از هر دو نقطه در M یک و فقط یک خط می‌گذرد. لذا پ ۱ برقرار است. برای پ ۲ خط $mx + vy + w = 0$ را در M در نظر می‌گیریم. این معادلهٔ صفحه‌ای است در R^3 که از مبدأ می‌گذرد. روی این صفحه بی‌نهایت خط اقلیدسی مار بر مبدأ قرار دارد. پس پ ۲ نیز برقرار است. برای پ ۳ سه محور دو به دو متعامد در R^3 را در نظر می‌گیریم. اگر مبدأ را از آنها برداریم، هر یک به منزلهٔ نقطه‌ای در M است. این سه خط روی صفحهٔ واحدی مار بر مبدأ قرار ندارند. پس این سه نقطه در M بر یک استقامت نیستند. لذا، M یک مدل برای هندسهٔ پایه است.

چون خطوط در M صفحات مار بر مبدأ در R^3 بدون مبدأ بوده و همهٔ این صفحات دو به دو متقاطعند، پس M دارای خاصیت توازی بیضوی است. ضمناً در حین اثبات پ ۲ گفتیم که بر هر خط در M، بی‌نهایت نقطه وجود دارد. پس بر هر خط در M لااقل سه نقطه واقع است. لذا، M یک صفحهٔ تصویر است.

حال فرض می‌کنیم $mx + vy + w = 0$ یک خط مستوی باشد. این خط را نظیر خط تصویری $mx + vy + wz = 0$ قرار می‌دهیم. لذا صفحهٔ مستوی حقیقی نظیر صفحهٔ تصویر حقیقی جز $z = 0$ است. حال اگر $z = 0$ را خط در بی‌نهایت انگاشته و مکمل تصویری صفحهٔ مستوی حقیقی را بیابیم، با تمام صفحهٔ تصویر حقیقی یکریخت می‌شود.

یکریخت بودن صفحهٔ تصویر حقیقی با مدل (ژ) در مسألهٔ ۲.۳.۳ واضح است (توضیح دهید!).

۴

بینیت

۱.۴ مقدمه

۲.۴ اصول موضوع بینیت

۳.۴ قضایای بینیت

۴.۴ مسائل

۱.۴ مقدمه

در فصل ۳ دیدیم که هندسهٔ پایه تام نیست؛ یعنی در آن احکامی مطرح می‌شوند که قادر به اثبات یا انکار آنها نخواهیم بود. پس این هندسه تمام هندسهٔ اقلیدسی نیست. در این فصل برای رسیدن به هندسهٔ اقلیدسی گامی دیگر برداشته و اصطلاح تعریف نشدهٔ بینیت را وارد کار می‌کنیم. اقلیدس با بینیت بطور شهودی برخورد کرده و راجع به آن اصولی وضع ننموده است. لیکن نکات زیر، داشتن چند اصل راجع به این مفهوم را لازم می‌دارد.

۱. ***فرض می‌کنیم نقطهٔ B بین نقاط A و C باشد. آیا می‌توان ثابت کرد که A، B و C متمایزند؟***

۲. ***فرض می‌کنیم نقطهٔ B بین نقاط A و C باشد. آیا می‌توان ثابت کرد که این سه نقطه بر یک استقامتند؟***

۳. ***فرض می‌کنیم نقطهٔ B بین نقاط A و C باشد. آیا می‌توان ثابت کرد که B بین C و A نیز هست؟***

۴. ***آیا می‌توان ثابت کرد که بین هر دو نقطه، نقطه‌ای وجود دارد؟***

اثبات احکام فوق به کمک اصول اقلیدس یا اصول هندسهٔ پایه ناممکن است. برداشت اقلیدس از بینیت به این نحو است که وقتی می‌گوید C بین A و B است، یعنی A، B و C متمایزند و بر یک استقامتند و C بین B و A نیز هست. یعنی راجع به بینیت اصولی را می‌پذیرد؛ منتها بطور ضمنی، و این چیزی جز سوء استفاده در روش اصل موضوعی نیست.

حال برای بینیت اصولی وضع می‌کنیم که این مشکلات از بین بروند. ابتدا علامتی را که موجب تسهیل کار می‌شود می‌پذیریم: وقتی B بین A و C باشد می‌نویسیم $A.B.C$.

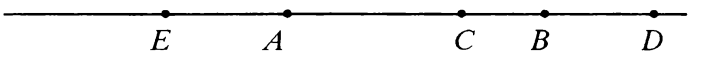
۲.۴ اصول موضوع بینیت

ب ۱. ***هرگاه $A.B.C$، آنگاه A، B و C دو به دو متمایزند، بر یک استقامتند و $C.B.A$.***

این اصل سه مشکل اول مطرح شده را یکجا حل می‌کند.

ب ۲. ***دو نقطهٔ A و B مفروضند. در این صورت نقاطی مانند C ، D و E وجود دارند بطوری که***

$$E.\ A.\ B \quad \text{و} \quad A.\ B.\ D \quad \text{و} \quad A.\ C.\ B$$



این اصل مشکل چهارم مذکور در فوق را رفع کرده و به ما اطمینان می‌دهد که بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ علاوه بر نقاط A و B ، نقاط دیگری نیز واقعند. در مسألهٔ ۲.۴.۴ خواهید دید که **وجود C از وجود D و E نتیجه می‌شود؛ گنجاندن این امر در ب ۲ فقط به خاطر تقارن است.**

ب ۳. ***هرگاه سه نقطهٔ A، B و C بر یک استقامت باشند، آنگاه یکی وفقط یکی از آنها بین دو تای دیگر واقع است.***

اصل اخیر این اطمینان را می‌دهد که خط منحنی بسته نیست. اگر خط منحنی بسته باشد، ممکن است بسته به انتخاب قوس بین نقاط، از سه نقطه هر نقطه بین دو نقطهٔ دیگر باشد یا هیچ‌یک بین دوتای دیگر نباشد.

حال پیش از اصل چهارم بینیت، قضیهٔ زیر را با استفاده از سه اصل اول بینیت ثابت می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۲.۴. به ازای هر دو نقطهٔ A و B،

(آ) $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} = AB$؛

(ب) مجموعهٔ نقاط واقع بر $\overleftrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.

برهان (آ). بنا بر تعریف پاره خط و نیمخط، $AB \subseteq \overrightarrow{AB}$ و $BA \subseteq \overrightarrow{BA}$. اما طبق ب ۱ داریم $BA = AB$. پس $AB \subseteq \overrightarrow{BA}$. بنابراین $AB \subseteq \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. حال فرض می‌کنیم $C \in \overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA}$. ثابت می‌کنیم $C \in AB$. می‌گوییم هرگاه $C = A$ یا $C = B$، آنگاه C متعلق به AB بوده و مطلب تمام است. پس فرض می‌کنیم $C \neq A$, B. چون مثلاً $C \in \overrightarrow{AB}$، طبق تعریف نیمخط و ب ۱، A، B و C بر یک استقامتند. لذا، طبق ب ۳، از روابط $A.C.B$، $A.B.C$ و $C.A.B$ یکی و فقط یکی برقرار است. هرگاه $A.B.C$ برقرار باشد، آنگاه $C \notin \overrightarrow{BA}$. هرگاه $C.A.B$ برقرار باشد، آنگاه $C \notin \overrightarrow{AB}$. پس باید داشته باشیم $A.C.B$، یعنی $C \in AB$. بنابراین $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{BA} \subseteq AB$. پس قسمت (آ) برقرار است.

برهان (ب). فرض می‌کنیم $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. پس $C \in \overrightarrow{AB}$ یا $C \in \overrightarrow{BA}$. اگر $C \in \overrightarrow{AB}$، $C = A$ یا $C = B$ یا $A.C.B$ یا $A.B.C$. اگر $C = A$ یا $C = B$، C بر $\overleftrightarrow{AB}$ واقع و مطلب تمام است. اگر $A.C.B$، طبق ب ۱، A، B و C بر یک استقامتند؛ چون از A و B طبق پ ۱ فقط خط $\overleftrightarrow{AB}$ می‌گذرد، پس C بر $\overleftrightarrow{AB}$ بوده و مطلب تمام است. اگر $A.B.C$، به همین ترتیب معلوم می‌شود که C بر $\overleftrightarrow{AB}$ قرار دارد. اثبات در حالت $C \in \overrightarrow{BA}$ به همین نحو است (چگونه؟). بنابراین،

$$\overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA} \subseteq \overleftrightarrow{AB} \text{ مجموعهٔ نقاط واقع بر}$$

حال فرض می‌کنیم C بر $\overleftrightarrow{AB}$ واقع باشد. اگر $C = A$ یا $C = B$، $C \in \overrightarrow{AB}$ و لذا $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ و مطلب تمام است. حال فرض می‌کنیم A، B و C دو به دو متمایز باشند. چون این نقاط بر یک استقامتند، بنا بر ب ۳، از روابط زیر یکی و فقط یکی برقرار است:

$$A.B.C \text{ ،} A.C.B \text{ یا } B.A.C.$$

اگر $A.B.C$ برقرارباشد، $C \in \overrightarrow{AB}$. پس $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$ و مطلب تمام‌است. اگر $A.C.B$ برقرار باشد، $C \in AB$. چون $AB \subseteq \overrightarrow{AB}$، پس $C \in \overrightarrow{AB}$. لذا، $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. اگر

C. $B.A$، $C \in \overrightarrow{BA}$ و لذا $C \in \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$. پس

$\overleftrightarrow{AB}$ مجموعهٔ نقاط واقع بر $\subseteq \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{BA}$.

بنابراین، (ب) نیز برقرار است.

حال برای اصل چهارم بینیت زمینه‌سازی می‌کنیم. برای این کار حکم زیر را در نظر می‌گیریم:

«اگر $B.A.C$، هر نقطهٔ P واقع بر خط l مار بر نقاط A، B و C یا به نیمخط $\overrightarrow{AB}$ تعلق دارد یا به نیمخط متقابلش $\overrightarrow{AC}$.»

این حکم با قسمت (ب) قضیهٔ ۱.۲.۴ شباهت دارد، ولی از آن پیچیده‌تر است. حکم (ب) قضیهٔ ۱.۲.۴ به سه پارامتر P، A و B وابسته‌است، ولی حکم فوق به چهار پارامتر P، A، B و C بستگی دارد. دیدیم که حکم (ب) قضیهٔ ۱.۲.۴ از سه اصل اول بینیت نتیجه می‌شود. ولی در مسائل آخر فصل خواهیم دید که حکم فوق از سه اصل اول بینیت مستقل است. این حکم را ***خاصیت جداسازی خط*** می‌نامند؛ یعنی نقاط l توسط نقطهٔ A از هم جدا می‌شوند. برخی از ریاضیدانان این حکم را اصل گرفته‌اند، ولی به همهٔ هندسهٔ اقلیدسی دست نیافته‌اند. هیلبرت حکم قویتری به نام ***خاصیت جداسازی صفحه*** را اصل گرفت و به همهٔ هندسهٔ اقلیدسی رسید. برای بیان این اصل ابتدا تعریف زیر را می‌آوریم:

تعریف ۲.۲.۴. فرض می‌کنیم l خط دلخواهی بوده و A و B دو نقطهٔ ***غیرواقع*** بر آن باشند. اگر $A=B$ یا پاره‌خط AB خط l را قطع نکند، می‌گوییم A و B ***در یک طرف l اند.*** در غیر این صورت می‌گوییم A و B ***در دو طرف l هستند.***

ب ۴ **(خاصیت جداسازی صفحه).**

(آ) هرگاه A و B در یک طرف l و B و C نیز در یک طرف l باشند، آنگاه A و C نیز در یک طرف l خواهند بود.

(ب) هرگاه A و B در دو طرف l و B و C در دو طرف l باشند، آنگاه A و C در یک طرف l خواهند بود.

قسمت (آ) این اصل در هندسهٔ فضایی صادق نیست (چرا؟) و لذا برقراری آن هندسهٔ

مسطحه را تضمین می‌کند.

حال **طرف** خط l را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

مجموعهٔ تمام نقاطی که دو به دو در یک طرف l اند = طرف l

هر طرف خط l را یک **نیمصفحه به مرز** l نیز می‌نامند.

۳.۴ قضایای بینیت

ابتدا قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که نتیجهٔ اعجاب‌آور روش اصل موضوعی است و به‌جرأت می‌شود گفت که هیچ بخشی از ریاضیات توان اثبات دقیق آن راندارد.

قضیهٔ ۱.۳.۴. ***هر خط درست دو طرف دارد و این دو طرف دارای نقطهٔ مشترک نیستند.***

برهان. خط l را در نظر می‌گیریم. بنا بر قضیهٔ ۲.۱.۳ ، نقطه‌ای مانند A غیرواقع بر l وجود دارد. و بر طبق پ ۲ ، نقطه‌ای مانند B روی l موجود است. و بنا بر ب ۲ ، نقطه‌ای مانند C هست بطوری که $A.B.C$. پس A و C طبق تعریف در دو طرف l اند. لذا، l دست کم دو طرف دارد.

فرض می‌کنیم D نقطه‌ای غیرواقع بر l باشد که نه با A در یک طرف l است و نه با C . پس D و A در دو طرف l اند و D و C نیز در دو طرف l هستند. لذا، طبق ب ۴ قسمت (ب)، A و C در یک طرف l اند که تناقض است. پس l درست دو طرف دارد.

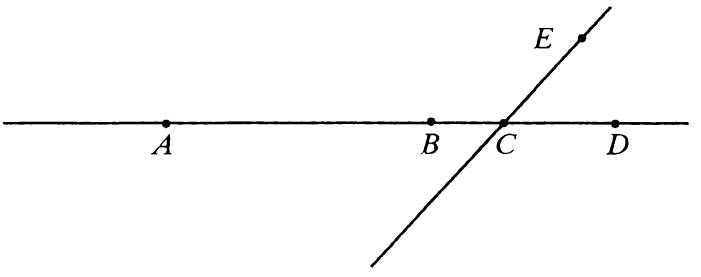
حال می‌گوییم این دو طرف نقطهٔ مشترک ندارند. فرض می‌کنیم E نقطهٔ مشترکی از آنها باشد. پس A و E در یک طرف l و E و C نیز در یک طرف l اند. لذا، طبق ب ۴ قسمت (آ)، A و C در یک طرف l اند که تناقض است.

قضیهٔ فوق می‌گوید که هر خط (مثلا محور x) در صفحه، آن را به دو طرف تقسیم می‌کند بطوری که از یک طرف نمی‌توان بدون قطع کردن خط به طرف دیگر رفت. برهان فوق این مطلب شهودی را تأیید می‌کند. ضمناً این قضیه اطلاق نام «خاصیت جداسازی صفحه» به اصل چهارم بینیت را توضیح می‌دهد.

حال به اثبات خاصیت جداسازی خط می‌پردازیم. پیش از این کار، قضیهٔ مفیدی در باب بینیت را ثابت می‌کنیم. این قضیه می‌گوید که بینیت بین نقاط را می‌توان تحت شرایطی منبسط و منقبض کرد.

قضیهٔ ۲.۳.۴. **(قضیهٔ انبساط ـ انقباض).**
هرگاه $A.B.C$ و $A.C.D$، آنگاه $B.C.D$ و $A.B.D$.

برهان. ابتدا $B.C.D$ را ثابت می‌کنیم. چهار نقطهٔ A، B، C و D دو به دو متمایز و بر یک استقامتند، زیرا وقتی که $A.B.C$، طبق ب ۱ ، نقاط A، B و C دو به دو متمایزند و طبق پ ۱ ، هر سه بر خط $\overleftrightarrow{AC}$ واقعند. و چون $A.C.D$، طبق ب ۱، نقاط A، C و D دو به دو متمایزند و طبق پ ۱ ، هر سه بر خط $\overleftrightarrow{AC}$ قرار دارند. پس چهار نقطهٔ فوق بر یک



استقامت بوده و دو به دو متمایزند. برای این کار کافی است ثابت کنیم $B \neq D$ (چرا؟)؛ زیرا که اگر $B = D$، داریم $A.B.C$ و $A.C.D = A.C.B$ که با ب ۳ در تضاد است. پس این چهار نقطه دو به دو متمایز و بر یک استقامتند.

حال نقطهٔ E را غیرواقع بر خط مار بر A، B، C و D اختیار می‌کنیم (قضیهٔ ۲.۱.۳) و خط $\overleftrightarrow{EC}$ را طبق پ ۱ در نظر می‌گیریم. چون AD (طبق فرض) خط $\overleftrightarrow{EC}$ را در نقطهٔ C قطع می‌کند، A و D در دو طرف $\overleftrightarrow{EC}$اند. حال می‌گوییم A و B در یک طرف $\overleftrightarrow{EC}$اند. فرض می‌کنیم A و B در دو طرف $\overleftrightarrow{EC}$ باشند. پس $\overleftrightarrow{EC}$ خط $\overleftrightarrow{AB}$ را در یک نقطه بین A و B قطع می‌کند. این نقطه باید C باشد (چرا؟). لذا داریم $A.B.C$ و $A.C.B$ که با ب ۳ در تضاد است. بنابراین A و B در یک طرف $\overleftrightarrow{EC}$اند. چون A و D در دو طرف $\overleftrightarrow{EC}$، و A و

B در یک طرف $\overleftrightarrow{EC}$ اند، از ب ۴ معلوم می‌شود که B و D در دو طرف $\overleftrightarrow{EC}$ هستند (چرا؟). لذا C نقطهٔ تلاقی خطوط $\overleftrightarrow{EC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ بین B و D واقع است. پس داریم $B.C.D$ و مطلب تمام است.

اگر خط $\overleftrightarrow{EB}$ را در نظر گرفته و مانند فوق استدلال کنیم، قسمت دوم قضیه، یعنی $A.B.D$ ثابت خواهد شد (ثابت کنید!).

حال برای اثبات خاصیت جداسازی خط حاضر و آماده‌ایم.

قضیهٔ ۳.۳.۴. (خاصیت جداسازی خط). ***هرگاه $C.A.B$ و l خط مار بر A، B و C باشد (ب ۱ و پ ۱)، آنگاه به ازای هر نقطهٔ P واقع بر l، P یا بر نیمخط $\overrightarrow{AB}$ واقع است یا بر نیمخط متقابل آن $\overrightarrow{AC}$.***

برهان. P بر $\overrightarrow{AB}$ هست یا نیست. اگر P بر $\overrightarrow{AB}$ باشد، مطلب تمام است. فرض می‌کنیم P بر $\overrightarrow{AB}$ نباشد. پس طبق ب ۳ داریم

$$P.A.B. \qquad (۱)$$

اگر $P = C$، آنگاه P طبق تعریف بر $\overrightarrow{AC}$ است. پس فرض می‌کنیم $P \neq C$. لذا، طبق ب ۳، از روابط زیر یکی و فقط یکی برقرار است:

$$C.A.P \text{ یا } C.P.A \text{ یا } P.C.A. \qquad (۲)$$

فرض می‌کنیم

$$C.A.P \qquad (۳)$$

برقرار باشد. می‌دانیم که طبق ب ۳، درست یکی از روابط زیر برقرار است:

$$P.B.C \text{ یا } C.P.B \text{ یا } B.C.P. \qquad (۴)$$

اگر $P.B.C$ برقرار باشد، آنگاه از ترکیب آن با $P.A.B$ [رابطهٔ (۱)] و قضیهٔ ۲.۳.۴ داریم $A.B.C$، که خلاف فرض است.

اگر $C.P.B$ برقرار باشد، آنگاه از ترکیب آن با $C.A.P$ [رابطهٔ (۳)]و قضیهٔ ۲.۳.۴ خواهیم داشت $A.P.B$، که ناقض رابطهٔ (۱) است.

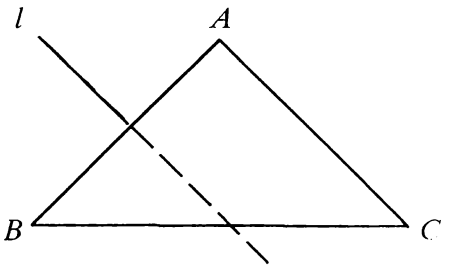
اگر $B.C.P$ برقرار باشد، آنگاه از ترکیب آن با $B.A.C$ (فرض و ب ۱) و قضیهٔ ۲.۳.۴ خواهیم داشت $A.C.P$، که ناقض رابطهٔ (۳) است. چون هر سه مورد رابطهٔ (۴) به تناقض

رسید، پس رابطهٔ (۳)، یعنی $C.A.P$ برقرار نیست. لذا، از رابطهٔ (۲)، یا $C.P.A$ برقرار است یا $P.C.A$ که به معنی واقع بودن P بر نیمخط $\overrightarrow{AC}$ است.

حال قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که هم‌ارز ب ۴ است (ر.ک. مسائل آخر فصل).

قضیهٔ ۴.۳.۴. **[قضیهٔ پاش $(Pasch)$]**

هرگاه خط l ضلع AB از مثلث ΔABC را در نقطه‌ای بین A و B قطع کند، آنگاه l ضلع AC یا ضلع BC را نیز قطع می‌کند و هرگاه C بر l نباشد، آنگاه l هر دو ضلع AC و BC را قطع نخواهد کرد.



برهان. فرض می‌کنیم l هیچ‌یک از اضلاع AC و BC را قطع نکند. پس A و C در یک طرف l اند و B و C نیز در یک طرف l. لذا، طبق ب ۴ قسمت (آ)، A و B در یک طرف l اند، که تناقض است. حال فرض می‌کنیم C بر l نباشد. می‌گوییم l هر دو ضلع AC و BC را قطع نمی‌کند. زیرا که در غیر این صورت، A و C در دو طرف l، و B و C نیز در دو طرف l خواهند بود. پس، طبق ب ۴ قسمت (ب)، A و B در یک طرف l اند، که تناقض است.

قضیهٔ ۵.۳.۴. ***هرگاه $A.B.C$، آنگاه $AC = AB \cup BC$ و B تنها نقطهٔ مشترک بین AB و BC است.***

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم $AB \subseteq AC$. فرض می‌کنیم $P \in AB$. پس $P = A$ یا $P = B$ یا $A.P.B$. اگر $P = A$، $P \in AC$. اگر $P = B$، چون طبق فرض $A.B.C$، پس داریم $A.P.C$؛ یعنی $P \in AC$. اگر $A.P.B$، چون طبق فرض داریم $A.B.C$، پس طبق قضیهٔ

۲.۳.۴، $A.P.C$. بنابراین $P \in AC$. درنتیجه $AB \subseteq AC$.

حال ثابت می‌کنیم $BC \subseteq AC$. می‌گوییم چون $A.B.C$، پس طبق ب ۱ داریم $C.B.A$ لذا ، با تعویض A و C و استفاده از مطلب اثبات شده در فوق داریم $CB \subseteq CA$. اما، طبق ب ۱ ، $CA = AC$ و $CB = BC$. پس داریم $BC \subseteq AC$. بنابراین $AB \cup BC \subseteq AC$.

حال ثابت می‌کنیم $AC \subseteq AB \cup BC$. فرض می‌کنیم $P \in AC$. اگر P مساوی A یا B یا C باشد، $P \in AB \cup BC$ و مطلب تمام است. پس فرض می‌کنیم $P \neq A, B, C$. از P خطی مانند l مخالف $\overleftrightarrow{AC}$ می‌گذرانیم (قضیهٔ ۲.۱.۳ و پ ۱)، می‌گوییم A و B در یک طرف l اند یا در دو طرف l. اگر A و B در یک طرف l باشند، چون A و C در دو طرف l اند، پس طبق ب ۴، B و C در دو طرف l اند؛ یعنی $P \in BC$. لذا، $P \in AB \cup BC$. اگر A و B در دو طرف l باشند، $P \in AB$. پس $P \in AB \cup BC$ و مطلب تمام است. لذا، $AC \subseteq AB \cup BC$. بنابراین $AC = AB \cup BC$.

برای اثبات قسمت دوم می‌گوییم واضح است که B یک نقطهٔ مشترک AB و BC است. فرض می‌کنیم AB و BC نقطهٔ مشترک دیگری مانند P داشته باشند. بنا به قسمت اول، $P \in AC$. اما، $P \neq A , C$ (چرا؟). حال از P خط l را مخالف $\overleftrightarrow{AC}$ می‌گذرانیم (قضیهٔ ۲.۱.۳ و پ ۱). پس A و C در دو طرف l اند. چون A و B در دو طرف l، و B و C در دو طرف l اند، پس طبق ب ۴ قسمت (ب) ، A و C در یک طرف l اند، که تناقض است. لذا، B تنها نقطهٔ مشترک میان AB و BC است.

قضیهٔ ۶.۳.۴. ***هرگاه $A.B.C$، آنگاه B تنها نقطهٔ مشترک میان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ است.***

برهان. فرض می‌کنیم P نقطهٔ چهارمی باشد که با A، B و C بر یک خط قرار دارند. ابتدا ثابت می‌کنیم

$$\sim A.B.P \Rightarrow \sim A.C.P. \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم $\sim A.B.P$ ، ولی $A.C.P$. چون طبق فرض $A.B.C$، پس طبق قضیهٔ ۲.۳.۴ داریم $A.B.P$ که با $\sim A.B.P$ متناقض است.

حال از رابطهٔ (۱) می‌توان نتیجه گرفت که $\overrightarrow{BA} \subseteq \overrightarrow{CA}$. زیرا فرض می‌کنیم $P \in \overrightarrow{BA}$. اگر $P = A$ ، $P \in \overrightarrow{CA}$ و مطلب تمام است. اگر $P = B$، چون طبق فرض $A.B.C$، پس داریم $A.P.C$. لذا، طبق ب ۱ ، $C.P.A$. بنابراین $P \in \overrightarrow{CA}$. حال فرض می‌کنیم $P \neq A , B$.

چون $P \in \overrightarrow{BA}$، طبق تعریف نیمخط و ب ۳ داریم $A.B.P \sim$. پس طبق (۱)، $A.C.P \sim$. لذا، طبق تعریف نیمخط و ب ۳، $P \in \overrightarrow{CA}$. بنابراین $\overrightarrow{BA} \subseteq \overrightarrow{CA}$. همچنین اگر با استفاده از ب ۱ بنویسیم $C.B.A$، می‌توان متقارناً (از تعویض A و C با هم) نتیجه گرفت که $\overrightarrow{BC} \subseteq \overrightarrow{AC}$

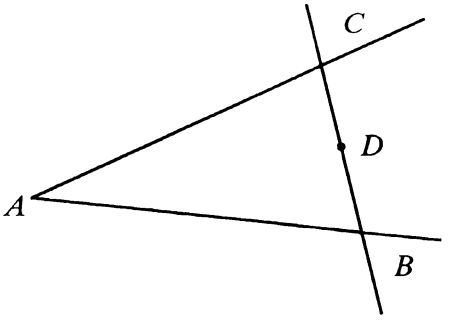
حال ثابت می‌کنیم B تنها نقطهٔ مشترک میان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ است. اینکه B یک نقطهٔ مشترک این دو نیمخط است واضح است. فرض می‌کنیم $P \neq B$ نقطهٔ مشترک دیگری میان این دو نیمخط باشد. می‌گوییم چون $\overrightarrow{BA} \subseteq \overrightarrow{CA}$، $\overrightarrow{BC} \subseteq \overrightarrow{AC}$ و $P \in \overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC}$، پس $P \in \overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{AC}$. اما، طبق قضیهٔ ۱.۲.۴ قسمت (آ)، $\overrightarrow{CA} \cap \overrightarrow{AC} = CA$. پس $P \in CA$. ولی، طبق قضیهٔ ۵.۳.۴ و ب ۱، $CA = BA \cup BC$. لذا، $P \in BA$ یا $P \in BC$. چون طبق قضیهٔ ۵.۳.۴، BA و BC غیر از B نقطهٔ مشترکی ندارند، پس هر دوی $P \in BA$ و $P \in BC$ ممکن نیست. فرض می‌کنیم $P \in BA$ و $P \notin BC$. چون $P \in \overrightarrow{BC}$ و $P \notin BC$، پس داریم $B.C.P$. اما، $P \neq A\ ,\ B$ (چرا؟). پس $B.P.A$. لذا، طبق قضیهٔ ۲.۳.۴، $B.C.A$ که با فرض $A.B.C$ تناقض دارد. به همین ترتیب از $P \in BC$ و $P \notin BA$ به تناقض می‌رسیم (برسید!). پس B تنها نقطهٔ مشترک میان $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ است.

قضیهٔ ۷.۳.۴. ***هرگاه $A.B.C$، آنگاه $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ و هر نیمخط یک نیمخط متقابل منحصر به فرد دارد.***

برهان. اثبات آسان است و به خواننده محول می‌شود.

تعریف ۸.۳.۴. D را یک ***نقطهٔ درونی*** زاویهٔ $\angle CAB$ می‌گوییم، هرگاه D و B در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$، و D و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$ باشند. همچنین می‌گوییم D درون این زاویه است. مجموعهٔ نقاط درونی $\angle CAB$ را ***درون*** این زاویه می‌نامیم. درون یک زاویه اشتراک طرفهایی از خطوط نظیر اضلاع زاویه است. ***درون*** یک مثلث را اشتراک درونهای سه زاویه‌اش تعریف می‌کنیم و هر نقطه‌اش را یک نقطهٔ درونی مثلث می‌نامیم. هر نقطه که نقطهٔ درونی مثلث نبوده یا روی اضلاع نباشد، یک ***نقطهٔ بیرونی*** مثلث نام دارد. مجموعهٔ نقاط بیرونی یک مثلث را ***بیرون*** مثلث می‌نامیم.

قضیهٔ ۹.۳.۴. *زاویهٔ $\angle CAB$ و نقطهٔ D واقع بر $\overleftrightarrow{BC}$ مفروضند. D یک نقطهٔ درونی $\angle CAB$ است اگر و فقط اگر $B.D.C$.*



برهان. فرض می‌کنیم D یک نقطهٔ درونی $\angle CAB$ باشد. پس B و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$، و C و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$اند. لذا، $B.C.D$)~ و $C.B.D$)~ . پس طبق ب ۳ داریم $B.D.C$.

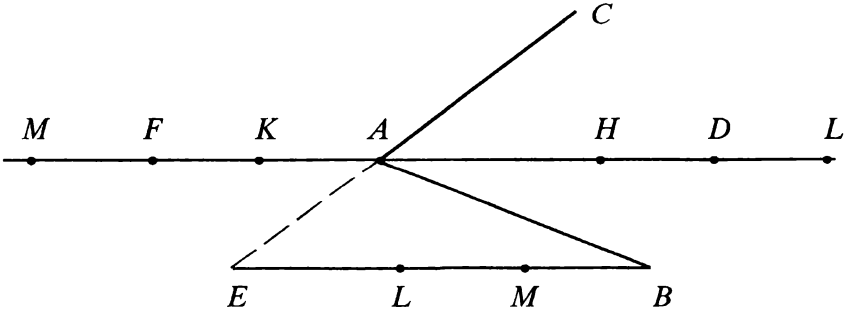
حال فرض می‌کنیم $B.D.C$. چنانچه مراحل فوق را گام به گام به عقب برگردیم نتیجه می‌شود که D یک نقطهٔ درونی $\angle CAB$ است.

قضیهٔ ۱۰.۳.۴. *ثابت کنید هرگاه D یک نقطهٔ درونی $\angle CAB$ باشد، آنگاه*

(آ) تمام نقاط $\overrightarrow{AD}$ جز A نقطهٔ درونی $\angle CAB$ اند؛

(ب) هیچ نقطه‌ای از نیمخط متقابل $\overrightarrow{AD}$ نقطهٔ درونی $\angle CAB$ نیست؛

(پ) هرگاه $C.A.E$، آنگاه B یک نقطهٔ درونی $\angle DAE$ است.



برهان (آ). اینکه A نقطهٔ درونی این زاویه نیست واضح است (چرا؟). پس فرض می‌کنیم H نقطه‌ای از $\overrightarrow{AD}$ غیر از A باشد. اگر $H = D$، مطلب تمام است. اگر $H \neq D$، از تعریف نیمخط معلوم می‌شود که $A.H.D$ یا $A.D.H$. در هر حال H و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$، و H و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$اند. پس، طبق ب ۴ قسمت (آ) و نقطهٔ درونی بودن D، H و B در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$، و H و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$اند. بنابراین H یک نقطهٔ درونی زاویهٔ $\angle CAB$ خواهد بود.

برهان (ب). فرض می‌کنیم K یک نقطه از نیمخط $\overrightarrow{AF}$ (متقابل $\overrightarrow{AD}$) باشد. همچنین K یک نقطهٔ درونی $\angle CAB$ باشد. طبق قسمت (آ)، $K \neq A$. می‌گوییم K و B در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$اند و نیز B و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$. پس، طبق ب ۴ قسمت (آ)، K و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$اند که تناقض است.

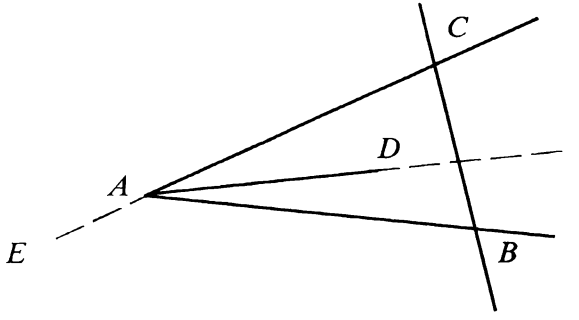
برهان (پ). برای اثبات اینکه B درون $\angle DAE$ است باید ثابت کنیم B و E در یک طرف $\overleftrightarrow{AD}$اند و B و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AE}$. چون طبق قضیهٔ ۷.۳.۴، $\overleftrightarrow{AE} = \overleftrightarrow{AC}$ و D درون $\angle CAB$ است، قسمت دوم واضح است. پس کافی است قسمت اول را ثابت کنیم. برای این کار ابتدا ثابت می‌کنیم EB نیمخط $\overrightarrow{AD}$ را قطع نمی‌کند و سپس ثابت می‌کنیم EB نیمخط $\overrightarrow{AF}$ را قطع نمی‌کند (خاصیت جداسازی خط). فرض می‌کنیم EB نیمخط $\overrightarrow{AD}$ را در نقطه‌ای مانند L قطع کند. حالات خاصی که L مساوی A یا B یا E است را می‌توان رد کرد (به خواننده واگذار می‌شود). فرض می‌کنیم $E.L.B$. پس E و L در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$اند. لذا، طبق ب۴ قسمت (آ)، E و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$اند که با فرض متناقض است. حال فرض می‌کنیم EB نیمخط $\overrightarrow{AF}$ را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. مجدداً حالات خاصی که M مساوی A یا B یا E است را می‌توان رد کرد (به خواننده محول می‌شود). پس فرض می‌کنیم $E.M.B$. لذا، B و M در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$اند. از آن سو B و D نیز در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$اند. پس، طبق ب ۴ قسمت (آ)، D و M در یک طرف $\overleftrightarrow{AC}$ اند که تناقض است. بنابراین B درون زاویهٔ $\angle DAE$ است.

حال از قسمت (پ) قضیهٔ فوق که ظاهراً مفید به نظر نمی‌رسد در اثبات یکی از مهمترین قضایای هندسه، یعنی قضیهٔ قطعه بر، استفاده می‌کنیم. قبلاً یک تعریف

می‌آوریم که قولش را قبلاً در تعریف ۱۵.۱.۲ (تعریف نیمساز) داده بودیم.

تعریف ۱۱.۳.۴. نیمخط $\overrightarrow{AD}$ را **بین** نیمخطهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ می‌گوییم، هرگاه $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متقابل نبوده و D یک نقطهٔ درونی $\angle CAB$ باشد. بنابر قضایای ۷.۳.۴ و ۱۰.۳.۴ قسمت (آ)، این تعریف به انتخاب نقطهٔ D روی $\overrightarrow{AD}$ بستگی ندارد.

قضیهٔ ۱۲.۳.۴. **(قضیهٔ قطعه‌بر).**
هرگاه $\overrightarrow{AD}$ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ باشد، آنگاه $\overrightarrow{AD}$ پاره‌خط BC را قطع می‌کند.



برهان. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{AD}$ پاره‌خط BC را قطع نکند. چون BC با نیمخط متقابل $\overrightarrow{AD}$ نیز نقطهٔ مشترک ندارد (چرا؟)، پس طبق خاصیت جداسازی خط، B و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AD}$اند. اما، طبق قضیهٔ ۱۰.۳.۴ قسمت (پ)، B درون زاویهٔ $\angle DAE$ است. پس B و E نیز در یک طرف $\overleftrightarrow{AD}$اند. لذا، طبق ب۴ قسمت (آ)، E و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AD}$اند که تناقض است.

۴.۴ مسائل

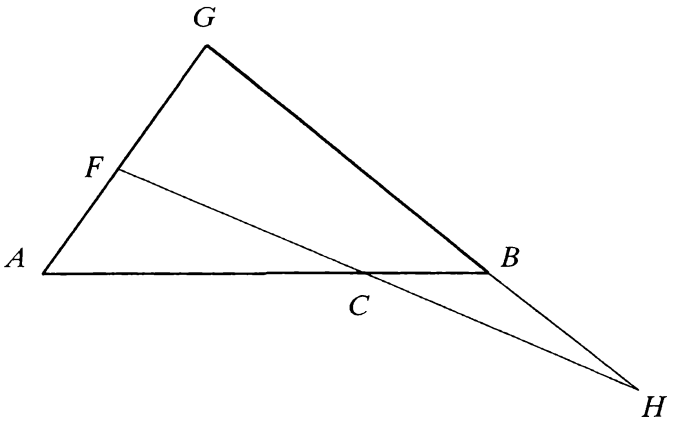
۱.۴.۴. ثابت کنید هرگاه $A.B.C$، آنگاه دو نیمخط $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ متقابلند.

حل. $A \in \overrightarrow{BA}$، ولی طبق قضیهٔ ۶.۳.۴، $A \notin \overrightarrow{BC}$. لذا، $\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{BC}$. چون $A.B.C$، طبق ب ۱، A، B و C بر یک استقامتند. پس، طبق پ ۱، خطوط نظیر $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ یکسانند.

لذا، $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ متقابل خواهند بود (تعریف ۵.۱.۲).

۲.۴.۴. در ب ۲ گفتیم که اگر نقاط A و B مفروض باشند، نقاطی مانند C، D و E وجود دارند بطوری که $A.C.B$، $A.B.D$ و $E.A.B$. در این اصل فرض وجود C بین A و B لازم نیست و از سایر قسمتها نتیجه می‌شود (البته این امر در شأن یک اصل موضوع نیست، ولی ما این کار را بخاطر تکمیل و تقارن کرده‌ایم). در این مسأله این مطلب را ثابت می‌کنیم.

حل. بنابر پ ۱، خط $\overleftrightarrow{AB}$ وجود دارد که از A و B می‌گذرد. و بنابر قضیهٔ ۲.۱.۳، نقطه‌ای مانند F هست که بر خط $\overleftrightarrow{AB}$ قرار ندارد. مجدداً، طبق پ ۱، خط $\overleftrightarrow{AF}$ وجود دارد که از A و F می‌گذرد. بنابر ب ۲، نقطه‌ای مانند G هست بطوری که $A.F.G$.و بنابر ب ۱، نقاط



A، F و G بر یک استقامتند. چون F بر $\overleftrightarrow{AB}$ نیست، بنابر پ۱، نقاط G و B متمایزند و A، B و G بر یک استقامت نیستند. بنابر ب ۲، نقطه‌ای مانند H هست بطوری که $G.B.H$.و بنابر پ ۱، خط $\overleftrightarrow{GH}$ وجود دارد. مجدداً طبق پ ۱ و متمایز بودن A و B معلوم می‌شود که نقاط H و F متمایزند. پس طبق پ ۱، خط $\overleftrightarrow{FH}$ وجود دارد. چون داریم $A.F.G$، طبق ب ۱، $F \neq G$. پس طبق پ ۱، B بر $\overleftrightarrow{FH}$ نیست. بآسانی معلوم می‌شود که A و G نیز بر $\overleftrightarrow{FH}$ نیستند (چرا؟). پس $\overleftrightarrow{FH}$ ضلع AG از مثلث $\Delta\ ABG$

را در نقطهٔ F بین A و G قطع می‌کند. چون $F \neq G$، طبق پ ۱، خطوط $\overleftrightarrow{FH}$ و $\overleftrightarrow{GH}$ فقط در H مشترکند. پس بین B و G نقطه‌ای که بر $\overleftrightarrow{FH}$ واقع باشد وجود ندارد. لذا، طبق قضیهٔ پاش، $\overleftrightarrow{FH}$ ضلع AB را در نقطه‌ای مانند C بین A و B قطع می‌کند و مطلب تمام است.

۳.۴.۴. تعبیری از اصول هندسهٔ پایه و بینیتهای ۱ و ۲ بیابید که در آن ب ۳ صادق نباشد.

حل. نقاط، خطوط و وقوع را به معنی اقلیدسی گرفته و بینیت را بدین طریق تعریف می‌کنیم که اگر B نقطهٔ میانی پاره‌خط AC باشد، می‌گوییم B بین A و C است. بآسانی معلوم می‌شود که اصول هندسهٔ پایه، ب ۱ و ب ۲ دراین تعبیر صادقند (ثابت کنید!). ولی اگر نقاط A ، B و C را روی یک خط طوری بگیریم که هیچ‌یک نقطهٔ میانی پاره‌خط واصل بین دوتای دیگر نباشد، ب ۳ برقرار نخواهد بود. پس ب ۳ از اصول هندسهٔ پایه و بینیتهای ۱ و ۲ مستقل است.

۴.۴.۴. تعبیری از اصول هندسهٔ پایه و بینیتهای ۱ و ۳ بیابید که در آن ب ۲ برقرار نباشد.

حل. دایرهٔ ثابتی را در نظر گرفته و نقاط را به معنی نقاط درونی یا نقاط روی این دایره تعبیر می‌کنیم و هر وتر از دایره را خط گرفته و وقوع را به معنی اقلیدسی می‌گیریم. همچنین بینیت را به معنی عادی اقلیدسی می‌گیریم. واضح است که در این تعبیر، اصول سه‌گانهٔ هندسهٔ پایه و بینیتهای ۱ و ۳ برقرارند (چرا؟)، ولی ب ۲ برقرار نیست، زیرا اگر A و B دو نقطه بر روی دایره باشند، نقطه‌ای مانند D وجودندارد که $A.B.D$ (چرا؟). پس ب ۲ از اصول هندسهٔ پایه و بینیتهای ۱ و ۳ مستقل است.

۵.۴.۴. تعبیری از اصول هندسهٔ پایه و بینیتهای ۲ و ۳ بیابید که در آن ب ۱ برقرار نباشد.

حل. نقاط، خطوط و وقوع را اقلیدسی گرفته و بینیت را این‌طور تعریف می‌کنیم که $A.B.C$ یعنی $B \in AC$. واضح است که اصول سه‌گانهٔ هندسهٔ پایه، ب ۲ و ب ۳ برقرارند (ثابت کنید!). ولی ب ۱ برقرار نیست (چرا؟). پس ب ۱ از اصول هندسهٔ پایه،

ب ۲ و ب۳ مستقل است.

۶.۴.۴. تعبیری از اصول هندسهٔ پایه و سه اصل اول بینیت بیابید که در آن خاصیت جداسازی خط برقرار نباشد.

حل. نقاط، خطوط و وقوع را اقلیدسی گرفته ولی بینیت را این‌طور تعریف می‌کنیم که نقطه‌ای مانند P را می‌گیریم که به معنای اقلیدسی بین A و B باشد، ولی قرار می‌گذاریم از این به بعد A بین P و B باشد؛ سایر نسبتهای بینیت را تغییر نمی‌دهیم. می‌توان ثابت کرد که در این تعبیر،اصول سه‌گانهٔ هندسهٔ پایه و سه اصل اول بینیت برقرارند (ثابت کنید!). ولی P نه بر نیمخط $\overrightarrow{AB}$ واقع است و نه بر نیمخط متقابلش $\overrightarrow{AC}$. زیرا چون به معنای اقلیدسی داشتیم $A.P.B$، پس طبق ب ۳، P بر $\overrightarrow{AC}$ نیست. و چون قرار گذاشتیم A بین P و B باشد، طبق ب ۳، P بر $\overrightarrow{AB}$ نیز نیست. لذا، خاصیت جداسازی خط از اصول سه‌گانهٔ هندسهٔ پایه و سه اصل اول بینیت مستقل است.

۷.۴.۴. عکس قضیهٔ انبساط ـ انقباض را با استفاده از تقارن موجود در ب ۱ ثابت کنید: (هرگاه $B.C.D$ و $A.B.D$، آنگاه $A.B.C$ و $A.C.D$).

حل. بنابر تقارن موجود در ب ۱ داریم $D.C.B$ و $D.B.A$. لذا، طبق قضیهٔ انبساط ـ انقباض، خواهیم داشت $C.B.A$ و $D.C.A$. حال مجدداً طبق ب ۱ داریم $A.B.C$ و $A.C.D$ و مطلب تمام است.

۸.۴.۴. ثابت کنید قضیهٔ پاش با اصل چهارم بینیت هم‌ارز است.

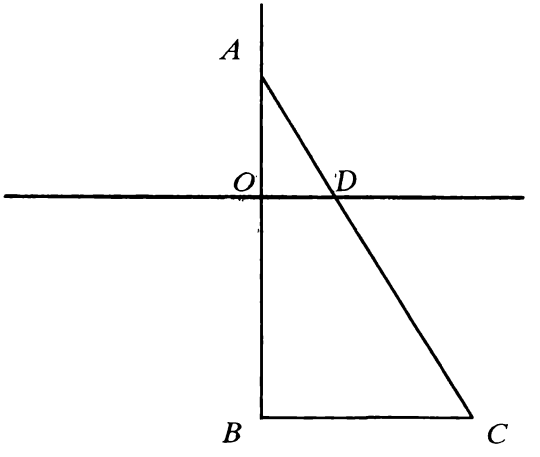
حل. یک طرف حکم قبلاً ثابت شده است (قضیهٔ ۴.۳.۴). حال فرض می‌کنیم قضیهٔ پاش برقرار باشد. خط l و سه نقطهٔ A، B و C غیرواقع بر آن و غیرواقع بر یک استقامت را در نظر می‌گیریم (حالتی که A، B و C بر یک استقامتند به خواننده محول می‌شود). برای اثبات ب ۴ قسمت (آ)، فرض می‌کنیم A و B در یک طرف l، و B و C در یک طرف l بوده ولی A و C در دو طرف l باشند. پس خط l مثلث ΔABC را در ضلع AC

قطع کرده است. لذا، طبق قضیهٔ پاش، باید ضلع AB یا BC را نیز قطع کند؛ یعنی A و B یا B و C در دو طرف l اند که تناقض است.

برای اثبات ب ۴ قسمت (ب)، فرض می‌کنیم A و B در دو طرف l، و B و C نیز در دو طرف l باشند (همچنان فرض است که A، B و C غیرواقع بر یک استقامتند. حالتی که این سه نقطه بر یک استقامتند به خواننده محول می‌شود). می‌گوییم A و C در یک طرف l اند زیرا که در غیر این صورت، خط l ضلع AC از مثلث ΔABC را قطع کرده است. چون B بر l نیست، طبق قضیهٔ پاش، فقط باید یا AB را قطع کند یا BC را که تناقض است.

۹.۴.۴. هر عدد گویا به شکل $\frac{a}{2^n}$ که در آن a و n صحیح هستند یک **عدد گویای دویی** نام دارد. و صفحهٔ گویای دویی، یعنی مجموعهٔ جفتهای مرتب از اعداد دویی. نشان دهید که اصول هندسهٔ پایه و سه اصل اول بینیت و خاصیت جداسازی خط در صفحهٔ گویای دویی صادقند، ولی قضیهٔ پاش درست نیست.

حل. اثبات برقراری اصول هندسهٔ پایه و سه اصل اول بینیت و خاصیت جداسازی خط در این تعبیر آسان است و به خواننده محول می‌شود. برای اثبات عدم برقراری قضیهٔ پاش، مثلث به رؤوس $A(0, 1)$، $B(0, -2)$ و $C(1, -2)$ را در صفحهٔ گویای دویی در نظر می‌گیریم. خط $y = 0$ در مبدأ وارد این مثلث شده است. این خط ضلع AC را در



نقطهٔ $D = (\frac{۱}{۳}, ۰)$ از صفحهٔ اقلیدسی قطع می‌کند که در صفحهٔ گویای دویی قرار ندارد. این خط ضلع BC را نیز قطع نمی‌کند. پس قضیهٔ پاش دراین تعبیر درست نیست. لذا، طبق مسألهٔ ۸.۴.۴ ، اصل چهارم بینیت از اصول هندسهٔ پایه، سه اصل اول بینیت و خاصیت جداسازی خط مستقل است.

۱۰.۴.۴. ثابت کنید هرخط بی‌نهایت نقطه برخود دارد.

حل. خط دلخواه l را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم بر l تعدادی متناهی (مثلاً n تا) نقطه وجود دارد. این نقاط را $x_۱$، $x_۲$، ... ، x_n می‌نامیم. سه نقطهٔ $x_۱$، $x_۲$و $x_۳$را اختیار می‌کنیم. بنابر ب۳، از روابط زیر یکی و فقط یکی برقرار است:

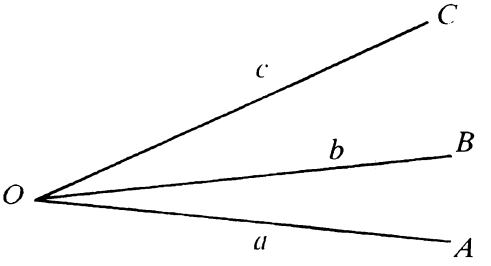
$$x_۳ . x_۲ . x_۱ \ ، \ x_۳ . x_۱ . x_۲ \ ، \ x_۱ . x_۳ . x_۲ .$$

اگر $x_۳ . x_۲ . x_۱$ برقرار باشد، $x_۲$ را حذف می‌کنیم. اگر $x_۳ . x_۱ . x_۲$ برقرار باشد، $x_۱$ را حذف می‌کنیم. و اگر $x_۲ . x_۳ . x_۱$ برقرار باشد، $x_۳$ را حذف می‌کنیم. این عمل را با دو نقطهٔ باقیمانده و $x_۴$ تکرار می‌کنیم و همین طور تا آخر ادامه می‌دهیم. در پایان دو نقطه مانند x_i و x_j خواهیم داشت بطوری که به ازای هر x_kی دیگر داریم $x_i . x_k . x_j$. حال می‌گوییم طبق ب ۲، نقطه‌ای مانند x_l هست بطوری که $x_i . x_l . x_j$. اما x_l طبق ب ۱، غیر از x_iو x_j است. پس داریم $x_i . x_l . x_j$ که با ب ۳ در تضاد است. پس فرض خلف باطل بوده و بر l بی‌نهایت نقطه خواهیم داشت.

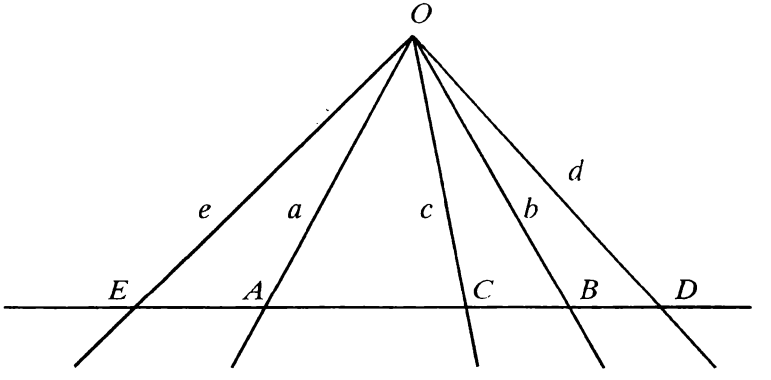
نکته. در اینجا آرزو می‌کنیم ایکاش پاره‌خطها طول می‌داشتند. در این صورت این مسأله ساده‌تر حل می‌شد (چطور؟).

۱۱.۴.۴. چند نیمخط را در یک نقطه **هم رأس** می‌گوییم اگر همه از آن نقطه صادر شده باشند. همچنین چند نیمخط را **در یک طرف** نیمخط a می‌نامیم در صورتی که همه با a هم‌رأس بوده و تمام نقاطشان جز رأس مشترک در یک طرف خط نظیر a واقع شده باشند. و نیز علامت $a.b.c$ را به معنی «نیمخط b بین a و c است» می‌گیریم. در این باب احکامی شبیه بینیتهای ۱، ۲ و ۳ و قضیه‌ای شبیه قضیهٔ انبساط ـ انقباض بیان کرده و آنها را ثابت نمایید.

حل. مشابه ب ۱ در مورد نیمخطها به قرار زیر است: هرگاه $a.b.c$، آنگاه a، b و c هم‌رأسند، دو به دو متمایزند و $c.b.a$. برای اثبات این مشابه فرض می‌کنیم $a.b.c$.



پس، طبق تعریف، b بین a و c است. لذا، این سه نیمخط در نقطه‌ای مانند O هم‌رأسند. حال نقاط A , B , $C \neq O$ را به ترتیب روی a، b و c اختیار می‌کنیم. چون نقطهٔ B درون زاویهٔ $\angle COA$ است، پس B روی a و c نیست. لذا، b با a و c متمایز است. a با c نیز متمایز است (چرا؟). لذا، این نیمخطها دو به دو متمایزند. ضمناً چون b بین a و c است، بین c و a نیز هست (چرا؟). مشابه ب ۲ به قرار زیر است: هرگاه دو نیمخط a و b هم رأس بوده ولی متقابل نباشند، آنگاه نیمخطهایی مانند c، d و e هستند بطوری که داریم $a.c.b$، $a.b.d$ و $e.a.b$. برای اثبات این مشابه فرض می‌کنیم نیمخطهای a و b در نقطهٔ O هم رأس باشند. نقاط A و B را به ترتیب روی a و b و مخالف O اختیار



می‌کنیم. می‌گوییم طبق ب ۲، نقاطی مانند C، D و E وجود دارند بطوری که $A.C.B$، $A.B.D$ و $E.A.B$. پس نیمخطهای $\overrightarrow{OC} = c$، $\overrightarrow{OD} = d$ و $\overrightarrow{OE} = e$ جوابند (چرا؟).

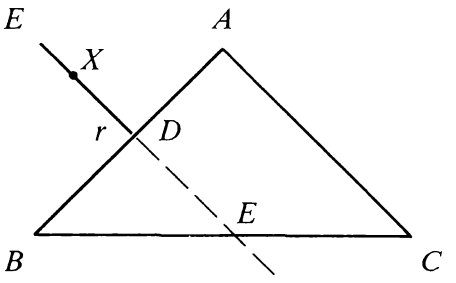
مشابه ب ۳ به قرار زیر است: هرگاه نیمخطهای a، b و c چنان باشند که دوتای آنها در یک طرف نیمخط سوم باشند، آنگاه یکی و فقط یکی از آنها بین دوتای دیگر قرار دارد. اثبات این مشابه و نیز بیان اثبات قضیهٔ انبساط ـ انقباض در مورد نیمخطها به خواننده واگذار می‌شود.

۱۲.۴.۴. قضیهٔ پاش در مورد نیمخطها را ثابت کنید:

(آ) هرگاه نیمخط r که از نقطه‌ای واقع در بیرون ΔABC صادر شده، ضلع AB را در نقطه‌ای بین A و B قطع کند، ضلع AC یا BC را نیز قطع می‌کند و اگر از C نگذرد، فقط یکی از این دو ضلع را قطع خواهد کرد؛

(ب) هر نیمخط مانند r که از یک نقطهٔ درونی ΔABC صادر شده باشد، یکی از اضلاع را قطع می‌کند و اگر از یکی از رؤوس نگذرد، تنها یکی از ضلعها را قطع خواهد کرد.

حل. (آ) فرض می‌کنیم نیمخط r از نقطهٔ X واقع در بیرون ΔABC صادر شده باشد.

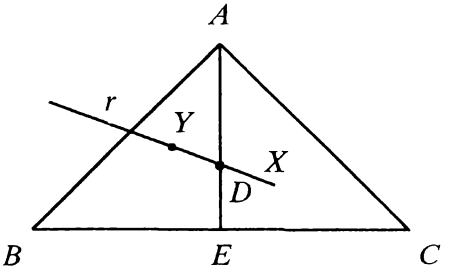


همچنین X مثلاً درون زاویهٔ $\angle BAC$ نباشد. و نیز r ضلع AB را در نقطه‌ای مانند D بین A و B قطع کند. بنابر قضیهٔ پاش، خط $\overleftrightarrow{XD}$ مثلاً ضلع BC را در نقطه‌ای مانند E قطع می‌کند. ثابت می‌کنیم E روی r است. فرض می‌کنیم

کتابخانه مجازی ریاضیات

چنین نباشد. پس، طبق خاصیت جداسازی خط، E روی نیمخط متقابل r است. لذا داریم $E.X.D$ و طبق مشابه ب ۳ و مشابه قضیهٔ انبساط ـ انقباض در مورد نیمخطها (مسألهٔ ۱۱.۴.۴)، E نیز بیرون $\angle BAC$ است. از طرفی داریم $B.E.C$. پس، طبق قضیهٔ ۹.۳.۴، E درون $\angle BAC$ است که تناقض است. پس E روی r قرار دارد. بخش دوم (آ) از قضیهٔ پاش نتیجه می‌شود (چگونه؟).

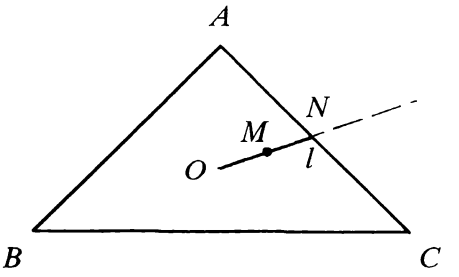
(ب) فرض می‌کنیم نیمخط r از نقطهٔ درونی D مثلث ΔABC صادر شده باشد.



چون D درون زاویهٔ $\angle BAC$ است، پس طبق تعریف، $\overrightarrow{AD}$ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ است. لذا، طبق قضیهٔ قطعه‌بر، $\overrightarrow{AD}$ ضلع BC را در نقطه‌ای مانند E بین B و C قطع می‌کند. چون D درون $\angle ABC$ است، پس طبق قضیهٔ ۷.۳.۴، درون $\angle ABE$ نیز هست. لذا، طبق قضیهٔ ۹.۳.۴، $A.D.E$. حال نقطهٔ $Y \neq D$ را روی نیمخط r اختیار کرده و X را طوری می‌گیریم که $Y.D.X$ (ب ۲). پس X بیرون مثلث ΔABE یا بیرون مثلث ΔAEC است (چرا؟). فرض می‌کنیم X بیرون ΔABE باشد (حالت دیگر نیز به همین نحو پیش می‌رود). پس نیمخط $\overrightarrow{XD}$ ضلع AE از مثلث ΔABE را در نقطهٔ D بین A و E قطع می‌کند. لذا، طبق قسمت (آ)، باید ضلع AB یا BE را نیز قطع کند. اگر ضلع BE را قطع کند، طبق قضیهٔ ۷.۳.۴، ضلع BC را نیز قطع کرده است. نقطهٔ تقاطع نمی‌تواند بین X و D باشد، زیرا هر نقطه بین X و D بیرون مثلث ΔABE است (چرا؟). پس نیمخط r ضلع AB یا BC را قطع خواهد کرد. بخش دوم (ب)، از قضیهٔ پاش و قسمت (آ) نتیجه می‌شود (چگونه؟).

۱۳.۴.۴. ثابت کنید یک خط نمی‌تواند درون یک مثلث جای گیرد.

حل. فرض می‌کنیم خط l درون مثلث ΔABC قرار داشته باشد. طبق پ ۲، دو نقطه مانند



O و M روی l اختیار کرده و نیمخط $\overrightarrow{OM}$ را که از نقطهٔ O درون مثلث صادر شده است در نظر می‌گیریم. بنابر مسألهٔ ۱۲.۴.۴ قسمت (ب)، این نیمخط از مثلث ΔABC خارج می‌شود. پس l یکی از اضلاع این مثلث را در نقطه‌ای چون N قطع می‌کند. یعنی بر l نقطه‌ای مانند N هست که درون ΔABC نیست و این با فرض تناقض خواهد داشت.

۵

قابلیت انطباق

۱.۵ اصول موضوع مربوطه

۲.۵ قضایای قابلیت انطباق

۳.۵ مسائل

۱.۵ اصول موضوع مربوطه

در فصل ۴ هندسهٔ پایه را با بینیت و اصول موضوع مربوطه قوام بخشیده و یک گام به هندسهٔ اقلیدسی نزدیکتر شدیم. در این فصل اصطلاح تعریف نشدهٔ قابلیت انطباق و اصول موضوع مربوط به آن را وارد کرده و گام دیگری برای دستیابی به هندسهٔ اقلیدسی برمی‌داریم. اقلیدس به قابلیت انطباق بیش از بینیت التفات داشته و راجع به آن چند اصل متعارف آورده است. وی از لفظ «تساوی» به جای قابلیت انطباق استفاده می‌کرده، مثلاً در یک متساوی‌الاضلاع به جای آنکه بگوید دو ضلع یا دو زاویه قابل انطباقند، می‌گفته است که دو ضلع یا دو زاویه مساویند. البته مقصودش از تساوی دو ضلع، تساوی طول آن دو و تساوی دو زاویه، تساوی اندازهٔ آنها به درجه بوده است. ما قابلیت انطباق را با تساوی منطقی متفاوت گرفته و آن را یک اصطلاح تعریف نشده بین پاره‌خطها و زوایا می‌گیریم و قابلیت انطباق بین دو مثلث را این‌طور تعریف می‌کنیم که، دو مثلث در صورتی ***قابل انطباقند*** که تناظر یک به یک بین رؤوسشان چنان موجود باشد که اضلاع و زوایای نظیر قابل انطباق باشند. این تعریف را می‌توان برای هر دو n ضلعی ($n > ۳$) تعمیم داد. ما قابلیت انطباق را با علامت $\cong$ نشان خواهیم داد.

حال اصول موضوع هیلبرت برای قابلیت انطباق را بیان می‌کنیم.

ق ۱. ***هرگاه A و B دو نقطهٔ متمایز بوده و A' یک نقطهٔ دلخواه باشد، آنگاه به ازای هر نیمخط مانند r که از A' صادر شده است یک نقطه و فقط یک نقطه مانند B' بر r وجود دارد که $B' \neq A'$ و $AB \cong A'B'$.***

ق ۲. ***هرگاه $AB \cong CD$ و $AB \cong EF$، آنگاه $CD \cong EF$. به علاوه هر پاره‌خط بر خودش قابل انطباق است.***

ق ۳. **(جمع پاره‌خطها).**

هرگاه $A.B.C$، $A'.B'.C'$، $AB \cong A'B'$ و $BC \cong B'C'$، آنگاه $AC \cong A'C'$.

ق ۴. ***زاویهٔ $\angle BAC$ و نیمخط دلخواه $\overrightarrow{A'B'}$ صادره از A' را درنظر می‌گیریم. در این صورت در هر طرف $\overleftrightarrow{A'B'}$ یک و فقط یک نیمخط مانند $\overrightarrow{A'C'}$ هست بطوری که***

$$\angle B'A'C' \cong \angle BAC .$$

این اصل شبیه ق ۱ است، منتها در مورد زوایا.

ق ۵. ***هرگاه $\angle A \cong \angle B$ و $\angle A \cong \angle C$، آنگاه $\angle B \cong \angle C$. به علاوه هر زاویه با خودش قابل انطباق است.***

این اصل شبیه ق ۲ است، منتها در مورد زوایا.

ظاهراً باید اصلی شبیه ق ۳ برای زوایا داشته باشیم. ولی خواهید دید که این شبیه را می‌توان ثابت کرد و شگفت‌آور آنکه در این اثبات از ق ۳ استفاده خواهیم کرد.

ق ۶. **(محک ض ز ض برای قابلیت انطباق مثلثها).**

هرگاه دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلثی به ترتیب با دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلثی دیگر قابل انطباق باشند، آنگاه این دو مثلث قابل انطباقند.

اقلیدس محک ض ز ض را به صورت زیر ثابت می‌کند که نادرست است. فرض می‌کنیم در دو مثلث ΔABC و $\Delta A'B'C'$ داریم $AB \cong A'B'$ ، $AC \cong A'C'$ و $\angle A \cong \angle A'$. مثلث $\Delta A'B'C'$ را طوری حرکت می‌دهیم که A' بر A و $\overleftrightarrow{A'B'}$ بر $\overleftrightarrow{AB}$ قرار گیرد. چون $AB \cong A'B'$، B' بر B منطبق می‌شود. و چون $\angle A \cong \angle A'$ ،

$\overleftrightarrow{A'C'}$ بر $\overleftrightarrow{AC}$ قرار می‌گیرد. و چون $AC \cong A'C'$، C' باید بر C منطبق شود. لذا، $B'C'$ بر BC و سایر زوایا بر زوایای نظیر منطبق شده و بدین ترتیب مثلثها بر هم منطبق می‌شوند.

این برهان بر حرکت استوار بوده و **برهمنش** نام دارد و بطور ضمنی از ***اصل برهمنش*** استفاده شده که طول اضلاع و اندازهٔ زوایا را ضمن حرکت تضمین می‌کند. ولی اقلیدس اصل برهمنش را در هیچ جا تصریح نکرده است و لذا، این برهان مقبول نیست. همچنین این برهان، ولو اصل برهمنش را هم بپذیریم، به دلیل داشتن رنگ مکانیک، نمی‌تواند یک برهان موجه در هندسهٔ اقلیدسی باشد.

حال به اثبات قضایای قابلیت انطباق می‌پردازیم.

۲.۵ قضایای قابلیت انطباق

قضیهٔ ۱.۲.۵. ***قابلیت انطباق بین پاره‌خطها و نیز بین زوایا یک رابطهٔ هم‌ارزی است.***

برهان. مطلب را برای پاره‌خطها ثابت می‌کنیم. در مورد زوایا نیز به همین نحو است. اولاً، طبق ق ۲ قسمت دو، هر پاره‌خط بر خودش قابل انطباق است. پس $\cong$ منعکس است. ثانیاً فرض می‌کنیم $AB \cong AC$. طبق ق ۲ قسمت دو، $AB \cong AB$. پس طبق ق ۲ قسمت یک، $AC \cong AB$. لذا، $\cong$ متقارن است. برای اثبات تعدی، فرض می‌کنیم $AB \cong CD$ و $CD \cong EF$. چون $\cong$ متقارن است، پس $CD \cong AB$. لذا، از $CD \cong AB$ و $CD \cong EF$ طبق ق ۲ قسمت یک داریم $AB \cong EF$. بنابراین $\cong$ در بین پاره‌خطها یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

قضیهٔ ۲.۲.۵. [قضیهٔ پاپوس (*Pappus*)].
هرگاه در مثلث ΔABC داشته باشیم $AB \cong AC$، آنگاه $\angle B \cong \angle C$

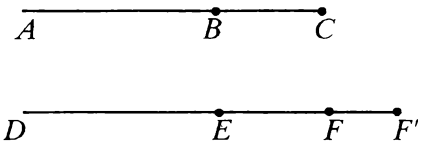
برهان. تناظر زیر را بین رؤوس ΔABC در نظر می‌گیریم:

$$A \longleftrightarrow A$$
$$B \longleftrightarrow C$$
$$C \longleftrightarrow B$$

با این تناظر، دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلث ΔABC با دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از مثلث ΔACB، قابل انطباق می‌شوند (طبق تعریف زاویه، ق ۵ قسمت دو، فرض قضیه و قضیهٔ ۱.۲.۵). پس $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ (محک ض ز ض). لذا، زوایای $\angle B$ و $\angle C$ (زوایای نظیر) قابل انطباقند.

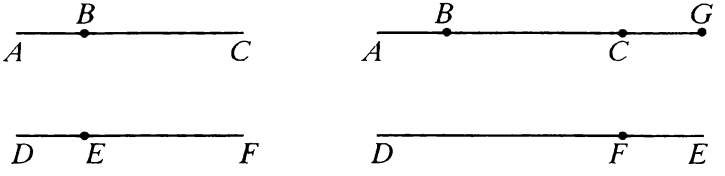
قضیهٔ ۳.۲.۵. **(تفریق پاره‌خطها).**
هرگاه داشته باشیم $A.B.C$، و $D.E.F$، و $AB \cong DE$ و $AC \cong DF$، آنگاه $BC \cong EF$.

برهان.



بنابر ق ۱، نقطهٔ منحصر به فردی مانند F' بر $\overrightarrow{EF}$ هست بطوری که $BC \cong EF'$. پس طبق فرض و ق ۳، $AC \cong DF'$. از طرفی طبق فرض، $AC \cong DF$. پس، به خاطر یکتایی در ق ۱، $F = F'$ و $BC \cong EF$.

قضیهٔ ۴.۲.۵. ***هرگاه $AC \cong DF$، آنگاه به ازای هر نقطهٔ B بین A و C یک و فقط یک نقطه مانند E بین D و F وجود دارد که $AB \cong DE$.***



بنابر ق ۱، نقطهٔ منحصر به فردی مانند E بر $\overrightarrow{DF}$ هست بطوری که $AB \cong DE$. اگر E بین D و F باشد مطلب تمام است. فرض می‌کنیم چنین نباشد، پس طبق تعریف

نیمخط، یا $E = F$ یا $D.F.E$. اگر $E = F$، آنگاه B و C دو نقطهٔ متمایز بر $\overrightarrow{AC}$ اند بطوری که $DF \cong AB$ و $DF \cong AC$ که با یکتایی ق ۱ در تضاد است. هرگاه $D.F.E$، آنگاه نقطه‌ای مانند G بر نیمخط متقابل $\overrightarrow{CA}$ هست بطوری که $FE \cong CG$ (ق ۱). پس، بنابر ق ۳، $AG \cong DE$. اما $B \neq G$ (چرا؟). پس دو نقطهٔ متمایز مانند B و G بر $\overrightarrow{AC}$ وجود دارند بطوری که $DE \cong AB$ و $DE \cong AG$ که مخالف یکتایی ق ۱ است.

تعریف ۵.۲.۵ $AB < CD$ (یا $CD > AB$)؛ یعنی نقطه‌ای مانند E بین C و D هست بطوری که $AB \cong CE$.

قضیهٔ ۶.۲.۵ (مرتب کردن پاره‌خطها).

(آ) *از روابط زیر یکی و فقط یکی برقرار است:*

(تثلیث قوی) $AB > CD$، $AB \cong CD$ یا $AB < CD$؛

(ب) *هرگاه* $AB < CD$ و $CD \cong EF$، *آنگاه* $AB < EF$؛

(پ) *هرگاه* $AB > CD$ و $CD \cong EF$، *آنگاه* $AB > EF$؛

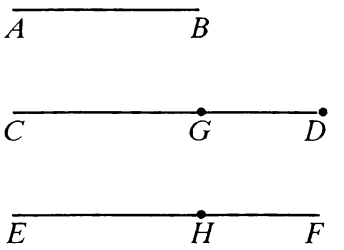
(ت) *هرگاه* $AB < CD$ و $CD < EF$، *آنگاه* $AB < EF$ *(تعدی)*.

برهان (آ). بنابر ق ۱، یک و تنها یک نقطه مانند E بر نیمخط $\overrightarrow{CD}$ هست بطوری که $AB \cong CE$. پس، طبق تعریف نیمخط، ب ۱ و ب ۳، یکی و فقط یکی از روابط زیر برقرار است:

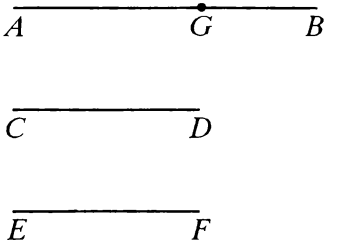
$$C.E.D \quad ، \quad D = E \quad ، \quad C.D.E.$$

$C.E.D$، یعنی $AB < CD$ و $D = E$، یعنی $AB \cong CD$. حال فرض می‌کنیم $C.D.E$. بنابر قضیهٔ ۴.۲.۵، نقطهٔ منحصر به فردی مانند F بین A و B هست بطوری که $AF \cong CD$. پس طبق تعریف، $AB > CD$. لذا، قسمت (آ) برقرار است.

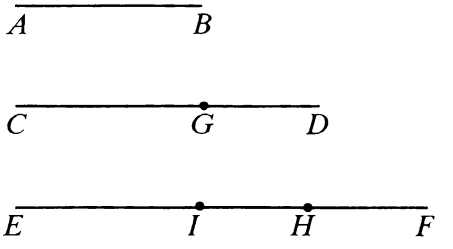
برهان (ب). چون $AB < CD$، طبق تعریف، نقطه‌ای مانند G بین C و D هست بطوری که $AB \cong CG$. چون $CD \cong EF$، بنابر قضیهٔ ۴.۲.۵، نقطه‌ای مانند H بین E و F هست بطوری که $CG \cong EH$. و چون رابطهٔ $\cong$ متعدی است (قضیهٔ ۱.۲.۵)، پس $AB \cong EH$. لذا، طبق تعریف، $AB < EF$.



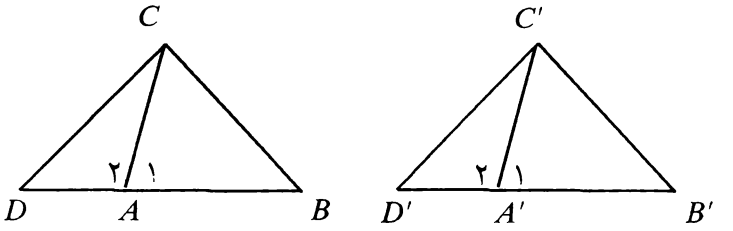
برهان (پ). چون $AB > CD$، پس نقطه‌ای مانند G بین A و B هست بطوری که $AG \cong CD$. اما $CD \cong EF$. پس طبق تعدی $\cong$ (قضیهٔ ۱.۲.۵) داریم $AG \cong EF$. لذا، طبق تعریف، $AB > EF$.



برهان (ت). چون $AB < CD$، پس نقطه‌ای مانند G بین C و D هست بطوری که $AB \cong CG$. چون $CD < EF$، پس نقطه‌ای مانند H بین E و F هست بطوری که $CD \cong EH$. اما، طبق قضیهٔ ۴.۲.۵، نقطه‌ای مانند I بین E و H هست بطوری که $CG \cong EI$. پس طبق تعدی $\cong$ (قضیهٔ ۱.۲.۵)، $AB \cong EI$. از طرفی داریم $E.H.F$ و $E.I.H$. پس، طبق قضیهٔ انبساط ـ انقباض خواهیم داشت $E.I.F$. بنابراین، طبق تعریف، $AB < EF$.



قضیهٔ ۷.۲.۵. ***مکملهای زوایای قابل انطباق قابل انطباقند.***

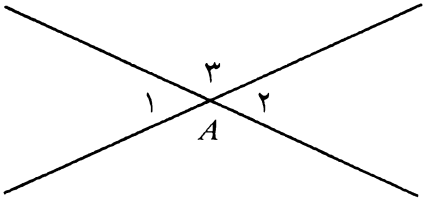


برهان. فرض می‌کنیم $\angle A_1 \cong \angle A'_1$. ثابت می‌کنیم $\angle A_2 \cong \angle A'_2$. نقاط را می‌توان طبق ق ۱ و قضیهٔ ۷.۳.۴ طوری گرفت که $AB \cong A'B'$، $AC \cong A'C'$ و $AD \cong A'D'$. داریم $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ (محک ض ز ض). پس $BC \cong B'C'$ و $\angle B \cong \angle B'$. همچنین از ق ۳ داریم $BD \cong B'D'$. لذا، $\Delta BCD \cong \Delta B'C'D'$ (محک ض ز ض). پس داریم $CD \cong C'D'$ و $\angle D \cong \angle D'$. حال می‌گوییم $\Delta ACD \cong \Delta A'C'D'$ (محک ض ز ض). بنابراین $\angle A_2 \cong \angle A'_2$ و مطلب تمام است.

قضیهٔ ۸.۲.۵. (آ) ***زوایای متقابل به رأس قابل انطباقند؛***

(ب) ***هر زاویه که با یک زاویهٔ قائمه قابل انطباق باشد، قائمه است.***

برهان (آ). فرض می‌کنیم دو زاویهٔ $\angle A_1$ و $\angle A_2$ متقابل به رأس باشند. پس دارای مکمل

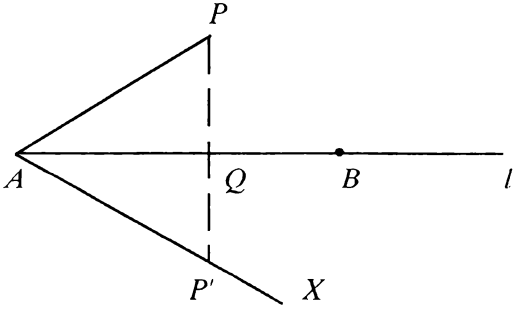


مشترکی مانند $\angle A_3$ اند. بنابر ق ۵ قسمت دو، $\angle A_3 \cong \angle A_3$. اگر $\angle A_1$ را مکمل نسخهٔ اول $\angle A_3$ و $\angle A_2$ را مکمل نسخهٔ دوم $\angle A_3$ بگیریم، بنابر قضیهٔ ۷.۲.۵، $\angle A_1 \cong \angle A_2$ و مطلب تمام است.

برهان (ب). فرض می‌کنیم $\angle A_1 \cong \angle B_1$ و $\angle B_1$ قائمه باشد. همچنین $\angle A_2$ مکمل $\angle A_1$ و $\angle B_2$ مکمل $\angle B_1$ باشد. چون $\angle B_1$ قائمه است، $\angle B_1 \cong \angle B_2$. از طرفی، طبق قضیهٔ ۷.۲.۵، از $\angle A_1 \cong \angle B_1$ معلوم می‌شود که $\angle A_2 \cong \angle B_2$. و از روابط $\angle A_1 \cong \angle B_1$ ، $\angle B_1 \cong \angle B_2$ و تعدی $\cong$ در مورد زوایا (قضیهٔ ۱.۲.۵) معلوم می‌شود که $\angle A_1 \cong \angle B_2$. اما داشتیم $\angle A_2 \cong \angle B_2$. پس، بنابر تقارن $\cong$ (قضیهٔ ۱.۲.۵) در مورد زوایا و ق ۵، $\angle A_1 \cong \angle A_2$؛ یعنی زاویهٔ $\angle A_1$ قائمه است.

قضیهٔ ۹.۲.۵. ***به ازای هر خط l و هر نقطهٔ P خطی وجود دارد که از P می‌گذرد و بر l عمود است.***

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم P بر l نباشد. بنابر پ ۲، دو نقطه مانند A و B بر l وجود دارند. حال در طرفی از l که P در آن نیست نیمخطی مانند $\overrightarrow{AX}$ رسم می‌کنیم بطوری که $\angle XAB \cong \angle PAB$ (ق ۴). بنابر ق ۱، نقطه‌ای مانند P' بر $\overrightarrow{AX}$ وجود دارد که $AP' \cong AP$. چون P و P' در دو طرف lاند (چرا؟)، PP' خط l را در نقطه‌ای مانند Q قطع می‌کند. هرگاه $Q = A$، آنگاه طبق تعریف، $\overrightarrow{PP'} \perp l$. هرگاه $Q \neq A$، آنگاه $\Delta PAQ \cong \Delta P'AQ$ (محک ض ز ض). بنابراین $\angle PQA \cong \angle P'QA$.



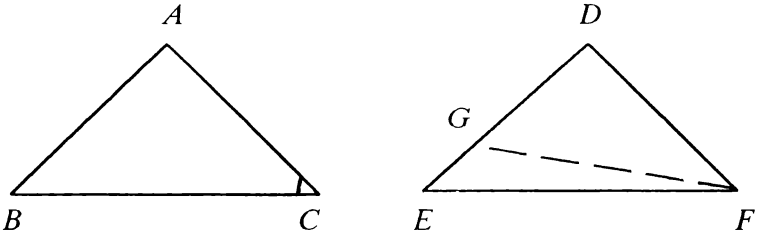
پس، طبق تعریف، $\overleftrightarrow{PP'} \perp l$.

حال فرض می‌کنیم P بر l باشد. بنابر قضیهٔ ۲.۱.۳، نقطه‌ای هست که بر l نیست. از این نقطه، طبق قسمت اول برهان، خطی بر l عمود کرده و یک زاویهٔ قائمه به دست می‌آوریم. سپس طبق ق ۴، زاویه‌ای قابل انطباق با این زاویه به رأس P جدا می‌کنیم بطوری که l خط نظیر یک ضلعش باشد. بنابر قضیهٔ ۸.۲.۵ قسمت (ب)، این زاویه قائمه است و خط نظیر ضلع دیگرش از P گذشته و بر l عمود است.

یکتایی این عمود در آینده ثابت خواهد شد.

قضیهٔ ۱۰.۲.۵. **(محک ز ض ز برای قابلیت انطباق مثلثها).**

هرگاه در دو مثلث ΔABC و ΔDEF داشته باشیم $\angle A \cong \angle D$ و $\angle C \cong \angle F$ و $AC \cong DF$، آنگاه $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.



برهان. بنابر ق ۱، نقطهٔ منحصر به فردی مانند G بر $\overrightarrow{DE}$ هست بطوری که $AB \cong DG$. پس $\Delta ABC \cong \Delta DFG$ (محک ض ز ض). لذا، $\angle C \cong \angle DFG$. از طرفی طبق فرض، $\angle C \cong \angle F$. پس طبق ق ۴ داریم $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FE}$. بنابراین $G = E$ و $AB \cong DE$ و $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (محک ض ز ض).

قضیهٔ ۱۱.۲.۵. **(عکس قضیهٔ پاپوس).**

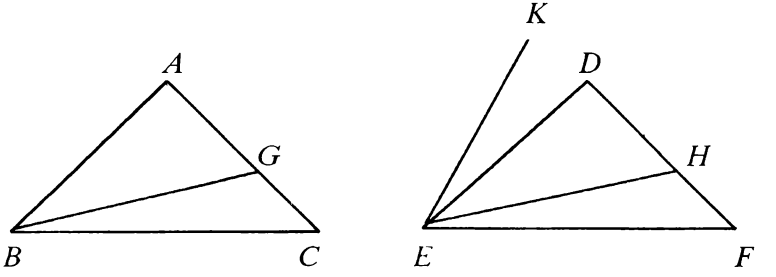
هرگاه در ΔABC داشته باشیم $\angle B \cong \angle C$، آنگاه $AB \cong AC$ و مثلث متساوی‌الساقین است.

برهان. تناظر زیر را بین رؤوس ΔABC در نظر می‌گیریم:

$$A \longleftrightarrow A$$
$$B \longleftrightarrow C$$
$$C \longleftrightarrow B$$

با این تناظر، دو زاویه و ضلع بین آنها از ΔABC با دو زاویه و ضلع بین آنها از ΔACB، (طبق فرض، تقارن $\cong$ در زوایا و ب ۱)، قابل انطباق می‌شوند. پس $\Delta ABC \cong \Delta ACB$ (محک ز ض ز). لذا، اضلاع نظیر AB و AC قابل انطباق خواهند بود.

قضیهٔ ۱۲.۲.۵. **(جمع زوایا).** فرض می‌کنیم $\overrightarrow{BG}$ بین $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ بوده و $\overrightarrow{EH}$ بین $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EF}$ است و $\angle ABG \cong \angle DEH$ و $\angle GBC \cong \angle HEF$. در این صورت $\angle ABC \cong \angle DEF$.



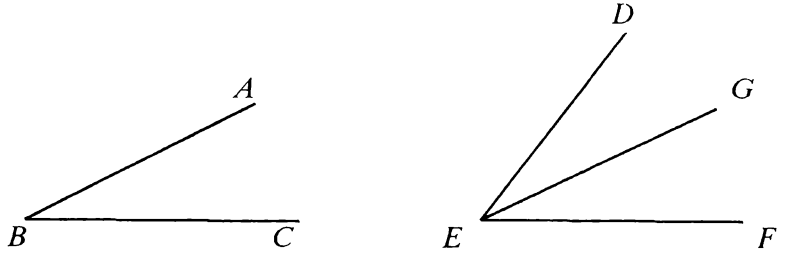
برهان. بنابر قضیهٔ قطعه‌بر و قضیهٔ ۷.۳.۴ می‌توان G را طوری گرفت که $A.G.C$. بنابر ق ۱ و قضیهٔ ۷.۳.۴ فرض می‌کنیم D، H و F طوری اختیار شده باشند که $AB \cong DE$، $GB \cong HE$ و $CB \cong FE$. پس $\Delta ABG \cong \Delta DEH$ و $\Delta GBC \cong \Delta HEF$ (محک ض ز ض). لذا، $\angle DHE \cong \angle AGB$، $\angle FHE \cong \angle CGB$ و $\angle AGB$ مکمل $\angle CGB$ است. پس طبق قضیهٔ ۷.۲.۵ و ق ۴، $\angle DHE$ مکمل $\angle FHE$ است. لذا، نقاط D، H و F نیز بر یک استقامتند؛ ضمناً داریم $D.H.F$، $AG \cong DH$ و $GC \cong HF$ (چرا؟). لذا، طبق ق ۳ خواهیم داشت $AC \cong DF$. پس $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (محک ض ز ض). بنابراین $\angle ABC \cong \angle DEF$ و مطلب تمام است.

قضیهٔ ۱۳.۲.۵. **(تفریق زوایا).** فرض می‌کنیم $\overrightarrow{BG}$ بین $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ بوده و نیز $\overrightarrow{EH}$ بین $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EF}$ است و

$\angle GBC \cong \angle HEF$ و $\angle ABC \cong \angle DEF$. در این صورت $\angle ABG \cong \angle DEH$ (ر.ک. شکل قضیهٔ ۱۲.۲.۵).

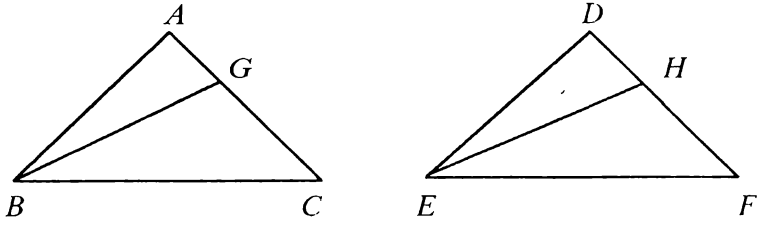
برهان. بنابر ق ۴، نیمخطی مانند $\overrightarrow{EK}$ در طرفی از $\overrightarrow{EH}$ که D در آن است وجود دارد بطوری که $\angle ABG \cong \angle KEH$. پس، طبق قضیهٔ ۱۲.۲.۵، $\angle ABC \cong \angle KEF$. بنابراین، طبق ق ۴، $\overrightarrow{EK} = \overrightarrow{ED}$ و $\angle ABG \cong \angle DEH$.

تعریف ۱۴.۲.۵. $\angle ABC < \angle DEF$ (یا $\angle DEF > \angle ABC$) یعنی نیمخطی مانند $\overrightarrow{EG}$ بین $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EF}$ وجود دارد بطوری که $\angle ABC \cong \angle GEF$.



قضیهٔ ۱۵.۲.۵. *فرض می‌کنیم $\angle ABC \cong \angle DEF$ و $\overrightarrow{BG}$ بین $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ باشد. در این صورت نیمخط منحصر به فردی مانند $\overrightarrow{EH}$ بین $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EF}$ هست بطوری که $\angle ABG \cong \angle DEH$.*

برهان.



بنابر قضیهٔ قطعه بر، $\overrightarrow{BG}$ ضلع AC را در یک نقطه قطع می‌کند که می‌توان آن را طبق قضیهٔ ۷.۳.۴، همان G گرفت. پس طبق قضیهٔ ۹.۳.۴، داریم $A.G.C$. حال، بنابر ق ۱ و قضیهٔ ۷.۳.۴، نقاط D و F را طوری می‌گیریم که $AB \cong DE$ و $BC \cong EF$. پس $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (محک ض ز ض). لذا، $AC \cong DF$. پس، طبق قضیهٔ ۴.۲.۵، نقطهٔ منحصر به فردی مانند H بین D و F هست که $AG \cong DH$. چون داریم $D.H.F$، بنابر قضیهٔ ۹.۳.۴، H یک نقطهٔ درونی زاویهٔ $\angle DEF$ است. پس طبق تعریف، $\overrightarrow{EH}$ بین $\overrightarrow{ED}$ و $\overrightarrow{EF}$ است. ضمناً از $\Delta ABG \cong \Delta DEH$ (محک ض ز ض) معلوم می‌شود که $\angle ABG \cong \angle DEH$. همچنین از منحصر به فرد بودن H معلوم می‌شود که $\overrightarrow{EH}$ منحصر به فرد است.

قضیهٔ ۱۶.۲.۵. **(مرتب کردن زوایا).**

(آ) *از روابط زیر یکی و فقط یکی برقرار است:*

(تثلیث قوی) $\angle P > \angle Q$ ، $\angle P \cong \angle Q$ یا $\angle P < \angle Q$ ؛

(ب) *هرگاه* $\angle P < \angle Q$ و $\angle Q \cong \angle R$ ، *آنگاه* $\angle P < \angle R$ ؛

(پ) *هرگاه* $\angle P > \angle Q$ و $\angle Q \cong \angle R$ ، *آنگاه* $\angle P > \angle R$ ؛

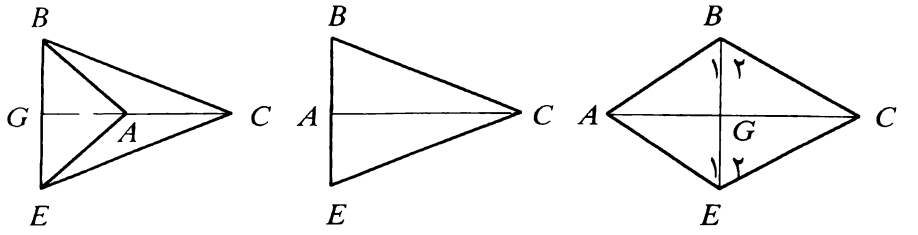
(ت) *هرگاه* $\angle P < \angle Q$ و $\angle Q < \angle R$ ، *آنگاه* $\angle P < \angle R$ *(تعدی).*

این قضیه شبیه قضیهٔ ۶.۲.۵ (در مورد پاره‌خطها) است و لذا اثباتش به خواننده محول می‌شود

قضیهٔ ۱۷.۲.۵. **(محک ض ض ض برای قابلیت انطباق مثلثها).**

در مثلثهای ΔABC و ΔDEF *هرگاه* $AB \cong DE$، $AC \cong DF$ و $BC \cong EF$، *آنگاه* $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

برهان. با استفاده از ق ۴، ق ۱ و ق ۶، می‌توان مسأله را به حالتی درآورد که در آن $A = D$ و $C = F$ و نقاط B و E در دو طرف خط $\overleftrightarrow{AC}$ باشند (چرا؟). در این صورت اشکال مختلفی خواهیم داشت که از جمله عبارتند از:

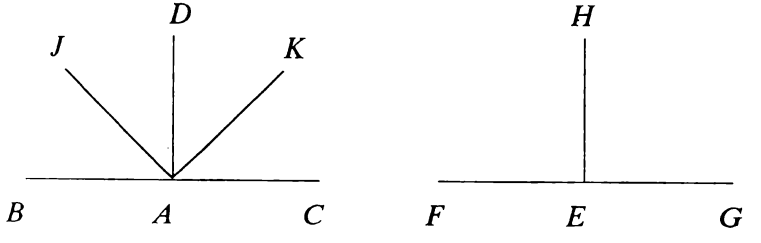


در هر مورد بآسانی می‌توان قابلیت انطباق مثلثهای مربوطه را به ثبوت رسانید. مثلاً در شکل سمت راست، چون ΔABE متساوی‌الساقین است، طبق قضیهٔ پاپوس، $\angle B_1 \cong \angle E_1$. همچنین طبق همین قضیه، $\angle B_2 \cong \angle E_2$. چون $A.G.C$، پس طبق قضیهٔ ۹.۳.۴، G درون $\angle ABC$ و $\angle AEC$ است. پس طبق تعریف، $\overrightarrow{BG}$ بین $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ بوده و $\overrightarrow{EG}$ نیز بین $\overrightarrow{EA}$ و $\overrightarrow{EC}$ است. لذا، طبق قضیهٔ جمع زوایا، $\angle B \cong \angle E$. بنابراین $\Delta ABC \cong \Delta AEC$ (محک ض ز ض) و مطلب تمام است. وضع در شکلهای دیگر به همین نحو ثابت می‌شود. (ثابت کنید!).

حال اصل چهارم اقلیدس را به عنوان قضیه ثابت می‌کنیم. این امر نشان می‌دهد که اقلیدس اصل چهارم خود را (برخلاف اصل اول) سنجیده انتخاب نکرده است.

قضیهٔ ۱۸.۲.۵. **(اصل چهارم اقلیدس).**
زوایای قائمه دو به دو قابل انطباقند.

برهان. فرض می‌کنیم $\angle BAD \cong \angle CAD$ و $\angle FEH \cong \angle GEH$ دو جفت زاویهٔ قائمه باشند. همچنین $\angle BAD$ قابل انطباق با $\angle FEH$ نباشد (فرض خلف). پس، طبق قضیهٔ

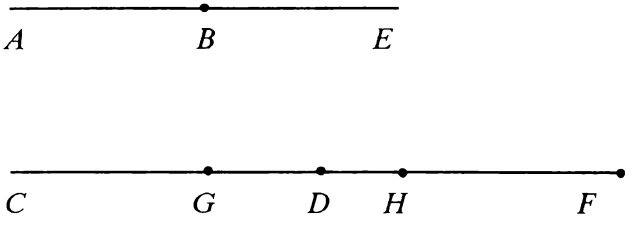


۱۶.۲.۵ قسمت (آ)، یکی از زوایا از دیگری کوچکتر است؛ مثلاً $\angle FEH < \angle BAD$. پس طبق تعریف، نیمخطی مانند $\overrightarrow{AJ}$ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ هست بطوری که $\angle BAJ \cong \angle FEH$. پس، طبق قضیهٔ ۷.۲.۵، $\angle CAJ \cong \angle GEH$. لذا، طبق قضیهٔ ۱.۲.۵، $\angle BAJ \cong \angle CAJ$. اما طبق تعریف کوچکتری و ق ۵، $\angle BAJ < \angle BAD$. چون $\angle BAD \cong \angle CAD$، پس طبق قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (ب)، $\angle BAJ < \angle CAD$. لذا، طبق تعریف، نیمخطی مانند $\overrightarrow{AK}$ بین $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ هست بطوری که $\angle BAJ \cong \angle CAK$. اما داشتیم $\angle BAJ \cong \angle CAJ$. لذا، طبق ق ۵، $\angle CAJ \cong \angle CAK$. پس $\angle CAD$ بزرگتر از $\angle CAK$ و کوچکتر از زاویهٔ قابل انطباقش یعنی $\angle CAJ$ است که خلاف قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (آ) است. پس فرض خلف باطل بوده و $\angle BAD \cong \angle FEH$.

۳.۵ مسائل

۱.۳.۵. پاره‌خط AB داده شده است. بنابر ق ۱، نقطهٔ منحصر به فردی مانند E بر نیمخط متقابل $\overrightarrow{BA}$ هست بطوری که $AB \cong BE$. ما AE را با $۲AB$ نشان می‌دهیم. به همین ترتیب می‌توان nAB را به ازای هر عدد طبیعی n تعریف کرد. ثابت کنید هرگاه $AB < CD$، آنگاه $۲AB < ۲CD$.

حل.

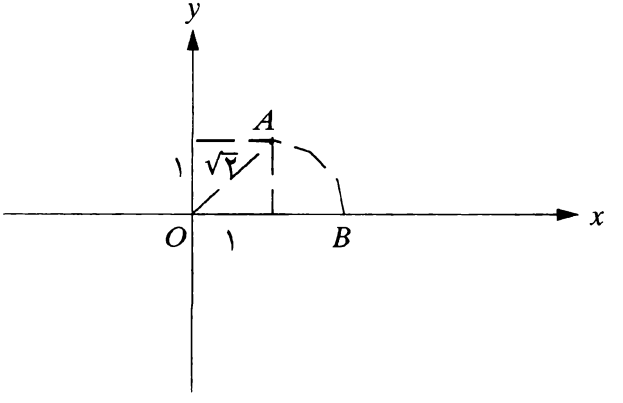


فرض می‌کنیم $AE = ۲AB$ و $CF = ۲CD$. چون $AB < CD$، نقطه‌ای مانند G بین C و D هست بطوری که $AB \cong CG$. همچنین، طبق ق ۱، نقطه‌ای مانند H بر $\overrightarrow{GD}$ هست بطوری که $BE \cong GH$. پس، طبق ق ۳، $AE \cong CH$. برای اتمام مطلب کافی

است ثابت کنیم H بین C و F است. می‌گوییم داریم $C.G.D$ و $C.D.F$. پس طبق قضیهٔ انبساط ـ انقباض خواهیم داشت $C.G.F$. از طرفی داریم $G.H.F$ (چرا؟). پس باز طبق قضیهٔ انبساط ـ انقباض خواهیم داشت $C.H.F$. لذا، $AE < CF$ یا $2AB < 2\ CD$.

۲.۳.۵. فرض کنید Q^2 ***صفحهٔ گویای*** تمام جفتهای مرتب $(x\ ,\ y)$ از اعداد گویا با تعابیر معمولی از اصطلاحات تعریف نشدهٔ هندسی باشد که در هندسهٔ تحلیلی به کار می‌روند. نشان دهید که ق ۱ در Q^2 صادق نیست.

حل. دو نقطهٔ $O = (0\ ,\ 0)$ و $A = (1\ ,1)$ در Q^2 و نیمخط نامنفی محور x که از مبدأ $O = (0\ ,0)$ شروع می‌شود را در نظر می‌گیریم. اگر ق ۱ برقرار باشد، باید بتوان پاره‌خط OA را با شروع از O روی این نیمخط گذارد و این کار ممکن نیست، زیرا باید نقطه‌ای مانند B روی این نیمخط باشد که مختصاتش $\sqrt{2}$ و ۰ هستند. ولی چنین نقطه‌ای در Q^2 وجود ندارد.



۶

پیوستگی، طول و درجه

۱.۶ مقدمه

۲.۶ اصول پیوستگی

۳.۶ طول و درجه

۴.۶ مسائل

۱.۶ مقدمه

ما در قضیهٔ ۱.۲.۱ دیدیم که اقلیدس دایره را پیوسته می‌انگارد. این پیوستگی از اصول دهگانهٔ وی نتیجه نمی‌شود و باید آن را جزو انگاشتهای نامشروع وی دانست. همچنین در مسألهٔ ۱.۲.۲ دیدیم که اقلیدس برای یافتن نقطهٔ میانی یک پاره‌خط، پاره‌خط را پیوسته می‌گیرد. این نیز حاصل اصول دهگانهٔ وی نیست. اقلیدس خط را یکپارچه می‌انگارد و این یکپارچگی در هیچ‌جای هندسه‌اش صریحاً ذکر نشده است. ما در مسألهٔ ۱۰.۴.۴ ثابت کردیم که هر خط، بی‌نهایت نقطه بر خود دارد. ولی این امر مانع ناپیوستگی و متخلخل بودن خط نمی‌شود. لذا برای پیوسته بودن خط به اصل موضوعی نیاز خواهیم داشت. چند اصل موضوع وجود دارند که همهٔ آنها را اصول پیوستگی می‌نامند که نسبت به هم شدت و ضعف دارند. هیلبرت از میان آنها قویترین اصل، یعنی اصل موضوع ددکیند (*Dedekind*) را برای پیوسته ساختن خطوط خود اختیار کرده است. اصول پیوستگی به قرار زیرند:

۲.۶ اصول پیوستگی

۱.۲.۶. اصل موضوع ددکیند.

فرض می‌کنیم مجموعهٔ نقاط واقع بر خط l از اجتماع دو زیر مجموعهٔ Σ_1 و Σ_2 چنان تشکیل شده باشد که هیچ نقطهٔ Σ_1 بین دو نقطهٔ Σ_2 نباشد و بالعکس. در این صورت یک نقطهٔ منحصر به فرد مانند O بر l هست بطوری که $P_1.O.P_2$ اگر و فقط اگر $P_1 \in \Sigma_1$، $P_2 \in \Sigma_2$ و P_1 و P_2 مخالف O باشند.

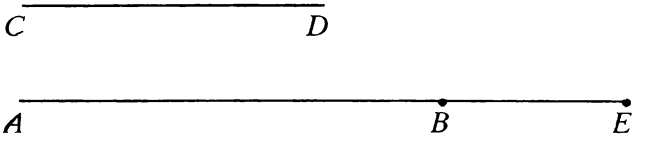
(Σ_1 و Σ_2) را یک **برش ددکیند** می‌نامیم.

این اصل شبیه اصل موضوع تمامیّت در دستگاه اعداد حقیقی است که در ساختن اعداد حقیقی از اعداد گویا به کار می‌رود. اصل موضوع ددکیند به نوعی عکس خاصیت جداسازی خط است که بر اساس این خاصیت هر نقطهٔ O واقع بر l ، تمام نقاط دیگر l را به نقاط چپ و راست O تجزیه می‌کند. ولی اصل موضوع ددکیند گویای این مطلب است که هر جداسازی نقاط واقع بر l به چپ و راست بر اثر یک نقطهٔ منحصر به فرد مانند O صورت می‌گیرد.

اصل پیوستگی دیگری که از اصل موضوع ددکیند ضعیفتر است اصل موضوع ارشمیدس (*Archimedes*) است که در آنالیز به آن ***خاصیت ارشمیدسی دستگاه اعداد حقیقی*** می‌گویند.

۲.۲.۶. اصل موضوع ارشمیدس.

هرگاه AB و CD دو پاره‌خط باشند، آنگاه عددی طبیعی مانند n و نقطه‌ای مانند E وجود دارند بطوری که B بین A و E بوده و $nCD \cong AE$.



مثلاً اگر AB به طول $\sqrt{2}$ و CD به طول واحد باشد، باید CD را دست کم ۲ بار

متوالی بر AB گذارد تا یک نقطه مانند E بعد از B به دست آید. این اصل شهوداً می‌گوید که اگر پاره‌خط دلخواه CD را به عنوان واحد طول بگیریم، هر پاره‌خط بر حسب این واحد، طول معینی خواهد داشت. این اصل به اندازهٔ اصل ددکیند نمی‌تواند پیوستگی خط را ایجاب کند و با قبول آن به تمام هندسهٔ اقلیدسی نخواهیم رسید. در زیر این اصل را از اصل موضوع ددکیند نتیجه می‌گیریم.

قضیهٔ ۳.۲.۶. ***اصل موضوع ددکیند مستلزم اصل موضوع ارشمیدس است.***

برهان. پاره‌خطهای AB و CD را در نظر می‌گیریم. مجموعهٔ نقاط $\overrightarrow{AB}$ را به دو زیرمجموعه تقسیم می‌کنیم. Σ'_1 مجموعهٔ نقاطی است که با چند بار قرار دادن پاره‌خط CD ابتدا از A قابل وصولند (قابل وصول یعنی رسیدن یا رد شدن) و Σ_2 مجموعهٔ نقاطی است که قابل وصول نیستند. فرض می‌کنیم Σ_1 اجتماع Σ'_1 با نیمخط متقابل $\overrightarrow{AB}$ باشد. اگر Σ_2 ناتهی باشد، بآسانی معلوم می‌شود که (Σ_1 , Σ_2) یک برش ددکیند برای $\overleftrightarrow{AB}$ است. (ثابت کنید!). پس طبق اصل موضوع ددکیند، نقطه‌ای مانند O با ویژگیهای مذکور در آن اصل وجود دارد. $O \in \overrightarrow{AB}$ (چرا؟). حال می‌گوییم O قابل وصول است. فرض می‌کنیم چنین نباشد. بر $\overrightarrow{OA}$ طبق ق ۱، نقطه‌ای مانند H وجود دارد که $OH \cong CD$. چون O قابل وصول نیست، پس H نیز قابل وصول نخواهد بود. اما، طبق ق ۱، نقطه‌ای مانند K بر نیمخط متقابل $\overrightarrow{OA}$ هست بطوری که $OK \cong CD$. چون داریم $H.O.K$، پس طبق اصل موضوع ددکیند، $H \in \Sigma_1$ و $K \in \Sigma_2$. و چون O قابل وصول نیست، $H \in \Sigma'_1$ (چرا؟). یعنی H قابل وصول است که تناقض است. لذا، O قابل وصول است. از اینجا معلوم می‌شود که K که در سمت راست O قرار دارد نیز قابل وصول است که ناممکن خواهد بود. بنابراین Σ_2 باید تهی باشد و $\Sigma'_1 = \overrightarrow{AB}$ و مطلب تمام است.

اصل پیوستگی دیگری نیز وجود دارد که از اصل ددکیند ضعیفتر است. این اصل را ***اصل پیوستگی دایره*** می‌نامند. با گرفتن این اصل می‌توان مشکل پیوستگی دایره را که در قضیهٔ ۱.۲.۱ اقلیدس از آن سوء استفاده کرده است، حل نمود. ابتدا تعریف زیر را می‌آوریم:

تعریف ۴.۲.۶. دایره به مرکز O و شعاع OA را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ P را *درون* دایره می‌گوییم اگر $OP < OA$ و آن را *بیرون* دایره می‌نامیم اگر $OP > OA$.

۵.۲.۶. اصل پیوستگی دایره.

هرگاه دایرهٔ γ یک نقطه درون دایرهٔ γ' و یک نقطه بیرون آن داشته باشد، دو دایره همدیگر را قطع خواهند کرد.

آخرین اصل پیوستگی ما ***اصل پیوستگی مقدماتی*** است. اقلیدس هنگام رسم عمود بر یک خط، از این اصل بطور ضمنی استفاده کرده است.

۶.۲.۶. اصل پیوستگی مقدماتی.

هرگاه یک سر پاره‌خطی درون یک دایره و سر دیگرش بیرون این دایره باشد، آنگاه پاره‌خط دایره را قطع خواهد کرد.

ما در فصل ۷، پس از یافتن آمادگی لازم، اصل پیوستگی مقدماتی را از اصل ددکیند نتیجه گرفته و ثابت می‌کنیم اصل پیوستگی دایره مستلزم اصل پیوستگی مقدماتی است.

۳.۶ طول و درجه

حال وقت آن است که به پاره‌خطها طول و به زوایا درجه نسبت دهیم. تا به حال دیدیم که می‌توان بدون طول و درجه رفع حاجت کرد. اگر مسألهٔ تسهیل بیان نبود می‌توانستیم بدون توسل به این دو مفهوم پیش برویم. ولی قصد ما از طرد این مفاهیم اثبات رکنی نبودن آنها بود که بحمدالله موفق شدیم. حال این مفاهیم را جهت سهولت کار وارد می‌کنیم.

ما تابع طول را با ـــ نشان داده و مقدارش را در پاره‌خط AB با $\overline{AB}$ نمایش می‌دهیم. همچنین تابع درجه را با $^\circ$ نشان داده و مقدارش را در زاویهٔ $\angle A$ با $(\angle A)^\circ$ نشان می‌دهیم. در این مورد قضیهٔ زیر را بدون اثبات ذکر می‌کنیم که برهانش را می‌توان در کتاب زیر یافت:

Borzuk, K. and W. Szmielew, 1960, Foundations of Geometry, Amsterdam: North Holland.

قضیهٔ ۱.۳.۶. (آ) پاره‌خط OI به عنوان پاره‌خط واحد داده شده است. به هر پاره‌خط به یک و تنها یک طریق می‌توان طول با شرایط زیر نسبت داد:

۱. $\overline{AB}$ عددی باشد حقیقی و مثبت و $\overline{OI} = ۱$؛

۲. $\overline{AB} = \overline{CD}$ اگر و فقط اگر $AB \cong CD$؛

۳. $A.B.C$ اگر و فقط اگر $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$؛

۴. $\overline{AB} < \overline{CD}$ اگر و فقط اگر $AB < CD$؛

۵. به ازای هر عدد حقیقی و مثبت x پاره‌خطی مانند AB وجود داشته باشد که $\overline{AB} = x$.

(ب) به هر زاویه به یک و تنها یک طریق می‌توان اندازه بر حسب درجه با شرایط زیر تخصیص داد:

۶. $(\angle A)^\circ$ عددی باشد حقیقی بطوری که $۰^\circ < (\angle A)^\circ < ۱۸۰^\circ$؛

۷. $(\angle A)^\circ = ۹۰^\circ$ اگر و فقط اگر $\angle A$ قائمه باشد؛

۸. $(\angle A)^\circ = (\angle B)^\circ$ اگر و فقط اگر $\angle A \cong \angle B$؛

۹. اگر $\overrightarrow{AC}$ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ باشد، آنگاه

$$(\angle DAB)^\circ = (\angle CAB)^\circ + (\angle DAC)^\circ;$$

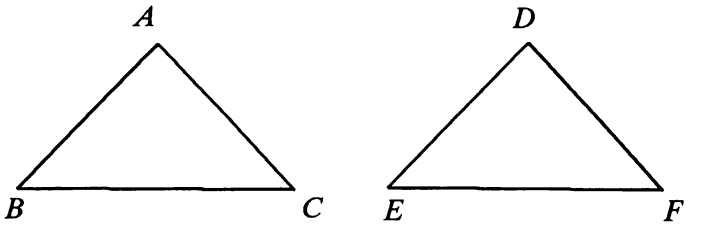
۱۰. به ازای هر عدد حقیقی x بین ۰ و ۱۸۰ یک زاویه مانند $\angle A$ موجود باشد که $(\angle A)^\circ = x^\circ$؛

۱۱. اگر $\angle B$ مکمل $\angle A$ باشد، آنگاه $(\angle A)^\circ + (\angle B)^\circ = ۱۸۰^\circ$؛

۱۲. $(\angle A)^\circ < (\angle B)^\circ$ اگر و فقط اگر $\angle A < \angle B$.

۴.۶ مسائل

۱.۴.۶. در زیر اثباتی از محک ض ز ز می‌آوریم که دارای نقص است. این نقص را پیدا کنید. داریم $AC \cong DF$، $\angle A \cong \angle D$ و $\angle B \cong \angle E$. پس، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۸، خواهیم داشت: $(\angle A)^\circ = (\angle D)^\circ$ و $(\angle B)^\circ = (\angle E)^\circ$. لذا، می‌توان



نوشت:

$(\angle C)^\circ = ۱۸۰^\circ - (\angle A)^\circ - (\angle B)^\circ = ۱۸۰^\circ - (\angle D)^\circ - (\angle E)^\circ = (\angle F)^\circ$.

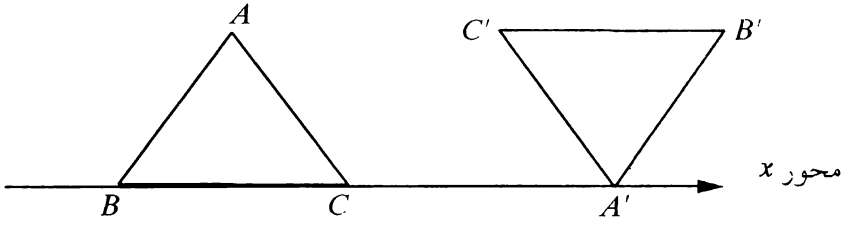
پس، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۸، $\angle C \cong \angle F$. لذا، طبق محک ز ض ز داریم $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

حل. از کجا معلوم که مجموع زوایای یک مثلث ۱۸۰° درجه است؟

۲.۴.۶. فرض کنید $R^۲$ ***صفحهٔ حقیقی*** تمام جفتهای مرتب (x , y) از اعداد حقیقی با همان تعابیر معمولی از اصطلاحات تعریف نشدهٔ هندسی باشد که در هندسهٔ تحلیلی به کار می‌روند. در این صفحه، با انتخاب مقیاس اندازه‌گیری، هر پاره‌خط، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ قسمت (آ)، طول خواهد داشت. فرض کنید به جز پاره‌خطهای واقع بر محور x که با دسیمتر سنجیده می‌شوند، طولها را با سانتیمتر بسنجیم. قابلیت انطباق پاره‌خطها را به این معنی می‌گیریم که دو پاره‌خط در این سنجش قراردادی «طول» واحدی داشته باشند. وقوع، بینیت و قابلیت انطباق زوایا به معنی معمولی گرفته می‌شوند. نشان دهید که پنج اصل موضوع اول قابلیت انطباق در این تعبیر صدق می‌کنند، ولی محک ض ز ض صادق نیست. همچنین ثابت کنید قضیهٔ جمع زوایا در این تعبیر صادق است.

حل. اثبات برقراری پنج اصل اول قابلیت انطباق آسان است و به خواننده محول می‌شود. حال به اثبات عدم برقراری محک ض ز ض پرداخته و شکل زیر را در نظر می‌گیریم که در آن $\angle A \cong \angle A'$، $AB \cong A'B'$ و $AC \cong A'C'$ به معنی معمولی هستند. پس به معنی معمولی $BC \cong B'C'$. لذا، این دو پاره‌خط دارای یک طول به سانتیمترند، ولی در قابلیت انطباق جدید BC به دسیمتر و $B'C'$ به سانتیمتر است؛ درنتیجه همطول

نیستند.



اثبات قضیهٔ جمع زوایا در این تعبیر آسان است و به خواننده محول می‌شود.

۷

هندسهٔ خنثی

۱.۷ مقدمه

۲.۷ گامهای نخستین

۳.۷ اصل توازی

۴.۷ کاستی مثلث

۵.۷ مسائل

۱.۷ مقدمه

در فصلهای پیش، هندسهٔ هیلبرت پایه‌گذاری شد و چند نتیجهٔ مقدماتی نیز به دست آمد. اقلیدس بسیاری از این نتایج را مسلم انگاشته بود. دیدیم که در برخی از موارد، اثبات دقیق هر جزء کاری بود خسته کننده و ما گهگاه برای رفع زحمت، شرح مطلب را به شما واگذار نمودیم. سؤالی که از آغاز مطرح شد این بود که آیا هیلبرت واقعاً هندسهٔ اقلیدسی را می‌سازد؟ برای پاسخ دادن به این امر باید چند نکته روشن شود: یکی اینکه «آیا اصول هیلبرت از هم مستقلند؟» که در ابتدای کار که اصول موضوع کم بودند، این امر تحقیق شد. مشکل آن است که باید ثابت کنیم هر اصل از سایر اصول مستقل است که کاری است پرزحمت. اطمینان می‌دهیم که اصول هیلبرت چنین هستند. نکتهٔ مهمتر آن است که باید نشان دهیم اصول اقلیدس نتایج اصول هیلبرت است. دیدیم که اصل اول اقلیدس همان اصل اول هندسهٔ پایه است. اصل دوم اقلیدس با زبان تازهٔ ما چنین بیان می‌شود: پاره‌خطهای AB و CD مفروضند. نقطهٔ منحصر به فردی مانند E چنان وجود دارد که $C.D.E$ و $AB \cong DE$. این امر را می‌توان از ق ۱ برای نیمخط متقابل $\overrightarrow{DC}$ نتیجه گرفت. اصل سوم اقلیدس از اصل شهودی تجرید در نظریهٔ مجموعه‌ها ناشی می‌شود.

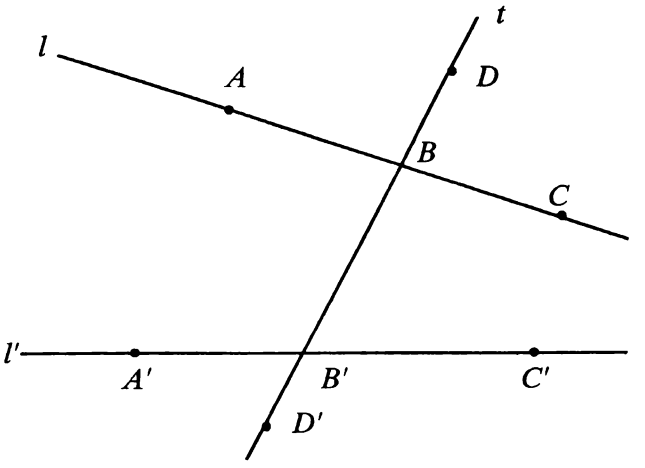
چون نظریهٔ مجموعه‌ها در اختیار ماست، این اصل به خودی خود برقرار است. اصل چهارم نیز در قضیهٔ ۱۸.۲.۵ به عنوان حکم ثابت شد.

آخرین اصل اقلیدس اصل پنجم اقلیدس است که همواره (حتی در زمان خود اقلیدس) مورد سؤال بوده است. بسیاری از دانشمندان اعتقاد داشتند که باید آن را از شمار اصول خارج کرد. خود اقلیدس نیز به این اصل اعتماد نداشت و از به کارگیری آن طفره می‌رفته است. ما شاهد تلاشهای بسیار برای اثبات این اصل بوده‌ایم. مسأله آن است که آیا وجود این اصل لازم است یا نه. برای پاسخ دادن به آن، هیلبرت راه ورود اصول را به هندسهٔ خود می‌بندد و هندسهٔ تا به حال ساخته شده را **هندسهٔ خنثی** می‌نامد. خنثی بدین معنی که نسبت به توازی، خنثی و بی‌اعتناست و راجع به آن اصلی را نمی‌پذیرد. ما این هندسه را به امید ایجاد نیاز برای اصل توازی ادامه می‌دهیم تا ارزش وجودی آن ظاهر گردد. همان‌طور که سلامتی در وقت بیماری و روشنایی در وقت تاریکی ارزش می‌یابد، می‌توان ارزش اصل توازی را در غیاب آن دریافت. قضایای ما جهتدار و در جهت این اصلند. گاهی راهمان در جنگل جزئیات و غبار تکنیکها گم می‌شود، ولی سرانجام همچون ماه از زیر ابر بیرون آمده و همه چیز روشن خواهد شد.

۲.۷ گامهای نخستین

بحث را با تعریف زیر آغاز می‌کنیم.

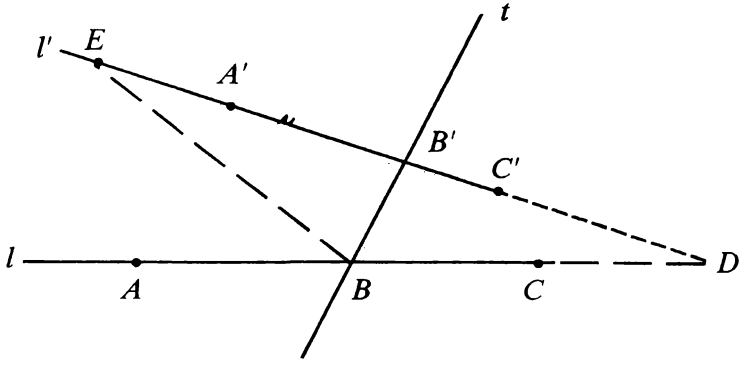
تعریف ۱.۲.۷. فرض می‌کنیم مورب t دو خط l و l' را به ترتیب در نقاط B و B' قطع کند. نقاط A و C را بر l طوری می‌گیریم که $A.B.C$. همچنین A' و C' را بر l' طوری می‌گیریم که $A'.B'.C'$. در این صورت چهار زاویهٔ $\angle A'B'B$ ، $\angle ABB'$ ، $\angle C'B'B$ و $\angle CBB'$ را ***زوایای درونی*** و هر یک از جفتهای $(\angle ABB' , \angle C'B'B)$ و $(\angle A'B'B , \angle CBB')$ را یک ***جفت زاویهٔ متبادل درونی*** می‌نامیم. همچنین چهار زاویهٔ $\angle ABD$ ، $\angle DBC$ ، $\angle A'B'D'$ و $\angle D'B'C'$ را ***زوایای بیرونی*** و جفت زوایایی چون $(\angle ABD , \angle A'B'B)$ را یک ***جفت زاویهٔ متقابل درونی و بیرونی*** می‌خوانیم.



قضیهٔ ۲.۲.۷. **(قضیهٔ زوایای متبادل درونی).**

هرگاه موربی دو خط را قطع کند و یک جفت زاویهٔ متبادل درونی قابل انطباق پدید آورد، آنگاه آن دو خط موازیند.

برهان. فرض می‌کنیم $\angle A'B'B \cong \angle CBB'$ و l و l' یکدیگر را در نقطه‌ای مانند D قطع کنند. همچنین D در همان طرفی از t باشد که C و C' درآنند. بر $\overrightarrow{B'A'}$ نقطه‌ای مانند E

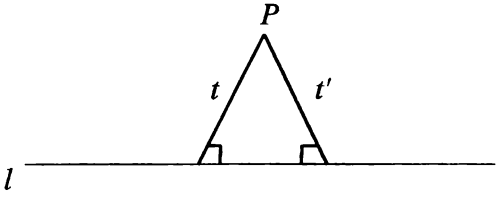


وجود دارد بطوری که $B'E \cong BD$ (ق ۱). چون طبق ق ۲ داریم $BB' \cong BB'$، لذا $\Delta BB'D \cong \Delta BB'E$ (محک ض ز ض). بویژه $\angle DB'B \cong \angle EBB'$. چون $\angle DB'B$

مکمل $\angle EB'B$ است، پس $\angle EBB'$ باید مکمل $\angle DBB'$ باشد (قضیهٔ ۷.۲.۵ و ق ۴). این یعنی E بر l واقع است. لذا l و l' در دو نقطهٔ D و E مشترکند که با پ ۱ متناقض است. بنابراین $l \parallel l'$.

قضیهٔ ۳.۲.۷. ***به ازای هر خط l و هر نقطهٔ P یک و فقط یک خط وجود دارد که از P می‌گذرد و بر l عمود است.***

برهان. وجود خط عمود در قضیهٔ ۹.۲.۵ ثابت شد. با توجه به برهان آن قضیه، یکتایی عمود، وقتی از یک نقطهٔ واقع بر یک خط بر آن عمود می‌کنیم، از یکتایی مذکور در ق ۴ نتیجه می‌شود. حال فرض می‌کنیم از نقطهٔ P غیرواقع بر l بیش از یک خط بر آن عمود شده باشد. از بین خطوط عمود دو خط مانند t و t' را اختیار می‌کنیم. پس، مورب l دو خط t و t' را قطع کرده و زوایای متبادل درونی قائمه پدید آورده است. چون زوایای قائمه طبق اصل چهارم اقلیدس قابل انطباقند، پس t و t' طبق قضیهٔ زوایای متبادل درونی موازیند که با متقاطع بودنشان در P تعارض دارد.

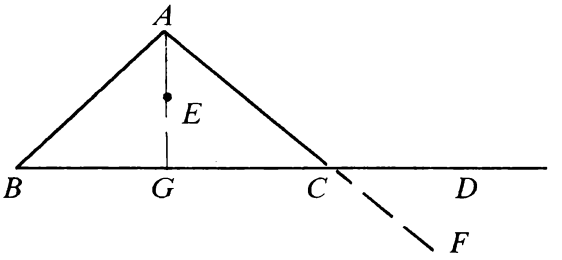


تعریف ۴.۲.۷. هر زاویه که مکمل یکی از زوایای یک مثلث باشد یک ***زاویهٔ بیرونی*** آن مثلث نام داشته و آن زاویهٔ مثلث را ***زاویهٔ درونی مجاور*** به آن زاویهٔ بیرونی می‌نامیم. دو زاویهٔ دیگر مثلث ***زوایای درونی غیرمجاور*** به آن زاویهٔ بیرونی نامیده می‌شوند.

قضیهٔ ۵.۲.۷. **(قضیهٔ زاویهٔ بیرونی).**
در هر مثلث یک زاویهٔ بیرونی از هر یک از زوایای درونی غیرمجاور خود بزرگتر است.

برهان. در شکل زیر می‌خواهیم ثابت کنیم $\angle ACD$ از $\angle A$ و $\angle B$ بزرگتر است. ابتدا

ثابت می‌کنیم $\angle ACD$ از $\angle A$ بزرگتر است. فرض می‌کنیم چنین نباشد. پس، طبق

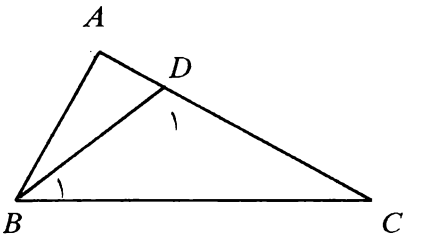


قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (آ)، $\angle ACD \cong \angle A$ یا $\angle ACD < \angle A$. فرض می‌کنیم $\angle ACD \cong \angle A$. پس، طبق قضیهٔ زوایای متبادل درونی، $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ موازیند که با تقاطعشان در B متناقض است. حال فرض می‌کنیم $\angle ACD < \angle A$. پس، طبق تعریف، نیمخطی مانند $\overrightarrow{AE}$ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هست بطوری که $\angle EAC \cong \angle ACD$. این نیمخط، طبق قضیهٔ قطعه‌بر، ضلع BC را در نقطه‌ای مانند G قطع می‌کند. ولی، طبق قضیهٔ زوایای متبادل درونی، $\overleftrightarrow{AE}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ موازیند که با تقاطعشان در G تعارض دارد. پس $\angle ACD$ نمی‌تواند از $\angle A$ کوچکتر باشد. لذا فرض خلف باطل بوده و $\angle ACD$ از $\angle A$ بزرگتر است.

برای اثبات بزرگتر بودن $\angle ACD$ از $\angle B$ همین استدلال را در مورد زاویهٔ بیرونی $\angle BCF$ و زاویهٔ $\angle B$ به کار برده نتیجه می‌گیریم که $\angle BCF$ از $\angle B$ بزرگتر است. چون زوایای $\angle ACD$ و $\angle BCF$ متقابل به رأسند، پس طبق قضیهٔ ۸.۲.۵ قسمت (آ)، قابل انطباقند. لذا، طبق قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (ب)، خواهیم داشت $\angle B < \angle ACD$.

قضیهٔ ۶.۲.۷. ***در هر مثلث ضلع مقابل به زاویهٔ بزرگتر، بزرگتر از ضلع مقابل به زاویهٔ کوچکتر است و بالعکس.***

برهان. فرض می‌کنیم $\angle B < \angle A$، ولی $\sim (AC < BC)$. پس طبق قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (آ)، یا $AC \cong BC$ یا $AC > BC$. هرگاه $AC \cong BC$، آنگاه طبق قضیهٔ پاپوس، $\angle A \cong \angle B$ که بنابر قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (آ)، با فرض در تضاد است.

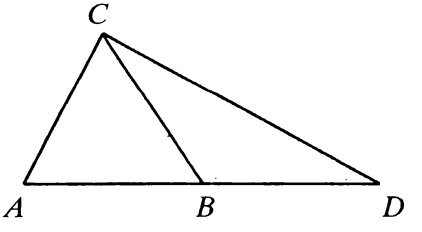


اگر $AC > BC$، طبق تعریف، نقطه‌ای مانند D بین A و C هست بطوری‌که $BC \cong CD$. پس ΔBCD متساوی‌الساقین است. لذا، طبق قضیهٔ پاپوس، $\angle B_1 \cong \angle D_1$. اما، طبق تعریف ۱۱.۳.۴، $\angle B_1 < \angle B$. پس، طبق قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (پ)، $\angle D_1 < \angle B$. ولی، طبق قضیهٔ زاویهٔ بیرونی، $\angle A < \angle D_1$. پس، طبق قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (ت)، $\angle A < \angle B$ که بنابر قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (آ)، با فرض در تضاد است.

حال فرض می‌کنیم $AC < BC$. می‌گوییم $\angle B < \angle A$. زیرا که در غیر این صورت، طبق قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (آ)، یا $\angle B \cong \angle A$ یا $\angle B > \angle A$. اگر $\angle B \cong \angle A$، بنابر عکس قضیهٔ پاپوس، $AC \cong BC$ که طبق قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (آ)، با فرض در تضاد است. اگر $\angle B > \angle A$، بنابر قسمت اول این برهان، $AC > BC$ که این نیز طبق قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (آ)، با فرض در تضاد است. پس $\angle B < \angle A$ و برهان تمام است.

قضیهٔ ۷.۲.۷. **(نامساوی مثلثی).**
هرگاه A، B و C سه نقطهٔ غیرواقع بر یک استقامت باشند، آنگاه $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$.

برهان. بنابر ق ۱، نقطه‌ای مانند D بر نیخط متقابل $\overrightarrow{BA}$ وجود دارد بطوری که $BD \cong BC$.



پس، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (آ) شمارهٔ ۲، $\overline{BD} = \overline{BC}$. اما چون $A.B.D$، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (آ) شمارهٔ ۳،

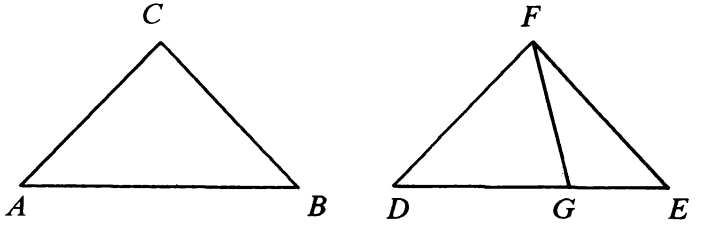
$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC}. \qquad (*)$$

از طرفی از رابطهٔ $A.B.D$ و قضیهٔ ۹.۳.۴، معلوم می‌شود که B درون $\angle ACD$ است. پس، طبق تعریف، $\overrightarrow{CB}$ بین $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CD}$ است. لذا، طبق تعریف، $\angle BCD < \angle ACD$. اما در مثلث متساوی‌الساقین ΔBCD، طبق قضیهٔ پاپوس، داریم $\angle BCD \cong \angle BDC$. پس، بنابر قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (پ)، $\angle BDC = \angle D < \angle C$. لذا، طبق قضیهٔ ۶.۲.۷، $AC < AD$. بنابراین، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (آ) شمارهٔ ۴، $\overline{AC} < \overline{AD}$. اگر به جای $\overline{AD}$ مساوی‌اش $\overline{AB} + \overline{BC}$ را از (*) بگذاریم، نامساوی مطلوب یعنی $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ به دست خواهد آمد.

قضیهٔ (محک ض ز ز).

۸.۲.۷. **هرگاه** $AC \cong DF$، $\angle A \cong \angle D$ و $\angle B \cong \angle E$، **آنگاه** $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

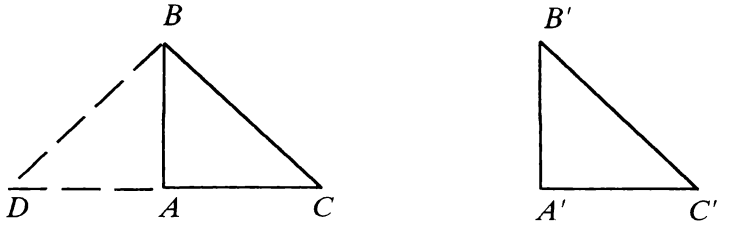
برهان.



بنابر ق ۱، نقطهٔ منحصر به فردی مانند G بر $\overrightarrow{DE}$ هست بطوری که $AB \cong DG$. پس $\Delta ABC \cong \Delta DFG$ (محک ض ز ض). اگر $G = E$، مطلب تمام است. پس فرض می‌کنیم $G \neq E$. لذا، طبق تعریف نیمخط و ب۳، یا $D.G.E$ یا $D.E.G$. فرض می‌کنیم $D.G.E$. داریم $\angle B \cong \angle G$. از طرفی طبق فرض داریم $\angle B \cong \angle E$. پس، طبق ق ۵، $\angle E \cong \angle G$. اما، طبق قضیهٔ زاویهٔ بیرونی، $\angle E < \angle G$ که با قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (آ) تعارض دارد. به همین ترتیب می‌توان $D.E.G$ را رد کرد (رد کنید!). پس تنها داریم $G = E$ و مطلب تمام است.

قضیهٔ ۹.۲.۷. ***هرگاه وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه به ترتیب با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر قابل انطباق باشند، آنگاه آن دو مثلث قابل انطباقند.***

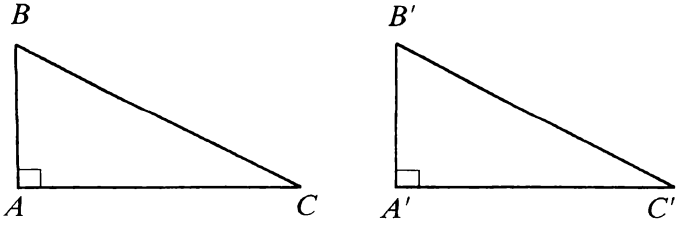
برهان. فرض می‌کنیم دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ΔABC و $\Delta A'B'C'$ در زوایای $\angle A$ و $\angle A'$ قائمه بوده و داشته باشیم $AB \cong A'B'$ و $BC \cong B'C'$. بنابر ق ۱، نقطه‌ای مانند D بر



نیمخط متقابل $\overrightarrow{AC}$ وجود دارد بطوری که $AD \cong A'C'$. دو مثلث ΔABD و $\Delta A'B'C'$ به حالت ض ز ض قابل انطباقند. پس $BD \cong B'C'$. لذا طبق فرض و تعدی داریم $BD \cong BC$ و مثلث ΔBCD متساوی‌الساقین است. پس، طبق قضیهٔ پاپوس، $\angle D \cong \angle C$. بنابراین $\Delta ABD \cong \Delta ABC$ (محک ض ز ز) و بنابر تعدی خواهیم داشت $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.

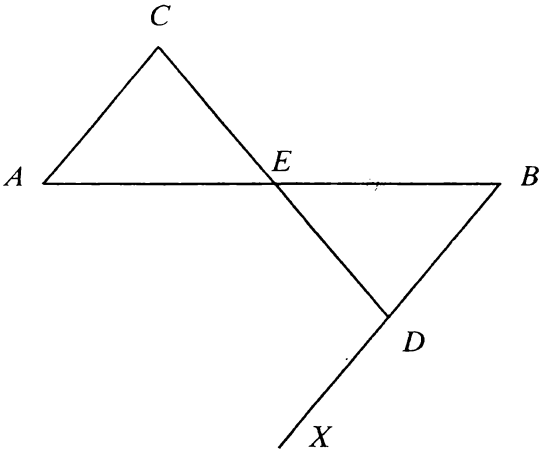
قضیهٔ ۱۰.۲.۷. ***هرگاه وتر و یک زاویهٔ حاده از یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر و یک زاویهٔ حاده از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگر قابل انطباق باشند، آنگاه آن دو مثلث قابل انطباقند.***

برهان. فرض می‌کنیم دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ΔABC و $\Delta A'B'C'$ در زوایای $\angle A$ و $\angle A'$ قائمه بوده و $\angle B \cong \angle B'$، آنگاه این دو مثلث به حالت ض ز ز قابل انطباقند.

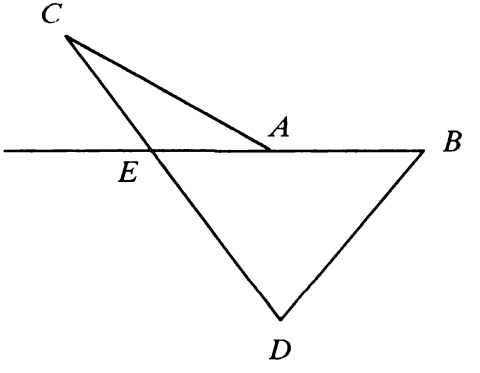


قضیهٔ ۱۱.۲.۷. ***هر پاره‌خط دارای یک نقطهٔ میانی منحصر به فرد است.***

برهان. پاره‌خط AB را در نظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ ۲.۱.۳، نقطه‌ای مانند C غیرواقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ وجود دارد. بنابر ق ۴، نیمخطی مانند $\overrightarrow{BX}$ در طرفی از $\overleftrightarrow{AB}$ که C در آن نیست وجود

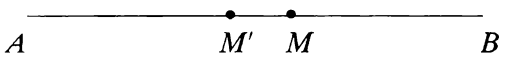


دارد به قسمی که $\angle CAB \cong \angle ABX$. بنابر ق ۱، نقطه‌ای مانند D بر $\overrightarrow{BX}$ هست بطوری که $AC \cong BD$. دو نقطهٔ C و D در دو طرف $\overleftrightarrow{AB}$اند (چرا؟). پس پاره‌خط CD خط $\overleftrightarrow{AB}$ را در نقطه‌ای مانند E قطع می‌کند. می‌گوییم E بین A و Bاست. زیرا که اگر نباشد، داریم $E = A$ یا $E = B$ یا $E.A.B$ یا $A.B.E$. بنابر قضیهٔ زوایای متبادل درونی،



$\overleftrightarrow{AC}$ با $\overleftrightarrow{BD}$ موازی است. پس $E \neq A$ و $E \neq B$ (چرا؟). حال فرض می‌کنیم $E.A.B$. چون $\overleftrightarrow{CA}$ ضلع EB از مثلث ΔEBD را در نقطهٔ A بین B و E قطع می‌کند، باید ED یا BD را طبق قضیهٔ پاش، قطع کند. اما این ممکن نیست (چرا؟). پس $E.A.B$ را نخواهیم داشت. به همین نحو می‌توان $A.B.E$ را رد کرد. (رد کنید!). لذا داریم $A.E.B$. بنابراین زوایای $\angle AEC$ و $\angle BED$ متقابل به رأسند که طبق قضیهٔ ۸.۲.۵ قسمت (آ)، قابل انطباقند. لذا $\Delta EAC \cong \Delta EBD$ (محک ض ز ز). پس E بین A و B بوده و $AE \cong EB$. درنتیجه E نقطهٔ میانی AB است.

حال فرض می‌کنیم M و M' دو نقطهٔ میانی پاره‌خط AB باشند. بنابر قضیهٔ ۵.۳.۴،



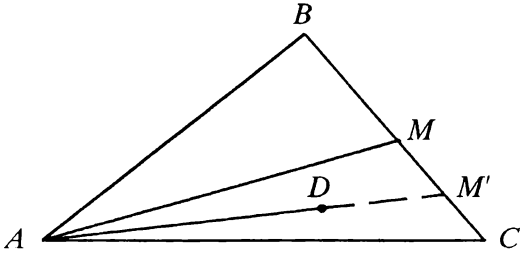
M' یا به AM تعلق دارد یا به MB. فرض می‌کنیم M' به AM تعلق داشته باشد (اثبات در مورد $M' \in MB$ به همین نحو است). چون M' نقطهٔ میانی AB بوده و $M' \neq M$، طبق ب ۱ داریم $A.M'.M$. پس، طبق تعریف نامساوی خواهیم داشت $AM' < AM$. چون $AM' \cong M'B$، پس طبق قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (پ)، $M'B < AM$. اما از $A.M'.M$ و $A.M.B$ و قضیهٔ انبساط ـ انقباض داریم $M'.M.B$. پس، $MB < M'B$. لذا، از رابطهٔ $AM \cong MB$ و قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (پ)، نتیجه می‌شود که $AM < M'B$. اما قبلاً داشتیم $M'B < AM$ که با قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (آ) در تضاد است.

قضیهٔ ۱۲.۲.۷. (آ) ***هر پاره‌خط یک و تنها یک عمودمنصف دارد؛***
(ب) ***هر زاویه یک و تنها یک نیمساز دارد.***

برهان (آ). پاره‌خط AB را در نظر می‌گیریم. M نقطهٔ میانی AB را اختیار می‌کنیم. M طبق قضیهٔ ۱۱.۲.۷ وجود دارد و منحصر به فرد است. و طبق قضیهٔ ۳.۲.۷، از M یک و تنها یک خط می‌توان بر $\overleftrightarrow{AB}$ عمود کرد. پس عمود منصف هر پاره‌خط، موجود و منحصر به فرد است.

برهان (ب). زاویهٔ $\angle A$ را در نظر گرفته و نقاط B و C را روی اضلاعش طوری می‌گیریم که $AB \cong AC$ (ق ۱). فرض می‌کنیم M نقطهٔ میانی BC باشد. چون $\Delta ABM \cong \Delta AMC$

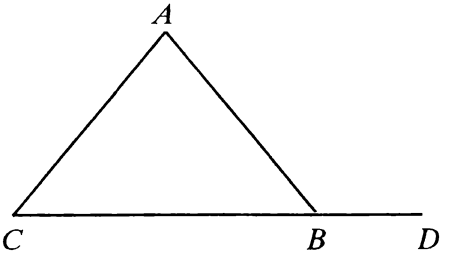
(محک ض ض ض)، پس $\angle BAM \cong \angle MAC$. لذا $\overrightarrow{AM}$ نیمساز $\angle A$ خواهد بود. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{AD}$ نیمساز دیگری از $\angle A$ باشد. بنابر قضیهٔ قطعه بر، $\overrightarrow{AD}$ ضلع BC را



در نقطه‌ای مانند M' قطع می‌کند. چون $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{AM}$ ، $M \neq M'$. اما از $\Delta ABM' \cong \Delta AM'C$ (محک ض ز ض) نتیجه می‌شود که M' یک نقطهٔ میانی BC است؛ یعنی BC بیش از یک نقطهٔ میانی دارد که با قضیهٔ ۱۱.۲.۷ در تضاد است. پس هر زاویه یک و تنها یک نیمساز خواهد داشت.

قضیهٔ ۱۳.۲.۷. ***مجموع اندازه‌های هر دو زاویه از یک مثلث به درجه از ۱۸۰° کمتر است.***

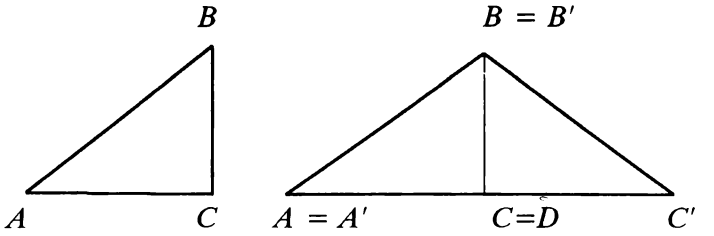
برهان. بنابر قضیهٔ زاویهٔ بیرونی، $\angle A < \angle ABD$. پس، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۱۲، $(\angle A)^\circ < (\angle ABD)^\circ$. اما زوایای $\angle B$ و $\angle ABD$ مکمل یکدیگرند. پس، طبق



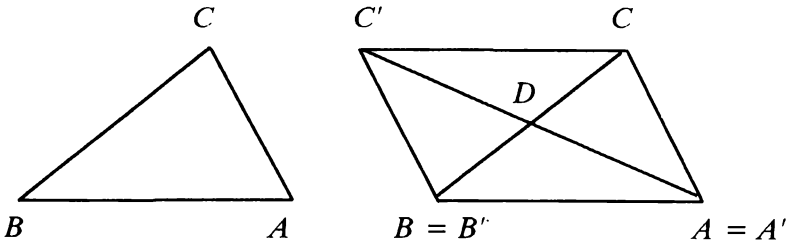
قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۱۱، $(\angle B)^\circ + (ABD)^\circ = ۱۸۰^\circ$. لذا داریم $(\angle A)^\circ + (\angle B)^\circ < ۱۸۰^\circ$.

قضیهٔ ۱۴.۲.۷. ***در مثلثهای ΔABC و $\Delta A'B'C'$ هرگاه $AB \cong A'B'$ و $BC \cong B'C'$، آنگاه $\angle B < \angle B'$ اگر و فقط اگر $AC < A'C'$.***

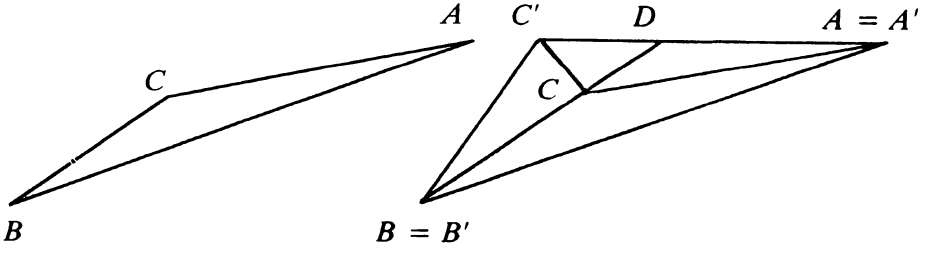
برهان. فرض می‌کنیم $\angle B < \angle B'$. با توجه به مفروضات می‌توان مسأله را به حالت $A = A'$، $B = B'$ و C واقع در درون $\angle ABC'$ تبدیل کرد (چگونه؟). فرض می‌کنیم D محل برخورد نیمخط $\overrightarrow{BC}$ با پاره‌خط AC' باشد (قضیهٔ قطعه‌بر). هرگاه $C = D$، شکل زیر خواهیم داشت:



لذا، طبق تعریف، $AC < A'C'$. حال فرض می‌کنیم $D \neq C$. بنابر ب ۳ و تعریف نیمخط، داریم $B.D.C$ یا $B.C.D$. اگر $B.D.C$، شکل زیر را داریم:



برای اثبات $AC < A'C'$ کافی است طبق قضیهٔ ۶.۲.۷، ثابت کنیم $\angle AC'C < \angle ACC'$. نامساوی اخیر را می‌توان از قابلیت انطباق $\angle BCC' \cong \angle BC'C$ نتیجه گرفت (چگونه؟). در حالت $B.C.D$ شکل زیر را خواهیم داشت:



در این حالت نامساوی $\angle AC'C < \angle ACC'$ از قابلیت انطباق $\angle BCC' \cong \angle BC'C$ و قضیهٔ زاویهٔ بیرونی برای زاویهٔ بیرونی $\angle BCC'$ از مثلث $\Delta DCC'$ و زاویهٔ بیرونی $\angle DCC'$ از مثلث $\Delta BCC'$ نتیجه می‌شود (چگونه؟). اثبات عکس قضیه آسان است (ثابت کنید!).

حال قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که در کشف هندسه‌های نااقلیدسی نقش مهمی داشته است.

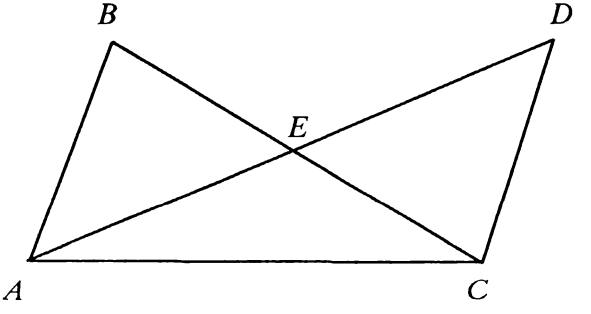
قضیهٔ ۱۵.۲.۷. (لژاندر ـ ساکری: *Legendre – Saccheri*).
مجموع اندازه‌های سه زاویه از یک مثلث بر حسب درجه از ۱۸۰° نابیشتر است.

برهان. فرض می‌کنیم در مثلث ΔABC

$$(\angle A)^\circ + (\angle B)^\circ + (\angle C)^\circ = ۱۸۰^\circ + p^\circ$$

که در آن p عددی مثبت است. به کمک شگردی که در آخر برهان می‌آید می‌توان به جای ΔABC مثلث دیگری گذارد که مجموع زوایایش همان $۱۸۰^\circ + p^\circ$ بوده، ولی یکی از زوایای آن حداکثر نصف درجات $(\angle A)^\circ$ را داشته باشد. با تکرار این شگرد می‌توان مثلث دیگری به دست آورد که مجموع زوایایش همان $۱۸۰^\circ + p^\circ$ بوده، ولی یک زاویه‌اش حداکثر $\frac{۱}{۴}$ درجات $(\angle A)^\circ$ را داشته باشد. بنابر صورت تحلیلی اصل موضوع ارشمیدس، می‌توان سرانجام مثلثی به دست آورد که مجموع زوایایش $۱۸۰^\circ + p^\circ$ بوده، ولی یک زاویه‌اش حداکثر p° باشد (چرا؟). در این صورت مجموع اندازه‌های درجات دو زاویهٔ دیگر از ۱۸۰° ناکمتر است که با قضیهٔ ۱۳.۲.۷ تعارض دارد.

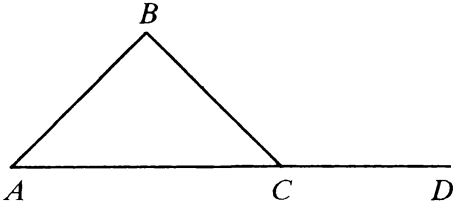
شگرد. مثلث ΔABC را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم E نقطهٔ میانی BC باشد



که طبق قضیهٔ ۱۱.۲.۷ وجود دارد. بنابر ق ۱، نقطه‌ای مانند D بر نیمخط متقابل $\overrightarrow{EA}$ هست بطوری که $AE \cong ED$. بآسانی معلوم می‌شود که مجموع زوایای ΔABC با مجموع زوایای ΔACD به درجه یکی است و یکی از زوایای ΔACD به درجه حداکثر $\frac{۱}{۲}(\angle A)^\circ$ است (چرا؟).

قضیهٔ ۱۶.۲.۷. ***در هر مثلث یک زاویهٔ بیرونی از حیث درجه از مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ غیرمجاور به آن ناکمتر است.***

برهان.



می‌خواهیم ثابت کنیم:

$$(\angle A)^\circ + (\angle B)^\circ \leq (\angle BCD)^\circ$$

می‌گوییم، طبق قضیهٔ لژاندر ـ ساکری

$$(\angle A)^\circ + (\angle B)^\circ + (\angle C)^\circ \leq ۱۸۰^\circ$$

اما زوایای $\angle C$ و $\angle BCD$ مکمل یکدیگرند. پس، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۱۱،

$$(\angle C)^\circ + (\angle BCD)^\circ = ۱۸۰^\circ$$

بنابراین،

$$(\angle A)^\circ + (\angle B)^\circ + (\angle C)^\circ \leq (\angle C)^\circ + (\angle BCD)^\circ$$

یا

$$(\angle A)^\circ + (\angle B)^\circ \leq (\angle BCD)^\circ$$

تعریف ۱۷.۲.۷. مجموعهٔ S از نقاط را **محدب** می‌گوییم اگر به ازای هر دو نقطهٔ A و B در S، $AB \subseteq S$.

قضیهٔ ۱۸.۲.۷. (آ) ***اشتراک هر تعداد مجموعهٔ محدب مجموعه‌ای محدب است؛***

(ب) ***هر طرف یک خط مجموعه‌ای محدب است؛***

(پ) ***درون یک زاویه مجموعه‌ای محدب است؛***

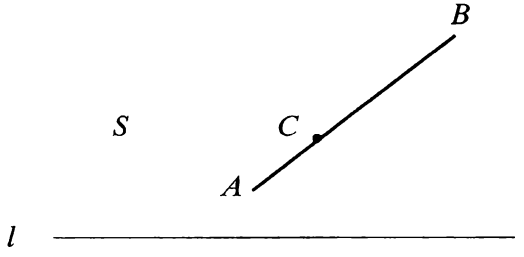
(ت) ***درون یک مثلث مجموعه‌ای محدب است؛***

(ث) ***بیرون یک مثلث مجموعه‌ای محدب نیست؛***

(ج) ***آیا مثلث مجموعه‌ای محدب است؟***

برهان (آ). فرض می‌کنیم $\{A_i\}_{i \in I}$ گردایه‌ای از مجموعه‌های محدب بوده و $S = \bigcap_{i \in I} A_i$. همچنین $A, B \in S$. پس به ازای هر i، $A, B \in A_i$. چون هر A_i محدب است، پس به ازای هر، $AB \subseteq A_i$. لذا $AB \subseteq S = \bigcap_{i \in I} A_i$؛ یعنی S محدب است.

برهان (ب). خط l را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم S طرفی از آن باشد. ثابت می‌کنیم S محدب است. فرض می‌کنیم $A, B \in S$. پس A و B در یک طرف l اند. ثابت می‌کنیم AB

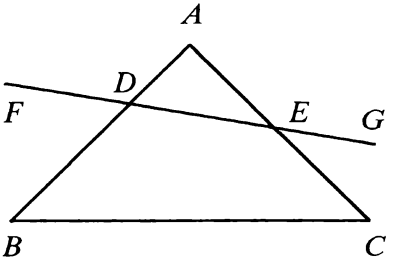


جزء S است. فرض می‌کنیم $C \in AB$. اگر $C = A$ یا $C = B$، مطلب تمام است. پس فرض می‌کنیم $A.C.B$. چون A و B در یک طرف l اند، A و C نیز در یک طرف l اند (چرا؟). لذا $C \in S$. بنابراین $AB \subseteq S$ و S محدب است.

برهان (پ). چون درون یک زاویه، اشتراک دو طرف است، پس طبق قسمتهای (آ) و (ب)، محدب است.

برهان (ت). چون درون یک مثلث، اشتراک درونهای سه زاویهٔ آن است و درون زاویه طبق قسمت (پ)، محدب است، پس درون یک مثلث طبق قسمت (آ)، محدب است.

برهان (ث). مثلث ΔABC را در نظر گرفته و نقطهٔ D را بین A و B و نقطهٔ E را بین A و C اختیار می‌کنیم (ب ۲). بنابر ب ۲، نقاطی مانند F و G وجود دارند بطوری که $F.D.E$



و $D.E.G$. واضح است که F و G بیرون مثلثند، ولی پاره‌خط FG بیرون مثلث نیست (چرا؟).

برهان (ج). مثلث مجموعه‌ای از نقاط نیست که محدب باشد. ما آن را با یک شش‌تایی تعریف کردیم که سه عنصر اولش نقطه‌اند. لذا تعریف تحدب برایش به کار نمی‌رود.

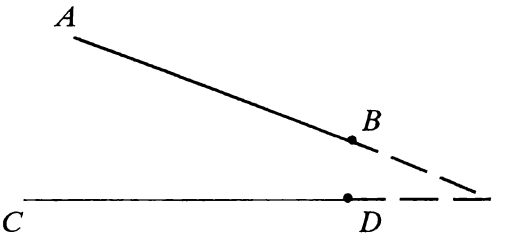
تعریف ۱۹.۲.۷. **غلاف محدب** مجموعهٔ S عبارت است از اشتراک تمام مجموعه‌های محدبی که شامل S اند؛ یعنی کوچکترین مجموعهٔ محدبی که شامل S است.

قضیهٔ ۲۰.۲.۷. ***غلاف محدب مجموعهٔ $\{A, B, C\}$ مرکب از سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط از اضلاع و درون مثلث ΔABC تشکیل شده است.***

برهان. فرض می‌کنیم غلاف محدب مجموعهٔ $S = \{A, B, C\}$ مساوی T باشد. چون مجموعهٔ U مرکب از درون مثلث ΔABC به انضمام نقاط روی اضلاع محدب بوده (چرا؟) و شامل S است، پس $T \subseteq U$. حال فرض می‌کنیم $D \in U$. D یا بر یکی از اضلاع ΔABC بوده یا یک نقطهٔ درونی این مثلث است. فرض می‌کنیم D مثلاً روی AB باشد. چون T طبق قضیهٔ ۱۸.۲.۷ قسمت (آ)، محدب بوده و $A, B \in T$، پس $AB \subseteq T$.

لذا $D \in T$. حال فرض می‌کنیم D درون ΔABC باشد. پس D درون زاویهٔ $\angle BAC$ است. لذا $\overrightarrow{AD}$ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ است. پس $\overrightarrow{AD}$ طبق قضیهٔ قطعه‌بر، BC را در نقطه‌ای مانند E قطع می‌کند. چون T محدب بوده و شامل B و C است، پس $BC \subseteq T$. لذا $E \in T$. پس، از $A , E \in T$ و تحدب T داریم $AE \subseteq T$؛ بنابراین $D \in T$. درنتیجه $T = U$.

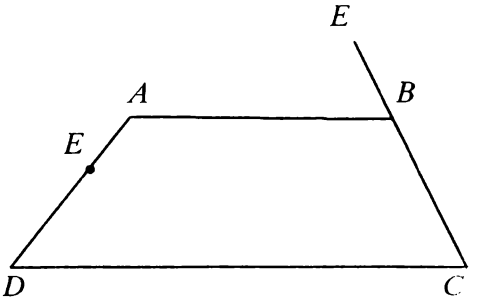
تعریف ۲۱.۲.۷. پاره‌خطهای AB و CD را **نیم‌موازی** می‌گوییم هرگاه پاره‌خط AB خط $\overleftrightarrow{CD}$ را قطع نکند و پاره‌خط CD خط $\overleftrightarrow{AB}$ را قطع نکند. واضح است که اگر $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ موازی باشند، AB و CD نیم موازیند ولی عکس آن صادق نیست (ر.ک. شکل زیر).



تعریف ۲۲.۲.۷. یک چهارضلعی را **محدب** می‌نامیم درصورتی که یک جفت از اضلاع روبروی آن نیم‌موازی باشند.

قضیهٔ ۲۳.۲.۷. ***در یک چهارضلعی محدب هر جفت از اضلاع مقابل نیم موازی هستند.***

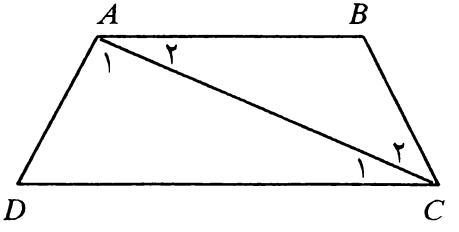
برهان. فرض می‌کنیم در چهارضلعی محدب $\square ABCD$ اضلاع AB و CD نیم موازی بوده، ولی مثلاً AD خط $\overleftrightarrow{BC}$ را در نقطه‌ای مانند E قطع کند. با توجه به تعریف چهارضلعی (تعریف ۲۵.۱.۲) داریم $E.B.C$ یا $B.C.E$ (چرا؟). فرض می‌کنیم $E.B.C$. خط $\overleftrightarrow{AB}$ از ضلع EC وارد ΔECD شده است. چون $\overleftrightarrow{AB}$ پاره‌خط CD را قطع نمی‌کند، طبق قضیهٔ پاش، $\overleftrightarrow{AB}$ از ضلع ED خارج می‌شود. لذا $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AD}$، یعنی A، B و D بر یک استقامتند که با تعریف چهارضلعی تضاد دارد. به همین ترتیب $B.C.E$ به تناقض می‌رسد (چگونه؟).



به خاطر قضیهٔ فوق، هر ضلع یک چهارضلعی محدب نیمصفحه‌ای را مشخص می‌کند که ضلع مقابل در آن قرار دارد. ما **درون** یک چهارضلعی محدب را اشتراک این چهار نیمصفحه تعریف می‌کنیم.

قضیهٔ ۲۴.۲.۷. ***در یک چهارضلعی محدب مجموع زوایا به درجه از ۳۶۰° نابیشتر است.***

برهان. فرض می‌کنیم چهارضلعی $ABCD\square$ محدب باشد. قطر AC را رسم می‌کنیم. چون



چهارضلعی محدب است، B و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AD}$ بوده و D و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$اند. پس C درون زاویهٔ $\angle BAD$ است. لذا، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۹،

$$(\angle A)^\circ = (\angle A_۱)^\circ + (\angle A_۲)^\circ$$

به همین ترتیب معلوم می‌شود که

$$(\angle C)^\circ = (\angle C_۱)^\circ + (\angle C_۲)^\circ$$

حال اگر قضیهٔ لژاندر ـ ساکری را در مورد مثلثهای ΔACD و ΔABC به کار برده و از

روابط فوق استفاده کنیم، نتیجه حاصل می‌شود (توضیح دهید!).

قضیهٔ ۲۵.۲.۷. ***اقطار یک چهارضلعی محدب همدیگر را قطع می‌کنند.***

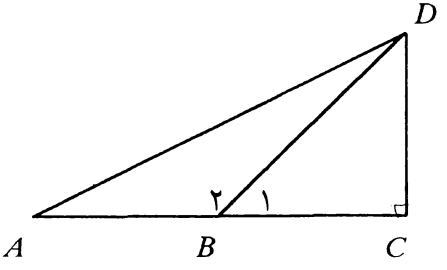
برهان. فرض می‌کنیم چهارضلعی $ABCD\square$ محدب باشد. در قضیهٔ ۲۴.۲.۷ دیدیم که C درون زاویهٔ $\angle BAD$ است. پس $\overrightarrow{AC}$ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ است. لذا، طبق قضیهٔ قطعه‌بر، $\overrightarrow{AC}$ پاره‌خط BD را در نقطه‌ای مانند H قطع می‌کند. به همین ترتیب $\overrightarrow{CA}$ پاره‌خط BD را در نقطه‌ای مانند H' قطع خواهد کرد. اولاً $H = H'$ زیرا که اگر $H \neq H'$، طبق قضیهٔ ۱.۲.۴ قسمت (ب)، $\overleftrightarrow{AC}$ و $\overleftrightarrow{BD}$ در دو نقطه مشترکند و لذا طبق پ ۱ مساوی هستند؛ یعنی A، B، C و D بر یک استقامتند که با تعریف چهارضلعی در تضاد است. پس $H = H'$. اما، طبق قضیهٔ ۱.۲.۴ قسمت (آ)، H در AC است. پس AC و BD متقاطعند.

قضیهٔ ۲۶.۲.۷. ***درون یک چهارضلعی محدب مجموعه‌ای است محدب و نقطهٔ تقاطع اقطار درون آن قرار دارد.***

برهان. درون یک چهارضلعی محدب طبق قسمتهای (آ) و (ب) قضیهٔ ۱۸.۲.۷ محدب است. در قضیهٔ ۲۵.۲.۷ دیدیم که اقطار چهارضلعی محدب $ABCD\square$ در نقطه‌ای مانند H بین A و C و بین B و D متقاطعند. پس H درون این چهارضلعی قرار دارد (چرا؟).

قضیهٔ ۲۷.۲.۷. فرض می‌کنیم $A.B.C$ و $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AC}$. در این صورت $CD < BD < AD$.

برهان.

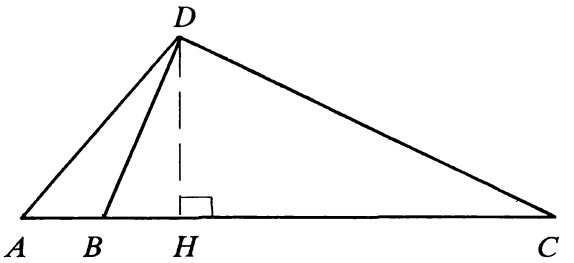


بنابر قضیهٔ لژاندر ـ ساکری، زاویهٔ $\angle B_1$ حاده است. پس زاویهٔ $\angle B_2$ منفرجه است.

زاویهٔ $\angle A$ نیز طبق همین قضیه حاده است. حال می‌توان روابط $CD < BD < AD$ را از قضیهٔ ۶.۲.۷ نتیجه گرفت (چگونه؟).

قضیهٔ ۲۸.۲.۷. *در مثلث ΔDAC نقطهٔ B بین A و C است. در این صورت $DB < DA$ یا $DB < DC$.*

برهان.



از D خط $\overleftrightarrow{DH}$ را بر $\overleftrightarrow{AC}$ عمود کرده و H را پای عمود می‌گیریم. اگر $H = A$، چون داریم $A.B.C$ ، خواهیم داشت $H.B.C$. پس، طبق قضیهٔ ۲۷.۲.۷ ، $DB < DC$. به همین ترتیب، اگر $H = C$، طبق قضیهٔ ۲۷.۲.۷، $DB < DA$ و مطلب تمام است. لذا، فرض می‌کنیم $H \neq A , B , C$. بنابر ب ۳، از روابط زیر یکی و فقط یکی برقرار است:

$A.B.H$ ، $A.H.B$ یا $H.A.B$.

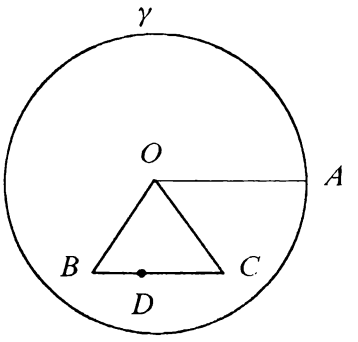
اگر $A.B.H$ برقرار باشد، بنابر قضیهٔ ۲۷.۲.۷، $DB < DA$. اگر $A.H.B$ برقرار باشد، چون داریم $A.B.C$، بنابر قضیهٔ انبساط ـ انقباض خواهیم داشت $H.B.C$. پس، طبق قضیهٔ ۲۷.۲.۷، $DB < DC$. اگر $H.A.B$ برقرار باشد، چون داریم $A.B.C$، بنابر قضیهٔ انبساط ـ انقباض خواهیم داشت $H.B.C$. لذا، طبق قضیهٔ ۲۷.۲.۷، $DB < DC$. پس در هر حال $DB < DA$ یا $DB < DC$.

قضیهٔ ۲۹.۲.۷. *درون یک دایره مجموعه‌ای است محدب.*

برهان. یک دایره به مرکز O و شعاع OA در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم B و C دو نقطه در

کتابخانه مجازی ریاضیات

درون آن باشند. پس داریم $OB < OA$ و $OC < OA$. ثابت می‌کنیم هر نقطه از BC



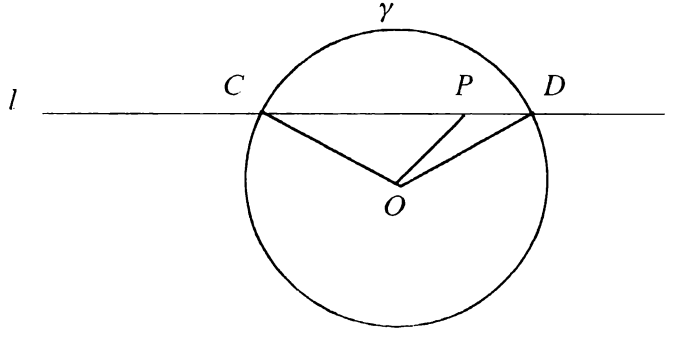
درون دایره است. نقطهٔ دلخواه $D \in BC$ را اختیار می‌کنیم. اگر $D = B$ یا $D = C$، مطلب تمام است. پس فرض می‌کنیم $D \neq B , C$. طبق قضیهٔ ۲۸.۲.۷، $OD < OB$ یا $OD < OC$. پس، طبق قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (ت)، $OD < OA$؛ یعنی D یک نقطهٔ درونی دایره است. لذا درون یک دایره محدب است.

قضیهٔ ۳۰.۲.۷. ***فرض می‌کنیم خط l دایرهٔ γ را در دو نقطهٔ C و D قطع کند. در این صورت***

(آ) نقطهٔ P واقع بر l درون γ است اگر و فقط اگر $C.P.D$؛

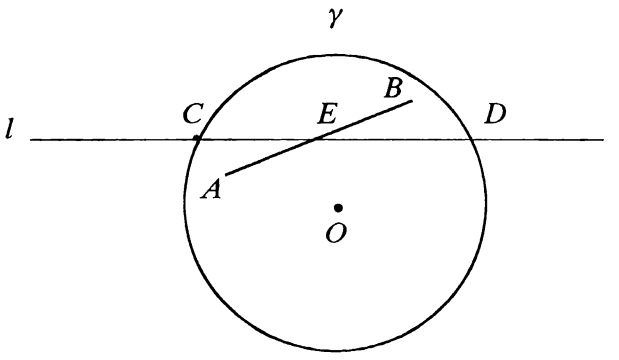
(ب) هرگاه نقاط A و B درون γ و در دو طرف l باشند، آنگاه E محل تلاقی AB با l بین C و D قرار دارد.

برهان (آ). فرض می‌کنیم O مرکز دایرهٔ γ باشد. هرگاه P بین C و D باشد، آنگاه طبق قضیهٔ ۲۸.۲.۷، $OP < OD$ یا $OP < OC$. در هر حال P درون γ قرار دارد. عکس مطلب از



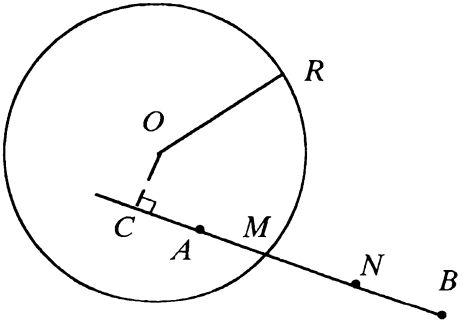
ب ۳، قضیهٔ ۲۸.۲.۷ و قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (آ)، نتیجه می‌شود (چگونه؟).

برهان (ب). چون درون یک دایره طبق قضیهٔ ۲۹.۲.۷، محدب است، پس E یک نقطهٔ درونی γ است. لذا، طبق قسمت (آ)، E بین C و D قرار دارد.



قضیهٔ ۳۱.۲.۷. ***اصل موضوع ددکیند مستلزم اصل پیوستگی مقدماتی است.***

برهان. فرض می‌کنیم O مرکز دایره و OR شعاع آن باشد. همچنین A درون دایره و B بیرون آن بوده و نیز C پای عمود وارد از O بر $\overleftrightarrow{AB}$ باشد. برای خط $\overleftrightarrow{AB}$ یک برش ددکیند تعریف



می‌کنیم. فرض می‌کنیم Σ_1 مجموعهٔ تمام نقاط P از پاره‌خط AB باشد که $OP < OR$ به انضمام تمام نقاط واقع بر نیمخط متقابل $\overrightarrow{AB}$. همچنین Σ_2 مجموعهٔ تمام نقاط P از

پاره‌خط AB باشد که $OP \cong OR$ یا $OP > OR$ همراه با همهٔ نقاط واقع بر نیمخط متقابل $\overrightarrow{BA}$. هرگاه AB چنان جهتدار شود که A در سمت چپ B باشد، آنگاه طبق قضیهٔ ۲۷.۲.۷، هر نقطهٔ Σ_1 سمت چپ هر نقطهٔ Σ_2 است (از نقطهٔ C پای عمود استفاده کنید!). لذا، طبق اصل موضوع ددکیند، نقطهٔ منحصر به فردی مانند M بر $\overleftrightarrow{AB}$ وجود دارد که واجد شرایط مذکور در این اصل است. اولاً M بین A و B است (چرا؟). ثانیاً M روی دایره است؛ یعنی $OM \cong OR$. فرض می‌کنیم چنین نباشد. پس، طبق قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (آ)، $OM < OR$ یا $OM > OR$. فرض می‌کنیم $OM < OR$. می‌گوییم نقطه‌ای مانند N روی AB بین M و B هست بطوری که

$$\overline{MN} < \overline{OR} - \overline{OM}$$

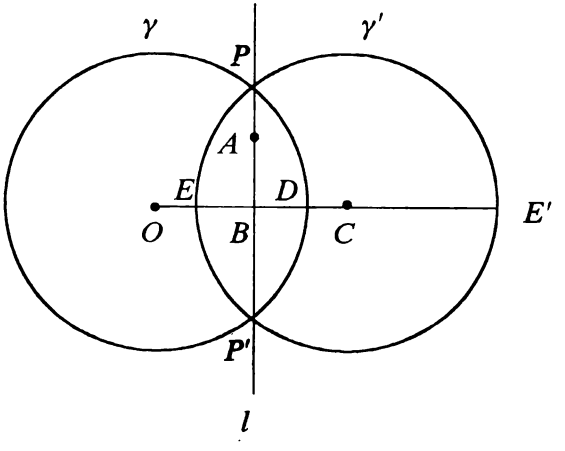
(چرا؟). اما در مثلث $\Delta\, OMN$ طبق نامساوی مثلثی داریم

$$\overline{ON} < \overline{OM} + \overline{MN}$$

پس $\overline{ON} < \overline{OR}$ که ناممکن است، زیرا N روی دایره یا بیرون آن است. لذا OM نمی‌تواند از OR کوچکتر باشد. به همین نحو می‌توان نشان داد که $OM > OR$ برقرار نیست (نشان دهید!). پس M روی دایره است.

قضیهٔ ۳۲.۲.۷. ***اصل پیوستگی دایره مستلزم آن است که خطی که از درون یک دایره بگذرد آن را در دو نقطه قطع می‌کند.***

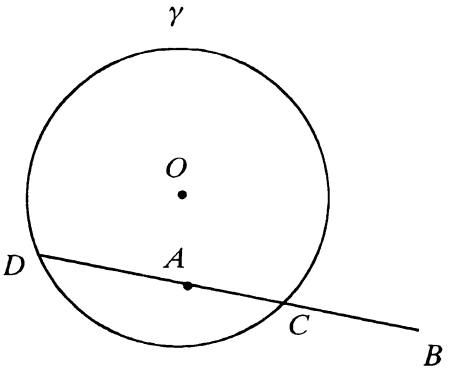
برهان. فرض می‌کنیم خط l از نقطهٔ A واقع در درون دایرهٔ γ به مرکز O بگذرد. از نقطهٔ O



خطی بر l عمود کرده و پای عمود را B می‌نامیم و فرض می‌کنیم C قرینهٔ O نسبت به B باشد (ق ۱). نقطه‌ای مانند D هست که هم بر $\overrightarrow{OB}$ و هم بر γ قرار دارد (ق ۱). حال نقاط E و E' را روی خط مار بر O و B چنان می‌گیریم که $CE \cong OD \cong CE'$. بآسانی معلوم می‌شود که همهٔ این نقاط در نسبتهای بینیت که در شکل فوق نشان داده شده، صدق می‌کنند؛ یعنی دایرهٔ γ' به مرکز C و شعاع CE یک نقطه (E) درون دایرهٔ γ و یک نقطه (E') بیرون γ دارد. پس این دایره، طبق اصل پیوستگی دایره، γ' را در دو نقطهٔ P و P' قطع خواهد کرد. واضح است که P و P' روی خط l قرار دارند (چرا؟).

قضیهٔ ۳۳.۲.۷. ***اصل پیوستگی دایره مستلزم اصل پیوستگی مقدماتی است.***

برهان. دایرهٔ γ را در نظر گرفته و فرض می‌کنیم سر Aی پاره‌خط AB درون γ و سر Bی آن بیرون γ باشد. چون اصل پیوستگی دایره برقرار است، بنابر قضیهٔ ۳۲.۲.۷، خط $\overleftrightarrow{AB}$ که از نقطهٔ A درون γ می‌گذرد γ را در دو نقطه مانند C و D قطع می‌کند. می‌گوییم از دو



نقطهٔ C و D یکی بین A و B است. اگر D بین A و B نباشد، ثابت می‌کنیم C بین A و B است. طبق قضیهٔ ۳۰.۲.۷ قسمت (آ)، داریم $D.A.C$. از طرفی طبق قضیهٔ ۲۸.۲.۷، رابطهٔ $A.B.C$ برقرار نیست (چرا؟). اگر داشته باشیم $C.A.B$، طبق قضیهٔ انبساط ـ انقباض، از $D.A.C$ و $C.A.B$ داریم $A.C.A$ که با ب ۱ متناقض است. پس طبق ب ۳، فقط داریم $A.C.B$؛ یعنی پاره‌خط AB دایرهٔ γ را قطع می‌کند.

۳.۷ اصل توازی

بحث توازی را باید از جایی آغاز کنیم، اما نقطهٔ شروع را نمی‌دانیم. همچون گم گشته‌ای می‌مانیم که در ظلمت راه می‌جوید و به هر چیز متوسل می‌شود. در اطرافمان چیزی را که رنگ توازی داشته باشد، جز قضیهٔ زوایای متبادل درونی و اصل پنجم اقلیدس نمی‌یابیم. قضیهٔ زوایای متبادل درونی ایده‌ای به ما نمی‌دهد. به ناچار اصل پنجم اقلیدس را مطرح می‌کنیم شاید کلید باب باشد و ما را از این ورطه برهاند.

اصل پنجم اقلیدس.

هرگاه موربی دو خط را طوری قطع کند که مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ درونی حادث در یک طرف مورب از حیث درجه از 180° کمتر باشد، آنگاه این دو خط یکدیگر را در همان طرف مورب قطع خواهند کرد.

می‌پرسیم: اگر همهٔ مشکلات توازی با این اصل حل شود، آیا پذیرش این اصل بی‌مانع است؟ پاسخ آن است که یک اصل باید در ابتدای علم قابل طرح باشد. در این اصل مفاهیم طرف و درجه آمده است که در ابتدای هندسه قابل طرح نیستند و لذا این اصل با همهٔ سودمندی احتمالی‌اش نقص دارد. لذا اگر ملزم به پذیرش اصلی در توازی باشیم، این اصل، اصل پنجم اقلیدس نیست.

حال اصل توازی به ظاهر ساده‌تری را عنوان می‌کنیم. این اصل را ***اصل توازی اقلیدسی*** یا ***اصل پلی‌فیر*** می‌نامند و ***جان پلی‌فیر*** (*John Playfair*) آن را در کتاب هندسهٔ اقلیدسی‌اش در سال ۱۷۹۵ عنوان کرده است. اقلیدس از این اصل اطلاع داشته و پروکلوس (*Proclus*) نیز بدان اشاره کرده است.

اصل توازی اقلیدسی.

از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط تنها یک خط به موازات خط اول می‌گذرد.

این اصل ظاهراً از اصل پنجم اقلیدس ساده‌تر بوده و در ابتدای هندسه قابل بیان است. اینکه چرا اقلیدس با وجود دانستن این اصل آن را اختیار نکرده خود بحث مفصلی است که واردش نمی‌شویم. همچنین در این اصل عبارت «تنها یک خط» گاهی به صورت

«یک و تنها یک خط» تعبیر شده و وجود و یکتایی خط موازی تضمین گردیده است. هیلبرت این ابهام را از بین برده و اصل توازی را به صورت زیر اختیار می‌کند.

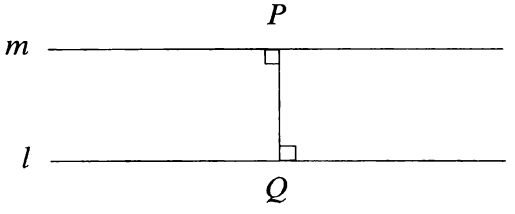
اصل هیلبرت.

از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط حداکثر یک خط به موازات خط اول می‌گذرد.

می‌پرسیم: پس وجود خط موازی چه می‌شود؟ پاسخ آن است که وجود خط موازی را می‌توان ثابت کرد، به صورت زیر:

قضیهٔ ۱.۳.۷. ***از یک نقطهٔ غیرواقع بر یک خط لااقل یک خط به موازات خط اول می‌گذرد.***

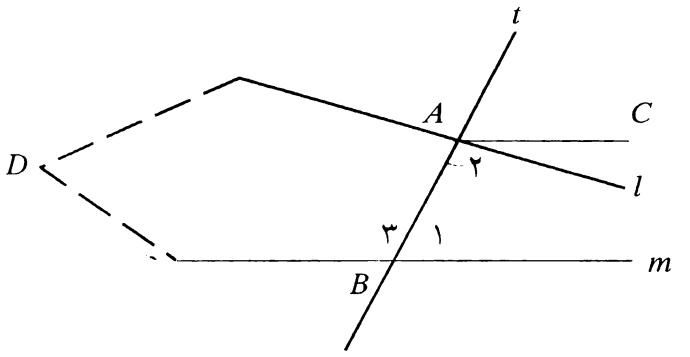
برهان. خط l و نقطهٔ P غیرواقع بر آن را اختیار می‌کنیم. از P خط $\overleftrightarrow{PQ}$ را بر l و از P خط m را بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود می‌کنیم (قضیهٔ ۹.۲.۵). مورب $\overleftrightarrow{PQ}$ با دو خط l و m یک جفت زاویهٔ متبادل درونی می‌سازد که هر دو قائمه‌اند. چون این جفت طبق اصل چهارم اقلیدس قابل انطباقند، پس l و m طبق قضیهٔ زوایای متبادل درونی موازی هستند.



قضیهٔ ۲.۳.۷. ***اصل هیلبرت $\Longleftrightarrow$ اصل پنجم اقلیدس.***

برهان. فرض می‌کنیم اصل هیلبرت برقرار باشد. همچنین مورب t دو خط l و m را در نقاط A و B قطع کرده و در یک طرف t زوایای ∠۱ و ∠۲ را پدید آورده باشد بطوری که

$$(\angle ۱)^\circ + (\angle ۲)^\circ < ۱۸۰^\circ$$



چون زوایای ۱ ∠ و ۳ ∠ مکمل یکدیگرند، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۱۱، داریم

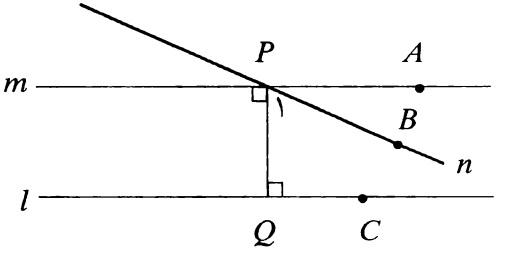
$$(\angle ۱)^\circ + (\angle ۳)^\circ = ۱۸۰^\circ$$

بنابراین

$$(\angle ۲)^\circ < ۱۸۰^\circ - (\angle ۱)^\circ = (\angle ۳)^\circ$$

پس، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۱۲، ۳ ∠ > ۲ ∠ . لذا، طبق ق ۴، نیمخطی مانند $\overrightarrow{AC}$ وجود دارد که $\overleftrightarrow{AC} \neq l$ و ۳ ∠ و $\angle BAC$ دو زاویهٔ متبادل درونی قابل انطباقند. پس، طبق قضیهٔ زوایای متبادل درونی، m و $\overleftrightarrow{AC}$ با هم موازی هستند. چون $l \neq \overleftrightarrow{AC}$ و اصل هیلبرت را پذیرفته‌ایم، l و m متقاطع هستند. برای اتمام این قسمت از برهان باید نشان دهیم که نقطهٔ تلاقی این دو خط در همان طرفی از t است که C در آن است. فرض می‌کنیم این دو خط در طرف دیگر t و در نقطه‌ای مانند D متقاطع باشند. در این صورت ۲ ∠ یک زاویهٔ بیرونی ΔABD است و طبق قضیهٔ زاویهٔ بیرونی باید از ۳ ∠ بزرگتر باشد که ممکن نیست.

حال فرض می‌کنیم اصل پنجم اقلیدس برقرار باشد. خط l و نقطهٔ P غیرواقع بر آن را اختیار می‌کنیم. از P خط $\overleftrightarrow{PQ}$ را بر l و از P خط m را بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود می‌کنیم (قضیهٔ



۹.۲.۵). دو خط l و m به دلیل داشتن عمود مشترک موازیند (قضیهٔ زوایای متبادل درونی). حال فرض می‌کنیم خط $\overleftrightarrow{PQ}$، $n \neq m$ خط دلخواهی مار بر P باشد. نقاط A و B را به ترتیب روی خطوط m و n طوری می‌گیریم که نیمخط $\overrightarrow{PB}$ بین $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{PQ}$ باشد، و نقطهٔ C را روی l و در طرفی از $\overrightarrow{PQ}$ می‌گیریم که B در آن است. (چرا این امور میسر است؟). پس $\angle ۱$ حاده بوده و

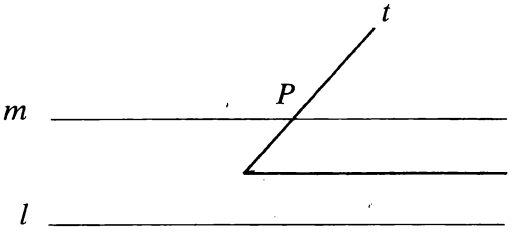
$$(\angle ۱)^\circ + (\angle PQC)^\circ < ۹۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ$$

لذا، طبق فرض، خطوط n و l متقاطع بوده و اصل هیلبرت برقرار است.

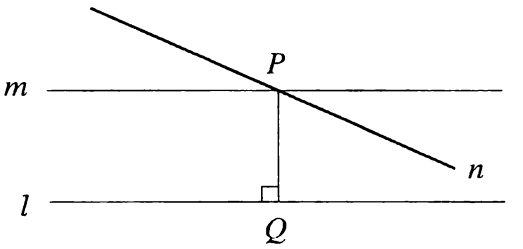
حال نشان می‌دهیم که اگر اصل هیلبرت را نپذیریم، نواقصی در هندسهٔ اقلیدسی پدید می‌آیند که شایستهٔ این علم نیست.

قضیهٔ ۳.۳.۷. ***اصل هیلبرت $\Longleftrightarrow$ اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع کند دیگری را نیز قطع می‌کند.***

برهان. فرض می‌کنیم اصل هیلبرت برقرار باشد. همچنین خط t خط m را در نقطهٔ P قطع کرده، ولی خط l موازی m را قطع نکند. پس از P دو خط t و m به موازات l رسم شده که با اصل هیلبرت تعارض دارد.

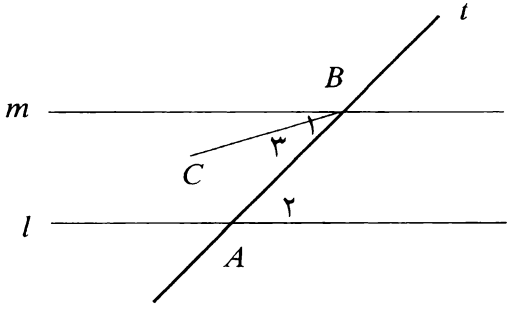


اینک طرف دوم را گرفته و فرض می‌کنیم نقطهٔ P غیرواقع بر خط l باشد. از P خط $\overleftrightarrow{PQ}$ را بر l و از P خط m را بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود می‌کنیم. دو خط l و m به دلیل داشتن عمود مشترک موازیند (قضیهٔ زوایای متبادل درونی). فرض می‌کنیم n خطی مخالف m و $\overleftrightarrow{PQ}$ مار بر P باشد. چون n خط m را قطع کرده است، طبق فرض باید l را نیز قطع کند. لذا، از P تنها خط m به موازات l می‌گذرد و اصل هیلبرت برقرار است.



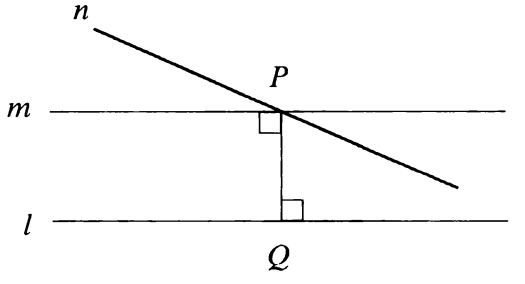
قضیهٔ ۴.۳.۷. ***اصل هیلبرت $\Longleftrightarrow$ عکس قضیهٔ زوایای متبادل درونی.***

برهان. فرض می‌کنیم اصل هیلبرت برقرار باشد. همچنین مورب t دو خط موازی l و m را



به‌ترتیب در نقاط A و B قطع کرده است. بنابر ق ۴، نیمخطی مانند $\overrightarrow{BC}$ هست بطوری که دو زاویهٔ متبادل درونی ۲ $\angle$ و ۳ $\angle$ قابل انطباقند. بنابر قضیهٔ زوایای متبادل درونی، $\overleftrightarrow{BC} \parallel l$. چون اصل هیلبرت برقرار است، $\overleftrightarrow{BC} = m$ و ۱ $\angle$ = ۳ $\angle$ و مطلب تمام است.

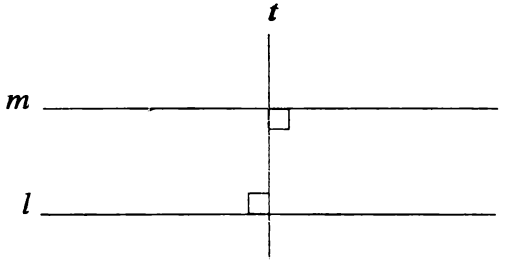
اینک فرض می‌کنیم طرف دوم برقرار باشد. خط l و نقطهٔ P غیرواقع بر آن را



اختیار می‌کنیم. از P خط $\overleftrightarrow{PQ}$ را بر l و از P خط m را بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود می‌کنیم. دو خط l و m به دلیل داشتن عمود مشترک $\overleftrightarrow{PQ}$ موازیند (قضیهٔ زوایای متبادل درونی). حال فرض می‌کنیم n خطی غیر از m موازی l و مار بر P باشد. طبق فرض، n نیز بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود است؛ یعنی از P بیش از یک خط بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود شده است که با قضیهٔ ۳.۲.۷ تعارض دارد. پس اصل هیلبرت برقرار است.

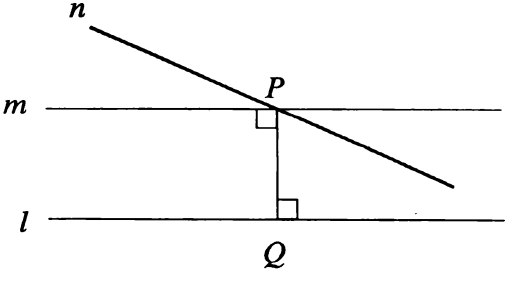
قضیهٔ ۵.۳.۷. ***اصل هیلبرت $\Longleftrightarrow$ هرگاه خط t دو خط موازی l و m را قطع کند و $t \perp l$، آنگاه $t \perp m$.***

برهان. فرض می‌کنیم اصل هیلبرت برقرار باشد. همچنین t دو خط موازی l و m را قطع



کرده و $t \perp l$. بنابر قضیهٔ ۴.۳.۷، عکس قضیهٔ زوایای متبادل درونی برقرار است. پس t خطوط l و m را در زوایای متبادل درونی قابل انطباق قطع می‌کند. چون هر زاویهٔ قابل انطباق با یک زاویهٔ قائمه، قائمه است [قضیهٔ ۸.۲.۵ (ب)]، پس t بر m نیز عمود است.

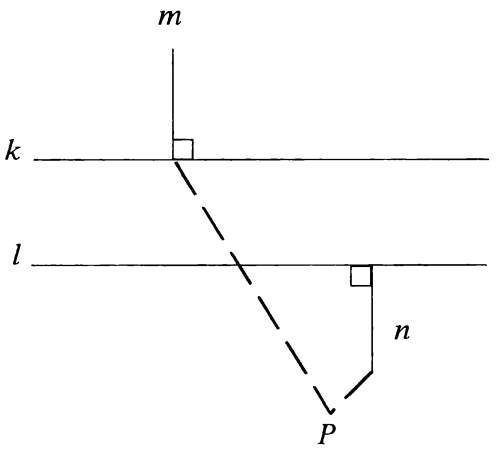
حال فرض می‌کنیم طرف دوم برقرار باشد. خط l و نقطهٔ P غیرواقع بر آن را اختیار می‌کنیم. از P خط $\overleftrightarrow{PQ}$ را بر l و از P خط m را بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود می‌کنیم. دو خط l و m به دلیل داشتن عمود مشترک موازیند (قضیهٔ زوایای متبادل درونی). فرض می‌کنیم n خطی



غیر از m و مار بر P باشد. اگر $n \parallel l$، طبق فرض، $\overleftrightarrow{PQ}$ که بر l عمود است، باید بر n نیز عمود باشد؛ یعنی از P دو خط m و n بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود شده‌اند که با یکتایی خط عمود (قضیهٔ ۳.۲.۷) تعارض دارد. پس اصل هیلبرت برقرار است.

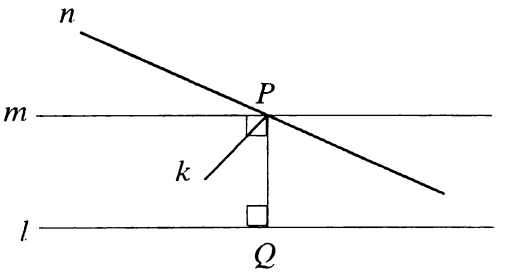
قضیهٔ ۶.۳.۷. ***اصل هیلبرت*** $\Longleftrightarrow$ ***هرگاه*** $k \parallel l$، $m \perp k$ ***و*** $n \perp l$، ***آنگاه*** $m = n$ ***یا*** $m \parallel n$.

برهان. فرض می‌کنیم اصل هیلبرت برقرار باشد. همچنین $k \parallel l$ ، $m \perp k$ و $n \perp l$. اگر $m = n$ ، مطلب تمام است. پس فرض می‌کنیم $m \neq n$. اگر $m \nparallel n$، این دو خط در



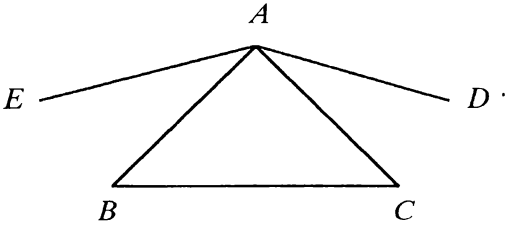
نقطه‌ای مانند P متقاطع خواهند بود. چون اصل هیلبرت برقرار است، بنابر قضیهٔ ۳.۳.۷، خط n خط k را نیز قطع می‌کند و نیز، طبق قضیهٔ ۵.۳.۷، خط n بر خط k عمود است. پس، از نقطهٔ P دو خط m و n بر k عمود شده است که با قضیهٔ ۳.۲.۷ در تضاد است.

حال فرض می‌کنیم طرف دوم برقرار باشد. خط l و نقطهٔ P غیرواقع بر آن را اختیار می‌کنیم. از نقطهٔ P خط $\overleftrightarrow{PQ}$ را بر l و از نقطهٔ P خط m را بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود می‌کنیم. دو خط l و m به دلیل داشتن عمود مشترک موازیند. فرض می‌کنیم n خطی غیر از m مار بر P و موازی l بوده و همچنین خط k از P گذشته بر n عمود باشد. طبق فرض، $k = \overleftrightarrow{PQ}$؛ یعنی از P دو خط n و m بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود شده‌اند که خلاف یکتایی خط عمود است.



قضیهٔ ۷.۳.۷. ***اصل هیلبرت $\Longleftrightarrow$ مجموع زوایای هر مثلث به درجه مساوی ۱۸۰° است.***

برهان. فرض می‌کنیم اصل هیلبرت برقرار باشد. مثلث ΔABC را در نظر می‌گیریم. بنابر ق ۴، نیمخطی مانند $\overrightarrow{AD}$ در طرفی از $\overleftrightarrow{AC}$ که B در آن نیست، وجود دارد بطوری که



$\angle CAD \cong \angle C$ و نیمخطی مانند $\overrightarrow{AE}$ در طرفی از $\overrightarrow{AB}$ که C در آن نیست، وجود دارد بطوری که $\angle BAE \cong \angle B$. پس، طبق قضیهٔ زوایای متبادل درونی، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ و $\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. لذا، طبق فرض، $\overleftrightarrow{AD} = \overleftrightarrow{AE}$ و $\angle DAC$ مکمل $\angle CAE$ است. لذا، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۱۱،

$$(\angle DAC)^\circ + (\angle CAE)^\circ = ۱۸۰^\circ .$$

اما نیمخط $\overrightarrow{AB}$ بین $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AE}$ است (چرا؟). پس، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۹،

$$(\angle BAE)^\circ + (\angle A)^\circ = (\angle CAE)^\circ .$$

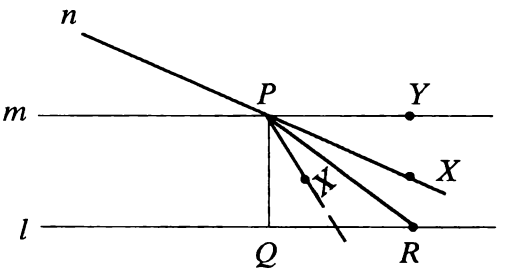
بنابراین

$$(\angle DAC)^\circ + (\angle BAE)^\circ + (\angle A)^\circ = ۱۸۰^\circ .$$

اما، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۸، $(\angle BAE)^\circ = (\angle B)^\circ$ و $(\angle DAC)^\circ = (\angle C)^\circ$. پس داریم

$$(\angle A)^\circ + (\angle B)^\circ + (\angle C)^\circ = ۱۸۰^\circ .$$

حال فرض می‌کنیم مجموع زوایای هر مثلث به درجه مساوی ۱۸۰° باشد. همچنین اصل هیلبرت برقرار نباشد. پس خطی مانند l و نقطه‌ای مانند P غیرواقع بر آن وجود دارد بطوری که از P بیش از یک خط به موازات l می‌گذرد. از P خط $\overleftrightarrow{PQ}$ را بر l و از P خط m را عمود بر $\overleftrightarrow{PQ}$ رسم می‌کنیم. l و m به دلیل داشتن عمود مشترک $\overleftrightarrow{PQ}$ با هم موازیند (قضیهٔ زوایای متبادل درونی). فرض می‌کنیم n خط دیگری مار بر P موازی l باشد. نقاط X و Y را به ترتیب روی n و m چنان می‌گیریم که $\overrightarrow{PX}$ بین $\overrightarrow{PQ}$ و $\overrightarrow{PY}$ باشد (چرا این کار میسر است؟). بنابر اصل موضوع ارشمیدس، نقطه‌ای مانند R بر l و در طرفی از $\overleftrightarrow{PQ}$ که X و Y در آنند هست بطوری که $(\angle XPY)^\circ < (\angle QRP)^\circ$ (ثابت کنید!). به علاوه، $\overrightarrow{PR}$ بین $\overrightarrow{PX}$ و $\overrightarrow{PQ}$ است، زیرا در غیر این صورت $\overrightarrow{PX}$ بین $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PQ}$ است (چرا؟) و لذا $\overrightarrow{PX}$ باید QR را قطع کند (قضیهٔ قطعه‌بر) و این با فرض توازی l و n تعارض دارد. پس، بنابر قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۱۲، $(\angle XPQ)^\circ < (\angle RPQ)^\circ$.



از جمع دو نامساوی حاصل معلوم می‌شود که

$$(\angle QRP)^\circ + (\angle RPQ)^\circ < ۹۰^\circ;$$

یعنی مجموع زوایای مثلث ΔQRP از ۱۸۰° کمتر است که با فرض تناقض دارد.

با توجه به قضایای فوق معلوم می‌شود که طرد اصل هیلبرت ما را به هندسهٔ پرنقصی می‌رساند که مطلوب نیست. ما در قضیهٔ ۲.۳.۷ ثابت کردیم که اصل هیلبرت با اصل پنجم اقلیدس هم‌ارز است. لذا با پذیرش اصل هیلبرت به تمام هندسهٔ اقلیدسی دست می‌یابیم و همهٔ عیوب فوق از بین خواهد رفت. ما به اصل هیلبرت تن داده و پایان کار

هندسهٔ اقلیدسی را اعلام می‌داریم.

۴.۷ کاستی مثلث

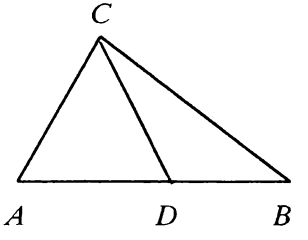
در بخش قبل دیدیم که فاصلهٔ هندسهٔ خنثی تا هندسهٔ اقلیدسی به اندازهٔ اصل هیلبرت است. عدم پذیرش این اصل ما را به یک هندسهٔ نااقلیدسی (هندسهٔ هذلولوی) می‌رساند که از همهٔ هندسه‌های نااقلیدسی به هندسهٔ اقلیدسی نزدیکتر است. در این هندسه تمام قضایای هندسهٔ خنثی برقرارند، ولی قضایای حاصل از اصل هیلبرت برقرار نیستند. مثلاً قضایای ۳.۳.۷ تا ۷.۳.۷ برقرار نیستند. بالاخص مثلثهایی وجود دارند که مجموع زوایایشان از ۱۸۰° کمتر است. در اینجا تابعی به نام ***تابع کاستی*** ظاهر می‌شود که تعریفش به صورت زیر است:

$$\text{کاستی}\ (\Delta ABC) = ۱۸۰^\circ - [(\angle A)^\circ + (\angle B)^\circ + (\angle C)^\circ] \geq ۰$$

این تابع در هندسهٔ اقلیدسی تابع صفر است و ارزش مطالعه ندارد. ولی، در هندسهٔ هذلولوی صفر نبوده و اهمیت بسیار دارد. ما به عنوان وداع با هندسهٔ خنثی، این تابع را بررسی کرده و نتایج جالبی به دست می‌آوریم. لذا، تا آخر این بخش، در هندسهٔ خنثی هستیم.

قضیهٔ ۱.۴.۷. **(خاصیت جمعی کاستی).**
فرض می‌کنیم ΔABC مثلثی دلخواه و D نقطه‌ای بین A و B باشد. در این صورت

$$\text{کاستی}\ (\Delta ABC) = \text{کاستی}\ (\Delta ACD) + \text{کاستی}\ (\Delta BCD).$$



برهان. چون $\overrightarrow{CD}$ بین $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ است (قضیهٔ ۹.۳.۴)، بنابر قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۹،

$$(\angle ACB)^\circ = (\angle ACD)^\circ + (\angle BCD)^\circ$$

و چون $\angle ADC$ و $\angle BDC$ مکمل یکدیگرند، بنابر قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۱۱،

$$(\angle ADC)^\circ + (\angle BDC)^\circ = ۱۸۰^\circ .$$

برای اتمام برهان کافی است کاستی را برای سه مثلث موجود نوشته و از دو رابطهٔ بالا استفاده کنیم (این کار را انجام دهید!).

قضیهٔ ۲.۴.۷. ***با مفروضات قضیهٔ ۱.۴.۷، کاستی مثلث ΔABC صفر است اگر و فقط اگر کاستی هر یک از مثلثهای ΔACD و ΔBCD صفر باشد.***

برهان. هرگاه ΔACD و ΔBCD هر دو دارای کاستی صفر باشند، آنگاه کاستی مثلث ΔABC صفر است (قضیهٔ ۱.۴.۷). به عکس، هرگاه ΔABC دارای کاستی صفر باشد، آنگاه بنابر قضیهٔ ۱.۴.۷،

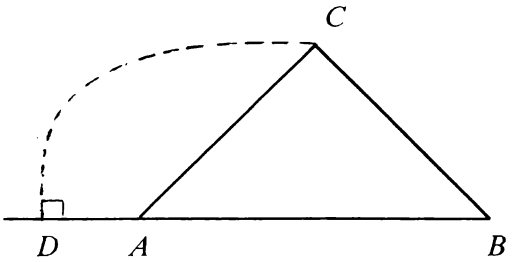
$$\text{کاستی}(\Delta ACD) + \text{کاستی}(\Delta BCD) = ۰ .$$

ولی کاستی یک مثلث هیچ گاه منفی نیست (قضیهٔ لژاندر ـ ساکری). لذا هر یک از مثلثهای ΔACD و ΔBCD کاستی صفر دارند و مطلب تمام است.

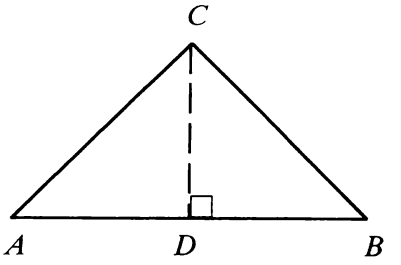
حال قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که در سراسر هندسه کمتر قضیه‌ای با آن برابر است.

قضیهٔ ۳.۴.۷. ***هرگاه مثلثی با کاستی صفر وجود داشته باشد، آنگاه مثلث قائم‌الزاویه‌ای با کاستی صفر وجود دارد، آنگاه مستطیل وجود دارد، آنگاه مستطیل با ابعاد دلخواه وجود دارد، آنگاه هر مثلث قائم‌الزاویه با کاستی صفر است و آنگاه هر مثلث با کاستی صفر است.***

برهان. ***مرحلهٔ ۱.*** فرض می‌کنیم مثلث ΔABC با کاستی صفر باشد. اگر این مثلث قائم‌الزاویه باشد مطلب تمام است. فرض می‌کنیم این مثلث قائم‌الزاویه نباشد. پس لااقل دو تا از زوایای آن مثلاً $\angle A$ و $\angle B$ حاده‌اند، زیرا مجموع دو زاویه در هر مثلث از ۱۸۰° کمتر است (قضیهٔ ۱۳.۲.۷). فرض می‌کنیم CD ارتفاع مرسوم از رأس C باشد. حکم می‌کنیم



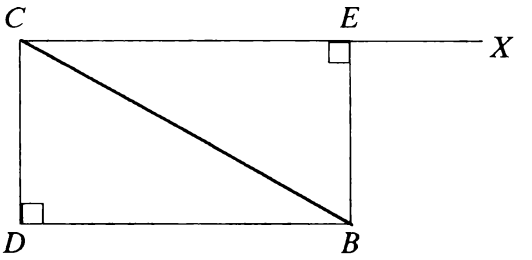
که D بین A و B است. فرض می‌کنیم D بین A و B نباشد. پس طبق بینیت ۳، یا $D.A.B$ یا $A.B.D$. فرض می‌کنیم مثلاً $D.A.B$. پس زاویهٔ درونی قائمه $\angle CDA$ از زاویهٔ بیرونی $\angle CAB$ بزرگتر است که با قضیهٔ زاویهٔ بیرونی تضاد دارد. حالت $A.B.D$ به همین نحو رد می‌شود. بنابراین $A.D.B$ برقرار است.



حال، با توجه به قضیهٔ ۲.۴.۷، هر یک از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ΔADC و ΔBDC کاستی صفر دارد و جواب است.

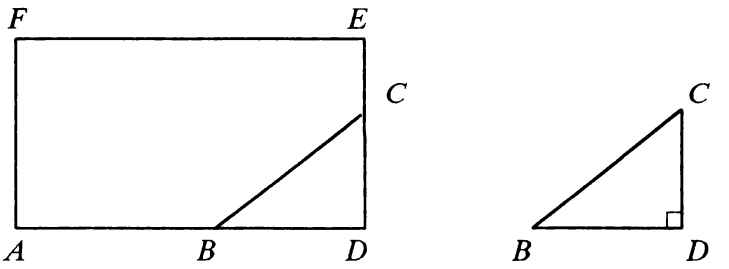
مرحلهٔ ۲. فرض می‌کنیم ΔBDC مثلثی قائم‌الزاویه با کاستی صفر و قائمه در رأس D باشد (مرحلهٔ ۱). بنابر ق ۴، نیمخطی مانند $\overrightarrow{CX}$ در طرفی از $\overleftrightarrow{BC}$ که D در آن نیست وجود دارد به قسمی که $\angle DBC \cong \angle BCX$. و بنابر ق ۱، یک نقطه مانند E بر $\overrightarrow{CX}$ هست که $CE \cong BD$. پس $\Delta BDC \cong \Delta BEC$ (محک ض ز ض). بنابراین، ΔBEC نیز مثلثی است قائم‌الزاویه با کاستی صفر و قائمه در رأس E. اما، طبق فرض،

$$(\angle DBC)^\circ + (\angle BCD)^\circ = ۹۰^\circ .$$

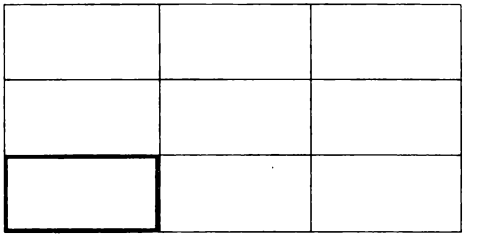


پس $(\angle BCD)^\circ = ۹۰^\circ$ و $(\angle ECB)^\circ + (\angle EBC)^\circ = ۹۰^\circ$ $(\angle DBC)^\circ$.
بعلاوه، B درون $\angle ECD$ است، زیرا قضیهٔ زوایای متبادل درونی ایجاب می‌کند که $\overleftrightarrow{DB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$ و $\overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CD}$. به همین دلیل C درون $\angle EBD$ است. پس، بنابر قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۹، $(\angle ECD)^\circ = ۹۰^\circ = (\angle EBD)^\circ$. لذا، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۷، زوایای $\angle B$ و $\angle C$ قائمه بوده و چهارضلعی $CDBE$ □ مستطیل است.

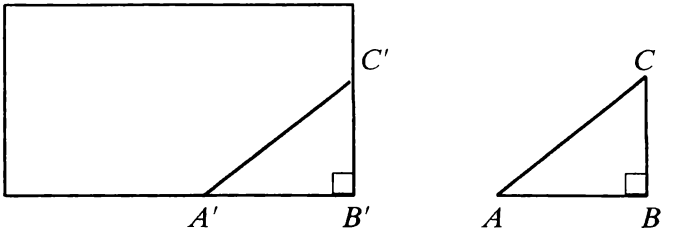
مرحلهٔ ۳. مستطیل مرحلهٔ ۲ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مستطیلی به ابعاد دلخواه



بسازیم؛ یعنی مثلث قائم‌الزاویهٔ $\Delta\ CDB$ با کاستی صفر داده شده است. می‌خواهیم مستطیل $AFED$ □ را طوری بسازیم که $AD > BD$ و $DE > DC$. این کار را می‌توان با استفاده از اصل موضوع ارشمیدس انجام داد. نسخه‌هایی از مستطیل موجود در مرحلهٔ ۲ را مثل آجر کنار و روی هم قرار می‌دهیم تا مستطیل دلخواه حاصل شود (مطلب را دقیقتر توضیح دهید).

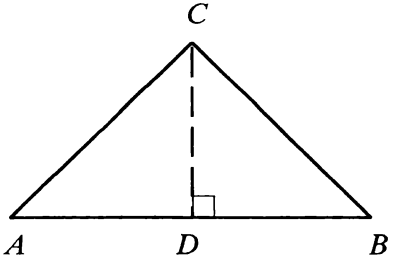


مرحلهٔ ۴. فرض می‌کنیم مستطیل به ابعاد دلخواه وجود داشته باشد. مثلث قائم‌الزاویهٔ دلخواه ΔABC قائم در رأس B را اختیار می‌کنیم. این مثلث را می‌توان به کمک ق ۱ و ق ۶ در یک مستطیل به ابعاد بزرگتر به صورت مثلث $\Delta A'B'C'$ نشاند (چطور؟). بآسانی معلوم می‌شود که کاستی مثلث $\Delta A'B'C'$ صفر است (چرا؟).



پس کاستی هر مثلث قائم‌الزاویه صفر است.

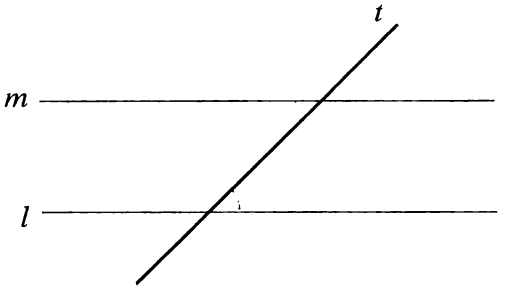
مرحلهٔ ۵. حال فرض می‌کنیم ΔABC مثلث دلخواهی باشد. اگر این مثلث قائم‌الزاویه باشد، کاستی آن طبق مرحلهٔ ۴، صفر است. فرض می‌کنیم قائم‌الزاویه نباشد. پس طبق بحثی که در مرحلهٔ ۱ داشتیم، مثلاً دو زاویهٔ $\angle A$ و $\angle B$ آن حاده بوده و D پای عمود



مرسوم از C بر $\overleftrightarrow{AB}$ بین A و B قرار دارد. چون کاستی دو مثلث $\Delta\ ADC$ و $\Delta\ BDC$ طبق مرحلهٔ ۴، صفر است. پس، طبق قضیهٔ ۲.۴.۷، کاستی مثلث $\Delta\ ABC$ نیز صفر بوده و برهان تمام است.

۵.۷ مسائل

۱.۵.۷. فرض کنید مورب t دو خط l و m را قطع کرده باشد. ثابت کنید زوایای متقابل درونی و بیرونی حاصل قابل انطباقند اگر و فقط اگر زوایای متبادل درونی نظیر قابل انطباق باشند.



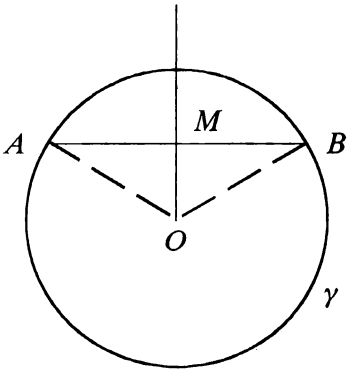
حل. از قابلیت انطباق زوایای متقابل به رأس [قضیهٔ ۸.۲.۵ قسمت (آ)] و تعدی $\cong$ در مورد زوایا استفاده کنید.

۲.۵.۷. احکام زیر را ثابت کنید:

(آ) فرض کنید γ دایره‌ای به مرکز O بوده و A و B دو نقطه بر γ باشند. AB را یک وتر از دایرهٔ γ می‌نامند. فرض کنید M نقطهٔ میانی AB باشد. ثابت کنید $\overleftrightarrow{OM}$ بر $\overleftrightarrow{AB}$ عمود است.

(ب) اگر AB وتری از دایرهٔ γ به مرکز O باشد، ثابت کنید عمودمنصف AB از O می‌گذرد.

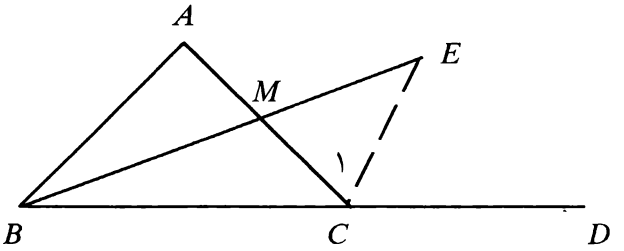
حل. (آ) $\Delta\ OAM \cong \Delta\ OMB$ (محک ض ض ض). پس $\angle\ AMO \cong \angle\ OMB$. اما این دو زاویه مکمل نیز هستند. پس هر دو قائمه بوده و لذا $\overleftrightarrow{OM}$ بر $\overleftrightarrow{AB}$ عمود است.



(ب) $\overleftrightarrow{OM}$ طبق قسمت (آ)، عمودمنصف AB است. چون عمودمنصف هر پاره‌خط منحصر به فرد است [قضیهٔ ۱۲.۲.۷ قسمت (آ)]، پس عمودمنصف AB از O خواهد گذشت.

۳.۵.۷. ما قضیهٔ زاویهٔ بیرونی را بعد از قضیهٔ زوایای متبادل درونی بیان کرده و در اثباتش از قضیهٔ زوایای متبادل درونی استفاده کردیم. این امر این فکر را القا می‌کند که قضیهٔ زاویهٔ بیرونی از قضیهٔ زوایای متبادل درونی اهمیت کمتری داشته و از آن مستقل نیست. قضاوت در میزان نسبی اهمیت امری است سلیقه‌ای که به خواننده واگذار می‌شود. اما فکر وابسته بودن این دو قضیه به هم از برهان ما ناشی شده است. در زیر قضیهٔ زاویهٔ بیرونی را بی‌استفاده از قضیهٔ زوایای متبادل درونی ثابت می‌کنیم. بدین ترتیب معلوم می‌شود که این برهان با همهٔ زیبایی‌اش نقایصی دارد که اقلیدس در رفع آن عاجز بوده است. ابتدا آن را بیان کرده و سپس به رفع نقایصش می‌پردازیم.

برهان اقلیدس. B را به نقطهٔ میانی M از AC وصل کرده، BM را به اندازهٔ خودش تا E ادامه داده، و E را به C وصل می‌نماییم. $\Delta ABM \cong \Delta MCE$ (محک ض ز ض). پس $\angle A \cong \angle C_1$. اما E یک نقطهٔ درونی $\angle ACD$ است. پس $\angle C_1 < \angle ACD$. لذا $\angle A < \angle ACD$.

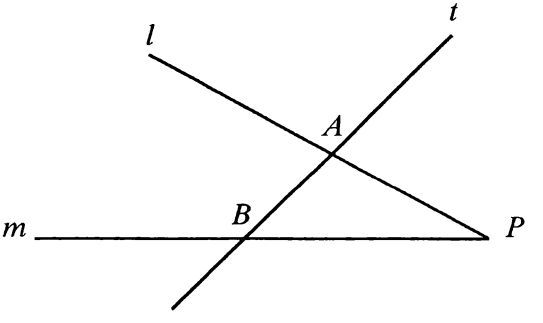


رفع نواقص. بنابر قضیهٔ ۱۱.۲.۷، پاره‌خط AC دارای نقطهٔ میانی M است. نقطهٔ E را می‌توان با اعمال ق ۱ بر نیمخط متقابل $\overrightarrow{MB}$ به دست آورد. چون، بنا بر قضیهٔ ۸.۲.۵ قسمت (آ)، زوایای متقابل به رأس قابل انطباقند، $\Delta ABM \cong \Delta MCE$ (محک ض ز ض) موردی نخواهد داشت. اقلیدس نقطهٔ درونی بودن E را شهودی پذیرفته است. ولی می‌توان آن را به دقت ثابت کرد (این کار به خواننده محول می‌شود). آخرین نکته، یعنی نتیجه شدن $\angle A < \angle ACD$ از روابط $\angle A \cong \angle C_1$ و $\angle C_1 < \angle ACD$، طبق قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (پ)، خواهد بود. با رفع این نواقص انصاف دهید که این برهان با وجود قدمت ۲ هزار ساله‌اش از برهان مدرن ما جذابتر است.

۴.۵.۷. عکس اصل پنجم اقلیدس به قرار زیر است:

هرگاه موربی دو خط متقاطع را قطع کند، آنگاه مجموع زوایای حادث در طرفی از مورب که نقطهٔ تقاطع در آن است، از ۱۸۰° کمتر است.

برهان. فرض می‌کنیم مورب t دو خط متقاطع l و m را در نقاط A و B قطع کرده و این دو خط در نقطهٔ P متقاطع باشند. بنابر قضیهٔ لژاندر ـ ساکری، مجموع زوایای مثلث ΔABP



به درجه از ۱۸۰° نابیشتر است. پس مجموع زوایای حادث مربوطه به درجه از ۱۸۰° کمتر است.

۵.۵.۷. ثابت کنید هر دو مثلث قابل انطباق کاستی واحدی دارند، ولی عکس آن درست نیست.

حل. فرض می‌کنیم $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. پس تناظری یک به یک مثلاً به صورت

$$A \longleftrightarrow A'$$
$$B \longleftrightarrow B'$$
$$C \longleftrightarrow C'$$

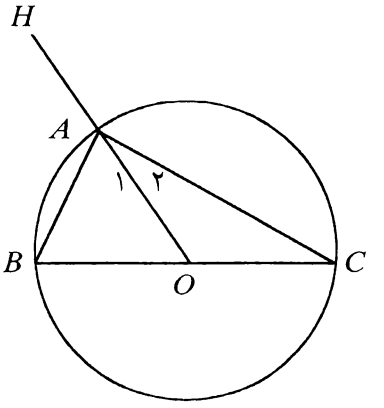
وجود دارد بطوری که $\angle A \cong \angle A'$ ، $\angle B \cong \angle B'$ و $\angle C \cong \angle C'$. لذا، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۸، $(\angle A)^\circ = (\angle A')^\circ$ ، $(\angle B)^\circ = (\angle B')^\circ$ و $(\angle C)^\circ = (\angle C')^\circ$. بنابراین،

$$\text{کاستی}\ (\Delta ABC) = \text{کاستی}\ (\Delta A'B'C').$$

در اثبات قضیهٔ لژاندر ـ ساکری شگردی ذکر شد که با آن می‌توان از یک مثلث مانند ΔABC مثلثی چون ΔDEF با همان کاستی چنان ساخت که یک زاویه‌اش به درجه حداکثر $\frac{۱}{۲^n}(\angle A)^\circ$ باشد. طبق اصل موضوع ارشمیدس، n را آنقدر بزرگ می‌گیریم که $\frac{۱}{۲^n}(\angle A)^\circ$ از $(\angle B)^\circ$ و $(\angle C)^\circ$ کوچکتر باشد. پس دو مثلث ΔABC و ΔDEF دارای یک کاستی‌اند، ولی قابل انطباق نیستند (چرا؟).

۶.۵.۷. این حکم را در هندسهٔ اقلیدسی می‌پذیریم: «هر زاویهٔ محاط در یک نیمدایره قائمه است.» ثابت کنید این حکم مستلزم وجود مثلث قائم‌الزاویه‌ای با کاستی صفر است.

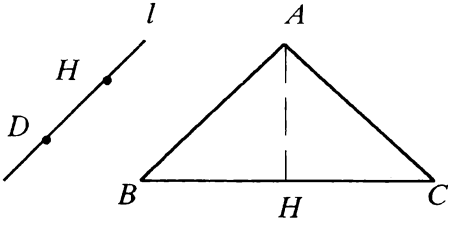
حل. دو نقطه مانند O و B را با استفاده از پ ۳ اختیار می‌کنیم. نقطهٔ H را طوری می‌گیریم که بر $\overleftrightarrow{BO}$ نباشد (قضیهٔ ۲.۱.۳). حال نقطهٔ A را بر $\overrightarrow{OH}$ و نقطهٔ C را بر نیمخط متقابل $\overrightarrow{OB}$ چنان می‌گیریم که $OA \cong OC \cong OB$. پس نقاط A، B و C بر دایره به مرکز O و شعاع OB واقعند. لذا $\angle BAC$ یک زاویهٔ محاط در نیمدایره است. پس طبق فرض،



قائمه است. ثابت می‌کنیم مجموع زوایای مثلث ΔABC مساوی ۱۸۰° است. می‌گوییم مثلث $\Delta AB\mathbf{O}$ متساوی‌الساقین است. پس طبق قضیهٔ پاپوس، $\angle A_۱ \cong \angle B$. همچنین مثلث ΔAOC متساوی‌الساقین است. پس باز طبق قضیهٔ پاپوس، $\angle A_۲ \cong \angle C$. لذا، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شماره‌های ۷، ۸ و ۹، مجموع $(\angle B)^\circ + (\angle C)^\circ$ برابر ۹۰° است. بنابراین مجموع زوایای ΔABC مساوی ۱۸۰° است.

۷.۵.۷. هرگاه نقطهٔ D بیرون مثلث ΔABC باشد، ثابت کنید از D خطی می‌گذرد که بیرون این مثلث قرار دارد.

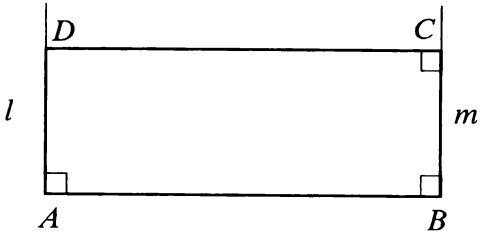
حل. فرض می‌کنیم D مثلاً درون $\angle ABC$ نباشد. از D، طبق قضیهٔ ۱.۳.۷، خطی مانند l



به‌موازات $\overleftrightarrow{AB}$ می‌گذرانیم. اگر l بیرون این مثلث نباشد، لااقل یک نقطه مانند H دارد که یا متعلق به اضلاع مثلث است یا درون آن. H متعلق به AB نیست. پس باید متعلق به BC یا AC یا درون مثلث باشد. اگر H متعلق به BC باشد، چون $\overrightarrow{AB}$ بین $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AC}$ بوده و

$\overrightarrow{AH}$ بین $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ است، پس، طبق قضیهٔ انبساط ـ انقباض برای نیمخطها (مسألهٔ ۱۱.۴.۴)، $\overrightarrow{AB}$ بین $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AH}$ است. لذا، طبق قضیهٔ قطعه‌بر، $\overrightarrow{AB}$ پاره‌خط HD را قطع می‌کند. پس $l \nparallel \overleftrightarrow{AB}$ که تناقض است. اگر H روی AC باشد، به همین نحو به تناقض می‌رسیم (چگونه؟). اگر H درون مثلث باشد، طبق قضیهٔ پاش در مورد نیمخطها (مسألهٔ ۱۲.۴.۴) و قضیهٔ ۱.۲.۴ قسمت (ب)، l یکی از اضلاع مثلث را در نقطه‌ای مانند K قطع می‌کند. حال می‌توان با K به جای H مانند فوق استدلال کرد و تناقض به دست آورد (چطور؟). بنابراین، l بیرون این مثلث قرار دارد.

۸.۵.۷. نقص این برهان برای ترسیم مستطیل را پیدا کنید: فرض می‌کنیم A و B دو نقطه باشند. از A خط l را بر $\overleftrightarrow{AB}$ و از B خط m را بر $\overleftrightarrow{AB}$ عمود می‌کنیم. حال نقطهٔ دلخواه C را بر m غیر از B اختیار و از C خطی بر m عمود می‌کنیم. اگر این خط l را در نقطه‌ای مانند D قطع کند، $ABCD$ □ مستطیل است.



حل. از کجا معلوم خط عمود از C بر m خط l را قطع کند؟

۸

اصل توازی

۱.۸ مقدمه

۲.۸ متخصصان اصل توازی

۳.۸ مسائل

۱.۸ مقدمه

بیش از بیست قرن است که هندسهٔ اقلیدسی بر فکر آدمی تسلط دارد. این علم بر پنج اصل موضوع بنا شده که پنجمین آنها (یعنی اصل توازی) شباهتی به اصل موضوع ندارد و هزاران سال موجب سرگردانی هندسه‌دانان شده است. نخستین کسی که از هندسهٔ اقلیدسی ناخشنود شد خود اقلیدس بود چرا که از به کار بردن آن تا حکم بیست و نهمش طفره رفته است. تا اوایل قرن نوزدهم ریاضیدانان زیادی تلاش کردند این اصل را، که از حیث بیان مانند قضایاست، به کمک چهار اصل دیگر اثبات کنند و شگفت آنکه برخی از آنان پنداشتند که به این مقصود رسیده‌اند. داستان اصل توازی چنان دلکش است که جا دارد یک فصل بدان اختصاص یابد. ما ابتدا به چند تلاش در این راه اشاره کرده و سپس به مخالفان این اصل که پایه گذار هندسه‌های نااقلیدسیند می‌پردازیم.

۲.۸ متخصصان اصل توازی

۱. نخستین کسی که برای اثبات اصل پنجم تلاش کرد **بطلمیوس** (*Ptolemaios*)[1] بود.

---

۱. منجم معروف یونانی و عالم جغرافیا

وی کتابی در باب اصل پنجم نوشت که متضمن اثباتی از آن بوده است. بطلمیوس بخش نهایی حکم ۲۹ از کتاب یکم اصول را بی‌استفاده از اصل پنجم ثابت می‌کند.

بخش نهایی حکم ۲۹ از کتاب یکم اصول.

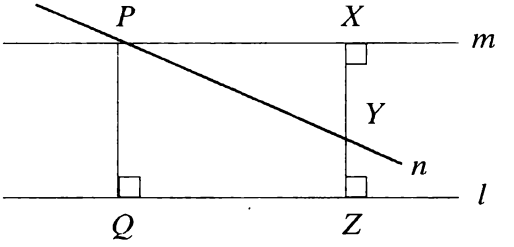
هرگاه موربی دو خط موازی را قطع کند، آنگاه دو زاویهٔ درونی در یک طرف مورب مساوی دو قائمه خواهند بود.

برهان بطلمیوس. امتدادهای دو خط موازی در یک طرف مورب بیشتر از امتدادهایشان در طرف دیگر با هم موازی نیستند. پس اگر مجموع دو زاویهٔ درونی در یک طرف بزرگتر از دو قائمه باشد، در طرف دیگر نیز چنین است. اما چنین چیزی ممکن نیست، زیرا مجموع چهار زاویه، چهار قائمه است. به دلیلی مشابه می‌توان گفت که مجموع زوایای درونی در یک طرف مورب نمی‌تواند کوچکتر از دو قائمه باشد و لذا نتیجه برقرار است.

بطلمیوس بی آنکه خود متوجه باشد اصل هیلبرت را پذیرفته است (در کجا؟). دیدیم (قضیهٔ ۲.۳.۷) که اصل هیلبرت با اصل پنجم اقلیدس هم‌ارز است. لذا بطلمیوس آنچه را که می‌خواست ثابت کند قبول کرده است؛ یعنی استدلال وی دوری است.

۲. **پروکلوس** (۴۸۵ ـ ۴۱۰ ب.م *Proclus*) فیلسوف، ریاضیدان و مورخ بزرگ یونانی که شرح وی بر کتاب اصول یکی از منابع اصلی اطلاعات ما از هندسهٔ یونان است، از اصل توازی چنین انتقاد می‌کند: «این را باید حتی از شمار اصول بیرون کرد، چرا که قضیه‌ای است که دشواریهای بسیار دارد و بطلمیوس در کتاب خود به گشودن آنها همت گمارده است. این حکم که چون دو خط را هر چه بیشتر امتداد دهیم بیش از پیش به هم نزدیک می‌شوند و سرانجام همدیگر را قطع می‌کنند پذیرفتنی است ولی نه همیشه». پروکلوس یک هذلولی مثال می‌زند که هر قدر بخواهیم به مجانبهایش نزدیک می‌شود بی آنکه هرگز آنها را قطع کند. این مثال نشان می‌دهد که لااقل ممکن است تصوری مخالف نتیجه‌گیریهای اقلیدس هم داشت. پروکلوس می‌گوید: «پس باید برای این قضیه برهانی بیابیم و این امر مخالف ماهیت اصول است». پروکلوس اصل پنجم را چنین ثابت می‌کند: دو خط موازی l و m مفروضند. فرض می‌کنیم خط n خط m را در نقطهٔ P قطع کند.

نشان می‌دهیم که n خط l را نیز قطع می‌کند (قضایای ۳.۳.۷ و ۲.۳.۷). فرض می‌کنیم Q پای عمود وارد از P بر l باشد. اگر n بر $\overleftrightarrow{PQ}$ منطبق باشد، l را در Q قطع کرده است و الّا نیمخطی مانند $\overrightarrow{PY}$ از n بین $\overrightarrow{PQ}$ و نیمخطی مانند $\overrightarrow{PX}$ از m قرار دارد (چرا؟). فرض می‌کنیم X پای عمود مرسوم از Y بر m باشد. حال وقتی نقطهٔ Y روی n از P بی‌نهایت



دور شود، پاره‌خط XY اندازه‌اش بی‌نهایت بزرگ می‌شود و سرانجام از پاره‌خط PQ تجاوز می‌کند. بنابراین n باید از l بگذرد و در طرف دیگر آن قرار گیرد؛ یعنی n باید l را قطع کند.

برهان فوق نسبتاً پیچیده بوده و شامل حرکت و پیوستگی است. از آن گذشته، درستی هر مرحله را می‌توان نشان داد جز آنکه نتیجه‌ای که می‌خواهیم از آن به دست نمی‌آید (در مسائل این بخش ثابت می‌کنیم XY بی‌نهایت بزرگ می‌شود که «بی‌نهایت» به معنی «بی‌کران» گرفته شده است. مثلاً دنبالهٔ ... ,$\frac{۱۵}{۱۶}$, $\frac{۷}{۸}$, $\frac{۳}{۴}$, $\frac{۱}{۲}$ بی‌نهایت زیاد می‌شود، ولی «بی‌نهایت» در اینجا به معنی «بی‌کران» نیست، چرا که این اعداد همواره از ۱ کمترند و ۱ کرانی است برای این اعداد).

چطور می‌توان درستی آخرین مرحله را ثابت کرد؟ فرض می‌کنیم عمود YZ را از Y به l فرود آورده باشیم. آن وقت می‌توان گفت که (آ) X، Y و Z بر یک استقامتند و (ب) $XZ \cong PQ$. لذا وقتی XY از PQ بزرگتر می‌شود، باید از XZ هم بزرگتر شود و درنتیجه Y باید در طرف دیگر l قرار گیرد. در اینجا نتایج واقعاً از احکام (آ) و (ب) حاصل می‌شوند. مشکل کار این است که اثباتی برای درستی این دو حکم وجود ندارد!

اگر این گفته شما را به فکر می‌اندازد دلیلش آن است که شکل فوق احکام (آ) و (ب) را درست **جلوه** می‌دهد. اما مجاز نیستیم برای اثبات یک مرحله از شکل استفاده کنیم. هر مرحله باید از روی اصول موضوع و یا قضایایی که قبلاً ثابت شده‌اند اثبات گردد. ثابت

شده است که اثبات احکام (آ) و (ب) در هندسهٔ خنثی ممکن نیست و فقط در هندسهٔ اقلیدسی آن هم به کمک اصل هیلبرت میسر است. این امر برهان پروکلوس را به یک برهان دوری مبدل می‌سازد.

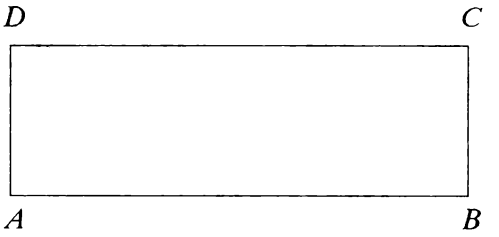
تحلیل فوق از برهان پروکلوس هشدار می‌دهد که تا چه حد باید مراقب طرز تفکر خود در باب خطوط موازی باشیم. شاید شما خطوط موازی را مانند ریلهای راه‌آهن تجسم می‌کنید که در همه جا فاصله‌شان از هم یکی است. این تجسم تنها در هندسهٔ اقلیدسی درست است. بدون اصل توازی تنها چیزی که در باب خطوط موازی می‌شود گفت این است که، طبق تعریف توازی، نقطهٔ مشترک ندارند، ولی نمی‌توان فرض کرد متساوی الفاصله‌اند؛ حتی نمی‌توان گفت که عمود مشترک دارند. وقتی واژه‌ای را به کار می‌بریم معنای آن همان است که می‌خواهیم باشد نه بیشتر و نه کمتر.

۳. ***ابوالحسن ثابت ابن قرّهٔ حرّانی*** (۲۸۸ - ۲۲۱ هـ. ق) پزشک، ریاضیدان، اخترشناس و مترجم نامدار حوزهٔ علمیهٔ بغداد، کوشید به روشی که بعد از او ابن هیثم، خیام، خواجه نصیر و ساکری به کار بردند اصل پنجم اقلیدس را به کمک چهار اصل دیگر ثابت کند و موفق نشد.

۴. ***ابوعلی حسن مکّنی*** معروف به ***ابن هیثم بصری*** (۴۲۰ - ۳۵۴ هـ. ق) پزشک، فیزیکدان، ریاضیدان و بزرگترین محقق در نورشناسی فیزیک، در باب تعریف اقلیدس از خطوط موازی به عنوان خطوطی که تقاطع نمی‌کنند، خاطرنشان ساخت که باید وجود این نوع خطوط را محقق نمود و برای این منظور اصل «واضحتر» زیر را بیان کرد: اگر پاره‌خطی مانند AB چنان تغییر مکان کند که همواره بر خط مفروضی مانند l عمود باشد و یک سرش همواره بر خط l باشد، سر دیگرش خطی رسم می‌کند که با l موازی است. بدین ترتیب به جای توازی خاصیت ***همفاصلگی*** را قرار داد و سعی کرد از مفهوم حرکت برای اثبات اصل پنجم استفاده کند. اما، خیام و خواجه نصیر به این کار ایراد داشتند که مفهوم غیرهندسی حرکت را وارد هندسه کرده است. ظاهراً ثابت ابن قرّه نیز از چنین کار استفاده کرده است.

۵. ***حکیم ابوالفتح عمر خیام نیشابوری*** (۵۲۶ - ۴۳۹ هـ. ق) حکیم، فیلسوف، شاعر،

اخترشناس و ریاضیدان، در درستی اصل پنجم به عنوان اصل موضوع تردید کرد و نظریهٔ خطوط موازی خود را بر اصلی استوار ساخت که به قول خودش از استاد، یعنی ارسطو، گرفته بود. نخست ثابت کرد که دو خط عمود بر یک خط نمی‌توانند همگرا یا واگرا باشند. آنگاه ثابت کرد که، به حکم تقارن، دو خط عمود بر یک خط نمی‌توانند متقاطع شوند و همه جا از یکدیگر به یک فاصله‌اند. برای بررسی موضوع توازی، بر دو سر پاره‌خط AB دو عمود مساوی BC و AD را اخراج کرد و از C به D وصل نمود و برای زوایای $\angle C$ و $\angle D$ سه امکان فرض کرد: حاده بودن، منفرجه بودن و قائمه بودن.



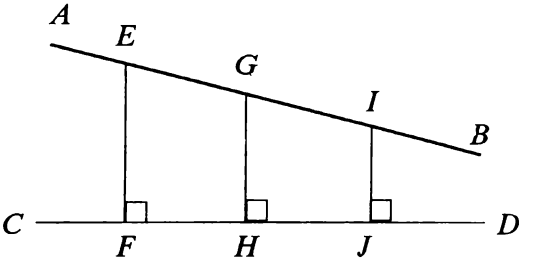
در فرض اول CD طویلتر از AB و در فرض دوم کوتاهتر از آن می‌شد؛ درنتیجه دو عمودی که بر AB اخراج شده بود بایستی نابرابر باشند و فرض تساوی آنها نقض می‌شد. پس دو فرض اول صورت نمی‌یافت و زوایای $\angle C$ و $\angle D$ قائمه می‌شدند که خود مبین همفاصله بودن CD و AB بود.

حال اگر کار فوق با کار ساکری مقایسه شود اذعان خواهید کرد که اطلاق نام خیام به چهارضلعی $ABCD$ □ به جای ساکری برازنده‌تر است، چرا که حق تقدم با خیام بوده است.

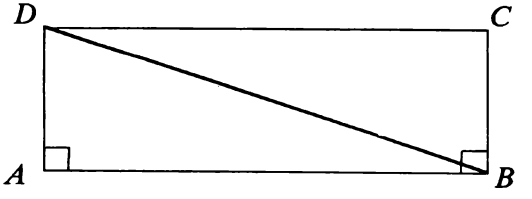
۶. ***خواجه ابوجعفر نصیرالدین محمدابن حسن طوسی*** (۶۷۲ - ۵۹۷ هـ. ق) معروف به ***خواجه نصیرالدین طوسی*** منجم، ریاضیدان، سیاستمدار و نویسندهٔ معروف، وی شرحی به عربی بر کتاب اقلیدس و نیز رساله‌ای در باب اصول اقلیدس نوشت. او ظاهراً نخستین کسی است که در بررسی اصل پنجم اقلیدس به اهمیت مجموع زوایای مثلث توجه کرده است. نصیرالدین ابتدا حکم زیر را بدون اثبات پذیرفت:

هرگاه دو خط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ چنان به هم مربوط باشند که فرود عمودهای متوالی مانند

$\overleftrightarrow{EF}, \overleftrightarrow{GH}, \overleftrightarrow{IJ}, \ldots$ از نقاط $E, G, I, \ldots$ واقع بر $\overleftrightarrow{AB}$ بر $\overleftrightarrow{CD}$، همواره با $\overleftrightarrow{AB}$ زوایای غیرقابل انطباق بسازند، بطوری که پیوسته در امتداد B حاده و درنتیجه در امتداد A منفرجه باشند، آنگاه $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ پیوسته در امتداد A و C از یکدیگر دور شده و در امتداد B و D پیوسته به یکدیگر نزدیک می‌گردند و نیز طول عمودها در امتداد A و C پیوسته بزرگتر و در امتداد B و D همواره کوچکتر می‌شوند. به عکس، هرگاه عمودها پیوسته در امتداد A و C طویلتر و در امتداد B و D کوتاهتر شوند، خطها در امتداد اول (A و C) از هم دور و در امتداد دوم (B و D) به هم نزدیک می‌شوند و عمودها با $\overleftrightarrow{AB}$ زوایای غیرقابل انطباق خواهند ساخت که منفرجه‌ها در امتداد A و C و حاده‌ها در امتداد B و D واقع می‌شوند.



سپس چهارضلعی خیام یا ساکری را وارد کار کرد. در دو سر پاره‌خط AB دو عمود قابل انطباق AD و BC را از آن اخراج و C را به D وصل نمود. برای اثبات آنکه زوایای $\angle CDA$ و $\angle DCB$ قائمه‌اند به برهان خلف متوسل شد و بدون توجه زیاد، فرضی را که در بالاکرده بود مورد استفاده قرار داد. بدین ترتیب، اگر زاویهٔ $\angle DCB$ حاده می‌بود، DA کوتاهتر از BC می‌شد، که خلاف فرض است. پس $\angle DCB$ حاده نیست. این زاویه منفرجه هم نیست. البته وی در اینجا بطور مقدر فرض کرده بود که وقتی $\angle DCB$ حاده است، $\angle CDA$ باید منفرجه باشد. استدلالش به این نتیجه رسید که هر چهار



زاویهٔ چهارضلعی قائمه‌اند. بنابراین، اگر DB رسم شود، مثلثهای $\Delta\ DAB$ و $\Delta\ DCB$ قابل انطباق بوده و مجموع زوایای هر یک دو قائمه است.

می‌دانیم که اگر همه چیز تا اینجا رضایتبخش می‌بود، اصل پنجم بآسانی در پی آن می‌آمد (چگونه؟). استدلال خواجه نصیرالدین استدلالی منقح و جامع است. اما یافتن شکافهای موجود در آن دشوار نیست. مثلاً اگر در باب فرضهایی که در آغاز آمده، استدلال شود، بیشتر از خود اصل پنجم پذیرفتنی نیستند. وانگهی اگر در شکل فوق فرض شود که زاویهٔ $\angle\ DCB$ حاده است نمی‌توان نتیجه گرفت که $\angle\ CDA$ منفرجه است. درواقع در مسائل این بخش بدون استفاده از اصل پنجم ثابت می‌کنیم که این دو زاویه قابل انطباقند.

۷. ***جان والیس*** (۱۷۰۳ - ۱۶۱۶ ب . م *John Wallis*) ریاضیدان تراز اول انگلیسی پیش از نیوتن است. والیس ابتدا به کار خواجه نصیر توجه کرد و در سال ۱۶۵۱ استدلال وی را در درسی در آکسفورد به‌کار برد. سپس اثبات اصل توازی را رها ساخت و اصل موضوع تازه‌ای را که حس می‌کرد بیش از اصل توازی مقبول است طرح نمود و اصل پنجم را از روی این اصل و سایر اصول هندسهٔ خنثی به ثبوت رسانید. اصل والیس به قرار زیر است:

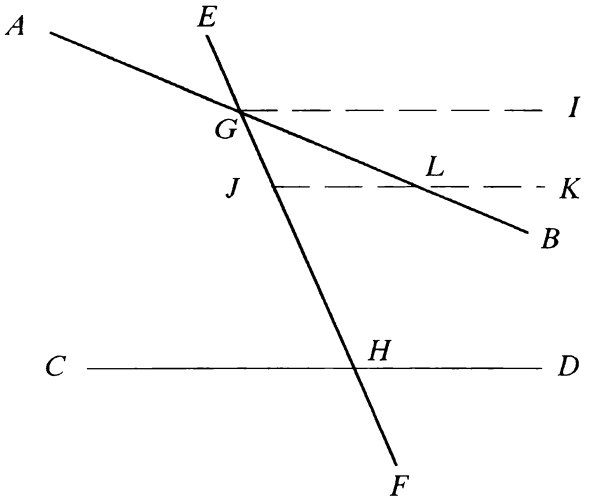
اصل والیس.

مثلث $\Delta\ ABC$ و پاره‌خط DE مفروضند. مثلثی مانند $\Delta\ DEF$ (به ضلع DE) وجود دارد بطوری‌که با $\Delta\ ABC$ متشابه است (علامت: $\Delta\ DEF \sim \Delta\ ABC$).

یادآور می‌شویم که دو مثلث در صورتی **متشابهند** که بتوان یک تناظر یک به یک میان رؤوس آنها چنان برقرار کرد که زوایای متناظر قابل انطباق باشند. در هندسهٔ اقلیدسی ثابت می‌شود که در مثلثهای متشابه اضلاع نظیر متناسبند (مسائل آخر بخش). مثلاً هر ضلع $\Delta\ DEF$ ممکن است دو برابر ضلع نظیرش از $\Delta\ ABC$ باشد. لذا معنی شهودی اصل والیس این است که می‌توان یک مثلث را هر قدر بخواهیم، بی آنکه از شکل طبیعی بیفتد، بزرگ یا کوچک کنیم.

برهان والیس در اصل چنین است:

برهان والیس. هرگاه مورب $\overleftrightarrow{EF}$ دو خط $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ را در G و H قطع کرده و مجموع زوایای $\angle BGH$ و $\angle DHG$ کمتر از دو قائمه باشد، باید ثابت کنیم وقتی $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ به قدر کافی امتداد یابند، یکدیگر را قطع خواهند کرد. بآسانی معلوم می‌شود که $\angle EGB > \angle GHD$ (چگونه؟).



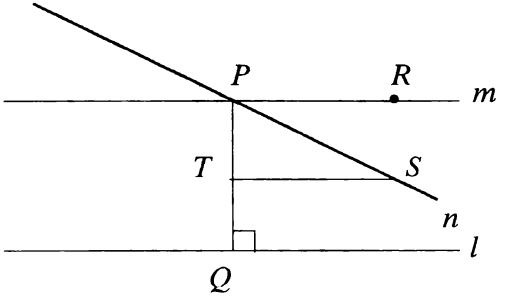
حال اگر پاره‌خط HG در طول EF جا به جا شود و $\overrightarrow{HD}$ به نحو محکم و استوار به آن متصل بماند، وقتی H بر وضع اول G منطبق شود، $\overrightarrow{HD}$ به وضع $\overrightarrow{GI}$، که کاملاً بالای $\overrightarrow{GB}$ است، قرار می‌گیرد. پس $\overrightarrow{HD}$ باید در ضمن حرکت زمانی $\overrightarrow{GB}$ را قطع کند؛ مثلاً در نقطهٔ L وقتی که $\overrightarrow{HD}$ در وضع $\overrightarrow{JK}$ است. حال اگر (طبق فرض) مثلثی به قاعدهٔ GH و متشابه با مثلث ΔGJL بسازیم، واضح است که $\overrightarrow{HD}$ باید $\overrightarrow{GB}$ را قطع نماید (چرا؟).

برهان والیس مستلزم حرکت بوده و خالی از اشکال نیست. ما اصل هیلبرت را از اصل والیس دقیقاً نتیجه گرفته و اثبات عکس آن را به مسائل این بخش وا می‌گذاریم.

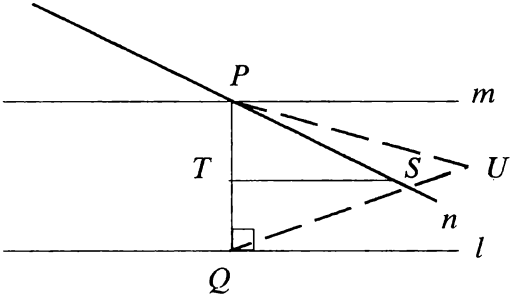
قضیهٔ ۱.۲.۸. ***اصل والیس مستلزم اصل هیلبرت است.***

برهان. نقطه‌ای مانند P غیرواقع بر خط l را در نظر گرفته و با رسم عمود $\overleftrightarrow{PQ}$ بر l و عمود

m بر $\overleftrightarrow{PQ}$، خط m را موازی l می‌کشیم. حال فرض می‌کنیم n خطی مخالف m و مار بر P باشد. نقاط R و S را به ترتیب بر خطوط m و n چنان می‌گیریم که $\overrightarrow{PS}$ بین $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{PQ}$ باشد.از S خط $\overleftrightarrow{ST}$ را بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود می‌کنیم. حال اصل والیس را برای $\Delta\ PST$ و پاره‌خط PQ به کار می‌بریم. بنا بر این اصل، نقطه‌ای مانند U وجود دارد بطوری که



$\Delta\ PST \sim \Delta\ PUQ$. می‌توان فرض کرد که نقطهٔ U در همان طرفی از $\overleftrightarrow{PQ}$ باشد که S در آن است (چرا؟). بنابر تعریف مثلثهای متشابه، $\angle\ UPQ \cong \angle\ SPT$. اما چون این زوایا در نیمخط $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PT}$ به عنوان یک ضلع مشترکند و U در همان طرفی از $\overleftrightarrow{PQ}$ واقع است که S در آن قرار دارد، تنها وقتی می‌توانند قابل انطباق باشند که مساوی باشند



(ق ۴). بنابراین $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PU}$؛ یعنی U بر n واقع است. بطور مشابه، $\angle\ PQU \cong \angle\ PTS$، زیرا هر دو قائمه‌اند. بنابراین، U بر l قرار دارد. لذا n و l در U تقاطع دارند. پس m تنها خطی است که از P به موازات l رسم می‌شود.

۸. ***جیرولامو ساکری*** (۱۷۳۳ - ۱۶۶۷ ب . م *Girolamo Saccheri*) کشیش ایتالیایی و استاد ریاضیات بود. وی پیش از مرگش (۱۷۳۳) کتاب کوچکی به نام ***اقلیدس عاری از هر گونه نقص*** چاپ کرد که مدتی دراز به دست فراموشی سپرده شد و تا یک قرن و نیم بعد (۱۸۸۹) که ائوجنیو بلترامی (*Eugenio Beltrami*) آن را مجدداً کشف کرد مورد توجه قرار نگرفت.

فکر ساکری این بود که از برهان خلف استفاده کند. او نقیض اصل توازی را فرض کرد و سپس کوشید تا تناقضی به دست آورد. وی چهارضلعیهایی که زوایای مجاور به قاعده‌شان قائمه و اضلاع دیگر این زوایا قابل انطباقند، یعنی چهارضلعیهای خیام که بعدها به ***چهار ضلعیهای ساکری*** معروف شدند، را مورد مطالعه قرار داد. در هندسهٔ خنثی می‌توان ثابت کرد که زوایای دو رأس بالایی قابل انطباقند (ر.ک. مسائل این بخش).

سه حالت پیش می‌آید:

حالت ۱. زوایای بالایی قائمه‌اند ؛

حالت ۲. زوایای بالایی منفرجه‌اند ؛

حالت ۳. زوایای بالایی حاده‌اند.

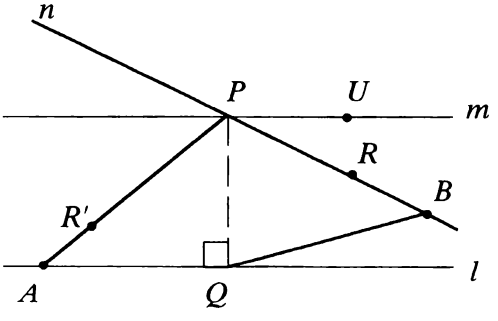
برای اثبات حالت اول، یعنی همان حالتی که در هندسهٔ اقلیدسی هست، ساکری سعی کرد نشان دهد که دو حالت دیگر به تناقض می‌رسند. وی توانست نشان دهد که حالت دوم به تناقض می‌رسد (قضیهٔ لژاندر - ساکری). ولی هر قدر کوشید نتوانست تناقضی در حالت سوم به دست آورد و آن را «فرض خصمانهٔ زاویهٔ حاده» نامید. او موفق شد نتایج بسیار عجیبی به دست آورد، ولی تناقضی به دست نیاورد و سرانجام، از روی عجز، بانگ برآورد که «فرض زاویهٔ حاده مطلقاً غلط است، زیرا این فرض با ذات خط مستقیم سازگاری ندارد». درست شبیه مردی که الماس نایابی را یافته باشد، ولی آنچه را که می‌بیند باور نکند و پیوسته فریاد زند که شیشه است! ساکری بی آنکه خود متوجه باشد هندسهٔ نااقلیدسی را کشف کرده بود.

۹. ***یوهان هاینریش لامبرت*** (۱۷۷۷ - ۱۷۱۸ *Johann Heinrich Lambert*) ریاضیدان سویسی - آلمانی نیز به کشف هندسهٔ نااقلیدسی بسیار نزدیک شد. وی چهارضلعیهایی را که لااقل سه زاویهٔ قائمه دارند (و اینک به نام خود او معروفند) مورد مطالعه قرار داد. لامبرت سه فرض ارائه کرد که در آنها زاویهٔ چهارم چهارضلعیهایش به ترتیب قائمه،

منفرجه، و حاده است. با فرضهای دوم و سوم احکامی را نتیجه گرفت که به کمک آنها توانست خیلی از ساکری جلوتر برود. وی ثابت کرد که مساحت هر مثلث متناسب است با تفاوت بین مجموع زوایایش و دو قائمه، یعنی با ***فزونی*** زوایا بر دو قائمه در مورد فرض دوم و با ***کاستی*** در مورد فرض سوم. وی شباهت بین هندسهٔ مبتنی بر حالت دوم و هندسهٔ کروی را، که در آن مساحت هر مثلث متناسب است با فزونی کروی آن، خاطر نشان ساخت. او نیز مانند ساکری توانست هندسهٔ فرض دوم را بی اعتبار اعلام کند، اما کار او نیز مبتنی بر فرضهایی ضمنی بود که بی وجود آنها تناقض حاصل نمی‌شد.

۱۰. ***آدرین ماری لژاندر*** (۱۸۳۳ - ۱۷۵۲ *Adrien Marie Legendre*) یکی از ریاضیدانان برجستهٔ عصر خود بود و در بسیاری از شاخه‌های ریاضی کشفیات مهمی دارد. اصل توازی ذهن وی را چنان مشغول کرده بود که طی ۲۹ سالی که کتاب ***اصول هندسه***اش تجدید چاپ شد هر بار کوشش تازه‌ای برای اثبات این اصل در آن آورده بود. لژاندر کمک چندانی به پیشرفت موضوع نکرد، چراکه بیشتر نتایجی که به دست آورد به‌وسیلهٔ پیشینیان به ثبوت رسیده بودند. اما سبک ساده و سر راست برهانهای او پیروان متعددی برایش فراهم ساخت. برخی از استدلالهایش از فرط ظرافت ارزش دایمی یافته‌اند. در زیر یکی از تلاشهای وی در اثبات اصل توازی را ذکر می‌کنیم.

برهان لژاندر. فرض می‌کنیم نقطهٔ P بر خط l نباشد. از P عمود $\overleftrightarrow{PQ}$ را بر l فرود می‌آوریم و فرض می‌کنیم m خطی باشد که از P بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود شده باشد. پس l و m به دلیل داشتن



عمود مشترک موازیند. فرض می‌کنیم n خط دلخواهی غیر از m، و $\overleftrightarrow{PQ}$ مار بر P باشد. باید نشان دهیم که خط n خط l را قطع می‌کند. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{PR}$ نیمخطی از n باشد که میان $\overrightarrow{PQ}$ و نیمخط $\overrightarrow{PU}$ از m قرار دارد. نقطه‌ای مانند R' در طرفی از $\overrightarrow{PQ}$ که R در آن نیست وجود دارد بطوری که $\angle QPR' \cong \angle QPR$. پس Q درون $\angle RPR'$ قرار دارد. چون خط l از نقطهٔ Q درون $\angle RPR'$ می‌گذرد، باید یکی از اضلاع این زاویه را قطع کند. اگر l ضلع $\overrightarrow{PR}$ را قطع کند، مسلماً n را نیز قطع خواهد کرد. فرض می‌کنیم l ضلع PR' را در نقطهٔ A قطع کند و B نقطه‌ای بر ضلع $\overrightarrow{PR}$ باشد که $PA \cong PB$. پس $\Delta PQA \cong \Delta PQB$ (محک ض ز ض). بنابراین $\angle PQB$ قائمه است و لذا B بر l (و n) قرار دارد.

برهان فوق مانند سایر برهانها دوری است و در جایی از آن (کجا؟) از نکته‌ای استفاده شده است که با اصل پنجم هم‌ارز است. این امر در تمام برهانهای لژاندر تکرار شده است.

ذکر تمام تلاشها برای اثبات اصل پنجم ناممکن است. ما در بالا فقط به چند مورد اشاره کرده‌ایم. برای درک وسعت این بحث کافی است بگوییم که در سال ۱۷۶۳ گئورگ زیمون کلوگل (*Georg Simon Klügel*) آلمانی رساله‌ای برای دکترا نوشت و در آن نقایص ۲۸ برهان مختلف از اصل توازی را پیدا و در قبال اثبات بودن آنها تردید کرد. رسالهٔ وی کامل نبود چراکه کارهای ثابت ابن قره، ابن هیثم، خیام و خواجه نصیرالدین طوسی را شامل نمی‌شد.

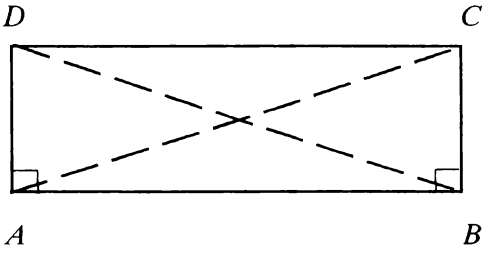
بحث در اصل توازی ممکن است این فکر را القا کند که همهٔ تلاشها بیهوده بوده و انرژی زایدالوصفی در این راه به هدر رفته است. این امر درست نیست چراکه اگر این تلاشها نبود هرگز به هندسه‌های نااقلیدسی دست نمی‌یافتیم. علم مانند آب در همه جا آبادی می‌سازد و آبادانی می‌آورد. هندسهٔ اقلیدسی بدون اصل توازی معنی ندارد و هندسه‌های نااقلیدسی حاصل تنفر از این اصل شیطانی هستند.

۳.۸ مسائل

مسائل زیر در هندسهٔ خنثی هستند مگر خلافش تصریح شود.

۱.۳.۸. فرض کنید $ABCD\square$ یک چهارضلعی ساکری باشد که در آن زوایای $\angle A$ و $\angle B$ قائمه بوده و $AD \cong BC$. ثابت کنید $\angle C \cong \angle D$.

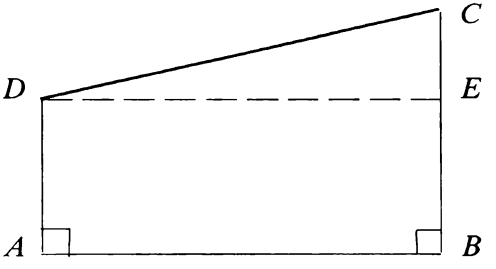
حل. اقطار چهارضلعی را وصل می‌کنیم. داریم $\Delta ABC \cong \Delta ABD$ (محک ض ز ض). پس $AC \cong BD$.



لذا $\Delta BCD \cong \Delta ADC$ (محک ض ض ض). بنابراین $\angle C \cong \angle D$.

۲.۳.۸. فرض کنید در چهارضلعی $ABCD\square$ زوایای مجاور به قاعدهٔ $\angle A$ و $\angle B$ قائمه باشند. ثابت کنید هرگاه $BC > AD$، آنگاه $\angle D > \angle C$ و بالعکس.

حل.

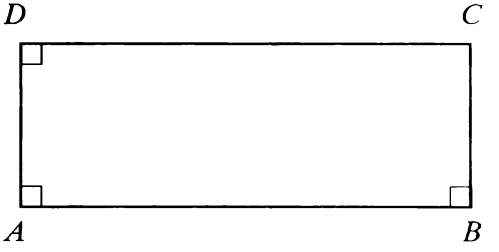


چون $BC > AD$، پس نقطه‌ای مانند E بین B و C هست بطوری که $AD \cong BE$. ابتدا ثابت می‌کنیم E درون $\angle ADC$ است. می‌گوییم چون $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ دارای عمود مشترک $\overleftrightarrow{AB}$ اند، پس موازیند. لذا E و C در یک طرف $\overleftrightarrow{AD}$ هستند. همچنین پاره‌خطهای AD و BC نیم موازیند و لذا چهارضلعی $ABCD\square$ محدب است (تعریف

۲۲.۲.۷). پس، طبق قضیهٔ ۲۳.۲.۷ ، AB و CD نیز نیم موازیند و لذا A و B در یک طرف $\overleftrightarrow{CD}$ قرار دارند. چون B و E نیز در یک طرف $\overleftrightarrow{CD}$اند، پس، طبق بینیت ۴ قسمت (آ)، A و E در یک طرف $\overleftrightarrow{CD}$ هستند. بنابراین E درون زاویهٔ $\angle ADC$ است. لذا داریم $\angle D > \angle ADE$. اما، طبق مسألهٔ ۱.۳.۸ ، در چهارضلعی ساکری $ABED$ □ داریم $\angle ADE \cong \angle DEB$. پس، طبق قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (پ) ، $\angle D > \angle DEB$. اما، طبق قضیهٔ زاویهٔ بیرونی، $\angle DEB > \angle C$. لذا، طبق قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (ت)، $\angle D > \angle C$.

حال فرض می‌کنیم $\angle D > \angle C$. اگر $BC > AD$ برقرار نباشد، طبق قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (آ)، یا $BC \cong AD$ یا $BC < AD$. اگر $BC \cong AD$ ، طبق مسألهٔ ۱.۳.۸، $\angle D \cong \angle C$ که‌بنابر قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (آ)، بافرض متناقض است. اگر $BC < AD$ ، طبق قسمت اول این مسأله، $\angle C > \angle D$ که بنابر قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (آ)، با فرض تضاد دارد. بنابراین خواهیم داشت $BC > AD$.

۳.۳.۸. در چهارضلعی لامبرت $ABCD$ □ ثابت کنید:



(آ) زاویهٔ $\angle C$ هرگز منفرجه نیست؛

(ب) اگر $\angle C$ قائمه باشد، اضلاع روبروی این چهارضلعی قابل انطباقند؛

(پ) اگر $\angle C$ حاده باشد، هر ضلع مجاور به $\angle C$ از ضلع مقابلش بزرگتر است؛ یعنی $CD > AB$ و $BC > AD$ ؛

(ت) یک چهارضلعی وقتی و فقط وقتی لامبرت و ساکری است که مستطیل باشد.

حل. (آ) در چهارضلعی لامبرت $ABCD$ □ چون $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ دارای عمود مشترک

$\overleftrightarrow{AB}$اند پس موازیند. لذا AD و BC نیم موازیند. بنابراین چهارضلعی محدب است. پس، طبق قضیهٔ ۲۴.۲.۷، مجموع زوایای این چهارضلعی از $360°$ نابیشتر است. لذا زاویهٔ $\angle C$ از یک قائمه نابیشتر بوده و نمی‌تواند منفرجه باشد.

(ب) اگر $\angle C$ قائمه بوده و مثلاً $\sim(AD \cong BC)$، طبق قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (آ) یا $AD < BC$ یا $AD > BC$. لذا، طبق مسألهٔ ۲.۳.۸، یا $\angle C > \angle D$ یا $\angle C < \angle D$. اما، طبق اصل چهارم اقلیدس، $\angle C \cong \angle D$ که در هر مورد با قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (آ) تعارض دارد.

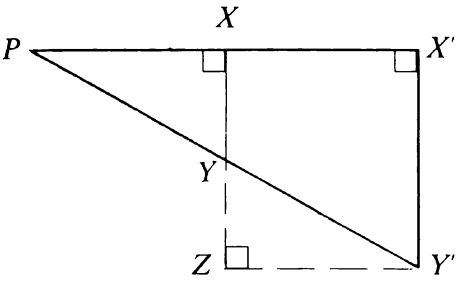
(پ) فرض می‌کنیم $\angle C$ حاده باشد. پس، طبق مسألهٔ ۲.۳.۸، چون $\angle D > \angle C$، پس $BC > AD$. و اگر مسألهٔ ۲.۳.۸ را درمورد چهارضلعی لامبرت $\square ADCB$ به قاعدهٔ AD به کار بریم، نتیجه می‌شود که چون $\angle B > \angle C$، داریم $CD > AB$.

(ت) فرض می‌کنیم چهارضلعی $\square ABCD$ ساکری بوده و زوایای $\angle A$ و $\angle B$ و $\angle D$ قائمه باشند. چون $AD \cong BC$، پس طبق مسألهٔ ۱.۳.۸ داریم $\angle C \cong \angle D$. اما $\angle D$ قائمه است. پس، طبق قضیهٔ ۸.۲.۵ قسمت (ب)، $\angle C$ نیز قائمه است و چهارضلعی مستطیل است.

به عکس، اگر چهارضلعی $\square ABCD$ مستطیل باشد، هر چهار زاویه‌اش قائمه‌اند. پس لامبرت است، و اگر $\sim(AD \cong BC)$، طبق قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (آ)، یا $AD < BC$ یا $AD > BC$. لذا، طبق مسألهٔ ۲.۳.۸، یا $\angle D > \angle C$ یا $\angle D < \angle C$ که طبق اصل چهارم اقلیدس با قضیهٔ ۱۶.۲.۵ قسمت (آ) در تضاد است. پس $AD \cong BC$ و این چهارضلعی ساکری نیز هست.

۴.۳.۸. مثلث قائم‌الزاویهٔ ΔPXY قائمه در X داده شده است. مثلث قائم‌الزاویهٔ $\Delta PX'Y'$ را چنان بسازید که در زاویهٔ $\angle P$ با مثلث اولی مشترک بوده ولی وترش دو برابر وتر آن باشد. سپس ثابت کنید ضلع مقابل به زاویهٔ $\angle P$ حداقل دو برابر شده ولی ضلع مجاور به این زاویه حداکثر دو برابر خواهد شد.

حل.

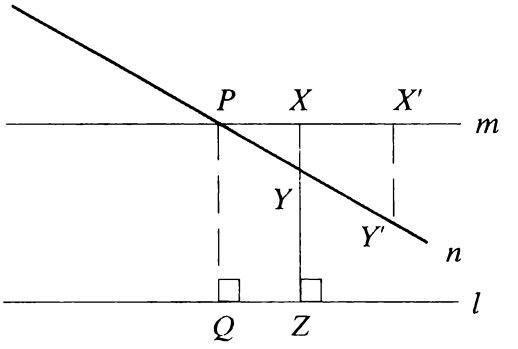


بنابر ق ۱، نقطه‌ای مانند Y' بر نیمخط متقابل $\overrightarrow{YP}$ هست بطوری که $PY \cong YY'$. اگر از Y' بر $\overleftrightarrow{PX}$ عمود کرده و پای عمود را X' بنامیم، مثلث قائم‌الزاویهٔ $\Delta\ PX'Y'$ جواب است. برای اثبات این امر از Y' عمود $\overleftrightarrow{Y'Z}$ را بر $\overleftrightarrow{XY}$ وارد کرده و پای عمود را Z می‌گیریم. دو مثلث $\Delta\ PXY$ و $\Delta\ YZY'$ به حالت وتر و یک زاویهٔ حاده (قضیهٔ ۱۰.۲.۷) قابل انطباقند. پس $PX \cong ZY'$ و $XY \cong YZ$. در چهارضلعی لامبرت $\square\ ZY'X'X$، زاویهٔ $\angle\ Y'$، طبق مسألهٔ ۳.۳.۸ قسمت (آ)، منفرجه نیست. پس، طبق مسألهٔ ۳.۳.۸ قسمتهای (ب) و (پ)، $X'Y' \geq XZ$ و $ZY' \geq XX'$. بنابراین $X'Y' \geq ۲XY$ و $PX' \leq ۲PX$.

۵.۳.۸. در برهان پروکلوس از اصل توازی گفتیم که وقتی Y روی n از P بی‌نهایت دور شود، $\overline{XY}$ بی‌نهایت بزرگ می‌شود. این امر را با استفاده از مسألهٔ ۴.۳.۸ ثابت کنید. آیا $\overline{PX}$ هم بی‌نهایت بزرگ می‌شود؟

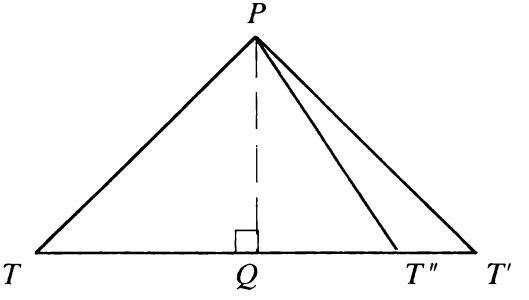
حل. مسألهٔ ۴.۳.۸ را در مورد مثلث قائم‌الزاویهٔ $\Delta\ PXY$ به ازای Y ثابتی اعمال می‌کنیم. در گام اول مثلث قائم‌الزاویهٔ $\Delta\ PX'Y'$ به دست می‌آید که Y' در امتداد n بوده و وترش PY' دو برابر وتر PY است ولی، $X'Y'$ از $۲XY$ ناکمتر است. اگر این کار h بار تکرار شود، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به دست می‌آید که ضلع مقابل به زاویهٔ $\angle\ P$ آن از ۲^hXY ناکمتر است. با استفاده از اصل موضوع ارشمیدس می‌توان h را آنقدر بزرگ گرفت که $۲^h\ \overline{XY}$ از هر عددی بزرگتر باشد و مطلب تمام است. $\overline{PX}$ ممکن است بی‌نهایت بزرگ

نشود (چرا؟).



۶.۳.۸. مثلث $\Delta\ TQP$ در Q قائم‌الزاویه است. ثابت کنید فقط یک نقطه مانند T' روی $\overleftrightarrow{TQ}$ وجود دارد که در طرفی از $\overleftrightarrow{PQ}$ واقع است که T در آن نیست و $\Delta\ T'QP \cong \Delta\ TQP$.

حل.

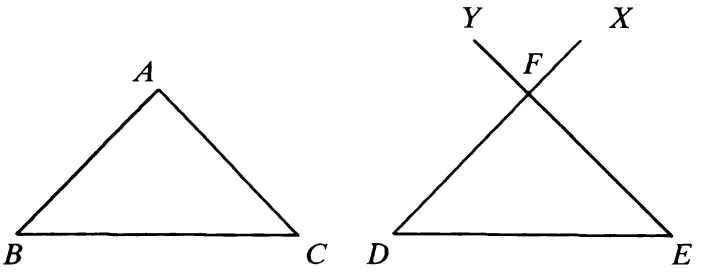


طبق ق ۱، نقطهٔ منحصر به فردی مانند T' روی نیمخط متقابل $\overrightarrow{QT}$ هست بطوری که $QT \cong QT'$. پس $\Delta\ PQT \cong \Delta\ PQT'$ (محک ض ز ض). ضمناً، طبق خاصیت جداسازی خط، T' روی $\overleftrightarrow{TQ}$ و در طرفی از $\overleftrightarrow{PQ}$ است که T در آن نیست. حال فرض می‌کنیم T'' نقطهٔ دیگری با این خاصیت باشد. داریم $Q.T''.T'$ یا $Q.T'.T''$ (چرا؟). فرض می‌کنیم $Q.T''.T'$ (حالت دیگر به همین نحو است). بنابر تعدی، $\Delta\ PQT' \cong \Delta\ PQT''$. چون طبق قضیهٔ لژاندر ـ ساکری، این دو مثلث فقط در Q قائم‌الزاویه بوده و دو زاویهٔ دیگرشان حاده است، پس تناظر مربوط به تشابه بین آنها وتر

PT'' را نظیر وتر PT' قرار می‌دهد؛ یعنی $PT'' \cong PT'$. از طرفی، طبق قضیهٔ ۲۷.۲.۷، $PT < PT'$ که با قضیهٔ ۶.۲.۵ قسمت (آ) در تضاد است.

۷.۳.۸. ثابت کنید اصل پنجم اقلیدس مستلزم اصل والیس است.

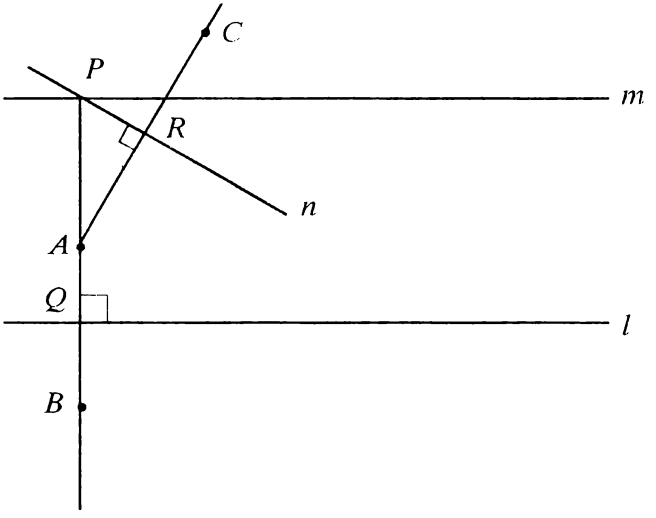
حل. چون اصل پنجم اقلیدس برقرار است، طبق قضایای ۲.۳.۷ و ۷.۳.۷، مجموع زوایای هر مثلث $180°$ است. حال مثلث ΔABC و پاره‌خط DE را در نظر می‌گیریم. بنابر ق ۴،



نیمخطی مانند $\overrightarrow{DX}$ در یک طرف $\overleftrightarrow{DE}$ هست بطوری که $\angle XDE \cong \angle B$. همچنین نیمخطی مانند $\overrightarrow{EY}$ در همان طرف $\overleftrightarrow{DE}$ هست بطوری که $\angle DEY \cong \angle C$. چون مجموع $|(\angle D)°|$ و $(\angle E)°$ از $180°$ کمتر است (چرا؟)، طبق اصل پنجم اقلیدس، دو خط $\overleftrightarrow{DX}$ و $\overleftrightarrow{EY}$ در همین طرف در نقطه‌ای مانند F متقاطعند. ضمناً $\angle F \cong \angle A$ (چرا؟). پس دو مثلث ΔABC و ΔDEF متشابه هستند.

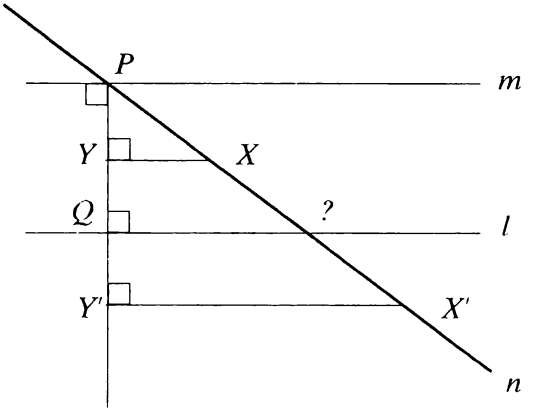
۸.۳.۸. نقص برهان زیر از اصل توازی را که توسط ولفگانگ بولیایی (*Wolfgang Bolyai*) ارائه شده است بیابید: $\overleftrightarrow{PQ}$ در نقطهٔ Q بر l عمود است و m در نقطهٔ P بر $\overleftrightarrow{PQ}$. پس $l \parallel m$. فرض می‌کنیم n خط دلخواهی مار بر P غیر از m و $\overleftrightarrow{PQ}$ باشد. نشان می‌دهیم که n خط l را قطع می‌کند. فرض می‌کنیم A نقطه‌ای بین P و Q باشد. همچنین B تنها نقطه‌ای باشد که $A.Q.B$ و $AQ \cong QB$. اگر R پای عمود مرسوم از A بر n و C تنها نقطه‌ای باشد که $A.R.C$ و $AR \cong RC$، آنگاه A، B و C بر یک خط نیستند. بنابراین

دایره‌ای مانند γ وجود دارد که بر آنها می‌گذرد. چون l عمودمنصف وتر AB و n عمودمنصف وتر AC از دایرهٔ γ است، پس l و n در مرکز γ همدیگر را قطع می‌کنند [مسألهٔ ۲.۵.۷ قسمت (ب)].



حل. نقص برهان فوق در این است که ممکن است یک مثلث دایرهٔ محیطی نداشته باشد.

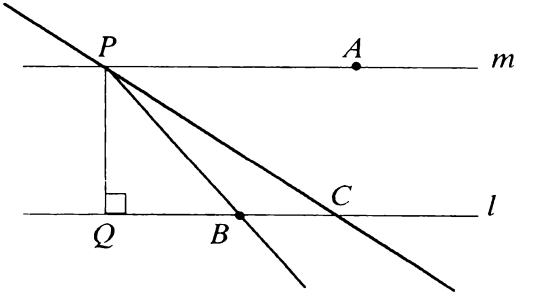
۹.۳.۸. برهان زیر از اصل توازی شبیه برهان پروکلوس است، اما با نقصی متفاوت. این نقص را پیدا کنید: از نقطهٔ P غیرواقع بر خط l عمود $\overleftrightarrow{PQ}$ را بر l فرود آورده و از P عمود m را



بر $\overleftrightarrow{PQ}$ رسم می‌کنیم. اگر n خط نامشخصی مار بر P غیر از m و $\overleftrightarrow{PQ}$ باشد، نشان می‌دهیم n خط l را قطع می‌کند. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{PX}$ نیمخطی از n بین $\overrightarrow{PQ}$ و یک نیمخط از m بوده و Y پای‌عمود مرسوم از X بر $\overrightarrow{PQ}$ باشد. وقتی X از P بی‌نهایت دور می‌شود، PY بی اندازه بزرگ می‌شود. بنابراین، Y سرانجام به موضع Y' روی $\overleftrightarrow{PQ}$ می‌رسد که $PY' > PQ$. فرض می‌کنیم X' وضع متناظر X روی خط n باشد. اما X' و Y' در یک طرف خط l اند، زیرا $X'Y'$ با l موازی است. ولی Y' و P در دو طرف l اند. بنابراین X' و P در دو طرف l واقع می‌شوند و درنتیجه پاره‌خط PX' (که جزئی از n است) l را قطع خواهد کرد.

حل. اگر n بطور مجانبی به l نزدیک شود، X می‌تواند از P بی‌نهایت دور شود، ولی PY حتی از PQ بزرگتر نمی‌شود.

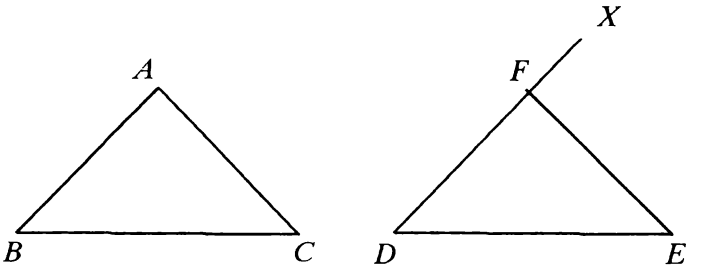
۱۰.۳.۸. برهان زیر از اصل توازی توسط جوزف دیازگرگون (*Joseph Diaz Gergonne*) صورت یافته است. نقص آن را بیابید: نقطهٔ P غیرواقع بر l است، $\overleftrightarrow{PQ}$ در Q بر l عمود است و m در P بر $\overleftrightarrow{PQ}$ عمود است. همچنین نقطهٔ $A \neq P$ روی m است. فرض می‌کنیم $\overrightarrow{PB}$ آخرین نیمخط بین $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{PQ}$ باشد که l را قطع می‌کند و B نقطهٔ برخورد آن با l باشد. بنابر ب ۲، نقطه‌ای مانند C بر l هست بطوری که $Q.B.C$. از این نتیجه می‌شود که $\overrightarrow{PB}$ آخرین نیمخط بین $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{PQ}$ نیست که l را قطع می‌کند. بنابراین همهٔ نیمخطهای بین $\overrightarrow{PA}$ و $\overrightarrow{PQ}$ خط l را قطع می‌کنند. لذا، m تنها خطی است که از P به موازات l کشیده شده است.



حل. نقص در فرض وجود آخرین نیمخط $\overrightarrow{PB}$ است. از کجا معلوم که این نیمخط وجود داشته باشد.

۱۱.۳.۸. در اصل والیس فرض $BC \cong DE$ را اضافه کرده و به جای واژهٔ «تشابه» واژهٔ «قابلیت انطباق» می‌گذاریم. ثابت کنید حکم حاصل قضیه‌ای است در هندسهٔ خنثی.

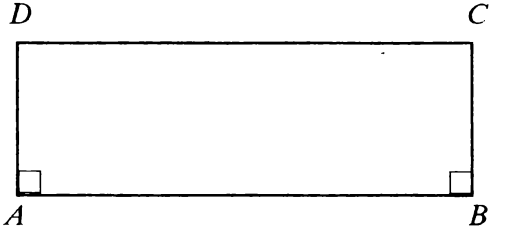
حل.



بنابر ق ۴، در طرفی از $\overleftrightarrow{DE}$ نیمخطی مانند $\overrightarrow{DX}$ هست بطوری که $\angle XDE \cong \angle B$.
همچنین طبق ق ۱، نقطه‌ای مانند F روی $\overrightarrow{DX}$ هست بطوری که $AB \cong DF$. بنابراین $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ (محک ض ز ض).

۱۲.۳.۸. ما در چهارضلعی ساکری $\square ABCD$ به قاعدهٔ AB، نقاط C و D را در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$ گرفتیم. ولی این شرط جزئی از تعریف نیست. صحت این امر را ثابت کنید.

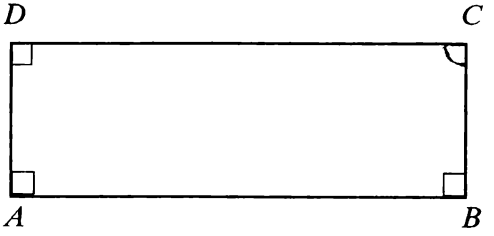
حل.



دو خط $\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ به دلیل داشتن عمود مشترک موازیند. پس نیم موازی هستند. لذا، چهارضلعی $ABCD$ □ محدب است. پس، طبق قضیهٔ ۲۳.۲.۷، AB و CD نیز نیم‌موازی‌هستند. بنابراین C و D در یک طرف $\overleftrightarrow{AB}$ خواهند بود.

۱۳.۳.۸. یک چهارضلعی را ***متوازی الاضلاع*** می‌نامیم هرگاه خطوط نظیر اضلاع مقابلش موازی باشند. ثابت کنید چهارضلعی لامبرت متوازی الاضلاع است. و نیز هر متوازی الاضلاع یک چهارضلعی محدب است.

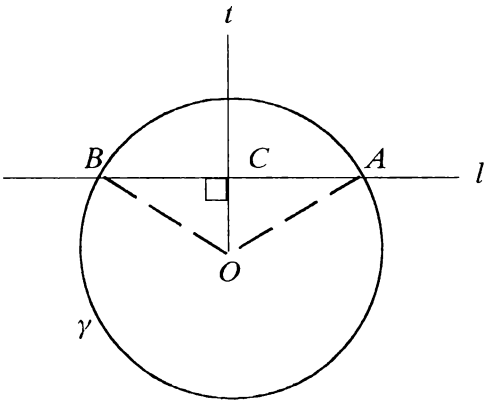
حل.



$\overleftrightarrow{AD}$ و $\overleftrightarrow{BC}$ به دلیل داشتن عمود مشترک $\overleftrightarrow{AB}$ موازیند و نیز $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ به دلیل داشتن عمود مشترک $\overleftrightarrow{AD}$ موازیند. پس چهارضلعی لامبرت $ABCD$ □ متوازی الاضلاع است. محدب بودن متوازی الاضلاع واضح است (چرا؟).

۱۴.۳.۸. ثابت کنید هرگاه خط l دایرهٔ γ را در نقطهٔ A قطع کند و در A بر γ مماس نباشد، آنگاه دایره را در یک نقطهٔ دیگر نیز قطع می‌کند.

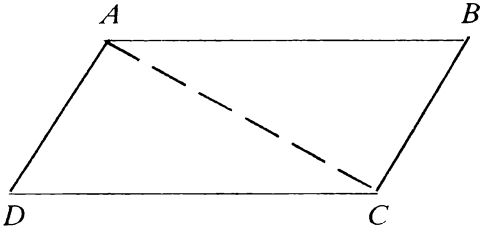
حل. فرض می‌کنیم O مرکز دایرهٔ γ باشد. از O خط t را بر l عمود کرده و پای آن را C می‌نامیم. بنابر ق ۱، نقطه‌ای مانند B بر نیمخط متقابل $\overleftrightarrow{CA}$ هست بطوری که $BC \cong CA$. داریم $\Delta\ OAC \cong \Delta\ OBC$ (محک ض ز ض). پس $OB \cong OA$. چون A روی دایره است، پس B نیز روی دایره خواهد بود.



مسائل زیر را در هندسهٔ اقلیدسی حل کنید.

۱۵.۳.۸. ثابت کنید در یک متوازی‌الاضلاع، اضلاع مقابل قابل انطباقند.

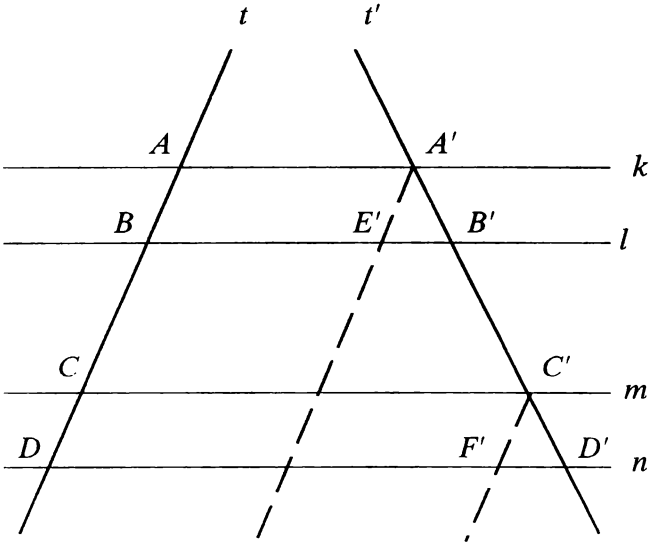
حل. چون اصل هیلبرت برقرار است، طبق قضیهٔ ۴.۳.۷، عکس قضیهٔ زوایای متبادل درونی نیز درست است. پس داریم $\Delta ABC \cong \Delta ACD$ (محک ز ض ز).



لذا $AB \cong CD$ و $AD \cong BC$.

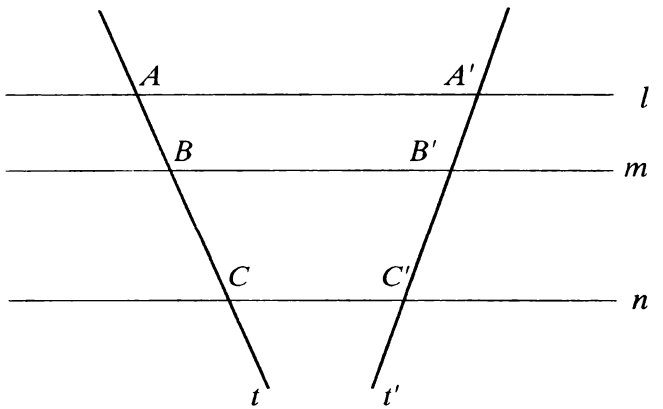
۱۶.۳.۸. فرض کنید k، l، m و n چهار خط موازی متمایز باشند جز آنکه احتمالاً $l = m$. همچنین قاطعهای t و t' این خطوط را به ترتیب در نقاط A، B، C، D و A'، B'، C' و D' قطع کنند. اگر $AB \cong CD$، ثابت کنید $A'B' \cong C'D'$.

حل.



از A' و C' خطوطی موازی t رسم می‌کنیم. نقاط E' و F' طبق قضیهٔ ۳.۳.۷ وجود دارند. بنابر مسألهٔ ۱۵.۳.۸، $AB \cong A'E'$ و $CD \cong C'F'$. چون $AB \cong CD$، پس $A'E' \cong C'F'$. و نیز چون عکس قضیهٔ زوایای متبادل درونی برقرار است، بنا بر مسألهٔ ۱.۵.۷، $\angle A' \cong \angle C'$ و $\angle B' \cong \angle D'$. پس $\Delta A'B'E' \cong \Delta C'D'F'$ (محک ض ز ز). بنابراین $A'B' \cong C'D'$.

۱۷.۳.۸. در شکل زیر سه خط l ، m و n دو به دو موازیند. ثابت کنید هرگاه $A.B.C$، آنگاه $A'.B'.C'$.



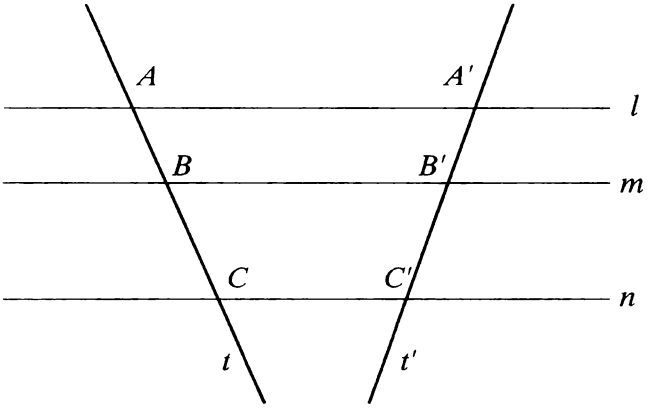
کتابخانه مجازی ریاضیات

حل. فرض می‌کنیم $A.B.C$. پس A و C در دو طرف mاند. اما A و A' در یک طرف m اند. پس، طبق ب ۴، A' و C در دو طرف m و نیز C و C'در یک طرف mاند. پس باز طبق ب ۴، A' و C' در دو طرف mاند. لذا داریم $A'.B'.C'$.

قضیهٔ تصویر موازی.

سه خط موازی l، m و n داده شده‌اند. فرض می‌کنیم t و t' موربهایی باشند که این خطوط را به ترتیب در نقاط A، B، C و A'، B' و C' قطع کرده‌اند. در این صورت،

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}.$$



۱۸.۳.۸. قضیهٔ تصویر موازی را در حالت خاصی که $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ عدد گویایی چون $\frac{p}{q}$است ثابت کنید.

حل. با استفاده از مسألهٔ ۱۶.۳.۸، پاره‌خط AB را به p پاره‌خط قابل انطباق و پاره‌خط BC را به q پاره‌خط قابل انطباق تقسیم می‌کنیم (چگونه؟)؛ در نتیجه $p + q$ پاره‌خط قابل انطباق خواهیم داشت. حال اگر مسألهٔ ۱۶.۳.۸ را $p + q$ بار به کار بریم، قضیه در این حالت ثابت می‌شود.

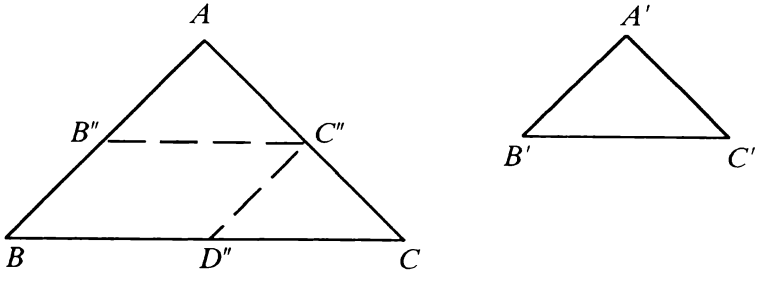
۱۹.۳.۸. قضیهٔ تصویر موازی را در حالتی که $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = x$ عدد گنگی است ثابت کنید.

حل. فرض کنیم $x' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$. نشان می‌دهیم که هر عدد گویای $\frac{p}{q}$ کوچکتر از x از x' کوچکتر است (و متقارناً بالعکس). این امر ایجاب می‌کند که $x = x'$، زیرا هر عدد حقیقی کوچکترین کران بالایی همهٔ اعداد گویای کوچکتر از خودش است. برای اثبات این امر فرض می‌کنیم $\frac{p}{q} < x$. روی $\overrightarrow{BC}$ نقطهٔ D را طوری می‌گیریم که $\overline{BD} = q\,\frac{\overline{AB}}{p}$ (چگونه؟) و فرض می‌کنیم D' تصویر موازی D روی t' باشد. از $\frac{p}{q} < x$ نتیجه می‌شود که $B.C.D$ (چرا؟). حال با توجه به مسائل ۱۷.۳.۸ و ۱۸.۳.۸، معلوم می‌شود که $\frac{p}{q} < x'$ (چگونه؟) و مطلب تمام است.

۲۰.۳.۸. قضیهٔ اصلی مثلثهای متشابه را ثابت کنید: فرض کنید $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$؛ یعنی مثلاً $\angle A \cong \angle A'$، $\angle B \cong \angle B'$ و $\angle C \cong \angle C'$. ثابت کنید اضلاع متناظر متناسبند؛ یعنی

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

حل.



نقطهٔ B'' را روی $\overrightarrow{AB}$ و نقطهٔ C'' را روی $\overrightarrow{AC}$ طوری می‌گیریم که $AB'' \cong A'B'$ و $AC'' \cong A'C'$ (ق ۱). در این صورت $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$ (محک ض ز ض). پس، طبق فرض داریم $\angle B \cong \angle B''$. لذا، طبق مسألهٔ ۱.۵.۷ و قضیهٔ زوایای متبادل درونی، $\overleftrightarrow{B''C''}$ با $\overleftrightarrow{BC}$ موازی است. حال، طبق قضیهٔ تصویر موازی داریم

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}.$$

چون $AB'' \cong A'B'$ و $AC'' \cong A'C'$، پس، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (آ) شمارهٔ ۲، $\overline{AB''}=\overline{A'B'}$ و $\overline{AC''}=\overline{A'C'}$. بنابراین

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

حال اگر از C'' خطی موازی $\overleftrightarrow{AB}$ رسم کنیم، این خط، طبق قضیهٔ ۳.۳.۷، $\overleftrightarrow{BC}$ را در نقطهٔ D'' قطع می‌کند. مجدداً طبق قضیهٔ تصویر موازی داریم

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD''}}.$$

اما، طبق مسألهٔ ۱۵.۳.۸، $BD'' \cong B''C''$. پس، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (آ) شمارهٔ ۲، $\overline{BD''}=\overline{B''C''}$. چون $\overline{B''C''}=\overline{B'C'}$ (چرا؟)، داریم

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}.$$

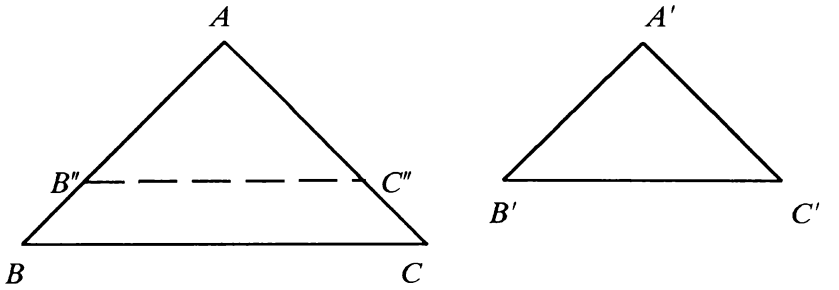
بنابراین،

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}.$$

۲۱.۳.۸. عکس قضیهٔ اصلی مثلثهای متشابه را ثابت کنید.

حل. اگر $AB \cong A'B'$، مطلب واضح است (چرا؟). فرض می‌کنیم $AB > A'B'$ (حالت $AB < A'B'$ به همین نحو است). نقطهٔ B'' را روی $\overrightarrow{AB}$ طوری می‌گیریم که $AB'' \cong A'B'$ (ق ۱). حال از B'' خطی به موازات $\overleftrightarrow{BC}$ رسم می‌کنیم (قضیهٔ ۱.۳.۷). بنابر قضیهٔ پاش، این خط ضلع AC را در نقطه‌ای مانند C'' قطع می‌کند. بنابر مسألهٔ ۱.۵.۷ و عکس قضیهٔ زوایای متبادل درونی، $\angle B'' \cong \angle B$ و $\angle C'' \cong \angle C$. پس $\Delta ABC \sim \Delta AB''C''$. لذا، طبق مسألهٔ ۲۰.۳.۸

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B''C''}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}. \qquad (*)$$



اما، طبق فرض داریم

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \qquad (**)$$

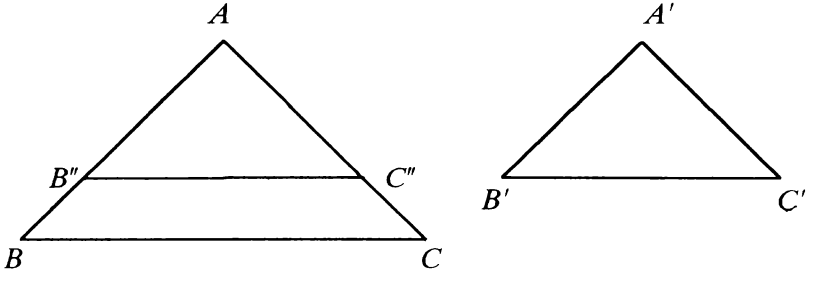
چون $\overline{A'B'}=\overline{AB''}$(چرا؟)، از روابط (*) و (* *) خواهیم داشت

$\overline{B''C''}=\overline{B'C'}$ و $\overline{AC''}=\overline{A'C'}$.

پس طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (آ) شمارهٔ ۲، $B''C''\cong B'C'$ و $AC''\cong A'C'$. لذا $\Delta AB''C''\cong\Delta A'B'C'$ (محک ض ض ض). بنابراین $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$.

۲۲.۳.۸. محک تشابه ض ز ض را ثابت کنید: هرگاه $\angle A\cong\angle A'$ و $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$، آنگاه $\Delta ABC\sim\Delta A'B'C'$.

حل.



اگر $AB \cong A'B'$، مطلب واضح است (چرا؟). پس فرض می‌کنیم $AB > A'B'$ (حالت $AB < A'B'$ به همین منوال است). نقطهٔ B'' را روی $\overrightarrow{AB}$ طوری می‌گیریم که $AB'' \cong A'B'$ (ق ۱). سپس از B'' خطی به موازات $\overleftrightarrow{BC}$ می‌کشیم (قضیهٔ ۱.۳.۷). بنابر قضیهٔ پاش، این خط ضلع AC را در نقطه‌ای مانند C'' قطع می‌کند. بنابر مسألهٔ ۱.۵.۷ و عکس قضیهٔ زوایای متبادل درونی، $\angle B'' \cong \angle B$ و $\angle C'' \cong \angle C$. پس $\Delta ABC \sim \Delta AB''C''$. لذا، طبق مسألهٔ ۲۰.۳.۸

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AB''}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC''}}. \qquad (*)$$

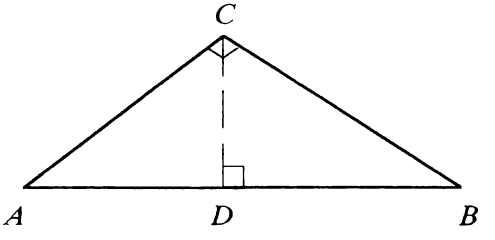
اما، طبق فرض داریم

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}. \qquad (**)$$

چون $\overline{AB''} = \overline{A'B'}$ (چرا؟)، از روابط (*) و (* *) خواهیم داشت $\overline{AC''} = \overline{A'C'}$. لذا، طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (آ) شمارهٔ ۲، $AC'' \cong A'C'$. پس $\Delta AB''C'' \cong \Delta A'B'C'$ (محک ض ز ض). بنابراین $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

۲۳.۳.۸. ثابت کنید در مثلث قائم‌الزاویه ΔABC به وتر AB، $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ (قضیهٔ فیثاغورس).

حل.



فرض می‌کنیم CD ارتفاع وارد بر وتر باشد. چون مجموع زوایای هر مثلث 180°

درجه است، داریم $\Delta\ ACD \sim \Delta\ ABC \sim \Delta\ CBD$ (چرا؟). پس، بنابر قضیهٔ اصلی مثلثهای متشابه،

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \text{ و } \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \cdot$$

لذا داریم

$$\overline{AC}^{۲} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} \text{ و } \overline{BC}^{۲} = \overline{AB} \cdot \overline{BD} \cdot$$

بنابراین،

$$\overline{AC}^{۲} + \overline{BC}^{۲} = \overline{AB}\,(\overline{AD} + \overline{BD}) \cdot$$

اما داریم $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB}$ (چرا؟). پس خواهیم داشت

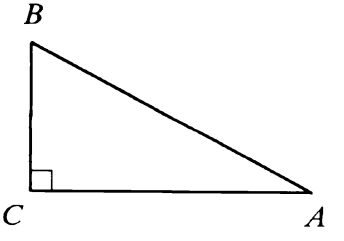
$$\overline{AB}^{۲} = \overline{AC}^{۲} + \overline{BC}^{۲} \cdot$$

۲۴.۳.۸. زاویهٔ حادهٔ $\angle\ A$ مفروض است. آن را به صورت زاویه‌ای از مثلث قائم‌الزاویهٔ $\Delta\ ABC$ قائمه در C درآورده و قرار دهید

$$\sin \angle A = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}};$$

$$\cos \angle A = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot$$

این تعریفها از انتخاب مثلث قائم‌الزاویه مستقلند (چرا؟). اگر زاویهٔ $\angle\ A$ منفرجه و



$\angle A'$ مکمل آن باشد، قرار دهید

$$\sin \angle A = + \sin \angle A' ;$$
$$\cos \angle A = - \cos \angle A' \cdot$$

اگر $\angle A$ قائمه باشد، قرار دهید

$$\sin \angle A = ۱ ;$$
$$\cos \angle A = ۰ \cdot$$

بآسانی معلوم می‌شود که $\sin^۲ A + \cos^۲ A = ۱$ (چرا؟).

حال مثلث دلخواه ΔABC را در نظر می‌گیریم. اگر a و b به ترتیب طولهای اضلاع مقابل به زوایای A و B باشند، قانون سینوسها را ثابت کنید:

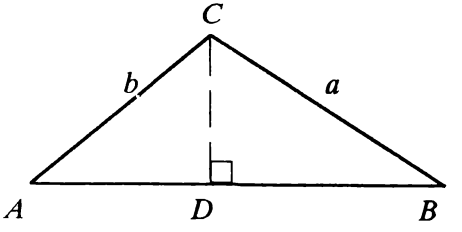
$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \angle A}{\sin \angle B} \cdot$$

همچنین قانون کسینوسها را ثابت کنید:

$$c^۲ = a^۲ + b^۲ - ۲ ab \cos \angle C ,$$

و عکس قضیهٔ فیثاغورس را نتیجه بگیرید.

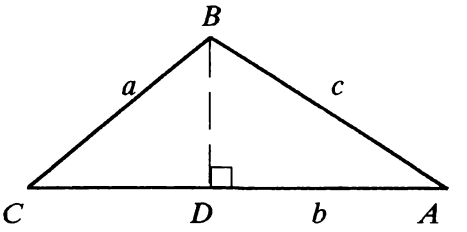
حل.



ارتفاع CD را رسم می‌کنیم. داریم $\overline{CD} = b \sin \angle A$ و $\overline{CD} = a \sin B$. پس خواهیم داشت $a = \frac{\overline{CD}}{\sin B}$ و $b = \frac{\overline{CD}}{\sin A}$. لذا،

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \cdot$$

برای اثبات قانون کسینوسها می‌گوییم اگر $\angle C$ قائمه باشد، قانون کسینوسها به قضیهٔ فیثاغورس تحویل می‌شود. ابتدا فرض می‌کنیم زاویهٔ $\angle C$ حاده باشد:



ارتفاع BD را رسم می‌کنیم. داریم $\overline{BD} = a \sin C$ و $\overline{CD} = a \cos C$. درنتیجه

$$c^{۲} = \overline{BD}^{۲} + (b - \overline{CD})^{۲} = a^{۲} \sin^{۲} C + (b - a \cos C)^{۲}$$

$$= a^{۲} \sin^{۲} C + b^{۲} + a^{۲} \cos^{۲} C - ۲ ab \cos C$$

$$= a^{۲} + b^{۲} - ۲ ab \cos C$$

وضع در حالتی که $\angle C$ منفرجه است به همین نحو است (چگونه؟).

برای اثبات عکس قضیهٔ فیثاغورس، فرض می‌کنیم $c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$. پس، از قانون کسینوسها داریم

$$- ۲ ab \cos \angle C = ۰ \cdot$$

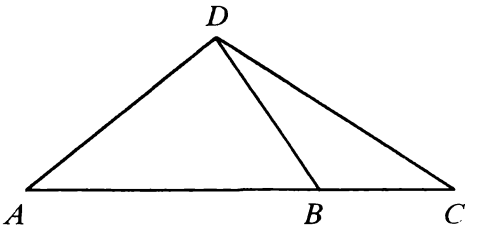
لذا $\cos \angle C = ۰$. از این طبق تعریف معلوم می‌شود که $\angle C$ قائمه است. پس مثلث ما قائم‌الزاویه است.

۲۵.۳.۸. فرض کنید $A.B.C$ و نقطهٔ D بر خط مار بر سه نقطهٔ A، B و C نباشد. ثابت کنید:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD} \sin \angle ADB}{\overline{CD} \sin \angle CDB} ;$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD} \sin \angle ADC}{\overline{BD} \sin \angle BDC} .$$

حل.



از قانون سینوسها داریم

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle ABD} \quad , \quad \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \angle CBD}{\sin \angle CDB}$$

و

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle BCD} \quad , \quad \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \angle BCD}{\sin \angle BDC}$$

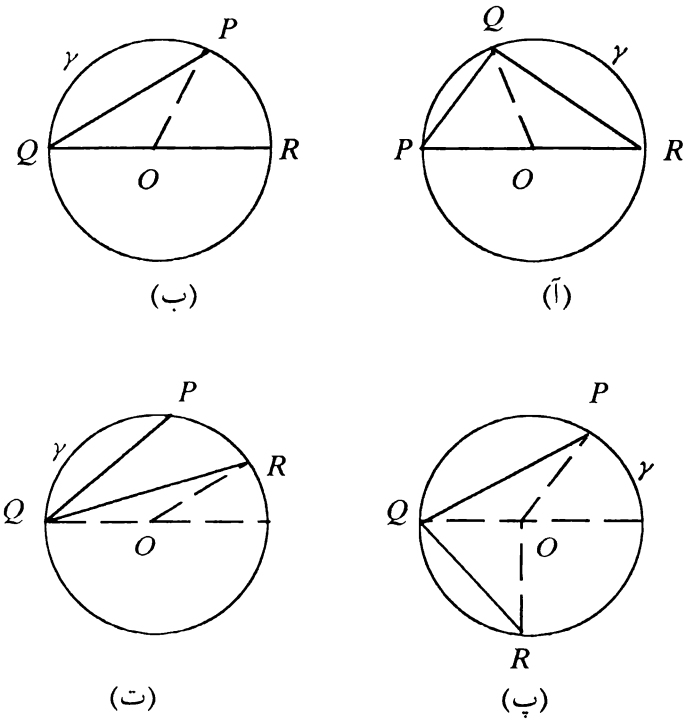
چون دو زاویهٔ $\angle ABD$ و $\angle CBD$ مکمل هستند، پس دارای یک سینوسند. با توجه به این امر، از ضرب دو رابطهٔ اول فوق درهم، رابطهٔ اول مسأله به دست می‌آید. همچنین از ضرب دو رابطهٔ دوم فوق، رابطهٔ دوم مسأله را خواهیم داشت.

۲۶.۳.۸. فرض کنید γ دایره‌ای به مرکز O بوده و نقاط P، Q و R روی آن باشند. ثابت کنید اگر P و R متقاطر باشند، $\angle PQR$ قائمه است؛ در غیر این صورت

$$(\angle PQR)^\circ = \frac{۱}{۲} (\angle POR)^\circ \cdot$$

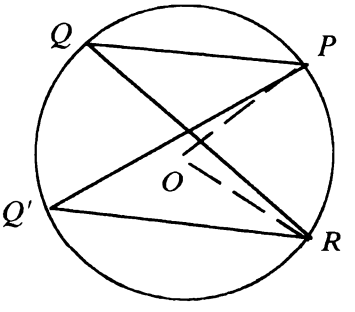
حل. چهار حالت زیر را داریم:

در این شکلها از این امر استفاده می‌کنیم که مجموع زوایای هر مثلث ۱۸۰° درجه است. مثلاً در شکل (ب) می‌گوییم مجموع زوایای $\angle PQR$ و $\angle OPQ$ (که مساویند) با $\angle QOP$ به درجه مساوی ۱۸۰° است و $\angle QOP$ مکمل $\angle POR$ است. پس $(\angle PQR)^\circ = \frac{۱}{۲} (\angle POR)^\circ$. سایر حالات به همین نحو ثابت می‌شوند (ثابت کنید!).



۲۷.۳.۸. ثابت کنید هرگاه دو زاویهٔ محاطی یک قوس را دربرداشته باشند قابل انطباقند.

حل.



اگر P و R متقاطر باشند، طبق مسألهٔ ۲۶.۳.۸، هر دو زاویهٔ $\angle PQR$ و $\angle PQ'R$

قائمه‌اند که طبق اصل چهارم قابل انطباقند. اگر P و R متقاطر نباشند، طبق مسألهٔ ۲۶.۳.۸ داریم

$$(\angle PQR)^\circ = \frac{۱}{۲}(\angle POR)^\circ ;$$

$$(\angle PQ'R)^\circ = \frac{۱}{۲}(\angle POR)^\circ \cdot$$

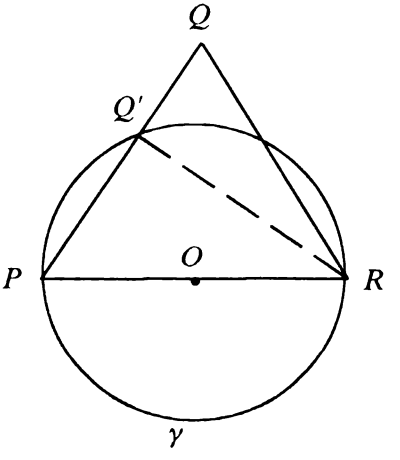
پس داریم

$$(\angle PQR)^\circ = (\angle PQ'R)^\circ ,$$

که طبق قضیهٔ ۱.۳.۶ (ب) شمارهٔ ۸، $\angle PQR \cong \angle PQ'R$.

۲۸.۳.۸. ثابت کنید هرگاه $\angle PQR$ قائمه باشد، Q روی یک دایره مانند γ قرار دارد که PR قطر آن است.

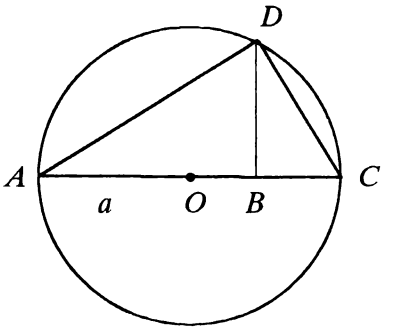
حل. فرض می‌کنیم O نقطهٔ میانی PR باشد. دایرهٔ γ به مرکز O و شعاع OP را در نظر می‌گیریم. خط $\overleftrightarrow{PQ}$ این دایره را در نقطهٔ P قطع کرده است. پس، طبق مسألهٔ ۱۴.۳.۸، باید آن را در نقطهٔ دیگری مانند Q' قطع کند. می‌گوییم $Q = Q'$. در غیر این صورت، طبق مسألهٔ ۲۶.۳.۸، $\overleftrightarrow{RQ'} \perp \overleftrightarrow{PQ}$. از طرفی، طبق فرض، $\overleftrightarrow{RQ} \perp \overleftrightarrow{PQ}$ که با یکتایی خط



عمود (قضیهٔ ۳.۲.۷) در تضاد است.

۲۹.۳.۸. پاره‌خط AB به طول a بر حسب پاره‌خط واحد OI داده شده است (قضیهٔ ۱.۳.۶) . با استفاده از ستاره و پرگار، پاره‌خطی به طول $\sqrt{a}$ رسم کنید.

حل. با استفاده از مسألهٔ ۱.۲.۲، ترسیمات زیر را انجام می‌دهیم: پاره‌خط AB را تا نقطهٔ C ادامه می‌دهیم بطوری که AC به طول $a + ۱$ باشد. سپس از B عمودی بر $\overleftrightarrow{AC}$ رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم D یکی از نقاط تلاقی آن با دایره به قطر AC باشد.



چون داریم $\Delta\, ABD \sim \Delta\, BCD$ (چرا؟)، بنابر قضیهٔ اصلی مثلثهای متشابه،

$$\frac{\overline{BD}}{a} = \frac{۱}{\overline{BD}}\,.$$

پس $\overline{BD}^{۲} = a$. بنابراین $\overline{BD} = \sqrt{a}$.

فهرست راهنما

آدرین ماری لژاندر، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۶۱، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۴، ۱۸۹

ائوجنیو بلترامی، ۱۸۲
ابن هیثم بصری، ۱۷۶، ۱۸۴
ابوالحسن ثابت ابن قرّهٔ حرّانی، ۱۷۶، ۱۸۴
ابوعلی حسن مکّنی، ۱۷۶
ارتفاع مثلث، ۲۴
ارسطو، ۱۷۷
ارشمیدس، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۶۸، ۱۸۸
اصطلاحات تعریف نشده، ۵، ۱۷
اصل
برهمنهش، ۱۰، ۱۰۱
پلی‌فیر، ۱۵۱
پنجم اقلیدس، ۱۵۱
پیوستگی دایره، ۱۱۹، ۱۲۰
پیوستگی مقدماتی، ۱۲۰
توازی، ۱۲۶، ۱۵۱، ۱۷۱، ۱۷۲
توازی اقلیدسی، ۵۲، ۱۵۱
چهارم اقلیدس، ۱۱۱
شهودی تجرید، ۱۲۷
موضوع ارشمیدس، ۱۱۸
والیس، ۱۷۹
هیلبرت، ۱۵۲
اصول
اقلیدس، ۷
پیوستگی، ۱۱۸
متعارف، ۵، ۶
موضوع، ۵
اضلاع
چهارضلعی، ۲۶
زاویه، ۱۹
مثلث، ۲۳
مجاور در چهارضلعی، ۲۶
مقابل در چهارضلعی، ۲۶
افلاطون، ۴
اقطار چهار ضلعی، ۲۶
اقلیدس، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۲۷، ۴۴، ۴۷، ۴۸، ۵۰، ۵۱، ۵۴، ۷۵، ۷۶، ۱۰۰، ۱۰۱، ۱۱۱، ۱۱۷، ۱۱۹، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۳۰، ۱۵۱، ۱۵۲، ۱۵۹، ۱۶۶، ۱۶۷، ۱۷۳، ۱۷۴، ۱۷۶، ۱۷۷، ۱۸۷، ۱۹۰

برتراندراسل، ۱۳
برش ددکیند، ۱۱۸
برهمنهش، ۱۰۱
بطلمیوس، ۱۷۳، ۱۷۴
بقراط، ۴
بورزوک، ۱۲۱
بیرون
دایره، ۱۲۰

مثلث، ۸۴
بینیت، ۱۷، ۷۳، ۷۴، ۷۵

پـــاپوس، ۱۰۱، ۱۰۷، ۱۱۱، ۱۳۱، ۱۳۲، ۱۳۳، ۱۳۴، ۱۶۹
پاره‌خط، ۱۸
واحد، ۱۲۱
پاره‌خطهای
متعامد یا بر هم عمود، ۲۴
نیم‌موازی، ۱۴۳
پاش، ۸۲، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۱۷۰، ۱۹۹
پرگار
ثابت، ۳۱
فروریختنی، ۳۱
پروکلوس، ۱۵۱، ۱۷۴، ۱۷۶، ۱۸۸، ۱۹۱
پیوستگی، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۱۷، ۱۱۸

تابع
درجه، ۱۲۰
طول، ۱۲۰
کاستی، ۱۶۰
تالس، ۴
تثلیث قوی
در پاره‌خطها، ۱۰۳
در زوایا، ۱۱۰
تعبیر، ۵۰
تعدی
در پاره‌خطها، ۱۰۳
در زوایا، ۱۱۰
تفریق
پاره‌خطها، ۱۰۲
زوایا، ۱۰۸

جان پلی‌فیر، ۱۵۱
جان والیس، ۱۷۹، ۱۸۰، ۱۸۱، ۱۹۰، ۱۹۳
جمع
پاره‌خطها، ۱۰۰
زوایا، ۱۰۸
جوزف دیاز گرگون، ۱۹۲
جیرو لاموساکری، ۱۳۹، ۱۴۰، ۱۴۴، ۱۴۵، ۱۶۱، ۱۶۷، ۱۶۸، ۱۸۲، ۱۸۳، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۹، ۱۹۳

چهارضلعی، ۲۶
ساکری، ۱۸۲
لامبرت، ۱۸۲
محدب، ۱۴۳

حکیم ابوالفتح عمر خیام نیشابوری، ۱۷۶، ۱۷۸، ۱۸۴

خاصیت
ارشمیدسی دستگاه اعداد حقیقی، ۱۱۸
توازی اقلیدسی، ۵۳
توازی بیضوی، ۵۳
توازی هذلولوی، ۵۳
جداسازی خط، ۷۸، ۸۱
جداسازی صفحه، ۷۸
جمعی کاستی، ۱۶۰
همفاصلگی، ۱۷۶
خط، ۱۷
در بی‌نهایت، ۶۵
عمود بر پاره‌خط، ۲۱
نظیر پاره‌خط، ۱۸، ۴۸
نظیر دو نقطه، ۱۸، ۴۸
نظیر نیمخط، ۱۸
خطوط متعامد یا برهم عمود، ۲۱

متقارب، ۲۲
متقاطع، ۲۰
معمولی، ۶۵
موزای، ۲۰
خواجه ابوجعفر نصیرالدین محمد ابن حسن طوسی، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۴
خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۴

دایره، ۱۸
ددکیند، ۱۱۷، ۱۱۸، ۱۱۹، ۱۴۸
درجه، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۲۰
در دو طرف خط، ۷۸
درون
دایره، ۱۲۰
زاویه، ۸۴
مثلث، ۸۴
در یک طرف
خط، ۷۸
نیمخط، ۹۲
دزارگ، ۴۲
دستگاه
اصل موضوعی تام، ۵۴
منطقی، ۵
دیوید هیلبرت، ۱۳، ۱۷، ۲۷، ۴۴، ۴۵، ۴۷، ۷۸، ۱۰۰، ۱۱۷، ۱۲۷، ۱۲۸، ۱۵۲، ۱۵۴، ۱۵۵، ۱۵۶، ۱۵۷، ۱۵۸، ۱۵۹، ۱۶۰، ۱۷۴، ۱۷۶، ۱۸۰، ۱۹۵

رأس
زاویه، ۱۹
نیمخط، ۱۸
رؤوس
چهارضلعی، ۲۶
مثلث، ۲۳
روش اصل موضوعی، ۴، ۵

زاویه، ۱۹
بیرونی، ۱۳۰
درونی مجاور به زاویهٔ بیرونی، ۱۳۰
قائمه، ۲۰
زوایای
بیرونی، ۱۲۸
چهارضلعی، ۲۶
درونی، ۱۲۸
درونی غیر مجاور به زاویهٔ بیرونی، ۱۳۰
متبادل درونی، ۱۲۸
متقابل به رأس، ۱۹
متقابل درونی و بیرونی، ۱۲۸
مثلث، ۲۳
مجاور به قاعده، ۲۵
مکمل، ۱۹

ساقهای مثلث متساوی‌الساقین، ۲۵
ستاره (خط‌کش نامدرج)، ۸
سر پاره‌خط، ۱۸
سیمیلیو، ۱۲۱

شعاع دایره، ۱۸

صفحه، ۱۷
تصویر، ۶۴
تصویر حقیقی، ۷۰
تصویر متناهی، ۶۴
حقیقی، ۱۲۲
گویا، ۱۱۳
گویای دویی، ۹۱

مستوی، ۶۵
مستوی حقیقی، ۶۹

ضلع
مجاور به رأس، ۲۳
مجاور به زاویه، ۲۳
مقابل به رأس، ۲۳
مقابل به زاویه، ۲۳

طرف، ۷۹
طول، ۱۱۵، ۱۱۶، ۱۲۰

عدد گویای دویی، ۹۱
عمودمنصف پاره‌خط، ۲۱

غلاف محدب، ۱۴۲

فزونی زوایا بر دو قائمه، ۱۸۳
کروی، ۱۸۳
فیثاغورس، ۴، ۲۰۱، ۲۰۳، ۲۰۴

قابلیت انطباق، ۱۷، ۹۷، ۹۸، ۹۹
قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین، ۲۵
قانون (فرمول)
سینوسها، ۲۰۳
کسینوسها، ۳۷، ۲۰۳
قرار داشتن، ۱۷
قضیه
اصلی مثلثهای متشابه، ۱۹۸
انبساط ـ انقباض، ۸۰
پاپوس، ۱۰۱
پاش، ۸۲
پاش در مورد نیمخطها، ۹۴
تصویر موازی، ۱۹۷
دزارگ، ۴۲
زاویهٔ بیرونی، ۱۳۰
زوایای متبادل درونی، ۱۲۹
فیثاغورس، ۲۰۱
قطعه‌بر، ۸۶، ۸۷
لژاندر ـ ساکری، ۱۳۹
منلائوس، ۴۱
مورلی، ۳۹

کاستی
زوایا از دو قائمه، ۱۸۳
مثلث، ۱۲۶، ۱۶۰
کتاب اصول اقلیدس، ۴

گئورگ زیمون کلوگل، ۱۸۴
گذشتن، ۱۷

مار، ۱۷
متوازی‌الاضلاع، ۲۶، ۱۹۴
مثلث، ۲۳
قائم‌الزاویه، ۲۵
متساوی‌الاضلاع، ۲۵
متساوی‌الساقین، ۲۵
مثلثهای متشابه، ۱۷۹
مجموعهٔ محدب، ۱۴۰
محک
تشابه ض ز ض، ۲۰۰
ز ض ز، ۱۰۷
ض ز ز، ۱۳۳
ض ز ض، ۱۰، ۱۰۰
ض ض ض، ۱۱۰
مدل، ۴۸، ۵۰

اقلیدسی، ۵۳
بیضوی، ۵۳
پنج نقطه‌ای، ۵۲
چهارنقطه‌ای، ۵۲
دوگان، ۵۷، ۶۴
سه نقطه‌ای، ۵۱
هذلولوی، ۵۳
مدلهای یکریخت، ۵۶
مربع، ۲۷
مرتب کردن
پاره‌خطها، ۱۰۳
زوایا، ۱۱۰
مرکز دایره، ۱۸
مستطیل، ۲۶
زرین، ۳۳
مفاهیم اولیه، ۵، ۱۷
مکمل تصویری مدل، ۶۵
منطق ریاضی، ۵
منلائوس، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴
مورلی، ۳۹
میانهٔ مثلث، ۲۳

نامساوی مثلثی، ۱۳۲
نخستین مدل اقلیدسی، ۵۱
نسبت زرین، ۳۳
نظریهٔ مجموعه‌ها، ۱۷
نقاط
غیر واقع بر یک استقامت، ۲۲
معمولی، ۶۵
واقع بر یک استقامت، ۲۲
نقطه، ۱۷
بیرونی مثلث، ۸۴
در بی‌نهایت، ۶۵
درونی زاویه، ۸۴
میانی پاره‌خط، ۲۱
نیمخط، ۱۸
خارج یا صادر شده از یک نقطه، ۱۸
نیمخطهای
متعامد یا برهم عمود، ۲۰
متقابل، ۱۸
هم رأس، ۹۲
نیمساز زاویه، ۲۲
نیمصفحه به مرز l، ۷۹

وقوع، ۱۷
ولفگانگ بولیایی، ۱۹۰

هرودت، ۳
هندسه
اصل موضوعی، ۲۷
اقلیدسی، ۵، ۵۳
به سبک اقلیدس، ۵
بیضوی، ۵۳
پایه، ۴۷، ۴۸
خنثی، ۱۲۵، ۱۲۸
ذهنی، ۲۷
شهودی، ۲۷
فضایی، ۱۷
کروی، ۱۸۳
مسطحه، ۱۷
منطقی، ۴
نااقلیدسی، ۵، ۵۳
هذلولوی، ۵۳

یکریختی بین مدلها، ۵۷
یوهان هاینریش لامبرت، ۱۸۲، ۱۸۶، ۱۸۷، ۱۸۸، ۱۹۴

منابع

1. Borsuk. K. and W. Szmielew-Foundations of Geometry, Amsterdam. North Holland, 1960.
2. Moise. E.E. Elementary Geometry From an Advanced Standpoint. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1963.
3. Artin, E. Geometric Algebra, NewYork, Wiley, 1957.
4. Greenberg, M.J. Euclidean and Non-Euclidean Geometries. Second Edition, W.H. Freeman & Co., 1979.
5. Redei, L. Foundation of Euclidean and Non-Euclidean Geometries According to F.Klein, Elmsford, N.Y, Pergamon, 1968.
6. Heath, T.L. Euclid's Elements, NewYork, Dover, 1956.
7. Coxeter, H.S.M. and S.L. Greitzer. Geometry revisited, NewYork, Random House, 1967.
8. Martin, G.E. Foundations of Geometry and Non-Euclidean Plane. NewYork, Intext, 1975.
9. Pedoe, D.A Course of Geometry, NewYork, Cambridge University Press, 1970.
10. Tuller, A. Modern Introduction to Geometries, NewYork, Van Nostrand Reinhold, 1967.
11. Henkin, L,P. Suppes and Tarski, A. The Axiomatic Method, Amsterdam, North Holland, 1959.
12. Hilbert, D. Foundations of Geometry, 2nd ed., La Salle, Illinois, Open Court, 1971.
13. Ghyka, M. The Geometry of Art and Life, NewYork, Dover, 1977.
14. Hilbert, D. and Cohen-Vossen, S. Geometry and the Imagination, NewYork, Chelsea, 1952.
15. Eves, H. A Survey of Geometry, 2 Vols., Boston, Allyn and Bacon, 1963-1965.
16. Golos, E.B. Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry, NewYork, Holt, Rinehart and Winston, 1968.
17. Prenovitz, W. and Jordan, M. Basic Concepts of Geometry, NewYork, Blaisdell, 1965.
18. Blumenthal, L.M. and Menger, K. Studies in Geometry, San Francisco, W.H. Freeman and Company, 1970.
19. Ewald, G. Geometry, An Introduction, Belmont, Calif., Wadsworth, 1971.
20. Adler, I. A New Look at Geometry, NewYork, John Day Co., 1966.
21. Kay, D.C. College Geometry, NewYork, Holt, Rinehart and Winston, 1969.
22. Kutuzov, B.V. Geometry, Stanford, Calif., School Mathematics Study Group, 1960.

کتابخانه
مجازی
ریاضیات

تهران: صندوق پستی ۱۴۴۵۵/۱۸۸
تلفن: ۹۳۱۵۴۲

شابک: ۶ـ ۰۷ـ ۶۲۱۵ـ ۹۶۴
ISBN: 964 - 6215 - 07 - 6