انتشارات مدرسه ۱۳۱

مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی

بوریس ایگلوینتس جودیث استوبل

ترجمهٔ: غلامرضا یاسی‌پور

مقدمه‌ای
بر استدلال ریاضی

بوریس ایگلویتس
جودیث استویل

ترجمه:

غلامرضا یاسی‌پور

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی
انتشارات مدرسه
(وابسته به دفتر انتشارات کمک آموزشی)

مقدمه‌ای بر استدلال ریاضی

این کتاب ترجمه‌ای است از:

An Introduction to Mathematical Reasoning

Boris Iglewicz
Judith Stoyle
Temple University

چاپ اول: پاییز ۱۳۷۰
تیراژ: ۱۰،۰۰۰ نسخه

تهران ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش،
پلاک ۲۶۷، تلفن ۸۲۶۰۰۷
چاپ از: چاپخانه الهادی(قم)

فهرست مطالب

Contents

مقدمهٔ مؤلفین

ازآنجاکه به‌عنوان معلمین آمار هم با دانش‌آموزان هم با دانشجویان رشته‌های تخصصی متعدد با معلومات ریاضی متفاوت، سروکار داشته‌ایم، این تجربه را به‌دست آورده‌ایم که بسیاری از دانشجویان درمسائل دیگر باهوش، قضیه‌های ریاضی‌یی تشکیل می‌دهند که حتی ازمبانی منطقی جزئی نیز بی‌بهره‌اند، ودراین مورد بیشتربهانه‌ها از این‌دست است که معلومات ریاضی قبلی دانشجو اندك است یا ازخواندن دورهٔ ریاضی قبلیش مثلا دوسال گذشته است. درمان معمول این مشکل وادارکردن دانشجو بـه گرفتن دوره‌های ریاضی جبران کننده‌یی، که شخص امیدوار است کمبودها را برطرف کنند، میباشد.

ملاحظات شخصی ما را به این‌عقیده کشانده که نقص ریاضی مورد بحث، سرچشمهٔ کاملاً متفاوتی دارد، وتنها معلول فقدان معرفت جبر، مثلثات، یا موضوعات متنوع دیگری که در ترمهای جبران کنندهٔ نقایص ریاضی، مورد مطالعه قرارمی‌گیرند نیست، بلکه به‌علت تقریباً عدم درك کامل منطق یا تفکرریاضی است. بنا به‌تجربیات ما، بیشتراین‌دانشجویان، هنگامیکه با مسائل ریاضی روبرومی‌شوند، از آنجاکه اعتقاد دارندکـه مهارت در این رشته ترکیبی از فـورمولهای حفظ شده و عملیات جبری است، مایلندکـه عقل سلیم را کناربگذارند. هنگامیکـه ازچنین دانشجویی خواسته می‌شودکه قضیه‌یی را اثبات کند، اغلب دنباله‌یی ازقضایا، کـه به‌طریقی به نتیجهٔ صحیح منجرمی‌شوند، را به‌دست می‌دهد. بررسی بیشترآشکار می‌کند که تنها طریقی کـه دانشجو مطابق آن می‌تواند قضیه‌یی را اثبات کند استفاده از حفظ کـردن مراحل اثبات است، وغالباً فقدان تفکرریاضی خود را درطرق دیگرنشان می‌دهد. اخیراً، دانشجویی از ماخواست که نشان دهیم که $\sum X_i Y_i$ در حالت کلی مساوی $\sum X_i \sum Y_i$ نیست . به او گفتیم کـه اعـداد $X_1 = 1$ ، $X_2 = 2$ ،

$Y_1 = ۱$ ، $Y_2 = ۲$ را انتخاب کند. دانشجو چنین اعتراض کرد که گرچه اینگونه توضیحات عددی می‌توانند در دبیرستان به‌کار روند اما واضحاً نمی‌توانند به‌عنوان یك اثبات در سطح دانشکدهٔ معتبر، در نظر گرفته شوند.

وضعیتهائی نظیروضعیت فوق، تا اندازه‌یی نتیجهٔ تاکیدکنونی درتعلیم‌ریاضی‌است. دورهٔ تحصیلات ریاضی امروزی به مقدارزیادی شامل دنباله‌یی افزایش‌یابنده ازموادی، که هریك ازآنها برای شهروند آینده مفید درنظر گرفته شده، می‌باشد. چنین آموزشی با یادگیری عادی محاسبات حسابی‌آغاز می‌شود، ودرجبر، هندسه، مثلثات، واحتمالاً حساب جامع وفاضل ومعادلات دیفرانسیل ادامه می‌یابد. وگرچه تفکرنقش بزرگتری در مراحل بعدی این دنباله ایفا می‌کند، هنوز برحفظ کردن حقایق ریاضی‌بی چون: چگونگی پیدا کردن مساحت دایره یا مشتق گرفتن ازتابعی جبری تأکید می‌شود.

وضع درحالت‌کلی چنین‌است، ودراین مورد بیشتر انتقاد مابراین است‌که‌دانشجو درمراحل بعدی این دنباله، در معرض دوره‌یی‌که صرفاً به روشها و مبنای منطقی اثبات ریاضی پرداخته باشد قرارنمی‌گیرد. درحالیکه دوره‌هائــی از این نوع بسیار لازم‌اند. چه بعد از تمام حرفها، شخص برای اینکه ریاضیات را به‌خوبی درك‌کند به توانائی‌هایی در اثبات نتایج نیازمند است، واین سخن‌کــه ریاضی تنها مجموعه‌یی ازمعارف نیست، بلکه راه انجام دادن‌کارهاست نمی‌تواند گزافه باشد. درك این جریان، وتوانائی انجام دادن‌آن باید برای شخص فایده‌های بسیار در برداشته باشد.

از آنجا کــه کتاب تنها به اثبات‌های ریاضی پرداخته، دیگر اهمیت نداشته‌کــه توضیحات‌آن ازچه زمینه‌هایی انتخاب شده باشند، ودراین مورد مثالی‌که جبر دبیرستان را به‌کاربرده می‌تواند به‌همان اندازهٔ مثالی که ازحساب جامع و فاضل استفاده‌کــرده توضیح دهنده، و امکاناً جالب توجه باشد. دراین صورت به مقدار زیادی بنابه‌این‌دلیل، لوازمات ریاضی مورد نیاز برای مطالعهٔ چنین کتابی می‌تواند بــه‌کمترین مقدار تقلیل یابد، در این صورت دانش‌آموز متوسط دورهٔ دبیرستان باید زمینهٔ ریاضی برای مطالعهٔ کتاب را دارا باشد.

برای تعقیب منطق اساسی وبه‌کاربردن روشهای واقع درهرفصل، لزومی نداردکه شخص هریك ازمثالها را به‌طورکامل بداند. دانش‌آموزان پیشرفته باید بسیاری‌ازمسائل را از آنجاکه آنها را، تا حد زیادی، درکتابهای درسی مقدماتی نخواهندیافت، جالب توجه بیابند. اما، دوفصل مرور برمطالب گذشتهٔ موجود، شامل موضوعات وروشهای‌ریاضی منتخب‌اند. این فصول برای‌کسانیکه با بعضی از علامات ریاضی‌آشنا نیستند نیز می‌توانند مفید باشد.

فصول کتاب بسته به مطالبشان، به‌طرق مختلف مطالعه نیازمندند. دراین صورت دانش‌آموز باید، فصل ۱، وتمام فصل ۲ را بخواند، وموضوعاتی راکه در فصول ۳ و ۴ برایش ناآشنایند مرورکند، وفصل ۵ را به‌دقت بخواند و هرچه بیشترامکان داشته باشد به حل مسائل تکلیفی این فصل بپردازد. فصول کتاب به استثنای فصل ۸، شامل روشهای متفاوت اثبات ریاضی‌اند. هریك ازاین فصول شامل بحثی کوتاه،که ازپی آن چندین‌مثال توضیح دهنده، به این‌ترتیب‌آمده‌که چندمثال اولیه، نسبةً ساده ومثالهای‌بعدی به‌گونه‌یی پیچیده‌ترند، میباشد. و از آنجاکه مثالها مستقل از یکدیگرند لازم نیست‌که دانش‌آموز درمرتبه اول تمام آنها را بداند.

فصل ۸ به اثبات خواص ریاضی منتخبی، کــه درسایر قسمتهای این‌کتاب به‌کار رفته‌اند، می‌پردازد. اثبات خواص اساسی نامساویها، علامت جمع، وتابع قــدرمطلق در میان موضوعات مورد بحث قرار گرفتهٔ این فصلند.

درخاتمه، باید تذکر داده شودکه مطالب‌کتاب با مسائل، توضیح داده شده‌اند:چه احساس شخصی‌مؤلفین‌کتاب براینست‌که تنها راه آموختن اثبات قضایا به‌دانش‌آموزان، دادن مقدار معتنابهی امثله وسپس، تا آنجاکه ممکن است، وادارکــردنشان به‌حل مسائل است. به همین دلیل، درحالیکه امثله ومسائل، قسمت اعظم‌کتاب را اشغال‌کرده‌اند جائی کمی به بحث اختصاص‌داده شده، و دراین مورد امید است‌که خواننده بسیاری‌ازمسائل کتاب را هم جالب توجه هم مبارز طلب بیابد.

مؤلفین به اشخاص بسیاری‌که درتهیهٔ این‌کتاب ازکمکهاشان برخوردار بوده‌اند مدیونند، و دراین مورد به خصوص از : Milton Chaika of Syracuse University, Dr. James L. McKenney of Harvard University, Dr. William M. Whitaker III of Florida State University, و Mr. Ted Moore of The University of Houston برای بررسی اولین پیش نویس ومطرح‌کردن پیشنهادهای مفید بسیار، تشکرمی‌کنند. نیز مایلیم از Sandy Perlman برای راهنمایی مفیدش، Steven Sampson برای کمکش درمورد بررسی اثباتهای نسخهٔ دست‌نوشت، و Cora Herring برای‌تعاونش درتایپ مطالب تشکرکنیم. مؤلفین مخصوصا از : John C. Neifert دبیرانتشارات مکمیلان برای رابطهٔ خوب وکمکهای مداومش سپاسگزارند، و به این سپاسها، قدردانی خاصشان را از Dr. Lawrence Sherr of The University of Kansas و دانشجویانش‌که مطالب دست نوشت کتاب را درکلاسشان مورد امتحان قرار دادند ونظریات وپیشنهادهای بسیار مفیدی دادند، میفزایند. علاوه براینها ، Dr. Iglewicz

مایل است از Fran and Abraham Schwartz, Natalie Iglewicz و دوستانش Shirley و Raja برای تشویقشان در نوشتن این کتاب تشکر کند، و Dr. Stoyle از والـدین و دوستانش برای تشویق، کمك و بردباریشان سپاسگزار است.

بوریس ایگل ویتس
جودیث استویل
دانشگاه تمپل

Chapter 1 فصل ۱

ریاضیات چیست ؟

What is Mathematics

هدف این کتاب آشنا کردن دانشجو با استدلال ریاضی[1] است، اما در این مورد مقصودمان نه تمرین دادن تکنیك بلکه مطرح کردن متدولوژی است. چنین کتابی باید به طور کامل با کتاب درسی مربوط به روشهای حساب یا اعمال جبری[2] متفاوت باشد اما برای اینکه بخواهیم این تفاوت را درك کنیم، باید ایده‌یی در مورد اینکه نظام موسوم به ریاضیات دربارهٔ چیست و نوع مسائلی که ریاضیدانها حل میکنند داشته باشیم. در این مورد ممکن است بعضی از خوانندگان با تعجب دریابند که این مسائل غالباً با انواعی که با آنها آشنا بوده‌اند تفاوت بسیار دارند. از این گذشته با توجه به‌اینکه هردانشجوئی از اولین سالهای تحصیلش به مطالعهٔ ریاضیات پرداخته است، باید انتظار داشت که دانش معقولی از این رشته داشته باشد.

در تعاریف ریاضیات در **فرهنگ دانشگاهی جدید وبستر**[3] و در **فرهنگ ریاضی**

---

1. mathematical reasoning
2. arithmetic procedures or algebraic manipulations
3. Webster's New Collegiate Dictionary

جیمز و جیمز[1] تفاوتی اگر نه در اساس در تأکید وجود دارد. و بستر چنین میگوید که ریاضیات عبارتست از «علمی که از نسب دقیق موجود بین کمیات یا مقادیر[2] و اعمال[3] و روشهایی که توسط آنها و مطابق با این نسب، کمیات مورد جستجو از کمیات معلوم یا مفروض دیگر، استنتاج پذیراند[4] گفتگو می کند.» از طرف دیگر در **فرهنگ ریاضی**، ریاضیات به‌طور ساده عبارت از «بررسی منطقی شکل[5]، ترتیب[6] و کمیت» است. دراین صورت ممکن است دانش‌آموزی که هشت یا نه سال حساب، دو دوره جبر، و سه دوره هندسه خوانده، تعریف اول با تأکیدش بر کمیات را ترجیح دهد. و اگر در هندسه کار نکرده باشد، ممکن است ریاضیات را چیزی بیش‌از عملیات عددی در نظر نگیرد. از طرف دیگر دانشجوی دانشگاه، ممکن است حساب انتگرال و دیفرانسیل وحتی معادلات دیفرانسیل را در تعریفش وارد کند. در واقع، این تعاریف دانشجویان تنها کاربردهای خاصی از ریاضیات در خود این رشته را توصیف می کنند، و بینش محدودشان در این مورد صرفاً نتیجهٔ عدم تجربه و بی‌خبری[7] آنهاست.

اما، ریاضیدانهای حرفه‌یی مایل به‌حمایت‌از تعریف‌جیمز با تأکیدش بر بررسی منطقی‌اند و ما، دراین مورد به‌علت اینکه توصیف کامل و مفهوم‌داری از ریاضیات بدون درنظر گرفتن ایده‌ها و مفاهیم خارج از تجربهٔ دانشجو بسیار مشکل است، طریق دیگری اختیار خواهیم کرد وسعی در توضیح ریاضیات با استفاده ازقیاس خواهیم داشت.

به‌جای در نظر گرفتن ریاضیات به‌عنوان حرفه‌یی عالمانه، به‌آن به‌صورت یك بازی نگاه می‌کنیم. اما برای درك قیاس فوق کسانیکه ساعتها برای به‌خاطر سپردن اتحادهای مثلثاتی یا حل کردن مسائل مفصل جبر کوشش کرده‌اند باید بیش‌از کسانیکه به حل کردن معماهای عددی[8] یا انجام دادن کارهای عجیب وغریب با یك دسته‌کارت علاقه‌مندند از قوهٔ تصورشان استفاده کنند. به‌خاطر داشته باشید که جهد مزبور کوششی برای توصیف مفهوم متداول‌ریاضیات نیست بلکه برای به‌دست‌آوردن بینشی درنزدیك شدن ریاضیدان حرفه‌یی به رشته‌اش می‌باشد.

---

1 James and James' Mathematical Dictionary
2. quantities or magnitudes
3. operations
4. deducible
5. shape
6. arrangement
7. lack of sophistication
8. number puzzles

اغلب ریاضیدانها به این موضوع کـه حرفه‌شان با بازی مقایسه شود اهمیت نمی‌دهند چرا که این عمل همان کاری است که آنها در واقع مایل به انجام دادن آن می‌باشند. اما بین انجام دادن یك بازی و شرکت در خلق فعالیتهای ریاضی شباهتهایی بیشتر از تفریحی که به‌دست می‌آید موجود است. حرفهٔ ریاضیات از آنجا که ریاضیات خلاق عبارت از استنتاج نتایج تازه از موارد معلوم است کاملا مشابه به حل معماست. حل معما، مانند انجام بازی، شامل تخیل، بصیرت، مهارتهای گوناگون، و عامل آزمـایش و خطای[1] نزدیك شدنهای گوناگون[2] می‌باشد، و از آنجا که حل مسائل ریاضی پیچیده یا حل‌معماها شامل چیزی بیش‌از پیروی ازیك مجموعهٔ قواعد است، هردو می‌توانند خلاق و مفرح باشند.

بگذارید خواص بازیها را در حالت کلی برای پیداکردن سایر شباهتهای آن به ریاضی، بررسی کنیم. بازیهائی شبیه بیس‌بال، والیبال و شطرنج همه دارای قواعدند، و شخص برای انجام دادن این بازیها باید به‌طورکامل با این قواعد آشنا باشد. گرچه قواعد اغلب بـازیها بسیار مشکل نیستند، بعضی از آنها پیچیده‌اند؛ اما، مشکل واقعی هنگام آموختن طریق بازی آشکار می‌شود. چه دراین مورد، قواعد کافی نیستند، وشخص باید فن، مهارت، و استراتژی داشته باشد. به‌عنوان مثال، دربازی شطرنج، شخص ممکن است بداند که اسب یا وزیر چگونـه حـرکت می‌کنند اما پیش از اینکه این واقعیت بتواند برای به‌دست آوردن امتیاز به‌کار رود به‌تجربه نیاز است، و باوجود شانس آدم تازه‌کار، بسیار تعجب‌آور خواهد بودکه شخصی کـه تازه قواعدی را یادگرفته بتواند جبههٔ خودرا درمقابل یك بازیکن‌مجرب نگهدارد. به‌عبارت دیگر، دانستن قواعد مستلزم این نیست کـه شخص بـرای خـوب انجام دادن یك بـازی شایسته باشد. مثلا، در ورزشهای حـرفه‌یی، یك علاقه‌مند ورزش ممکن است با تمام قواعد بازی، بدون اینکه هیچگاه خودش آن بازی را انجام داده باشد، آشنا باشد.

اما کار ریاضیدان محقق در هنگام بازی، توپ‌زدن یا بلوف زدن به‌حریف نیست، بلکه سعیش اینست که معرفت‌ریاضی تازه‌یی از حقایق معلوم استخراج کند، و این نتیجه نه باوسایل تصادفی بلکه بااستدلال دقیقی که باقواعد منطق تطبیق می‌کند آشکار می‌شود. البته می‌توان منطق ریاضی‌را به‌صورت قواعد این‌بازی درنظر گرفت. دراین‌صورت اگر

---

1. trial – and – error factor
2. various approaches

ریاضیدان در به‌دست آوردن نتیجهٔ تازه‌یی قاعدهٔ منطقی‌یی را غلط به‌کار برد نتیجه‌اش باید موردسؤال قرارگیرد زیرا ممکن است اثبات شود که ناصحیح است. به‌این دلیل، ضروری است که ریاضیدان تازه‌کار[1] استفاده ازقواعداساسی منطق ریاضی را به‌طورکامل بیاموزد و بداند.

در ورزشها انتظار نمی‌رود که یك بازیکن تازه‌کار بهتراز دیگران باشد. به‌عنوان مثال، انتظار نمی‌رود که شخصی که تازه قواعد بیس‌بال را یاد گـرفته اغلب توپها را در هوا بگیرد یا علیه بازیکن خوبی که توپ را میندازد به‌رقابت بپردازد، و برای تأییداین مطلب شخص تنها لازم دارد که یکی دو دورهٔ بازی لیگ کوچکی‌را تماشا کند. مهارتهای بازی طی ساعات طولانی تمرین به دست می‌آید، و حتی در این مـرحله نیز دو بازیکن موفقیتهای یکسان را نمی‌آموزند یا به‌سطوح مهارت یکسان نمی‌رسند. تنها تعدادکمی از بازیکنها، بازی را به‌قدری خوب یاد می‌گیرند که در یك تیم حرفه‌یی بازی کنند، در حالیکه ازاکثریت تنها می‌توان انتظار داشت که به‌اندازه‌یی شایستگی پیداکنند که بازی درحد معقول خوبی را با دوستانشان انجام دهند.

بسیاری از دانشجویان عکس‌العمل متفاوتی نسبت به بازی ریاضی بازی[2] نشان می‌دهند، به‌این ترتیب که به گونه‌یی انتظار دارند که بلافاصله دراستدلال ریاضی دارای صلاحیت شوند و اگر نتوانند قضایای سادهٔ ریاضی‌را فوراً اثبات کنند دلسرد می‌شوند. بـرخورد دانشجو به‌مطالعهٔ استدلال ریاضی باید دقیقاً همانند برخورد او به یك بازی تازه باشد. به‌عنوان مثال، یك تنیس‌باز تازه‌کار هنگامیکه درحال یاد گرفتن است انتظار به دست آوردن امتیازات بسیار کمی در اکثر مواقع دارد. چنین شخصی نباید ازاینکه در اولین مرتبه‌یی کـه سعی در بازی‌کردن می‌کند مورد تمسخر قرار می‌گیرد نگران شود، چه پیشرفت با زمان و تمرین حاصل می‌شود. به‌همین ترتیب، دانشجوی تازه‌کار ریاضیات نباید ازاینکه طی یادگیری جریان موردبحث اشتباه‌کند بترسد، زیرا شایستگی در استدلال ریاضی را می‌توان تنها پس‌از تمرینات بسیار انتظار داشت.

در ریاضیات نیزمانند هرمهارت مکتسب[3] دیگر، سطح‌شایستگی وسرعت یادگیری به‌طور قابل ملاحظه‌یی ازدانشجویی به‌دانشجوی دیگر تغییر می‌کند، و به‌نظر می‌رسد که بااستدلال‌ریاضی تعدادکمی ازاشخاص به‌طورطبیعی برخوردمی‌کنند، به‌طوریکه بلافاصله بعدازآشنائی‌شان بااین‌جریان درآن‌متخصص می‌شوند، وبقیه برای به‌دست‌آوردن‌مهارت واطمینان در اثبات نتایج به‌مقدار قابل ملاحظه‌یی زمان احتیاج دارند. و اگرچه حقیقت

1. rookie
2. game of playing mathematics
3. learned skill

داردکه اغلب دانشجویان هیچگاه ریاضیدانان برجسته‌یی نمیشوند، مطالعه و شکیبائی با رسیدن به قابلیت معقولی در جریان استدلال پاداش داده خواهد شد.

هنگامیکه ریاضیدان حرفه‌یی به بازی ریاضیات می‌پردازد، ممکن است معرفت تازه‌یی نتیجه دهد، اما هنگامیکه دانشجوی تازه‌کاری بازی میکند کاررا با پرداختن به اثباتهای دوباره‌یی که نتایج شان قبلا معلوم شده‌اند آغاز میکند، و این روش به‌این علت مهم است که دانشجو مهارتهای لازم برای کاراکتشافی بعدی را به‌دست می‌آورد، و دراین‌صورت با قابلیت تازه‌یی که برای تحقیق درنتایج ریاضی به‌دست آورده بسیاری از غموض آشکار میشوند، ودانشجو می‌تواند به ملاحظهٔ رابطهٔ بین قضایا بپردازد و با اطمینان به کارشان برد.

ممکن است بحث فوق این تأثیر نادرست را باقی بگذارد که کارریاضیدان حرفه‌یی عبارت از طرح کردن یك قضیه و سپس تهیه کردن اثباتی مناسب برای آن قضیه است، و هنگامیکه اثبات مورد نظر تکمیل شود قضیهٔ دیگری را مطرح و بار دیگر سعی در به دست آوردن اثباتی مناسب برای آن میکند. ولی در واقع تحقیق ریاضی ازنمونهٔ کاملا متفاوت دیگری به‌این ترتیب پیروی میکند که ریاضیدانها در زمینه‌یی تحقیق میکنند و، امیدوارانه، ازتحقیق‌شان نتایج معنی‌داری به‌دست می‌آورند و سرانجام قضایائی را اثبات می‌کنند که غالباً به طور کامل با آنهاکه شروع به اثباتشان کرده بودند متفاوتند. با این همه لزومی نداردکه از این موضوع متعجب شویم، چه ریاضیدان همچنانکه عمل تحقیق ادامه می‌یابد، شروع به توجه کردن به نمونه‌ها، ملاحظه نمودن نیاز به شرایط اضافی، یا در یافتن اینکه صدق نتیجهٔ کاملا متفاوتی را می‌توان اثبات کرد میکند.

تا اینجا ریاضیات را از نظرگاه ریاضیدان تئوریك مورد بحث قرار داده‌ایم. جنبهٔ دیگر این بحث عبارت ازکاربرد نتایج معلوم است، چه ازآنجاکه اغلب خوانندگان نمی‌خواهند ریاضیدان حرفه‌یی شوند، بزرگترین مسألهٔ مورد علاقه‌شان کاربرد ریاضیات است. به این دلیل دانشجو باید در انجام عملیات جبری[1] و عمل کردن محاسبات عددی اساسی ماهر شود. با وجوداین، تأکید ما در جهت متفاوت دیگری است، چه سعی ما براینست که دانشجو را با اصول اساسی استدلال ریاضی آشنا کنیم، و اهمیت این مطلب در آموزش کاربردهای پیشرفته‌تر ریاضیات آشکار خواهد شد. با ادراك جریان استدلال ریاضی نه‌تنها درك واضحتری از ریاضیات درحالت کلی حاصل میشود بلکه بینش بیشتری دربررسی موضوعات تازه در ریاضیات نیز به‌دست می‌آید. و به علت اینکه علائم به مقدار وسیعی در اثباتهای ریاضی به کار می‌روند و

1. algebraic manipulations

عملیات جبری غالباً ضروریند، دانشجو قابلیت خود را در انجام عملیات مذکور به‌طور ساده از تجربه‌یی که از دنبال کـردن اثباتهای نمونه‌یی و انجام دادن بعضی ازتمرینات تکلیفی[1] به دست می‌آورد، ترقی خواهد داد.

1. homework exercises

Chapter 2 فصل ۲

منطق علامتی

Symbolic Logic

زبان صورت بسیار پیچیده و قابل تغییر دلالت است. از آن می‌توان برای انتقال دادن احساسات عمیق انسانی به‌عاشقی یا مهمل صرفی به‌جمعیت متعصبی استفاده کرد. درواقع، نویسندگان نطقهای سیاسی درنوشتن نطقهای طویلی که شامل هیچگونه مطالب مفیدی نیستند متخصص شده‌اند. وبسیاری از آگهی‌های تبلیغاتی نیز دربه‌کاربردن عبارات تهی‌اما زیبا حتی با نطقهای سیاسی رقابت میکنند.

دهها ریاضیدان و فیلسوف برجسته طی قرنها رنج بردند وکوشش‌کردند تا زبان را به‌روشی علامتی که به‌کار عملیات علامتی بیاید تبدیل‌کنند، چه‌گسترش چنین سیستمی تبدیل‌گزاره‌های مرکب وپیچیده را به‌گزاره‌های به مراتب ساده‌تر اما معادل امکان‌پذیر میکند. علاوه براین، از آنجا که چنین برخورد علامتی‌یی لزوماً شامل قواعد اساسی استدلال درست است، نشان داده میشود که استدلالات شفاهی مرکب، در صورت‌های ساده‌ترشان، یا دارای معنی‌اند یا آنکه شامل مغالطه[1] یا تناقض[2] میباشند. واضح است‌که برخورد علامتی مذکور در بسیاری زمینه‌ها مفید است. و درریاضیات‌که درآن‌استدلالات

---

1. fallacy 2. contradiction

درست واظهارات روشن[1] از بیشترین اهمیت برخوردارند دارای اهمیت خاصی‌میباشد.

جورج بول[2] ، ریاضیدان برجستهٔ انگلیسی، درطرح اصول چنین دستگاه‌علامتی‌یی توفیق یافت، به این ترتیب‌که روشش گزاره‌های شفاهی را به‌علائم تبدیل و شامل جبر خاصی است‌که عملیات خاصی را بین این علائم مجاز میکند. تحقیقات بعدی به‌طور وسیعی معرفت در این زمینه را غنی‌کرد و به مقدار زیادی درک آدمی را از اساس ریاضیات افزایش‌داد. درنتیجه، منطق علامتی‌شعبهٔ مهمی ازریاضیات شده، وریاضیدانهای قابل بسیاری موجودندکه تمام استعداد خلاق خود را وقف بررسی‌آن‌کرده‌اند.

کتابهای نسبةً مقدماتی بسیاری به‌طور کامل به منطق علامتی اختصاص یافته‌اند. اما درمورد این‌کتاب اعتقادمان براینست‌که آشنائی مختصری‌که شامل قواعد مبنائی استدلالات درست باشد، تا دانشجو مطالب واقع درکتاب را درک‌کند،کافی است. باید تأکید شودکه بیشتر ریاضیات شامل‌گزاره یا اثبات قضایاست بنابراین دانستن قواعد مبنائی منطق وموارد استعمالشان در استدلال درست برای‌دانشجویان ریاضیات ضروری[3] است. در نتیجه ، دانستن مطالب این فصل برای درك مفاهیم واقع در فصول بعد دارای اهمیت است.

گزاره‌ها (قضایا) Propositions

دراینجا بحثمان‌را به گزاره‌هائی محدود میکنیم‌که یا راست یا دروغ، اما نه هردو،میباشند. چنین گزاره‌هائی را قضیه می‌نامیم. چند مثال از قضیه عبارتند از

(i) نامش «جان[4]» است.

(ii) حجم جهان متناهی است.

(iii) دو بعلاوهٔ دو مساوی چهار است.

(iv) سه عددی زوج است.

(v) سه عددی فرد است.

تمام گزاره‌های فوق راست یا دروغند، گرچه در مورد (ii) اطمینان نداریم که‌کدام صحیح است. ملاك مهم در قضیه اینست‌که یا راست است یا ، اگر راست نباشد، دروغ میباشد. در طبقه‌بندی یك‌گزاره به‌عنوان قضیه، لازم نیست‌که شخص بداندکه آن گزاره

1. clear expression
2. George Boole, 1815 – 1864
3. indispensable
4. John

راست یا دروغ است؛ بلکه نکتهٔ مهم اینست که یکی از این دو باشد.

جملات بسیاری موجودندکه ملاك فوق‌را برقرار نمی‌کنند. جملات استفهامی‌مثال متداولی ازجملاتی هستندکه قضیه نیستند. به‌عنوان مثال:

(i) آیا نام او «جان» است؟
(ii) آیا جهان متناهی است؟
(iii) آیا دو بعلاوهٔ دو، برابر چهار است؟

در مثالهای فوق جملات سادهٔ اخباری را به استفهامی تبدیل کردیم، و درانجام این‌کار گزاره‌ها را به‌جملاتی برگرداندیم که شرایط قضیه را برقرار نمی‌کنند. علاوه برجملات استفهامی، جملات بسیار دیگری موجودندکه شرایط‌قضیه‌را برقرار نمی‌کنند، و به‌عنوان مثال، «رئیس‌جمهور احتمالا انسانی‌اخلاقی‌است» و «دو بعلاوهٔ دو به‌احتمال زیاد برابر چهار است» ازآن جمله‌اند.

ممکن است اینکه خود را محدود به قضایاکرده‌ایم به مقدار زیادی مانع کاربرد منطق‌علامتی به‌نظر برسد. اما درعمل چنین‌اتفاقی نمی‌افتد زیرا قضایای‌ریاضی به‌صورت قضیه‌هائی که‌باید به‌عنوان راست‌یا دروغ‌اثبات‌شوند بیان‌شده‌اند.واگر گزاره‌یی به‌صورت سؤال بیان شده باشد، آنرا می‌توان پس از این‌که صدق یا کذبش مشخص یا مسلم فرض‌شد[1] به‌قضیه تبدیل‌کرد. به‌عنوان‌مثال، گزارهٔ «آیا دو بعلاوهٔ‌دو، برابر چهار است؟» می‌تواند به «دو بعلاوهٔ دو، برابر چهار است» تبدیل شود. استفاده ازجملات‌کامل درمنطق علامتی‌عملی پرزحمت‌است، بنابراین هر گزارهٔ کامل را بایك‌علامت منحصر به‌فرد نمایش می‌دهیم، و مثلاً گزارهٔ «دو بعلاوهٔ دو، برابر چهار است» را می‌توان با P نمایش داد. هنگامیکه P تعریف شد، دیگر نمی‌توان آنرا برای نمایش قضیهٔ متفاوت دیگری به‌کار برد. مثلاً، دیگر نمی‌توانیم قضیهٔ «بیست و سه عددی اول است» را با P نمایش دهیم بلکه باید حرف دیگری، مثلاً Q را برای نمایش گزارهٔ اخیر به‌کار بریم. به‌این ترتیب با به‌کار بردن علائم، عبارات پیچیده و مرکب را به‌مقدار زیادی ساده می‌کنیم و ازمیان کلمه‌بندی‌های پیچیده و مرکب به‌معانی حقیقی گزاره‌ها میان برمی‌زنیم.

درصورتیکه قضایای ساده‌را باحروف منفرد نمایش‌دهیم، می‌توانیم عبارات‌مرکب را به‌ترکیبی از چنین حروفی‌تبدیل‌کنیم. مثلاً گزارهٔ «دو بعلاوهٔ‌دو، برابر چهار است و بیست وسه عددی‌اول است» عبارت‌از دو گزارهٔ ساده‌تر «دو بعلاوهٔ دو، برابر چهاراست»

---

1. postulated

و «بیست وسه‌عددی‌اول است»،می‌باشدوعلاوه براین،به کلمهٔ رابط«و» توجه‌داشته باشید. در این صورت عبارت مذکور را می‌توان بااستفاده ازعلائم بندقبل به‌صورت P و Q نوشت. به همین ترتیب، گزارهٔ «دو بعلاوهٔ دو، برابر چهار است یا بیست وسه عددی اول است» را می‌توان به‌صورت P یا Q نوشت.

جداول ارزش Truth Tables

دراین مورد توجه اصلی‌مان به‌اختراع روش سریعی درنوشتن عبارات مرکب نیست بلکه مطرح کردن وسیله‌یی برای‌تحلیل آنهاست. به‌این ترتیب که مثلا اگر بدانیم که P راست و Q راست است، در این صورت چه اطلاعی در موردگزارهٔ P و Q خواهیم داشت؟ یا این که، اگر P راست وگزارهٔ دیگر R دروغ باشد، در مورد P یا R چه می‌توان گفت؟ در این مرحله درجستجوی پاسخهای دقیق چنین سؤالاتی هستیم.

در بررسی جملات مرکب، شخص به‌کثرت وقوع چندکلمهٔ رابط توجه می‌کند. در این موردکلمات «و» ، «یا» ، «مستلزم» و عبارت «معادل است با» از اهمیت خاصی برخوردارند. ازآنجاکه اینها مهمترین رابطها می‌باشند، باید خواصشان را بدانیم؛ اما ابتدا باید علائم استاندارد آنهارا بشناسیم. روابط مذکور وعلائم منطقی متناظرشان در جدول ۲.۱ داده شده‌اند.

جدول ۲.۱

رابط	علامت
و	$\wedge$
یا	$\vee$
مستلزَم .... است	$\Longrightarrow$
معادل است با	$\Longleftrightarrow$

دراین صورت ازاین‌مرحله به بعد گزارهٔ P و Q به‌صورت $P\wedge Q$ نوشته می‌شود، و به همین ترتیب R مستلزم S است یا $R \Longrightarrow S$ نمایش داده می‌شود. وگزارهٔ علامتی $P\Longleftrightarrow Q$ باید P معادل Q است خوانده شود وازجدول علامتهای رابطی ۲.۱ همواره و در هرجاکه مناسب باشد استفاده خواهد شد.

اکنون به‌تحلیل گزاره‌های مرکب از این نوع می‌پردازیم، و در این مورد هدفمان تشخیص دادن این‌که گزاره‌های موردبحث راست یا دروغند می‌باشد. می‌دانیم که جداول ارزش واضح‌ترین و ساده‌ترین وسیلهٔ خلاصه‌کردن تمام امکانات صدق و کذب یك رابط معلوم‌اند، و در آن‌ها هر ترکیب ممکن گزاره‌های اصلی با نتیجهٔ رابط مورد بحث فهرست شده است. مثلا در مورد هر گزارهٔ مرکب شامل گزارهٔ اصلی P و گزارهٔ دیگر Q، باید حالاتی که در آن

P راست است و Q راست است

P راست است و Q دروغ است

P دروغ است و Q راست است

P دروغ است و Q دروغ است

را مورد بررسی قـرار دهیم. این امکانات معمولا در دوستون اول فهرست می‌شوند، و ستون بعد چنین می‌گوید که ترکیب خاص موردبحث، راست یا دروغ است.

جدول ارزش علامت $\wedge$ در جدول ۲.۲ داده شده است. در این مورد در تمام جداول این فصل T را برای راست و F را برای دروغ به‌کار خواهیم برد. بگذارید ستون سه که برمبنای راستی P و Q بیان می‌کند که $P\wedge Q$ راست یا دروغ است‌را مورد بررسی قرار دهیم. توجه داشته باشید کـه تنها وقتی کـه $P\wedge Q$ راست‌است زمانـی است که‌هم P هم Q راست‌باشد،واگر P یا Q یا هر دو دروغ باشند، در این صورت $P\wedge Q$ دروغ است. بااین قواعد، دیگر باید بتوانیم درمورد هر گزارهٔ مرکب به‌صورت $P\wedge Q$ عمل کنیم.

جدول ۲.۲

P	Q	$P\wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

بگذارید بعد، جدول ۲.۳، یعنی جدول ارزش $P\vee Q$ را مورد بررسی قرار دهیم

جدول ۲.۳

P	Q	$P\vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

گرچه «یا» می‌تواند در بعضی موارد به‌صورت «P یا Q اما نه هردو» تعبیر شود، در ریاضیات عموماً به صورت «P یا Q یا هردو» تعریف می‌شود. در زبان کتبی گاهی شخص این تعریف $P\vee Q$ را بیان شده به صورت P و/یا Q پیدا می‌کند. توجه کردیم که درسه حالت از چهار حالت فوق $P\vee Q$ راست است، زیرا درتنها مورد آخر نه P نه Q راست نیست.

قواعد رابط تعادل[1]، $\Longleftrightarrow$، نیز می‌تواند در جدول ارزشی خلاصه شود. جدول ۲.۴ جدول ارزش این رابط است.

توجه داشته باشید که $P \Longleftrightarrow Q$ هنگامیکه هم P هم Q راست یا هم P هم Q دروغ باشد راست است. $P \Longleftrightarrow Q$ هنگامیکه یکی از گزاره‌های P یا Q راست و دیگری دروغ باشد، دروغ است، و این واضحاً همان چیزی است‌که شخص از تعادل انتظار دارد، یعنی، این‌که اگر P و Q معادل باشند باید هردو راست یا هردو دروغ باشند.

جدول ۲.۴

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

1. equivalence connective

پیش‌از نمایش جدول رابط استلزام، $\Longrightarrow$، ممکن است روشن‌کردن تفاوت بین کلمات «راستی» و «درستی» مفید واقع شود، زیرا هرچندکه در این کتاب این دو کلمه را به‌صورت قابل تبدیل با یکدیگر به‌کار می‌بریم، همواره چنین نیست. بنابراین باید برای خواننده آنچه راکه کلمهٔ «راست» در ریاضیات مشخص می‌کند روشن باشد.

در ریاضیات نیز چون در بسیاری از قلمروهای کوشش بشری، شخص باید مفروضاتی در نظر بگیرد، و این مفروضات گرچه ممکن است بلافاصله آشکار نباشند، وجود دارند. ریاضیدانها غالباً مفروضات اساسی تحصیل ریاضی را آکسیوم[1] می‌نامند. بسیاری از خوانندگان باآکسیومهای هندسی‌یی‌که مبنای هندسهٔ اقلیدسی‌اند آشناهستند. تغییر تنها یکی از این آکسیومها[2] منجر به‌نوع متفاوتی‌هندسه موسوم به‌هندسهٔ نااقلیدسی می‌شود. قضایای هندسهٔ اقلیدسی از مجموعهٔ آکسیومها با استفاده از استدلال درست استنتاج شده‌اند و بنابراین درستند. اما نتایج هندسهٔ نااقلیدسی نیز چنین‌اند. این‌مطلب بدین معنی نیست که نتایج هندسهٔ اقلیدسی با نتایج هندسهٔ نا اقلیدسی یکسانند. و، هنگامیکه این نتایج متفاوت باشند، بدین معنی نیست که یکی از آنها راست است در حالیکه دیگری دروغ می‌باشد، بلکه بدین‌معنی است‌که هرنتیجه از آکسیوم خودش حاصل می‌شود.

بحث فوق باید این موضوع را روشن کرده باشدکه لازم نیست‌که نتایج ریاضی به‌مفهوم مطلق[3] راست‌باشند. دراین صورت اگرآکسیومهای موردبحث بامسألهٔ علمی‌یی جور دربیایند، قضایای مستخرج از این آکسیومها می‌توانندکاملا مفید باشند. اما اگر آکسیومها بامدل موردبررسی جورنیایند، ممکن‌است‌که استفاده ازقضایا به‌گرفتاریهائی منجر شود. پس به‌جای آنکه‌گفته شودکه قضایا راستند دقیق‌تر آنست‌که گفته شودکه درستند. به‌این ترتیب، ریاضیدانها، کلمهٔ «راست» را برای نتیجهٔ یك استدلال درست و نه درمفهوم مطلق آن به‌کار می‌برند.

هنگام بررسی جدول ۲.۵ درمورد رابط استلزام، مورداستفاده از «راست»فوق‌را درخاطر داشته باشید.

دو حالت اول هنگامیکه شخص دریابدکه $P \Longrightarrow Q$ به‌معنی استلزام حقیقی و نه استلزام‌کاذب[4] است معقول به نظر می‌رسند. برای مثال، گزارهٔ «انگلستان بیش از ده

---

1. axiom

۲. از یك نقطه، غیرواقع بر یك خط مستقیم، دقیقاً یك خط مستقیم می‌توان به موازات خط اصلی رسم‌کرد.

3. absolute sense

4. pseudo – implication

میلیون جمعیت دارد مستلزم اینست که دو بعلاوهٔ دو، برابر چهار است» به‌عنوان کاربرد صحیحی ازاین علامت درنظر گرفته نمی‌شود، اما دوحالت داده‌شدهٔ دیگر در جدول ۲.۵ ممکن است در وهلهٔ اول تحیرآور به‌نظر بیایند.

جدول ۲.۵

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

به‌خاطر داشته باشیدکه اگر شخص با فرض دروغ آغازکند می‌تواند به‌طور معقول هر نتیجه‌یی‌را استخراج کند. هنگامیکه شخص می گوید $P \Longrightarrow Q$ راست است، مقصودش این *نیست* که Q راست‌است، بلکه اینست که استدلال درست است. به‌عنوان مثال، گزارهٔ «۵ = ۲ + ۲» می‌تواند به‌درستی برای بیرون‌کشیدن *نتیجه‌یی* راست یادروغ به‌کاررود. فرض می کنیم P به‌جای «۵ = ۲ + ۲» قرار داشته باشد، Q «۲ + ۲ بزرگتراز۳ است» را نمایش دهـد و R نمایشگر «۲ + ۲ عددی فرد است» باشد. واضح است‌که‌گـزارهٔ «۵ = ۲ + ۲» مستلزم «۲ + ۲ بـزرگتراز ۳ است» می‌باشد استدلالی درست است، گرچه چنین اتفاق افتاده که P دروغ و Q راست باشد. به‌همین ترتیب، «۵ = ۲ + ۲» مستلزم اینست که «۲ + ۲ عددی فرد است» نیز استدلالی درست است. این بار چنین اتفاق افتاده‌که هم P هم R دروغ باشند و بار دیگر این استدلال‌که P مستلزم R است درست می‌باشد. بحث فوق باید آنچه راکه ازگزارهٔ $P \Longrightarrow Q$، هنگامیکه P دروغ است، مقصود داریم روشن کرده باشد.

رابطهای دیگر — Other Connectives

رابطهای دیگری موجودندکه مکرر به‌کار می‌روند. تحلیل دقیق، آشکار می‌کندکه این رابطها یا طرق متفاوت بیان رابطهائی هستندکه قبلا بررسی‌شده‌اند یا می‌توانند برحسب رابطهای آشنامان بیان شوند. موارد زیر چهار رابط دیگر و رابطه‌شان با رابطهائی‌که

آنها را می‌شناسیم‌اند.

(i) اگر P ، دراین صورت Q ؛

(ii) P شرط لازم برای Q است ؛

(iii) P شرط‌کافی برای Q است ؛

(iv) P مستلزم Q است .

مثالی از (i) ، «اگر ۴ = ۲ + ۲ ، دراین صورت ۲ + ۲ عددی زوج است» می‌باشد. آنرا با «۴ = ۲ + ۲ مستلزم اینست که ۲ + ۲ عددی‌زوج است» مقایسه کنید. دوجملهٔ فوق به‌طور واضح دوطریق متفاوت بیان یك چیزاند . در حالت‌کلی، (i) همان $P \Longrightarrow Q$ است.

حالت (ii) به‌گونه‌یی پیچیده‌تراست. «P شرط‌لازم برای Q است» چنین‌می گوید که P برای اینکه Q راست باشد باید راست باشد . به عبارت دیگر ، حالت «P دروغ است و Q راست است» نادرست است . با ملاحظهٔ جداول ۲.۵ – ۲.۲ ، به شباهت بین حالت (ii) و جدول ۲.۵ توجه می‌کنیم. جدول ارزش $Q \Longrightarrow P$ (جدول ۲.۶) به طور واضح شرایط حالت (ii) را برقرارمی‌کند.

حالت (iii) کاملا مشابه (ii) است. «P شرط‌کافی برای Q است» بدین معنی است‌که راستی P مستلزم راستی Q است، و این معادل $P \Longrightarrow Q$ می‌باشد.

جدول ۲.۶

P	Q	$Q \Longrightarrow P$
T	T	T
T	F	T
F	T	F
F	F	T

استدلالی مشابه نشان می‌دهدکه حالت (iv) معادل $Q \Longrightarrow P$ است.

یکی ازتغییرات مهم دریك‌گزاره نقیض‌آنست. اگر P به‌جای «فردا باران‌خواهد آمد» قرار گیرد، دراین‌صورت «نه P» چنین می‌گویدکه فردا باران نخواهد آمد. نقیض P به صورت $\sim P$ نوشته می‌شود. گزارهٔ نقیض شده ، جدول ارزش ساده‌یی داردکه در

جدول ۲.۷ داده شده است.

جدول ۲.۷

P	$\sim P$
T	F
F	T

موارد استعمال Applications

دراین مرحله آماده‌ایم که بعضی از قواعد مبنائی استدلال صحیح ، نیز بعضی از کاربردهای غلط متداول منطق را مورد تحقیق قرار دهیم. این کار را می‌توان با استفاده ازجداول ارزش انجام داد ، اما این بار با عبارات پیچیده‌تراقدام خواهیم کرد.

ابتدا قاعدهٔ استدلال ریاضی‌یی کــه بیش از همه به‌کار می‌رود را مورد بررسی قرارمی‌دهیم . برای به‌کار بردن این قاعده ،که مبنای روش مستقیم اثبات است، کار را با گزارهٔ راستی آغاز می‌کنیم ونشان می‌دهیم که مستلزم گزارهٔ دیگری است . این گزاره ، به نوبت خود، مستلزم گزارهٔ سومی است ، و این جریان استلزام تا به‌دست آمدن نتیجهٔ مطلوب ادامه می‌یابد . نتیجهٔ نهایی بــه این علت راست استکــه از سلسله استلزاماتی که با گزارهٔ راستی آغاز شده نتیجه شده است . اکنون درستی استفاده از چنین سلسلهٔ استلزاماتی را تحقیق می‌کنیم ؛ یعنی ، با استفاده از جدول ارزش نشان می‌دهیم که اگر $P \Longrightarrow Q$ و $Q \Longrightarrow R$ دراین صورت $P \Longrightarrow R$.

جدول ۲.۸ جدول ارزش این استلزام است . سه ستون اول این جدول شامل تمام ترکیبات ممکن ارزشهای راستی سه گزارهٔ مورد بحث است. ستون ۴ ازستونهای ۱ و ۲ با استفاده از قواعد استلزام (جدول ۲.۵) به‌دست آمده است . ستونهای ۵ و ۶ به همین ترتیب به‌دست آمده‌اند. ستون ۷ از ۴ و ۵ نتیجه می‌شود، و ستون ۸ از ۶ و ۷ به دست می‌آید. توجه کنیدکه ستون ۸ گــزارهٔ مطلوب را مشخص می‌کند و تنها شامل ارزش T است. این موضوع بدین معنی است که گزارهٔ مورد بحث به ازاء هــر ترکیب ارزشهای راستی‌گزاره‌های P ، Q و R استدلالی درست است. به طور مشابــه می‌توان نشان داد که $[(P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow R)] \Longleftrightarrow (P \Longleftrightarrow R)$ (تمرین k . ۴ را ملاحظه کنید.)

جدول ۲.۸

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
P	Q	R	$P\Rightarrow Q$	$Q\Rightarrow R$	$P\Rightarrow R$	$(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)$	$\{[(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R)]\Rightarrow(P\Rightarrow R)\}$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

بعد، یکی از مغالطه‌های متداول، که گاهی اوقات به جای استدلال درست به‌کار می‌رود، را موردبررسی قرارمی‌دهیم. جملهٔ «اگر فردا باران ببارد، در این صورت «جان» (فردا) به سینما خواهد رفت» را برای توضیح این مطلب بـه‌کار می‌بریم. آیا شخص می تواند از جملهٔ فوق نتیجه بگیردکه، اگر فردا باران نبارد، در این صورت «جان» به سینما **نخواهد** رفت؟ جمله‌ها را با دستگاه علامتی‌یی که مطرح شده مورد بررسی‌قرار می‌دهیم. فرض می کنیم P به‌جای «فردا باران می‌بارد» قرار داشته باشد و Q «جان‌فردا به سینما خواهد رفت» را نمایش دهد؛ در این صورت $P\Rightarrow Q$ طریق علامتی نوشتن جملهٔ اصلی است، و جملهٔ تغییر یافته را می‌توان به‌صورت $\sim P\Rightarrow\sim Q$ نوشت. دراین صورت آنچه‌که توسط شخص استدلال‌کننده ادعا شده اینست‌که

$$(P\Rightarrow Q)\Rightarrow(\sim P\Rightarrow\sim Q)$$

یعنی، جملهٔ اول مستلزم دومی است. اگر چنین باشد، دراین صورت

$$(P\Longrightarrow Q)\Longrightarrow(\sim P\Longrightarrow\sim Q)$$

در ستون نهائـی جدول ارزش تنها T خـواهـد داشت زیـرا T نشان دهندهٔ استدلال درست است . جدول ارزش $(P\Longrightarrow Q)\Longrightarrow(\sim P\Longrightarrow\sim Q)$ در جدول ۹ . ۲ داده شده است .

جدول ۲.۹

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
P	Q	$\sim P$	$\sim Q$	$(P\Longrightarrow Q)$	$(\sim P\Longrightarrow\sim Q)$	$(P\Longrightarrow Q)\Longrightarrow(\sim P\Longrightarrow\sim Q)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T

ستونهای ۱ و ۲ تمام ترکیبات ارزشهای راست ودروغ قضایای P و Q را به‌دست می‌دهند. ستونهای ۳ و۴ به‌ترتیب از ستونهای ۱و۲، با استفاده ازجدول ۲.۷، استخراج شده‌اند . ستون ۵ از ستونهای ۱ و ۲ بـه دست آمـده ، و ستون ۶ از ستونهای ۳ و ۴ استخراج شده است . هم ستون ۵ هم ستون ۶ قواعد جدول ۲.۵، جدول ارزش استلزام، را به‌کار می‌برند. سپس ستونهای ۵ و ۶ برای استخراج ستون ۷ به‌کاررفته‌اند.

F درسطرسوم ستون ۷ مقرر می‌کندکـه شخص می‌تواند از $P\Longrightarrow Q$ این نتیجه که $\sim P\Longrightarrow\sim Q$ است را تنها در سه حالت از چهار حالت ممکن استخراج کند . از آنجاکه ستون ۷ شامل یك F است، استلزام مورد بحث نادرست است . این ایـده‌کـه استلزام، مستلزم سالبهٔ مستقیم[1] خود است مغالطه‌یی متداول می‌باشد و باید برای اجتناب از آن احتیاط کرد .

تبدیل سادهٔ $P\sim$ و $Q\sim$ استدلال قبل را درست خواهـد ساخت . دوگـزارهٔ $P\Longrightarrow Q$ و $\sim Q\Longrightarrow\sim P$ را در نظر می‌گیریم . جدول ارزش آنها در جدول ۲.۱۰ داده شده است.

1. direct negative

جدول ۲.۱۰

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
P	Q	$\sim Q$	$\sim P$	$(P \Longrightarrow Q)$	$(\sim Q \Longrightarrow \sim P)$	$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow (\sim Q \Longrightarrow \sim P)$
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

جدول ۲.۱۰ به‌همان طریق جدول ۲.۹ رسم شده است .

توجه داشته باشید که هردوستون ۵ و ۶ دارای ارزشهای یکسان‌اند. شخص می‌تواند این مطلب را به طور علامتی با بیان نتیجهٔ کلی‌تر : $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\sim Q \Longrightarrow \sim P)$ خلاصه کند . این نتیجه ، نتیجهٔ بسیار مهمی است و مفهوم مبنایی روش غیر مستقیم اثبات می‌باشد. با به‌کار بردن این نتیجه درمورد مثالمان، می‌توانیم به‌درستی بگوئیم که، «اگر جان فردا به سینما نرود ، دراین صورت فردا باران نخواهد بارید.»

جدول ۲.۱۱

P	Q	$(P \Longrightarrow Q)$	$(Q \Longrightarrow P)$	$(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)$	$(P \Longleftrightarrow Q)$	$[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)] \Longleftrightarrow (P \Longleftrightarrow Q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

حالت جالب دیگر شامل رابطهای استلزام و تعادل است. قریباً نشان خواهیم داد که $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$. یعنی، برای اثبات اینکه P معادل Q است، باید نشان دهیم که $P \Rightarrow Q$ نیز $Q \Rightarrow P$. این نتیجه توسط جدول ارزش داده شده درجدول ۲.۱۱ به‌تحقیق رسیده است.

این نتیجه به‌قدری اهمیت داردکه شایستهٔ ازحفظ نمودن است. **گزارهٔ $P \Leftrightarrow Q$ معادل با $P \Rightarrow Q$ و $Q \Rightarrow P$ است.** به این دلیل است که شخص مکرراً می‌شنود که ریاضیدانها به $P \Leftrightarrow Q$ به‌صورت P شرط لازم وکافی برای Q است اشاره می‌کنند. به‌خاطر داشته باشیدکه تحت رابطهای دیگر نتیجه‌گرفتیم که P شرط لازم برای Q است همان $P \Leftarrow Q$، و P شرط کافی برای Q است معادل $P \Rightarrow Q$ می‌باشد.

ساده کردن عبارات مرکب

Simplification of Complex Expressions

کاربرد دیگر منطق ریاضی استفاده از این قواعد در ساده‌کـردن عبارات مرکب است. دراین مورد اگر جدول ارزش گزارهٔ موردبحث رسم شود، ممکن است ارزشهای راستی آن به‌عنوان معادل ارزشهای راستی گزارهٔ بسیار ساده‌تری در نظر گـرفته شود. در این صورت شخص می‌تواندگزارهٔ ساده‌تر را به‌جای گزارهٔ مرکب به‌کار برد.

عمل ساده‌کردن یك عبارت مرکب را با مثالی توضیح می‌دهیم. جملهٔ زیر را در نظر می‌گیریم: «فردا باران خواهد بارید و من بیمار خواهم شد یا فردا باران نخواهد بارید و من یا بیمار خواهم شد یا حالم خوب خواهد بود.» این جمله از آن پیچیده‌تر است‌که به‌آسانی دانسته شود. برای ساده‌کردن آن، جدول ارزش آنرا رسم می‌کنیم. ابتدا، جمله را به صورت علامتی می‌نویسیم. این‌کار در مراحل زیر انجام شده است.

علامت	گزاره
R	فردا باران خواهد بارید.
S	بیمار خواهم شد.
$R \wedge S$	فردا باران خواهد بارید ومن بیمار خواهم شد.
$\sim R$	فردا باران نخواهد بارید.
$S \vee \sim S$	بیمار خواهم شد یا حالم خوب خواهد بود.

$\sim R\wedge(S\vee\sim S)$	فردا باران نخواهد بارید ومن بیمار خواهم شد یا حالم خوب خواهد بود.
$(R\wedge S)\vee[\sim R\wedge(S\vee\sim S)]$	فردا باران خواهد بارید و من بیمار خواهم شد یا فردا باران نخواهد بارید و من بیمار خواهم شد یا حالم خوب خواهد بود.

گـزارهٔ مرکب فوق به اختصار بـه صورت علامتی $(R\wedge S)\vee[\sim R\wedge(S\vee\sim S)]$ نوشته می‌شود. جدول ارزش این گزاره درجدول ۲.۱۲ داده شده است.

جدول ۲.۱۲

R	S	$(R\wedge S)$	$\sim R$	$\sim S$	$(S\vee\sim S)$	$[\sim R\wedge(S\vee\sim S)]$	$(R\wedge S)\vee[\sim R\wedge(S\vee\sim S)]$
T	T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

دراین صورت ارزشهای راستی ستون نهائی جدول فوق را به‌صورت‌ستون نهائی جدول ۲.۵، یعنی جدول ارزش $R\Longrightarrow S$ به‌جا مـی‌آوریم. به عبارت دیگـر، عبارت مرکب فوق معادل‌گزارهٔ «اگر فردا بـاران ببارد، در این صورت من بیمار خواهم شد» می‌باشد.

برای مثال دیگر، گزارهٔ زیررا درنظر می گیریم: «فردا باران نخواهد بارید یا به سینما خواهم رفت (یا هردو مورد اتفاق خواهد افتاد).» باردیگـر گزاره را به‌صورت علامتی آن می‌نویسیم.

علامت	گزاره
R	فردا باران خواهد بارید.
$\sim R$	فردا باران نخواهد بارید.
M	به سینما خواهم رفت.

$\sim R \vee S$ فـردا باران نخواهد بارید یا به سینما خواهم رفت (یا هردو).

جدول ارزش این گزاره، درجدول ۲.۱۳ داده شده است.

جدول ۲.۱۳

R	S	$\sim R$	$\sim R \vee S$
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

بازهم این‌گزاره معادل $R \Longrightarrow S$ ، یا «اگـر فردا باران ببارد، در این صورت به‌سینما خواهم رفت» می‌باشد. توجه داشته باشید‌که مثال فوق به‌این حقیقت جالب‌که رابط استلزام را می‌توان برحسب رابطهای نقیض و «یا» نوشت اشاره دارد.

لازم‌نیست‌که شخص درساده‌کردن عبارات مرکب همواره ازجداول‌ارزش استفاده کند. جداول ارزش تنها برای استخراج تعدادی‌کافی از قواعد منطقی‌یی کـه می‌توانند نتیجةً درساده‌کردن گزاره‌های‌پیچیده به‌کار روند موردلزومند. حتی همین‌آشنائی مجمل[1] شامل قواعد منطقی کافی برای توضیح‌عملیات ساده‌سازی گزاره‌های علامتی مرکب‌است. به‌عنوان مثال، اگر باعبارت علامتی $[\sim Q \Longrightarrow \sim P] \wedge [(\sim Q \vee P)]$ مواجه‌شویم، می‌توانیم از جداول ارزش در ساده کـردن آن استفاده کنیم. اما روش بسیار ساده‌تر این کار شامل استفاده کـردن از نتایج قبلاً تحقیق شده است. قبلاً نشان دادیم کـه

$$(P \Longrightarrow Q) \qquad (\sim Q \Longrightarrow \sim P)\text{،}\ (Q \Longrightarrow P) \Longleftrightarrow (\sim Q \vee P)$$

$$[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)] \Longleftrightarrow (P \Longleftrightarrow Q)$$

با قرار دادن این نتایج درگزارهٔ اصلی، شخص

$$[(\sim Q \Longrightarrow \sim P) \wedge (\sim Q \vee P)] \Longleftrightarrow [(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow P)]$$
$$\Longleftrightarrow (P \Longleftrightarrow Q)$$

1. bare introduction

را به‌دست می‌آورد. بنا براین، عبارت مرکب اصلی به $(P \Longleftrightarrow Q)$ تقلیل می‌یابد.

این روش، چون به‌طور کامل گسترش یابد، منتهی به جبر منطق علامتی موسوم به جبر بول[1] می‌شود. جبر بول، گر چه ابتداءً برای انجام عملیات و تحلیل عبارات منطقی مطرح شده، کاربردهائی در رشته‌های پیش‌بینی نشده‌یی چون تحلیل‌مدارات قطع و وصل الکتریکی پیچیده و مرکب[2] پیدا کرده است. این مورد تنها یکی ازموارد بسیار کاربرد نتایج ریاضی در حوزه‌هایی کـه توسط به وجـود آورندگانشان پیش‌بینی نشده است، می‌باشد. خوانندهٔ علاقه‌مند به‌مطالعهٔ بیشتر منطق‌ریاضی می‌تواند مثالهای بیشتری درفصل ۱۲ بیابد، نیز می‌تواند به‌مرجع ۷ رجوع کند.

سورها Quantifiers

در نوشته‌هـای ریاضی شخص غالباً با عباراتی به صورت «به ازاء جمیع مقادیر x»، «به ازاء جمیع اعداد صحیح»، «به ازاء هـرعدد طبیعی»، «به ازاء بعضی مقادیر x»، «به ازاء بعضی اعداد طبیعی»، «xی موجود است» وغیره مواجه می‌شود. این عبارات[3] به سور[4] موسومند. عبارات داده شده مثالهائی از دو نوع سور می‌باشند: سور عمومی[5] وسور وجودی[6]. سورهائی عمومی‌نامیده می‌شوندکه شامل‌عبارت «به‌ازاء جمیع‌مقادیر[7]» یا معادل آن باشند. سورهـای وجودی عبارت «موجود است»[8] یا معادل آن را به‌کار می‌برند. به این ترتیب، «به‌ازاء جمیع مقادیر x» و «به‌ازاء هـرعدد طبیعی» سورهای عمومی‌اند، درحالیکه «به‌ازاء xی» و «xی موجود است» سورهای وجودی می‌باشند.

گرچه بسیاری از قضایای ریاضی شامل سور عمومی‌اند، این سور اغلب به طور صریح بیان نمی‌شود. به‌عنوان مثال، تساوی $x^{2}-1=(x+1)(x-1)$ در واقع باید به‌صورت «به‌ازاء هرعدد حقیقی x، $x^{2}-1=(x+1)(x-1)$» بیان‌شده‌باشد. به‌همین ترتیب، $1+2+3+\cdots+n=(n(n+1)/2)$، به جای گـزارهٔ «به‌ازاء هـرعدد طبیعی n، $1+2+3+\cdots+n=(n(n+1)/2)$»، قرار گرفته است. گرچه اغلب می‌توان سور مناسب را شناخت، اوقاتی موجودند کـه باید آن را به‌طور صریح بیان

---

1. Boolean algebra
2. complex electrical switching circuits
3. phrases
4. quantifier
5. universal quantifier
6. existential quantifier
7. for all
8. there exist

کرد. به عنوان مثال، شخص میل ندارد عبارت «به ازاء جمیع اعداد صحیح» را با «به ازاء جمیع اعداد حقیقی» اشتباه کند. دراین‌صورت هنگامیکه بروز چنین اشتباهی ممکن باشد، لازم است که سور را به‌طور واضح بیان کنیم.

معادلهٔ $(x-۱)(x+۱)=x^{۲}-۱$ را درنظر می‌گیریم. به ازاء $x=۱$ ، داریم $۱-۱^{۲}=(۱+۱)(۱-۱)$. این گزاره‌ئی است که می‌تواند با $P(۱)$ نمایش داده‌شود. یعنی، $P(۱)$ به‌جای $۱-۱^{۲}=(۱+۱)(۱-۱)$ قرار می‌گیرد. به‌همین ترتیب، به‌ازاء $x=۱/۲$ ، $۱-(۱/۲)^{۲}=(۱+۱/۲)(۱-۱/۲)$ را به دست می‌آوریم ، یعنی گزاره‌ئی که آن را با $P(۱/۲)$ نمایش می‌دهیم. درحالت کلی، شخص می‌تواندهرمقدار x را به‌کار برده گزارهٔ $P(x)$ را به‌دست‌آورد. دراین صورت چون x تغییر کند، گزاره‌های متفاوت به‌دست می‌آیند. به‌عنوان‌مثال، معادلهٔ $(x-۱)(x+۱)=x^{۲}-۱$،شامل بینهایت گزاره است. آنها را می‌توان به‌صورت «به ازاء هرعدد حقیقی x ، $P(x)$ راست‌است» بیان کرد. عبارت «بـه ازاء جمیع مقادیر x» را بـا علامت «$\forall x$» نمایش می‌دهیم. با استفاده از این علامت می‌توانیم این گزاره را به‌صورت $(\forall x)(P(x))$ بنویسیم.

برای اینکه راستی گزارهٔ شامل سورعمومی اثبات شود، باید به‌ازاء هرحالت ذکر شده درسورعمومی آن، مورد تحقیق قرارگیرد. به‌عنوان مثال، معادلهٔ

$$(x-۱)(x+۱)=x^{۲}-۱$$

باید به‌ازاء هرعدد حقیقی راست باشد. اگرشخص عدد حقیقی‌یی بیابدکـه به ازاء آن این معادله راست‌نباشد، دراین‌صورت گزارهٔ $(\forall x)(P(x))$ راست نخواهدبود. بنابراین، نقیض گزارهٔ شامل سورعمومی‌منتج به گزارهٔ شامل سور وجودی می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، برای نقیض کردن گزارهٔ شامل عبارت «به ازاء جمیع مقادیر x» باید تنها یك x کـه به ازاء آن گزارهٔ مورد بحث دروغ می‌شود به‌دست‌آید.

سور وجودی «xی موجود است» با$\exists x$ علامتی می‌شود. علامت $(\exists x)(P(x))$ به جای «xی موجود است که به ازاء آن $P(x)$ راست می‌باشد» قرار می‌گیرد. برای این که این گزاره صادق باشد لازم است که تنها یك x کـه به ازاء آن گزارهٔ $P(x)$ راست است به‌دست‌آید. نقیض گزارهٔ $(\exists x)(P(x))$، $(\forall(x))(\sim P(x))$؛ یعنی، به ازاء جمیع مقادیر x ، $P(x)$ دروغ است، می‌باشد.

دانستن تعاریف این دو نـوع سور دارای اهمیت است. عـلاوه براین، خواننده باید در به کار بردن گزاره‌های شامل سورها و نقیض کـردن چنین گزاره‌هـائی توانا باشد.

تکالیف و مسائل فصل ۲

۱. کدامیك از ده اظهار زیر گزاره است؟

(a) سیب روی زمین می‌روید.

(b) تصور می‌شود که او در نیویورك اقامت دارد.

(c) آیا ژاپنی‌ها در آلاسکا هستند؟

(d) ۱۰ = ۴۲

(e) ۲۹ عددی فرد است.

(f) تمام اشخاص چاق خوش‌مشربند.

(g) بعضی از همسگایگانم پرسروصدا هستند.

(h) دو بعلاوه دو مساوی ۵ یا احتمالا ۴ است.

(i) آیا ریاضیات علم است؟

(j) بعضی حیوانات چهارپا هستند، درحالیکه بقیه دوپا می‌باشند.

۲. فرض می‌کنیم P گزارهٔ «او سخت‌کار می‌کند»، Q، «او ثروتمند است» و R، «اتومبیلش شکسته است» را نمایش دهد. با استفاده از این علامت‌گذاری، هریك از گزاره‌های علامتی زیر را به‌صورت جمله‌یی[1] بیان کنید.

(a) $P \Longrightarrow (Q \vee R)$

(b) $(P \Longleftrightarrow Q) \vee (P \Longrightarrow R)$

(c) $(P \Longrightarrow Q) \vee (P \Longrightarrow \sim Q)$

(d) $(P \wedge Q) \Longrightarrow Q$

(e) $(P \vee Q) \wedge R \Longrightarrow \sim P$

(f) $(P \wedge Q) \Longrightarrow (P \vee R)$

(g) $(P \Longleftrightarrow Q) \vee (P \Longleftrightarrow R)$

(h) $(P \Longrightarrow R) \Longleftrightarrow (Q \Longrightarrow R)$

(i) $[(P \vee Q) \Longleftrightarrow R] \Longleftrightarrow [(P \wedge Q) \Longleftrightarrow R]$

(j) $\sim (P \vee Q) \Longrightarrow [\sim (P \wedge R) \vee (\sim Q \wedge \sim R)]$

---

1. sentence form

۳. گزاره‌های زیر را به‌صورت علامتی بنویسید.

(a) «جان[1]» بیمار یا ثروتمند (یا هردو) است.

(b) جان یا تیم فوتبال را آماده نمی‌کند یا در تورنمنت بریج[2] بازی می‌کند.

(c) اگر او بازندهٔ بدی است، دراین صورت ما با او بازی نخواهیم کرد.

(d) اگر نمی‌دانستم که او با هوش است، می‌گفتم که احمق است.

(e) گفتن اینکه او مرد بزرگی است معادل گفتن اینست که اعمالش برجسته است.

(f) یا می‌داند چه می‌کند یا دیوانه است (اما نه هردو).

(g) این فیلم یا مبتذل و بی‌ربط است یا کاری هنری است. (دراین مورد هردوحالت می‌توانند امکاناً راست باشند.)

(h) دو عدد نامساوی موجود است.

(i) تمام اعداد طبیعی مثبت‌اند.

(j) گزارهٔ زیر راست نیست: عدد اول زوج بزرگتراز ۲یی موجود است.

۴. درستی گزاره‌های علامتی زیر را تحقیق کنید.

(a) $P \Longrightarrow (P \vee Q)$

(b) $(P \wedge Q) \Longrightarrow P$

(c) $(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (Q \Longleftrightarrow P)$

(d) $[(P \vee Q) \vee R] \Longleftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$

(e) $[(P \wedge Q) \wedge R] \Longleftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$

(f) $[P \vee (Q \wedge R)] \Longleftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$

(g) $\sim(p \wedge Q) \Longleftrightarrow (\sim P) \vee (\sim Q)$

(h) $\sim(P \vee Q) \Longleftrightarrow (\sim P) \wedge (\sim Q)$

(i) $[P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)] \Longleftrightarrow [(P \wedge Q) \Longrightarrow R]$

(j) $[P \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow [(P \wedge Q) \Longrightarrow (P \wedge R)]$

(k) $[(P \Longleftrightarrow Q) \wedge (Q \Longleftrightarrow R)] \Longleftrightarrow (P \Longleftrightarrow R)$

۵. در تحلیل گزاره‌های این مسأله از جداول ارزش استفاده کنید. بعد مشخص کنید که

---

1. John 2. bridge tournament

استدلال درست است یا خیر.

(a) زوج یا فردبودن برای اعدادصحیح تعریف شده‌است، هرچیزکه برای اعدادصحیح تعریف شده باشد ارزش ادبی ندارد. بنابراین، تعریف زوج یا فرد بودن ارزش ادبی ندارد.

(b) اگر باران ببارد زمین خیس می‌شود. رانندگی در زمینهای خیس مشکل است بنابراین اگر باران ببارد رانندگی مشکل است.

(c) کسانیکه سخت‌کار می‌کنند ترفیع درجه می‌گیرند. کسانیکه ترفیع‌درجه می‌گیرند پول بیشتری به‌دست می‌آورند. بنابراین، کسانیکه سخت‌کار می‌کنند پول بیشتری به‌دست می‌آورند.

(d) اگر با استعداد می‌بود، مشهور می‌شد. مشهور نشد. بنابراین، بااستعداد نیست.

(e) اگر با استعداد می‌بود، مشهور می‌شد. مشهور شد. بنابراین با استعداد است.

(f) اگر امین می‌بود درستکار می‌شد. اگردرستکار می‌شد محبوب نیزمی‌شد. درستکار و بعد محبوب شد. بنابراین امین است.

(g) یا دروغگو و احمق است یا امین است. احمق است بنابراین، امین نیست.

(h) اگر دروغگو است، در این صورت احمق‌است، و اگر احمق‌است، در این صورت پست است، بنابراین اگر دروغگو است در این صورت پست است.

(i) اگر استعداد دارد و درس‌خوان است و زرنگ است، در این صورت یا استعداد دارد و درس‌خوان است یا استعداد دارد و زرنگ است.

(j) راست نیست که‌او امین و دروغگو است. بنابراین، یا امین نیست‌یا دروغگو است.

۶. گزاره‌های زیر را ساده کنید.

(a) اگر دوشنبه تعطیل رسمی باشد، یا به‌باغ وحش نخواهم رفت، یا درخانه‌خواهم ماند، یا نه درخانه خواهم ماند نه به باغ‌وحش خواهم رفت.

(b) اگر من مریض باشم ، در این صورت آسپیرین می‌خورم یا دکتر می‌روم ، یا ، آسپیرین می‌خورم و بعد دکتر می‌روم.

(c) یا در این دوره قبول می‌شوم و ترم بعد فارغ‌التحصیل می‌شوم ، یا در این دوره قبول نمی‌شوم و یا ترم بعد فارغ‌التحصیل می‌شوم یا ترم بعد فارغ‌التحصیل نمی‌شوم.

(d) یا سخت مطالعه می‌کند و موضوع را یاد می‌گیرد یا سخت مطالعه می‌کند و در نیویورك زندگی می‌کند.

(e) راست نیست که هم سخت مطالعه می‌کند هم موضوع را یاد می‌گیرد ، گرچه راست است که موضوع را یاد می‌گیرد.

Chapter 3 فصل ۳

مروری بر اعداد و علامت گذاری

A Review of Numbers and Notation

مقدمه

دراین فصل و فصل بعد تعاریف مبنایی ریاضیات، مفاهیم، وعلاماتی که دراین کتاب به کار رفته‌اند را مرور می‌کنیم . این فصل براساس دستگاه اعداد حقیقی متمرکز است و استعمال صحیح علامات ریاضی را مورد بحث قرار می‌دهد. فرض براین است که خواننده با شمارش آشنا و به انجام عملیات حسابی تواناست. به خاطر داشته باشید که این فصل،فصل مروری است و بحث کامل هیچ یك از موضوعات مورد بحث نیست.

مجموعه‌ها Sets

اغلب شاگردان دبیرستانی‌ئی که اخیراً درسال اول یادوم «ریاضیات مدرن» می‌خوانند با عبارت «مجموعه[1]» آشنایند . اما غالب ما در دبستان جمع ساده و نه تئوری مجموعه‌ها را آغازکرده‌ایم. و ازآنجاکه عبارت «مجموعه» به‌کرات به‌کار می‌رود بحث مختصری از مجموعه‌ها را می‌آوریم.

---

1. set

مجموعه بـه‌عنوان کلکسیونی از اعضاء یا اجزاء متمایز تعریف شده‌است. به این ترتیب ممکن است ازمجموعهٔ پرتقالها، مجموعهٔ اعداد حقیقی، مجموعهٔ دانشجویان یك کلاس، یا مجموعهٔ فصول این‌کتاب صحبت‌کنیم. علاوه برعبارت «مجموعه» دانستن‌مفهوم «زیرمجموعه[1]» مفید است. گفته می‌شودمجموعهٔBزیرمجموعهٔA است،اگرهرعضوB عضوی از A باشد. به‌عنوان مثال، مجموعهٔ شامل شش فصل اول این‌کتاب زیرمجموعهٔ مجموعهٔ تمام فصول این کتاب است. توجه داشته باشیدکه هر مجموعـه زیر مجموعـهٔ خودش است.

اگر B زیر مجموعـهٔ A باشد و A شامل اعضایی‌که در B نیستند باشد. در این صورت‌گفته می‌شودکه B زیر مجموعهٔ حقیقی A است. به این ترتیب، مجموعهٔ شش‌فصل اول زیـر مجموعهٔ حقیقی تمام فصول این‌کتاب است. از طرف دیگر مجموعهٔ ۱۳ فصل اول، زیرمجموعهٔ حقیقی تمام فصول‌این‌کتاب، ازآنجاکه شامل تمام فصول‌کتاب‌میباشد، نیست.

علامت‌گذاری Notation

اغلب خوانندگان می‌دانند کـه ریاضیدانها مایل به جانشین کردن علائم به‌جای جملات فارسی می‌باشند. البته ریاضیدانها استعمال کنندگـان انحصاری علائم نیستند. بسیاری از خـوانندگـان اختصارات *IBM* ، *FBI* ، *NASA* ، والبته *IRS* را مـی‌شناسند. پیشرفت عصرکامپیوتر برای بسیاری از اشخاص ضروری ساخت‌که برای ارتباط باوسایل عظیم الکترونیکی‌شان[2] زبانهای علامتی جدیدی بیاموزند. به‌خاطر داشته‌باشیدکه علائم به‌جای عبارات شفاهی قرارمـی‌گیرند، وتنها وسیلهٔ دقیق ومفید ارتباط، هنگامیکـه معنی یکسانی را به هر به‌کاربرنده‌یی انتقال می‌دهند، می‌باشند. به‌همین علت ضرورت‌داردکه خواننده با علامت‌گذاری هرمؤلف‌آشنا شود. تعبیر غلط علائم می‌تواند به‌نوعی درك نادرست‌که با تعبیر ناصحیح‌کلمات‌کلیدی رخ می‌دهد منجرشود.

خوشبختانه بسیاری از علائم ریاضی به‌قدری عمومیت دارندکه اغلب‌تنها، دانستن اصول سادهٔ هرزبان خارجی برای درك جزئیات اساسی هرروش ریـاضی نوشته شده درآن زبان لازم است. علامتهای سه (۳)، جمع (+)، بزرگتر از (>)، انتگرالگیری[3] ($\int$) و مانند آنها، بـرای تقریباً تمام افـراد دنیا دارای معنی یکسان می‌باشند. اما چون

1. subset 2. electronic monsters
3. integrate

مسائل ریاضی پیچیده‌تر شوند، نیاز بـه‌علامت گذاریهای پیچیده‌تـر ومتنوع‌تر به وجود می‌آید. ریاضیدانهای مختلف برای نمایش دادن مفاهیم ریاضی یکسان علائم متفاوت را ترجیح می‌دهند. به‌عنوان مثال، یکی ممکن است p را برای نمایش عدد اول به کار برد و دیگری از a استفاده کند، درحالیکه ممکن است سومی α را ترجیح دهد. به‌همین‌ترتیب ممکن است مؤلفی دریك وضعیت p را برای نمایش عدد اول به کار بـرد درحالیکه در درموقعیت دیگرممکن است تصمیم بگیردکه از p به‌عنوان عدد حقیقی بین‌صفرویك‌استفاده کند. دراین مورد از نویسنده تنها این مطلب خواسته می‌شود که علامتش را درطی یك مثال ثابت نگهدارد و درتغییر آن درمثال دیگرآزاد است.

دانشجویـان تازه‌کار پیوسته درمـورد تعداد علامتهای به‌کاررفته وناسازگاری در کاربرد آنها بین یك متن ومتن دیگر، یـا بین یك مثال و مثال دیگر دریك‌کتاب شکایت می‌کنند. سعی ما اینست‌کـه درسراسراین کتاب معقولانه ثابت باشیم، ولی ما نیز اعتقاد داریم‌که برای دانشجو اساسی است‌که دراین مورد پس از به‌دست‌آوردن تجربه دارای انعطاف باشد و باسهولت معقول به تغییرات عادت‌کند.

دراین‌جا علاوه بر بحث عمومی علامت‌گذاری، شرحی درمورد دو عمل کـه اغلب برای مبتدی موجب اشکال می‌شوند می‌آوریم. یکی‌ازاین دو استفاده از پرانتز،ودیگری نمایش حذف عبارات با استفاده ازنقاط متوالی است.

هنگامیکـه شخصی $(۲+۱)(۳+۲)$ می‌نویسد مقصودش اینست‌کـه اعداد نوشته شده داخل پرانتز باید جمع وسپس دوحاصل جمع درهم ضرب شوند، یعنی

$$(۲+۳)(۱+۲)=(۵)(۳)=۱۵$$

ازطرف دیگر، $(۲+۱)۳+۲$ ، مقرر می‌کندکه $۲+۱$ باید جمع شود، بعد حاصل‌جمع در ۳ ضرب شود و این حاصل با ۲ جمع شود. یعنی

$$۲+۳(۱+۲)=۲+۳(۳)=۲+۹=۱۱$$

اهمیت داردکه به خاطر داشته باشیم که ، درمورد پرانتزهای درهم ضرب شده، شخص باید عمل را در داخل درونی‌ترین پرانتزها انجام داده مسیررا به سمت خارج‌طی‌کند. به‌عنوان مثال،

$$۲\{[۲۵۰+(۸-۲)]-[(۲-۱)+(۲۰۲-۵۰)]\}$$
$$=۲\{[۲۵۰+۶]-[۱+۱۵۲]\}$$
$$=۲\{۲۵۶-۱۵۳\}=۲\{۱۰۳\}=۲۰۶$$

علامت دیگری که غالباً به‌کار می‌رود را می‌توان با مثال

$$۱+۲+۳+\cdots+۱۰$$

مشخص کرد. سه نقطهٔ واقع در این مثال اشاره به‌حذف نمونهٔ مشخصی از اعداد گمشده دارد. یعنی، $۱+۲+۳+\cdots+۱۰$ همان

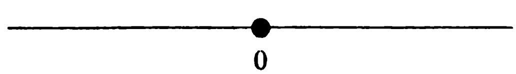
$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰$$

است. به‌عنوان مثال دیگر، $۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲$ مجموع مربعات n عدد اولیه را نمایش می‌دهد.

اعداد حقیقی Real Numbers

ممکن است خواننده با خواص اعداد حقیقی چنان به‌تفصیل آشنا باشد که از کشف فلسفی عظیمی که با درك آدمی از آنها اتفاق افتاد آگاه نباشد. با احتمال بسیار از اعصار ابتدائی مردم آگاهی داشتند که سه ماهی بیشتر از دوماهی است، با اینهمه احتمالاً نمی‌توانستند تشابه بین سه‌ماهی و سه شخص را ملاحظه کنند. قرنها طول کشید تا بشر دریابد که سه ماهی و سه شخص درچیزی، یعنی اینکه سه تا از هریك موجود می‌باشد، مشترکند.

از آنجاکه این کتاب منحصراً محدود به دستگاه عدد حقیقی است، یعنی، به‌بحث درمورد دستگاههای عددی مختلط یا غیرحقیقی دیگر نمی‌پردازد، بحثمان را با تعریف اعداد حقیقی آغاز می‌کنیم، و برای این منظور تعریف هندسی ساده‌یی کفایت می‌کند. خط مستقیمی، که به‌طور نامتناهی رسم، وقطعه‌یی از آن درشکل ۳.۱ نشان داده شده، را درنظرمی گیریم. نقطه‌یی بر این خط مشخص کرده آنرا صفر، ۰، می‌نامیم.



شکل ۳.۱

هرفاصله از این نقطه تا نقطهٔ دیگر واقع براین خط، عددی حقیقی است. اگراین نقطهٔ دیگردرسمت راست (چپ) ۰ واقع‌باشد، دراین صورت فاصلهٔ مزبور مثبت (منفی) در نظر گرفته می‌شود. مجموعهٔ اعداد حقیقی شامل تمام فواصل ممکن، مثبت و منفی‌یی که بتوانند بر این خط اندازه‌گیری شوند، است. مثالهائی از اعدادحقیقی عبارتند از ۲، $۱/۲$، -۵، $\sqrt{۲}$، ۳، $-\sqrt{۳}$، و $۲۷۴/۳۲۹$.

مجموعهٔ اعـداد حقیقی را میتوان به‌زیر مجموعه‌های مختلف تقسیم کـرد. دراین موردکار را با بررسی مجموعهٔ اعداد طبیعی آغاز می‌کنیم. **اعداد طبیعی**[1] اعدادشمارش یعنی ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، و غیره‌اند . توجه داشته باشیدکه صفر و اعداد منفی داخل در مجموعهٔ اعداد طبیعی *نیستند*.

یك خاصیت اعداد طبیعی اینست‌که می‌توانند به‌صورت حاصلضرب اعداد طبیعی دیگر نوشته شوند. به عنوان مثال ، ۲۶ = (۲)(۱۳) ، ۵۰ = (۲)(۲۵) = (۲)(۵)(۵)، ۱۳ = (۱)(۱۳). چون عدد طبیعی‌یی به‌صورت حاصلضرب چند عدد طبیعی نوشته شود، این اعداد را **عوامل** یا فاکتورها[2] یا مقسوم علیه‌های[3] عدد اصلی مـی‌نامند. درمثالهای فوق،هم ۲هم ۱۳ عوامل ۲۶اند. به‌همین‌ترتیب ۲۵ عامل ۵۰ است وتنها ۱و ۱۳عوامل ۱۳ می‌باشند. عدد طبیعی، بزرگتر از یکی،که تنها عواملش یك وخـود آن عدد باشد، **عدد اول**[4] نامیده مـی‌شود. بـه‌این ترتیب، ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، ۲۳ وغیره اعداد اولند. عامل اول را به‌صورت عاملی کـه‌عـدد اول است تعریف می‌کنیم. با این تعریف، می‌توانیم قضیه‌یی را که‌گاهی قضیهٔ اساسی حساب[5] نامیده می‌شود بیان‌کنیم.

قضیه : هرعدد طبیعی جز یك میتواند به‌صورت حاصلضرب عوامل اولش و یکها نوشته شود.

این تجزیه جز درمورد ترتیب ویکها منحصر به فرداست.

به عنوان مثالی از این قضیه عدد ۲۴ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲۴ = (۲)(۱۲) = (۲)(۴)(۳) = (۲)(۲)(۲)(۳) = (۳)(۲)(۲)(۲)

یعنی عوامل اول ۲۴ عبارتند از ۲، ۲، ۲، و ۳. به‌همین دلیل، ۲۴ را می‌توان به‌صورت حاصلضرب۲، ۲، ۲، و۳ *نوشت*؛ ازاین گذشته‌هیچ مجموعهٔ اعداد اول‌دیگری‌حاصلضرب ۲۴ ندارد.

با استفاده از اعداد طبیعی، می‌توان مفهوم تعدادی‌متناهی از اشیاء را تعریف کرد. برای اینکار مجموعه‌یی ازاشیاء را درنظر می گیریم وسعی میکنیم به‌هریك ازآنهاعددی طبیعی مربوط کنیم، یعنی، عدد یك را به یکـی از آنها، عدد دو را به دیگـری، و غیره

1. natural numbers
2. factors
3. divisors
4. prime number
5. Fundamental Theorem of Arithmetic

ارتباط می‌دهیم. اگر تنها N عدد ، N عددی طبیعی است، برای مشخص کردن تمام این اشیاء به‌کار رفته باشد، دراین‌صورت می گوئیم تعدادی **متناهی**[1] از اشیاء موجوداست، واگرنتوان چنین‌عدد طبیعیNی‌را پیداکرد، دراین‌صورت می گوئیم که تعدادی نامتناهی از اشیاء وجود دارد.

زیرمجموعهٔ دیگر اعداد حقیقی، مجموعهٔ اعداد گویاست. **اعدادگویا**[2] جمیع اعدادی می‌باشند که بتوانند از نسبتهای[3] اعداد طبیعی و تفاضلات چنین نسبتهائی ساخته شوند. با این تعریف، اعدادگویا شامل صفر و کسرهای مثبت و منفی می‌شود. اعداد ۱/۲ ، ۳۵۷/۴۲۱ ، ۲ ، ۴۴۷/۲۹۱— ، ۱۲/۳۶۵— مثالی چند از اعداد گویایند. دراین مورد برای تحقیق دراینکه ۱۲/۳۶۵— عددی‌گویاست، چنین می نویسیم:

$$-\frac{۱۲}{۳۶۵}=\frac{۱}{۳۶۵}-\frac{۱۳}{۳۶۵}$$

مواردی موجودند که درآنها صورت ومخرج اعدادگویا عوامل مشترك دارند. به‌عنوان مثال، (۳)(۱۲)/(۱)(۱۲) = ۱۲/۳۶، وصورت ومخرج هردو دارای مقسوم علیه مشترك[4] ۱۲اند. درچنین وضعیاتی، مقدار عدد، چون عامل مشترك حذف شود، تغییر نمی‌کند، یعنی ۱/۳ = ۱۲/۳۶می‌شود. **اعداد صحیح**[5] اعدادگویایی هستندکه بعد از حذف تمام عوامل مشترك، درمخرجشان يك‌عدد يك داشته باشند. برای مقصودی‌که‌داریم، اعداد صحیح مثبت[6] را یکسان با اعداد طبیعی درنظرمی‌گیریم. اعداد صحیح نه‌تنهاشامل اعداد صحیح مثبت‌اند بلکه شامل صفرواعداد صحیح منفی نیزمی‌باشند.

اعداد صحیح را می‌توان به دوطبقهٔ اعداد صحیح زوج و اعداد صحیح فرد تقسیم کرد. **اعداد صحیح زوج**[7] اعدادی هستندکه میتوانند به‌صورت $۲n$، که درآن n عدد صحیحی است، نوشته شوند. با این تعریف، توجه می کنیم که ۸— ، ۲— ، ۴ ، و ۲۸ مثالهائی از اعداد صحیح زوجند. **اعداد صحیح فرد**[8] اعدادی هستند که در صورت $۲n+۱$، که درآن n عدد صحیحی است، قابل بیانند. مثالهائی ازاعداد صحیح فرد ۱۱— ، ۳— ، ۷، ۲۹، ۱۵۱، و ۲۳۹ اند؛ به‌عنوان مثال ، ۱۵۱ را می‌توان به‌صورت $(۲)(۷۵)+۱$ نوشت. با این تعاریف ملاحظه می‌کنیم که صفرعددی زوج است، زیرا $۲(۰) = ۰$ می باشد.

1. finite 2. rational numbers
3. ratios 4. common divisor
5. integers 6. positive integers
7. even integers 8. odd integers

گرچه اعداد گویای بسیاری موجودند، تمام اعداد حقیقی گویا نیستند. بنابراین می‌توانیم اعداد گنگ[1] یا اصم را به‌صورت اعداد حقیقی‌یی که اعداد گویا نیستند تعریف کنیم. در فصل ۹، نشان می‌دهیم که $\sqrt{۲}$ عددی گنگ است؛ به‌این ترتیب، وجود چنین اعدادی محقق است. جورج کانتور[2] این نتیجهٔ شگفت‌آور را ثابت کرد که بیش از اعداد گویا عدد گنگ وجود دارد. در فصل ۹، چند مثال دیگر از اعداد گنگ داده شده، و در فصل ۱۳ نشان داده‌ایم که تعدادی نامتناهی از اعداد گنگ موجود است. طبقات مختلف اعداد حقیقی در جدول ۳.۱ خلاصه شده‌اند.

جدول ۳.۱

طبقه بندی اعداد حقیقی

اعداد حقیقی: تمام فواصل اندازه پذیر ممکن بر یك خط (مثبت و منفی هردو). امثله: ۵، −۳(۱/۲)، $\sqrt{۲}$، $-\pi$

اعداد گویا: تمام اعدادی که به صورت نسبتهای اعداد طبیعی وتفاضلات چنین نسبتهائی قابل بیانند.
امثله: ۳۲۵۱، −۴۶، ۷/۸، −۱/۱۲، −۳۵۲(۱/۲)

اعداد گنگ: تمام اعداد حقیقی‌یی که گویا نیستند.
امثله: π، $\sqrt{۲}$، ۲+$\sqrt{۲}$

اعداد صحیح: تمام اعداد گویایی که بتوانند چنان تجزیه شوند که مخرج‌شان یك شود (جمیع اعداد تمام)
امثله: −۲، ۱، ۱۵، ۲۲/۲، −۱۲/۶

اعداد صحیح زوج: تمام اعداد صحیح قابل بیان به‌صورت ۲n، که در آن n عدد

اعداد صحیح فرد: تمام اعداد صحیح قابل بیان به‌صورت ۲n+۱، که در آن n

←

1. irrational numbers

۲. Georg Cantor ،۱۸۴۵ – ۱۹۱۸.

صحیحی است. امثله: ۲ —، ۰، ۲۲، ۳۶ عدد صحیحی‌است. امثله: ۱۷ — ،۱۱ — ، ۱ ، ۳۹

↓

اعداد طبیعی: اعداد شمارش . اعداد صحیح مثبت
امثله : ۵ ، ۲۵۷ ، ۳۴۱

↓

اعداد اول : تمام اعداد طبیعی بزرگتر ازیك‌که تنها بریك و خودشان قابل قسمتند. امثله: ۲ ، ۷ ، ۱۱، ۱۷، ۳۱

اکنون با بحث طبقه‌بندی متفاوت دیگری درمورد اعداد حقیقی، روابط خاصی‌را میان چنین اعدادی تعریف می‌کنیم، وابتدا به‌تعریف تساوی می‌پردازیم. به دوعددحقیقی مساوی گفته می‌شود اگر مقادیـر یکسان داشته باشند. a مساوی b را با $a=b$ نمایش می‌دهیم. اگر دوعدد a و b مساوی نباشند، می‌توانیم این واقعیت را بـه صورت $a\neq b$ علامتی‌کنیم. درمورد هردوعدد حقیقی، دقیقاً یکی از سه‌حالت زیر باید راست باشد: (۱) $a=b$ ؛ (۲) a بزرگتر از b است؛ (۳) a کوچکتر از b است. a بزرگتر از b است را با $a>b$ علامتی، وآن را به‌این معنی تعریف می‌کنیم که عدد مثبت cئی چنان‌موجود است که $a=b+c$ باشد. به‌عنوان مثال، ۲<۳ ، زیـرا ۱ + ۲ = ۳،که درآن ۱ مثبت است، می‌باشد. بـه همین ترتیب ، $a<b$ چنین تعریف مـی‌شود : عدد مثبت dئی چنان موجود است که $a+d=b$ باشد. حالات گوناگون نامساوی در جـدول ۲ . ۳ خلاصه شده است.

جدول ۳.۲

گزاره	علامت	تعریف
a کوچکتر از b است	$a<b$	عدد مثبت cئی چنان موجود است‌که $a+c=b$
a بزرگتر از b است	$a>b$	عدد مثبت dئی چنان موجود است که $a=b+d$

a کوچکتر از یا مساوی b است $a \leqslant b$	عدد نامنفی* eئی چنان موجوداست که $a+e=b$
a بزرگتر از یا مساوی b است $a \geqslant b$	عدد نامنفی fی چنان موجود است که $a=b+f$

یك خاصیت اعداد صحیح، بخش‌پذیری یا قابلیت تقسیم[1] آنهاست. گزارهٔ a بر b بخش پذیراست را به‌این معنی تعریف می‌کنیم که عدد صحیح rی چنان موجود باشد که $a=br$ باشد. دراینجا a، b، و r اعداد صحیح‌اند. به‌عبارت دیگر، a بر b بخش پذیر است معادل این گزاره است که b مقسوم علیه (عامل) a است. به‌عنوان مثال، ۳۴ بر ۱۷ بخش پذیر است زیرا $(۲)(۱۷) = ۳۴$ می‌باشد. توجه داشته باشید که هرعدد صحیحی برعواملش بخش پذیراست.

خاصیت دیگر اعداد طبیعی را می‌توان با به‌دنبال هم فهرست کردن آنها مشاهده کرد. بانوشتن اعداد طبیعی به‌صورت ۰۰۰، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ملاحظه می‌کنیم که هرعدد دوم زوج است. گذشته از این، اعداد ۳، ۶، ۹، ۱۲، و غیره بر ۳ قابل قسمتند، یعنی، هرعدد سوم بر۳ بخش پذیر است. به‌همین‌ترتیب، هرعدد چهارم بر۴ بخش پذیر است وغیره. علاوه براین، از فهرست‌کردن متوالی اعداد طبیعی می‌توان برای به دست آوردن اعداد اول استفاده کرد. اولین ۲۵ عدد را به‌دنبال هم می‌نویسیم:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵

دراین صورت اولین عدد بعد ازیك، یعنی‌عدد دو،اولین عدداول‌است،پس هیچ مضرب دو نمی‌تواند اول باشد. حذف این اعداد، ویك،

۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳، ۲۵

را باقی می‌گذارد. اولین عدد این دنباله، یعنی سه، دومین عدد اول است، و مضارب سه نمی‌توانند اول باشند. حذف مضارب سه،۲۵، ۲۳، ۱۹، ۱۷، ۱۳، ۱۱، ۷، ۵، را باقی می‌گذارد. لذا پنج، عدد اول بعدی است. حذف‌مضارب پنج تنها۲۳، ۱۹، ۱۷، ۱۳، ۱۱، ۷ را باقی می‌گذارد. اما ازآنجاکه $(۵)(۵) = ۲۵$ است، عدد اول دیگری باقی نمی‌ماند. بنابراین، ۲۵ عدد اولیه شامل اعداد اول ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹، و۲۳ است.

* توجه داشته باشید که عدد نامنفی میتواند صفر یا عدد مثبت باشد.

1. divisibility

اگر به‌جای ۲۵، ۱۰۰۰ را به‌کاربرده بودیم، استفاده از این روش تمام اعداد اول بین ۲ و ۱۰۰۰ را به‌دست می‌داد.

ثوابت و متغیرات Constants and Variables

از آنجا که به‌طور کلی یا با ثوابت[1] یا با متغیرات[2] سروکار داریم، این عبارات را تعریف می‌کنیم. ثابت عددی مشخص یا علامتی است که عدد مشخصی را نمایش می‌دهد. مثالهای ثوابت عددی[3] ۲ ، $\sqrt{2}$ ، و π می‌باشند. سرعت نور و نقطهٔ انجماد آب در سطح دریا دو ثابت معروفند که در علوم طبیعی رخ می‌دهند. ثابت اول به صورت c در معادلهٔ $E=mc^2$ جاویدان شده است.

درمقابل ثابت، مفهوم متغیر حقیقی را داریم. اما پیش از تعریف این مفهوم، مثالی ازچنین متغیری می‌دهیم. نامساوی $x \leqslant 2$ را درنظر می‌گیریم. در میان مقادیر بسیار x ی که در این نامساوی صدق می‌کنند ۱، ۲—، ۰، π—، و ۲۱/۳۷۵— قرار دارد. میتوان گفت که $x \leqslant 2$ زیرمجموعه‌یی از تمام اعداد حقیقی، یعنی تمام اعداد حقیقی کمتر از یا مساوی ۲ را نمایش مـی‌دهد. چنین متغیری به متغیرحقیقی موسوم است. تعریف صوری متغیرحقیقی درزیر داده شده است.

متغیرحقیقی علامتی است که هرعضو یك زیر مجموعه از اعداد حقیقی را نمایش می‌دهد. این زیرمجموعه حداقل یك عضو دارد.

توجه داشته‌باشید که x واقع در گزاره‌های شامل سورهای «به‌ازاء بعضی مقادیر حقیقی x» یا «بـه ازاء جمیع مقادیـر حقیقی x» متغیری حقیقی است. به‌این تـرتیب، سورها را می‌توان به‌عنوان تقرب دیگری به‌تعریف عبارت «متغیر حقیقی» به‌کار برد.

مثالهای دیگر متغیرات حقیقی r و A در $A=\pi r^2$ ؛ x در $0 \leqslant 3x+4$؛ x و y در $xy=1$ ؛ و l ، w ، و A در $A=lw$ می‌باشند. در هریك از مثالهای فوق، خود را محدود به مجموعهٔ اعداد حقیقی کرده‌ایم و به‌عبارت دیگر وقتی می گـوئیم کـه r یك متغیر حقیقی است، مقادیر مختلط را برای r کنار می گذاریم.

1. constants 2. variables
3. numerical constants

ساده‌کردن عبارات جبری

Simplification of Algebraic Expressions

قبلاً استفادهٔ صحیح از پرانتزها را در محاسبات عددی مورد بحث قرار دادیم. اکنون استفاده از پرانتزها را دراعمال جبری مرور می‌کنیم. دراین مورد با استفاده از قانون توزیع پذیری ، $x(y+z)=xy+xz$ ، حاصل می‌کنیم

$$(v+w)(y+z)=v\,(y+z)+w(y+z)=v\,y+vz+wy+wz \qquad (۱)$$

$$x(v+w)(y+z)=(xv+xw)(y+z)=xv(y+z)+xw(y+z) \qquad (۲)$$
$$=xvy+xvz+xwy+xwz$$

حالات زیر از اهمیت خاصی برخوردارند

$$(x+y)(x-y)=x(x-y)+y(x-y)=x^۲-xy+xy-y^۲$$
$$=x^۲-y^۲$$

و

$$(x+y)^۲=(x+y)(x+y)=x(x+y)+y(x+y)$$
$$=x^۲+xy+xy+y^۲=x^۲+۲xy+y^۲$$

درعملیات جبری اغلب به‌بسط یك عبارت جبری فشرده نیازاست. دراین صورت میتوان $(x+y)^۲$ را به $x^۲+۲xy+y^۲$ بسط داد . مورد استعمال دیگرعملیات جبری قراردادن صورتهای فشردهٔ عبارات مفصل با استفاده از ترکیب جملات مشابه به‌جای آنهاست. به‌عنوان مثال ، $x^۳-۹x^۲y+۲۷xy^۲-۲۷y^۳$

برابر $(x-۳y)(x^۲-۶xy+۹y^۲)$

است. نیزتوجه داشته باشیدکه $(x^۲-۶xy+۹y^۲)=(x-۳y)^۲$. بنابراین،

$$x^۳-۹x^۲y+۲۷xy^۲-۲۷y^۳=(x-۳y)^۳$$

به‌عنوان مثال دیگر،

$$\frac{x}{(x+y)}-\frac{y}{(x-y)}+\frac{۲xy}{(x^۲-y^۲)}$$

که درآن $y\neq\pm x$ است را درنظرمیگیریم. سه‌جملهٔ عبارت را میتوان بامخرج مشترك

$$(x^{2}-y^{2})=(x-y)(x+y)$$

ترکیب کرد. به‌این ترتیب

$$\frac{x}{(x+y)}-\frac{y}{(x-y)}+\frac{2xy}{(x^{2}-y^{2})}$$
$$=\frac{x(x-y)}{(x-y)(x+y)}-\frac{y(x+y)}{(x+y)(x-y)}+\frac{2xy}{(x+y)(x-y)}$$
$$=\frac{x^{2}-xy-xy-y^{2}+2xy}{(x^{2}-y^{2})}=\frac{(x^{2}-y^{2})}{(x^{2}-y^{2})}=1$$

و ۱ تقریباً در هروضعیتی بر

$$\frac{x}{(x+y)}-\frac{y}{(x-y)}+\frac{2xy}{(x^{2}-y^{2})}$$

مرجح است

دربعضی حالات، شخص ممکن است لازم داشته باشدکه ابتدا عبارت جبری را بسط دهد و بعد باترکیب جملات و فاکتورگیری،آن را تبدیل کند. دراین موردعبارت زیررا بررسی می‌کنیم

$$(x+y)^{2}+(x+y)(x-y)=(x+y)(x+y)+(x+y)(x-y)$$
$$=(x+y)[(x+y)+(x-y)]$$
$$=(x+y)[(x+y+x-y)]$$
$$=(x+y)(2x)$$

عملیات جبری، مانند حساب، به تمرین احتیاج دارد، و دانشجوئی که تمرین‌کمی درمورد آن انجام داده باشد درابتداکند خواهد بود.

تکالیف ومسائل فصل ۳

۱. هریك از شش گزارهٔ زیر ، مجموعهٔ خاصی را توصیف می‌کند. بعضی از آنها زیر مجموعهٔ بعضی‌دیگرند. درموردهرمجموعه، درصورت وجود، تمام حالات دیگری را که درآنها زیر مجموعه است بیان کنید.

(a) تمام سیب‌هائی که درپنسیلوانیا به وجود آمده‌اند.

(b) تمام سیب‌های مکین‌تاشی[۱] که درپنسیلوانیا خورده شده‌اند.

(c) تمام سیب‌هائی که توسط باغداری درخارج هریس بورگ[۲]، پنسیلوانیا، به‌عمل آمده وفروخته شده‌اند.

(d) یك جعبه سیب خوش طعمی که توسط باغدار هریس بورگ مورد بحث به‌عمل آمده وفروخته شده است.

(e) تمام سیب‌های خراب واقع درجعبهٔ مذکور درفوق.

(f) تمام سیب‌های جوناتانی[۳] که درپنسیلوانیا به وجود آمده‌اند.

۴. مقدار هریك ازجملات زیررا به‌دست آورید:

(a) $$۳(۷+۲)-۲(۹+۳)$$

(b) $$۷[(۲+۷)-۶(۳-۲)]$$

(c) $$۴\left\{۲(۳+۱)-۳\left[\frac{(۲-۴)}{۶}+\frac{۳}{(۶-۲)}\right]\right\}$$

(d) $$\frac{۵}{[۳(۲-۱)+۷(۶-۴)][۴(۳-۱)+۶(۴-۲)]}$$

(e) $$۸(۴-۱)+\{۳[(۴-۱)+۲(۲-۷)]+۶[(۲-۹)+۳(۷-۲)]\}$$

(f) $$\left[۱+\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۴}\right)\right]\left[۲-\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\right)\right]$$

(g) $$\frac{[۲(۳-۱)+۳(۴-۲)][۶(۳-۱)+۴(۹-۳)]}{[۵(۷-۲)+۴(۵-۳)][۳(۳-۱)+۵(۶-۲)]}$$

(h) $$\left\{\frac{[۲(۳-۱)+۳(۴-۲)]}{[۷(۶-۲)+۳(۴-۱)]}\right\} : \{[۷(۳-۱)-۴(۴-۲)][۶(۴-۱)-۳(۵-۲)]\}$$

---

1. Macintosh apples
2. Harrisburg
3. Jonathan apples

$$\frac{\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\right)-۳\left(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}\right)}{۲\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}\right)-۳\left(\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۱۵}\right)} \qquad (i)$$

$$-۳[-۴(۶-۳)-۷(۴-۲)]+۲[-(۳-۲)+(-۷+۲)] \qquad (j)$$

۳. عبارات جبری زیر را بسط دهید.

(a) $x(x+y)+y(y-x)$

(b) $(x+y)(x-y)-(x+y)^{۲}$

(c) $\left(\frac{\pi}{۲}\right)(\pi r^{۲}+\pi x)\left(\frac{x}{\pi}\right)$

(d) $(x+y)^{۳}$

(e) $(x+y)^{۴}$

(f) $(x^{۲}+y^{۲})(x^{۲}-y^{۲})+x(x+y)y$

(g) $n(n+۱)(n+۲)(n+۳)$

(h) $(x-r_{۱})(x-r_{۲})(x-r_{۳})$ را به‌صورت $x^{۳}+ax^{۲}+bx+c$ ، که در آن a ، b ، c برحسب جملات $r_{۱}$ ، $r_{۲}$ ، $r_{۳}$ قابل بیان می‌باشند.

(i) $(x_{۱}-x_{۲})+(x_{۲}-x_{۳})+(x_{۳}-x_{۴})+(x_{۴}-x_{۵})+(x_{۵}-x_{۶})$

(j) از نتیجهٔ (i) در محاسبهٔ

$$\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)+\left(\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}\right)+\left(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}\right)+\left(\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}\right)$$

استفاده کنید.

۴. در هر یك از حالات زیر جملات محذوف را مشخص کنید.

(a) $\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{۱۲}$

(b) $\sqrt{۹}-\sqrt{۸}-\sqrt{۷}-\dots-\sqrt{۲}$

(c) $۱^{۲}+۲^{۲}+۳^{۲}+\dots+۱۰^{۲}$

(d) $(۱)(۲)+(۲)(۳)+(۳)(۴)+\cdots+(۱۰)(۱۱)$

(e) $(۱۲)(۱۱)(۱۰)\cdots(۱)$

(f) $(n+۱)^۲+(n+۲)^۲+(n+۳)^۲+\cdots+(n+۸)^۲$

(g) $x_۱+x_۲+x_۳+\cdots+x_{۱۰}$

(h) $x_۱^۲-x_۲^۲+x_۳^۲-x_۴^۲+\cdots-x_{۱۰}^۲$

(i) $(۱-x_۱)(۱-x_۲)(۱-x_۳)\cdots(۱-x_{۱۰})$

(j) $\frac{x_۱}{۱}+\frac{x_۲}{۲}+\frac{x_۳}{۳}+\cdots+\frac{x_{۱۲}}{۱۲}$

۵. در زیر ۱۵ عددگویا موجود است. بعضی می‌توانند به‌صورت عدد صحیح طبقه‌بندی شوند درحالیکه بقیه عدد طبیعی‌اند. هریک از این ۱۵عدد را با استفاده ازدقیق‌ترین عبارت ممکن طبقه بندی کنید.

(a)	-۲۷	(f)	$-\frac{۲۴}{۱۲}$	(k)	$\frac{۳۷۵}{۲۵}$
(b)	$-\frac{۲۷}{۴۳}$	(g)	۳	(l)	۰
(c)	۱۹	(h)	۲۸	(m)	۱۳
(d)	$\frac{۲۴}{۳۶}$	(i)	$-۱۵\left(\frac{۲}{۳}\right)$	(n)	$-۰/۱۰۱۲۰$
(e)	$\frac{۳۶}{۱۲}$	(j)	۱۲۲۵	(o)	$۷\sqrt{۴}$

۶. برای هریک از ده مورد زیرعدد نامنفی منحصر به‌فردی مشخص کنید که نامساوی را به تساوی تبدیل کند.

(a) $۱۷\geqslant ۲$

(b) $۳۱۷/۶۱۸>۵۴/۲$.

(c) $\frac{۴}{۵}\leqslant\frac{۷}{۸}$

(d) $۱۵+۲y>۳+y$

(e) $-۷<-۲$

(f) $-۱۲۷/۶<-۸۲/۷$

(g) $۲۷z\geqslant ۱۵z$

(h) $۲۳۱/۶x>۲۷/۳x$

(i) $۲۲w\leqslant ۱۲+۶w$

(j) $\frac{۲۱۷}{۱۲}+۶y\geqslant ۶y+\frac{۲۱۷}{۱۲}$

۷. درمعادلات زیر ثابت و متغیر هردو ظاهرشده‌اند. جملات را برحسب ثابت یا متغیر طبقه بندی کنید.

(a) (x و y اعداد حقیقی‌اند) $۳۱۸x+۱۷y=۰$

(b) ($x=۲/۱۵۷$ و y عددی گویاست) $۳۱۸x+۱۷y=۰$

(c) $G=\frac{۱}{۲}\left(\frac{a+b+c}{۳}\right)+\frac{۱}{۲}d$

(a، b، c، سه نمرهٔ امتحانی، d نمرهٔ امتحان نهایی، در حالیکه G نمرهٔ امتحان ترم است).

(d) $۲/۷۵۶۳-۰/۵\pi=D$

(e) $۲+۳x=۱۷$

۸. هریك از اعداد طبیعی زیررا به‌حاصل ضرب عوامل اول آن تجزیه‌کنید.

(a) ۳۶

(b) ۲۸

(c) ۲۶۲

(d) ۳۵۱

(e) ۲۹۸

(f) ۶۴

(g)	۱۲۴۲
(h)	۲۰۲۵
(i)	۱۰۳۲
(j)	۱۵۱

۹. تمام اعداد اول بین ۱۰۰ و ۲۰۰ را محاسبه وفهرست کنید.

Chapter 4 فصل ۴

مروری بر موضوعات دیگر

Further Review Topics

مقدمه

این فصل اساساً به بحث توابع ؛ مفهوم مبنائـی و بی‌نهایت مهم ریاضی، اختصاص داده شده است. دراین مورد پس از معرفی این مفهوم به بحث بعضی از انواع مفیدتر توابع یعنی توابع چند جمله‌یی ، نمایی، لگاریتمی، و مثلثاتی می‌پردازیم. علاوه بـر‌این، رسم توابع را مورد مرور قرار می‌دهیم، مفهوم نسبت را معرفی می‌کنیم، و به معرفی علامت نویسی مجموع[1] می‌پردازیم.

توابع Functions

دراین بخش ابتدا عبارت تابع را تعریف مـی‌کنیم و بعد این تعریف را بـا چند مثال توضیح می‌دهیم. تابع به‌عنوان قاعده‌یی تعریف می‌شود که به‌هرعضو مجموعه‌یی، موسوم به دامنه[2] ، عضو منحصر به فردی از مجموعهٔ دیگری ، کـه حوزه[3] نامیده می‌شود ، را

1. summation notation
2. domain
3. range

تخصیص می‌دهد[1]. به صورت علامتی تابع f جزء x (که عضو دامنه است) را به جزء $f(x)$ ، عضو حوزه، تبدیل می‌کند. اکنون این مفهوم را با چند مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۴.۱ فرض‌می‌کنیم $f(x)=x^۲-۲$،با دامنهٔ شامل مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد.در این مورد‌تمام مقادیر‌مثبت ومنفی ممکن‌x را درنظرمی‌گیریم.مربع‌هرعددمنفی مثبت‌میشود، لذاکوچکترین مقدار $f(x)$، ۲ — می‌شودکه وقتی $x=۰$ است رخ‌می‌دهد. توجه داشته باشیدکه حوزهٔ این مثال با دامنه تفاوت دارد، زیرا دامنه، مجموعهٔ اعداد حقیقی است ، وحوزه مجموعهٔ اعداد حقیقی بزرگتر از یا مساوی ۲ — است.

قاعدهٔ $f(x)=x^۲-۲$ ، x را به $x^۲-۲$ تبدیل می‌کند. به عبارت دیگر،

$$f(۱)=۱^۲-۲=-۱\ ;\ f(۳)=۳^۲-۲=۷\ ;\ f(۱۰)=۱۰^۲-۲=۹۸$$

و

$$f(\sqrt{۳})=(\sqrt{۳})^۲-۲=۱$$

چهار مثال عددی فوق درجدول ۴.۱ خلاصه شده‌اند.

جدول ۴.۱

x	$f(x)$
۱	۱—
۳	۷
۱۰	۹۸
$\sqrt{۳}$	۱

مثال ۴.۲ دراینجا تابع $f(n)=۲n-۱$ ، که دامنه‌اش شامل اعداد طبیعی است را درنظرمی‌گیریم. به عنوان مثال،

$$f(۱)=(۲)(۱)-۱=۱\ ;\ f(۲)=(۲)(۲)-۱=۳\ ;$$
$$f(۳)=(۲)(۳)-۱=۵$$

باید واضح باشد که حوزهٔ تابع، شامل اعداد فرد مثبت است. دراین مثال، قاعدهٔ f ، i امین عدد طبیعی را به i امین عدد فرد مثبت تبدیل می‌کند.

1. assigns

مثال ۴.۳ $f(x)=0$ به‌ازاء جمیع مقادیر x، که درآن دامنه، شامل اعداد حقیقی است. دراینجا حوزه شامل عدد منحصر به‌فرد ۰ است. یعنی،

$$f(-3)=0 \; ; \; f(1)=0 \; ; \; f(\sqrt{2})=0 \; ;$$

و غیره.

مثال ۴.۴ $f(x)=\pm\sqrt{x}$. این تابع نیست، زیرا $f(x)$ مساوی $+\sqrt{x}$ یا $-\sqrt{x}$ است. به‌عنوان مثال، $f(1)$ برابر ۱ یا ۱– است. تعریف تابع به‌هر x دامنه، مقدار منحصر به فرد $f(x)$ را تخصیص می‌دهد.

مثال ۴.۵ $f(n)=p_n$، که درآن دامنهٔ f مجموعهٔ اعداد طبیعی و حوزهٔ آن شامل اعداد اول است، را تعریف می‌کنیم. دراین مورد p_n اشاره به n امین عدد اول دارد. به‌عنوان مثال،

$$f(1)=2 \; ; \; f(2)=3 \; ; \; f(3)=5 \; ; \text{ و } \; f(7)=17$$

این تابع ظاهراً سهل، در واقع بی‌نهایت پیچیده است، و هرکس که در مورد پیچیدگی آن تردید دارد می‌تواند سعی در به‌دست‌آوردن $f(100)$ کند. گرچه ممکن است مثال ۴.۱ درنگاه اول پیچیده‌تر از مثال ۴.۵ به‌نظر برسد، ساده‌تر از آنست که مورد تحقیق قرار گیرد. این مطلب این نکته را روشن می‌کند که گاهی تابعی که ساده به‌نظر می‌رسد می‌تواند کاملاً پیچیده باشد. درحالیکه ممکن است تحلیل عبارات پیچیده‌تر در عمل نسبةً آسان باشد.

باید توجه شود که $f(x)$ قاعده‌یی را، برای تبدیل عضو x به عضو دیگر، نمایش می‌دهد، و به‌این معنی نیست که f در x ضرب شده است. شخص گاهی به‌دانش‌آموزانی برخورد می‌کند که سعی در ساده‌کردن تابع $f(x^2)=x$ به $f(x)=1$ دارند. این عمل مهمل صرف[1] است و باید ازآن صرفنظر شود.

حقیقت دیگری که باید به‌آن توجه شود اینست که $f(x)$ می‌تواند برای تبدیل هر عضو از دامنه به عضوی از حوزه به‌کار رود. اگر مثلاً $f(x)=x^2+x+1$، باشد دراین صورت

$$f(1)=1^2+1+1=3$$
$$f(2x)=(2x)^2+(2x)+1=4x^2+2x+1$$
$$f(y)=y^2+y+1$$

1. pure nonsense

$$f(۲x+۱)=(۲x+۱)^۲+(۲x+۱)+۱=۴x^۲+۶x+۳$$
$$f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^۲+\sqrt{x}+۱=x+\sqrt{x}+۱$$

توابع مرکب Composite Functions

اکنون توابع مرکب را مورد بررسی قرارمی‌دهیم. تابع مرکب تابعی ترکیب شده از عمل متوالی دو یا بیشتر از دوتابع است. به‌عنوان مثال، اگر شخص دو تابع f و g را داشته باشد،می‌تواند تابع مرکب $g(f(x))$ را (هرگاه تعریف شده باشد) درنظر گیرد. $g(f(x))$ مقرر می‌کندکه شخص ابتدا قاعدهٔ f را درمورد x و بعد g را درمورد $f(x)$ به‌کاربرد. واضحست که $g(f(x))$ تنها وقتی تعریف می‌شودکه حوزهٔ f زیرمجموعه‌یی از دامنهٔ g باشد. مثالهای ۴.۶ و ۴.۷ دومثال از توابع مرکب را آشکارمی‌کنند.

مثال ۴.۶ فرض می‌کنیم $f(x)=۲x+۱$ و $g(y)=y^۲$ باشد. دامنه‌های f و g هردو مجموعهٔ اعداد حقیقی است. دراین‌صورت

$$g(f(۲))=g((۲)(۲)+۱)=g(۵)=۵^۲=۲۵$$

درحالت کلی

$$g(f(x))=g(۲x+۱)=(۲x+۱)^۲$$

توجه داشته باشیدکه حوزهٔ f شامل مجموعهٔ اعدادحقیقی است، درحالیکه حوزهٔ $g(f)$ شامل اعداد حقیقی نامنفی است.

مثال ۴.۷ به‌عنوان‌مثال دیگر، تابع مرکب $g(f(x))$ با $g(y)=y^۲+۱$ و $f(x)=۰$ به‌ازاء جمیع مقادیر حقیقی x را درنظر می‌گیریم. بار دیگر دامنه‌های g و f اعداد حقیقی‌اند. دراینجا

$$g(f(x))=g(۰)=۰^۲+۱=۱$$

بنابراین،حوزهٔ $f(x)$ شامل عدد ۰ است، حوزهٔ $g(y)$ شامل جمیع اعداد حقیقی بزرگتر از یا مساوی ۱ است، درحالیکه حوزهٔ $g(f(x))$ شامل عدد منحصربه فرد یك می‌باشد.

توابع معکوس Inverse Functions

برای تابع f ، شخص می‌تواند تابع معکوس $f^{-۱}$ را با قاعدهٔ $f^{-۱}(f(x))=x$ تعریف‌کند. $f^{-۱}$ را با $۱/f$ از آنجا که یکسان نیستند اشتباه نکنید. علاوه براین باید

توجه شود که چنانکه درمثال ۴.۹ نشان داده شده لازم نیست که f^{-1} وجود داشته باشد.

مثال ۴.۸ تابع $f(n)=2n-1$، مثال ۲ . ۴، را به‌کاربرده،سعی در به دست آوردن f^{-1} می‌کنیم. دراین مورد در جستجوی تابع f^{-1}ی چنانیم که $f^{-1}(f(n))=n$ ، یا $f^{-1}(2n-1)=n$ باشد. به‌عنوان اولین حدس $g(m)=(1/2)m$ را درنظرمیگیریم. دراین صورت

$$g(2n-1)=(1/2)(2n-1)=n-(1/2)$$

و می‌توان ملاحظه کرد که

$$f^{-1}(m)=\left(\frac{1}{2}\right)m+\left(\frac{1}{2}\right)=(1/2)(m+1)$$

به مقصود می‌رسد. بنابراین با تعریف $f^{-1}(m)=(1/2)(m+1)$ حاصل می‌کنیم:

$$f^{-1}(2n-1)=(1/2)[(2n-1)+1]=n$$

واضحست که پیداکردن توابع معکوس دربعضی حالات مشکل است.

در پیداکردن معکوس یك تابع روش ساده‌تری وجود دارد. به‌این ترتیب که، تابع معکوس، وقتی موجود باشد، می‌تواند به صورت عمل معکوس تابع اصلی درنظر گرفته شود. تابع $f(x)$ عضو x از دامنه را به‌عضو $f(x)$ از حوزه تبدیل می‌کند، در حالیکه $x=f^{-1}(y)$ بـه این معنی است کـه شخص باید مقدار xی کـه به ازاء آن $y=f(x)$ است را بیابد . ازآنجاکه $f^{-1}(y)$ تابع است، تنها یك مقدار x می‌تواند وجود داشته باشد کـه معادلهٔ $y=f(x)$ را حل‌کند. اکنون بـا استفاده از مثال قبل، $f(n)=2n-1$، $2n-1=m$ یا $n=(m+1)/2$ را به دست می‌آوریم. بنابراین، $f^{-1}(m)=(m+1)/2$. به‌همین ترتیب، اگر $f(x)=3x+5$ باشد، دراین صورت $f(x)=3x+5=y$ یا $x=(y-5)/3$. بنابراین، $f^{-1}(y)=(y-5)/3$.

مثال ۴.۹ تابع $f(x)=0$ از مثال ۴.۳ را درنظرمی‌گیریم. درمورد این تابع، f^{-1}، از آنجاکه حوزهٔ $f(x)$ شامل مقدار منفرد ۰ است و $f^{-1}(0)$ می‌تواند تنها یك مقدار باشد، موجود نیست.

مثال ۴.۱۰ تابع $f(x)=x^2$ ،که دامنه‌اش شامل مجموعهٔ اعـداد حقیقی نامنفی است را درنظر می گیریم. دراین صورت $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$ زیرا

$$f^{-1}(f(x))=f^{-1}(x^2)=\sqrt{x^2}=x$$

ریشه‌ها Roots

ریشهٔ معادلهٔ $f(x) = 0$ را به‌صورت مقداری (یا مقادیری) از x که دراین معادله صدق کند تعریف می‌کنیم. به‌همین‌ترتیب، این مقدار x صفر[1] تابع $f(x)$ نامیده می‌شود. به عنوان مثال، تابع $f(x) = x^2 - 2$، از مثال ۴.۱، دارای صفرهای $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ است، زیرا $x^2 - 2 = 0$ مقرر می‌کندکه $x^2 = 2$ یا $x = \pm\sqrt{2}$ است. ریشهٔ $f(x) = 0$ را با عبارات ریشهٔ دوم، ریشهٔ سوم، وغیره اشتباه نکنید، زیرا کلمهٔ ریشه درعبارت «ریشهٔ دوم ۳» با مفهوم ریشهٔ $f(x) = 0$ بی‌ارتباط است.

نمودار توابع Graphs of Functions

دراین فصل رسم نمودار توابع را مرورمی‌کنیم. نمودار تابع از اینجا می‌تواند دارای اهمیت باشدکه اوضاع تابع را درتصویری فشرده خلاصه می‌کند، به‌طوریکه شخص از آن می‌تواند نواحی‌ئی‌که تابع صعودی است، نواحی‌ئی‌که نزولی است، مکان‌صفرهای توابع، مقادیر ماکزیمم ومی‌نیمم، ونوع انحنای[2] واقع در یك ناحیه، یعنی اینکه آیا منحنی یکنواخت[3] است، تحدبش به سمت بالاست، یا تحدبش به سمت پایین است را مشخص‌کند. رسم نمودار توابع را با استفاده از چند مثال از مثالهای قبل توضیح می‌دهیم.

مثال ۴.۱۱ ابتدا تابع $f(x) = x^2 - 2$ ازمثال ۴.۱ را درنظرمی‌گیریم. در صفحه(ی کاغذ) خطی افقی، موسوم به‌محور xها، وخطی قائم، موسوم به‌محور yها یا $f(x)$ها رسم می‌کنیم. این عمل در شکل ۴.۱ نشان داده شده است. نقطهٔ برخورد این دو محور نقطهٔ (۰ ، ۰)درنظر گرفته می‌شود. ۰ اول به‌این معنی‌است‌که $x = 0$ و ۰ دوم‌مشخص‌میکند که $f(x) = 0$ است. بادرنظرگرفتن محور xها به‌صورت خط حقیقی، واحدها رابراین محور (مقادیر مثبت به‌سمت راست نقطهٔ تقاطع ومقادیر منفی به‌سمت چپ آن) مشخص می‌کنیم. همین روش را درمورد محور $f(x)$ به‌کارمی‌بریم. جدول ۴.۲ شامل چندمقدار حساب شده برای $f(x)$ است.

---

1. zero　　2. curvature

3. flat

جدول ۴.۲

x	$f(x)$
-۳	۷
-۲	۲
$-\sqrt{۲}$	۰
-۱	-۱
۰	-۲
۱	-۱
$\sqrt{۲}$	۰
۲	۲
۳	۷

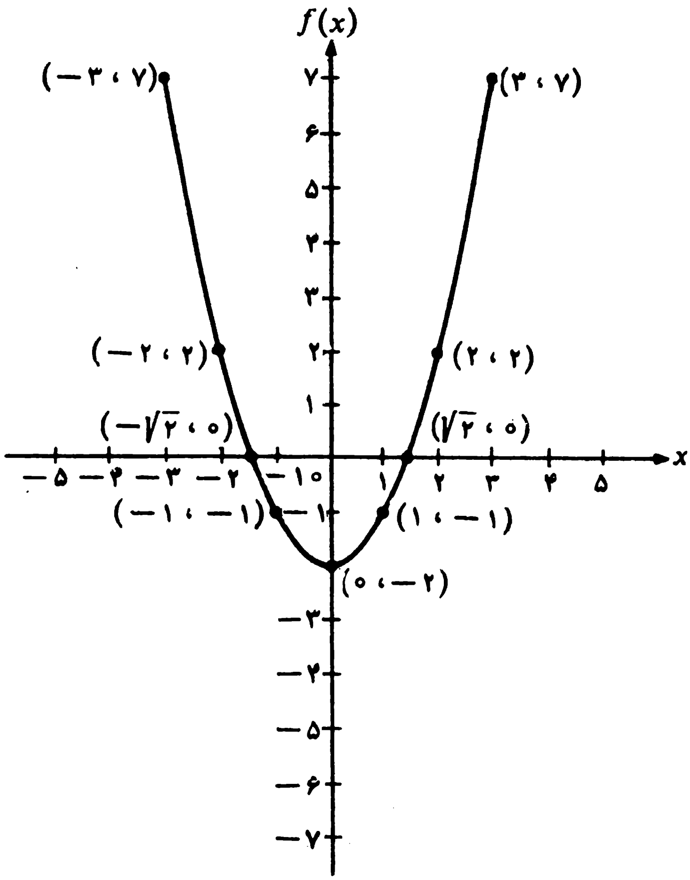
این مقادیر نقاط واقع بر صفحهٔ شکل ۴.۱ را نمایش می‌دهند. به این ترتیب، $f(-۲)=۲$ نقطهٔ $(-۲ ، ۲)$ یعنی، نقطه‌یی که با حرکت کردن به موقع -۲ برمحور xها، و بعد از آن حرکت قائم به اندازهٔ دو واحد به دست می‌آید، می‌شود. نقاط دیگر جدول فوق به طریقی مشابه معلوم و بعد بامنحنی یکنواختی به هم وصل می‌شوند.

از نمودار آشکار است که $f(x)$ وقتی x یا عدد مثبت بزرگی یا عدد منفی کوچکی (عدد منفی کوچك مقدار x در کرانی‌ترین نقطهٔ سمت چپ محور xهاست) باشد بزرگ می‌شود، و افزایش در x، موجب افزایش نسبةً زیادی[1] در $f(x)$ می‌شود. علاوه‌براین، $f(x)$ هنگامیکه $x=۰$ شود کمترین مقدار و در $x=\pm\sqrt{۲}$ صفرهای خود را خواهد داشت. به این ترتیب، شکل ۴.۱ خواص تابع $f(x)=x^۲-۲$ را خلاصه می‌کند.

مثال ۴.۱۲ بعد تابع $f(x)=۰$ از مثال ۴.۳ را درنظر می‌گیریم. نمودار این تابع شامل محور xهاست، و به‌همین دلیل تحلیل این تابع آسان است.

---

1. sizeable



شکل ۴.۱

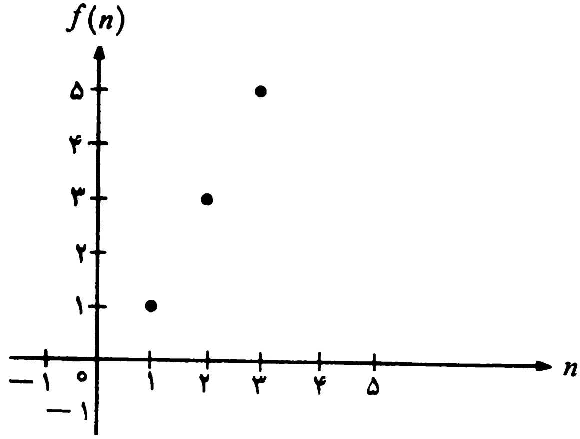
توابع متصل (پیوسته) Continuous Functions

مثالهای ۴.۱۱ و ۴.۱۲ شامل منحنی‌های یکنواختی[1]، که از وصل کردن نقاطشان، با قطعات پیوسته، به‌دست آمده‌اند، می‌باشند. (توجه داشته باشید که خط مستقیم دقیقاً حالت خاصی از منحنی است.) در رسم نمودار این منحنی‌ها نقاط مجزا[2] وجود ندارند، و هرنقطه‌یی که در تابع $f(x)$ صدق کند به‌هرنقطهٔ دیگر با قطعه‌یی از منحنی متصل است. توابعی که

1. smooth curves   2. isolated points

بتوان نمودارهاشان را با چنین منحنی‌های متصلی وصل کرد به‌توابع متصل یا پیوسته موسومند. باید به‌خاطرداشت که این تعریف بیشتر از این‌که تعریف دقیق تابع متصل باشد تعریفی عملی است. تعریف دقیق توابع متصل را می‌توان در فصل ۱۰ به دست آورد. مثال ۴.۱۳ تابعی را نشان می‌دهد که متصل نیست.

مثال ۴.۱۳ $f(n)=2n-1$ را از مثال ۴.۲ درنظر می‌گیریم. ازآنجاکه دامنهٔ این تابع مجموعهٔ اعداد طبیعی است، نمودارش شامل نقاط مجزاست.



شکل ۴.۲

شکل ۴.۲ نمودار این تابع را نشان می‌دهد. توجه داشته باشید که نمی‌توانیم این نقاط را به هم وصل کنیم، زیرا در دامنهٔ آن مقادیر ناصحیح[1] محور nها بدون معنی می‌شوند.

تابع قدرمطلق The Absolute Value Function

تابع قدرمطلق یکی از ساده‌ترین و درعین‌حال مفیدترین توابعی است که شخص می‌تواند مورد بررسی قرار دهد. این تابع با قاعدهٔ $f(x)=+\sqrt{x^2}$ تعریف می‌شود. در آینده علامت $+$ را از $+\sqrt{\ }$ حذف می‌کنیم. دامنهٔ این تابع شامل اعداد حقیقی یازیرمجموعه‌یی از اعداد حقیقی است. این قاعده عدد x را به عدد مثبت $\sqrt{x^2}$ تبدیل می‌کند. به عنوان

1. noninteger values

مثال، $f(-۲)=۲$ ؛ $f(۳)=۳$ ؛ $f(۰)=۰$ ؛ $f(-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}$. دراین مورد به جای استفاده از $f(x)$ ، عموماً از $|x|$ استفاده می‌شود، و به عبارت دیگر $\sqrt{x^۲}=|x|$ است.

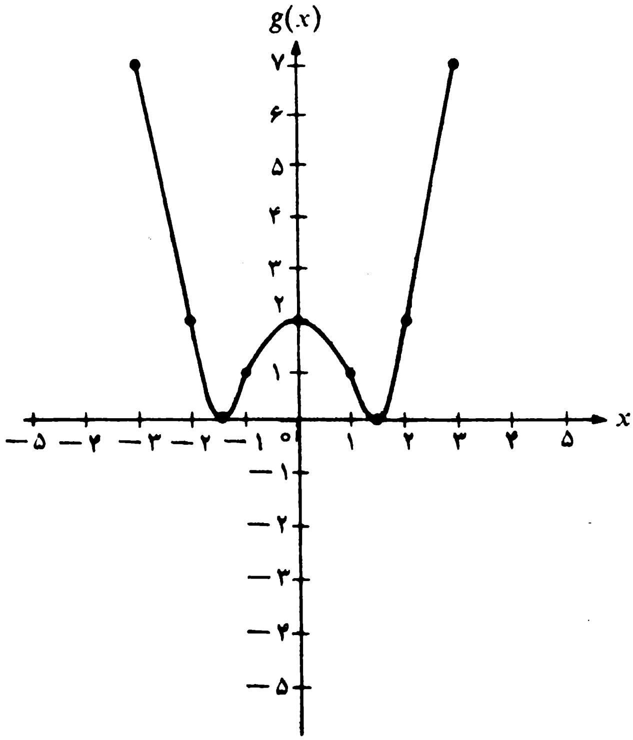
قبلاً نمودار تابع $f(x)=x^۲-۲$ را درشکل ۴.۱ رسم کرده‌ایم. اکنون نمودار تابع $g(x)=|x^۲-۲|$ را رسم می‌کنیم. ابتدا چند نقطه از $g(x)$ را محاسبه (جدول ۴.۳ را ملاحظه کنید) و بعد منحنی را درشکل ۴.۳ رسم می‌کنیم.

$f(x)$ و $g(x)$ در فاصلهٔ $|x|<۲$ با یکدیگر متفاوتند.

بحث بیشتر درمورد تابع قدر مطلق را می‌توان درفصل ۸ یافت.

جدول ۴.۳

x	$g(x)$
-۳	۷
-۲	۲
$-\sqrt{۲}$	۰
-۱	۱
۰	۲
۱	۱
$\sqrt{۲}$	۰
۲	۲
۳	۷

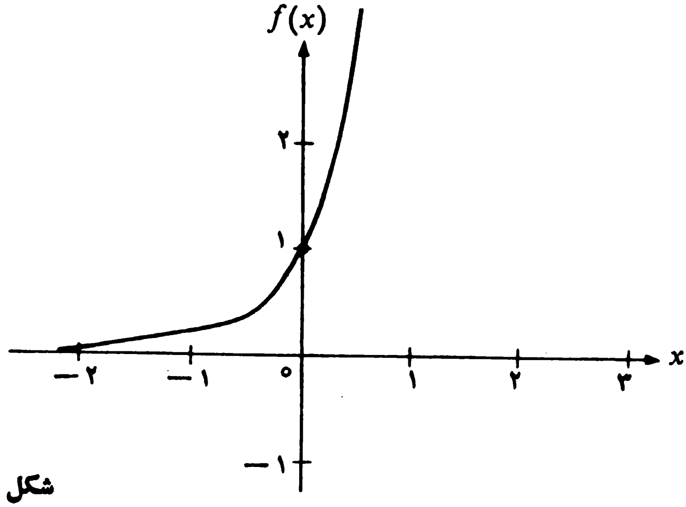


شکل ۴.۳

تابع نمایی Exponential Function

تابع $f(x)=a^x$ را تابع نمایی می‌نامیم. دراین‌مورد a ثابتی ناصفر، ودامنهٔ f مجموعهٔ

اعداد حقیقی است. مثالی از این تابع $f(x)=10^x$ می‌باشد که نمودارش درشکل ۴.۴ آمده است. از این نمودار ملاحظه می‌کنیم که $f(x)$، هنگامیکه $x\leqslant 0$ باشد، در فاصلهٔ $0<f(x)\leqslant 1$ قرار می‌گیرد. نیز توجه می‌کنیم که به‌ازاء $x>0$، $f(x)>1$ است. علاوه براین، $f(0)=1$ و $f(1)=10$ می‌باشد.



شکل ۴.۴

تابع نمایی دارای خواص زیراست:

(i) $a^0=1$

(ii) $a^x a^y = a^{(x+y)}$

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$

(iv) $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$ به ازاء $a\neq 0$

این خواص را در مورد حالت خاص $f(x)=10^x$ به سادگی می‌توان توضیح داد. فرض می‌کنیم $x=2$ و $y=3$ باشد.دراین صورت در مورد (ii) داریم

$(10^2)(10^3)=(100)(1000)=100,000$

$10^{2+3}=10^5=100,000$

ودر مورد (iii)، $(10^2)^3=(100)^3=(100)(100)(100)=1,000,000$

و $10^{(2)(3)}=10^6=1,000,000$

در تمرین ۱۹ فصل ۵، خواسته خواهد شد که اثبات خواص (i) تا (iv) را به دست دهید.

درمورد هرعدد نامنفی b ریشهٔ دوم b، $\sqrt{b}$ ، به‌صورت مقداری که در معادلهٔ $b = (\sqrt{b})(\sqrt{b})$ صدق می‌کند تعریف می‌شود. به‌این ترتیب $b^{1/2} = \sqrt{b}$ ، زیرا $b^{1/2}b^{1/2} = b$. به دلیل مشابه ، $b^{1/3} = \sqrt[3]{b}$ ؛ $b^{1/10} = \sqrt[10]{b}$ ، وغیره.

در ریاضیات، تابع نمائی‌یی که به دفعات بسیار به کار می‌رود به صورت $f(x) = e^x$ است. e ، مبنای لگاریتم طبیعی، مساوی ... ۲/۷۱۸۲۸۱ است که در آن نقطه‌های پایان‌عدد، بسط اعشاری بی‌انتهای e را نمایش می‌دهند. تمام اعداد گنگ ازاین صورت‌اند.

چند جمله‌ئی‌ها Polynomials

تابع به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ به چند جمله‌ئی موسوم است. علامتهای a_n ، a_{n-1} ، ... ، a_1 ، و a_0 ثوابتی را نمایش می‌دهند که موسوم به ضرایب چند جمله‌ئی‌اند. این ثوابت ممکن است عدد صحیح، عدد حقیقی، یا عدد طبیعی باشند. عدد n ، بزرگترین توان x درعبارت، عدد صحیح نامنفی درنظر گرفته می‌شود، n **درجه**[1] چند جمله‌ئی را نمایش می‌دهد. به‌این ترتیب شخص می‌تواند از چند جمله‌ئی درجه چهارم، چند جمله‌ئی درجه نهم ، یا ، به‌همین علت، ازچند جمله‌ئی درجه صفر سخن گوید.

اکنون بحث فوق را با سه مثال زیر توضیح می‌دهیم

(i) $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

(ii) $f(x) = x^4 + \sqrt{2}x^3 + 2$

(iii) $f(x) = x - 7$

درمثال (i) ، $n = 2$ ، $a_2 = 3$ ، $a_1 = 2$ ، $a_0 = -1$ است. به‌همین ترتیب، در (ii) ، $n = 4$ ، $a_4 = 1$ ، $a_3 = \sqrt{2}$ ، $a_2 = 0$ ، $a_1 = 0$ ، $a_0 = 2$ میباشد. درحالت (iii)، $n = 1$ ، $a_1 = 1$ ، $a_0 = -7$ است.

صفرهای چند جمله‌ئی‌ها Zeros of Polynomials

یکی از قضیه‌های مهم ریاضیات براین قرار است که هرچند جمله‌ئی:

1. degree

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\dots+a_0$$

را می‌توان به‌صورت

$$a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\dots(x-r_n)$$

که در آن r_iها اعداد حقیقی یا مختلط‌اند، تجزیه کرد. واضح است که r_iها صفرهای چند جمله‌ئی‌اند، و ازآنجاکه ممکن است بعضی از آنها مختلط باشند، تعداد صفرهای حقیقی یك چند جمله‌ئی درجه n کمتر از یا مساوی n است. به‌عنوان مثال، $f(x)=x^2-5x+6$ را می‌توان به‌صورت

$$f(x)=(x-3)(x-2)$$

نوشت. دراین صورت صفرهای این تابع اعداد ۲ و ۳ می‌باشند. از طرف دیگر، تابع $f(x)=x^2+1$ را می‌توان به صورت $f(x)=(x+i)(x-i)$ ، که در آن $i=\sqrt{-1}$ است، تجزیه کرد . در مورد این تابع هردو صفر، اعداد موهومیند.

اکنون چند جمله‌ئی‌های درجه صفر، یك، و دورا به‌صورت حالات جداگانه مورد بحث قرار می‌دهیم.

چند جمله‌ئی‌های درجه صفر — Zero - Degree Polynomials

چند جمله‌ئی درجه صفر عبارت از تابع $f(x)=c$ است؛ یعنی ، به ازاء هرمقدار x ، $f(x)$ مقدار ثابت c است. نمودار این چند جمله‌ئی شامل خطی افقی است که به‌فاصلهٔ c واحد از محور xهاست.

چند جمله‌ئی‌های درجه یك — First - Degree Polynomials

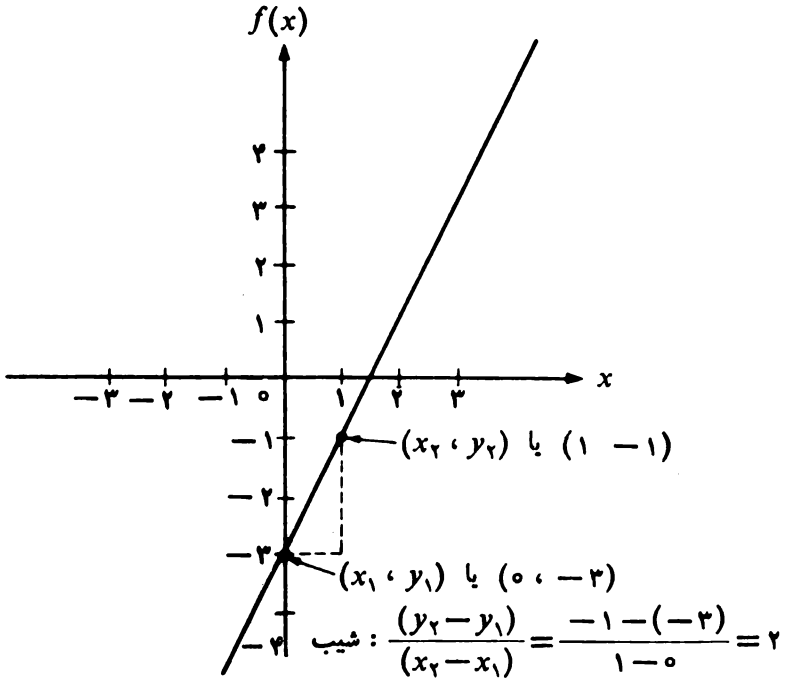
چند جمله‌ئی‌های درجه یك عبارت‌از توابع به‌صورت $f(x)=a_1x+a_0$اند. این تابع موسوم به تابع خطی[1] است زیرا نمودارش خطی مستقیم می‌شود . به‌عنوان مثال نمودار $f(x)=2x-3$ درشکل ۴.۵ داده شده است.

ابتدا توجه می‌کنیم که نمودار این تابع، خطی مستقیم است. بعد ملاحظه می‌کنیم که مقدار ۳ — عرض از مبدأ[2] آن است؛ ونقطهٔ (۳— ، ۰) است‌که در $f(0)=-3$،

---

1. linear function 2. f(x) intercept

برمحور $f(x)$ها (محور عرضها) قرار می‌گیرد. عدد ۲، در معادلهٔ $f(x)=2x-3$ ، ضریب زاویه‌یی یا شیب[1] خط نامیده می‌شود، ومعنیش اینست‌که، اگر x را یك واحد افزایش دهیم، $f(x)$ دوواحدافزایش می‌یابد. به‌عنوان مثال دیگر، معادلهٔ $g(x)=2-3x$ از محور $g(x)$ها در $g(0)=2$ عبور می‌کند وشیبش برابر -3 است. یعنی چون x یك واحد افزایش یابد، $g(x)$ سه واحدکم می‌شود.



شکل ۴.۵

کاملاً[2] آسان است‌که ریشهٔ معادلهٔ خطی $f(x)=a_1x+a_0=0$ را بـه دست آوریم. $f(x)=a_1x+a_0=0$ مقرر می‌کند که $x=-a_0/a_1$ است. بنابراین، خط از محور xها در $x=-a_0/a_1$ عبور می‌کند.

---

1. slope

Second - Degree Polynomials چند جمله‌ئی‌های درجه دوم

چند جمله‌ئی درجه دوم به‌صورت $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ است و غالباً تابع یك مجذوری[1] نامیده می‌شود. این‌تابع پیچیده‌تر از تابع خطی است و، به‌همین دلیل به‌توضیح بیشتری نیاز دارد.

ابتدا $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$

را تجزیه می‌کنیم:

$$a_2x^2+a_1x+a_0=a_2\left[x^2+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)x+\frac{a_0}{a_2}\right]$$

که می‌تواند به‌صورت زیرنوشته شود:

$$a_2\left\{\left[x^2+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)x+\left(\frac{a_1^2}{4a_2^2}\right)\right]-\left(\frac{a_1^2}{4a_2^2}\right)+\frac{a_0}{a_2}\right\}$$

دلیل اضافه و کم نمودن جملهٔ $(a_1^2/4a_2^2)$ مربع‌کامل[2] نمودن

$$x^2+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)x+\left(\frac{a_1^2}{4a_2^2}\right)$$

است. بنابراین،

$$a_2x^2+a_1x+a_0=a_2\left\{\left(x+\frac{a_1}{2a_2}\right)^2+\frac{a_0}{a_2}-\left(\frac{a_1^2}{4a_2^2}\right)\right\}$$

اکنون می‌توانیم ملاحظه کنیم که کوچکترین مقدار $f(x)$، به ازاء $a_2>0$، در $x=-a_1/2a_2$ رخ می‌دهد زیرا در این صورت اولین جملهٔ بعد از آکولاد صفر میشود. اگر $a_2<0$، دراین صورت $f(x)$ هنگامیکه x از مقدار $-a_1/2a_2$ برگشت می‌کند افزایش می‌یابد. نمودار عمومی چنین تابعی درشکل ۴.۶ داده شده است.

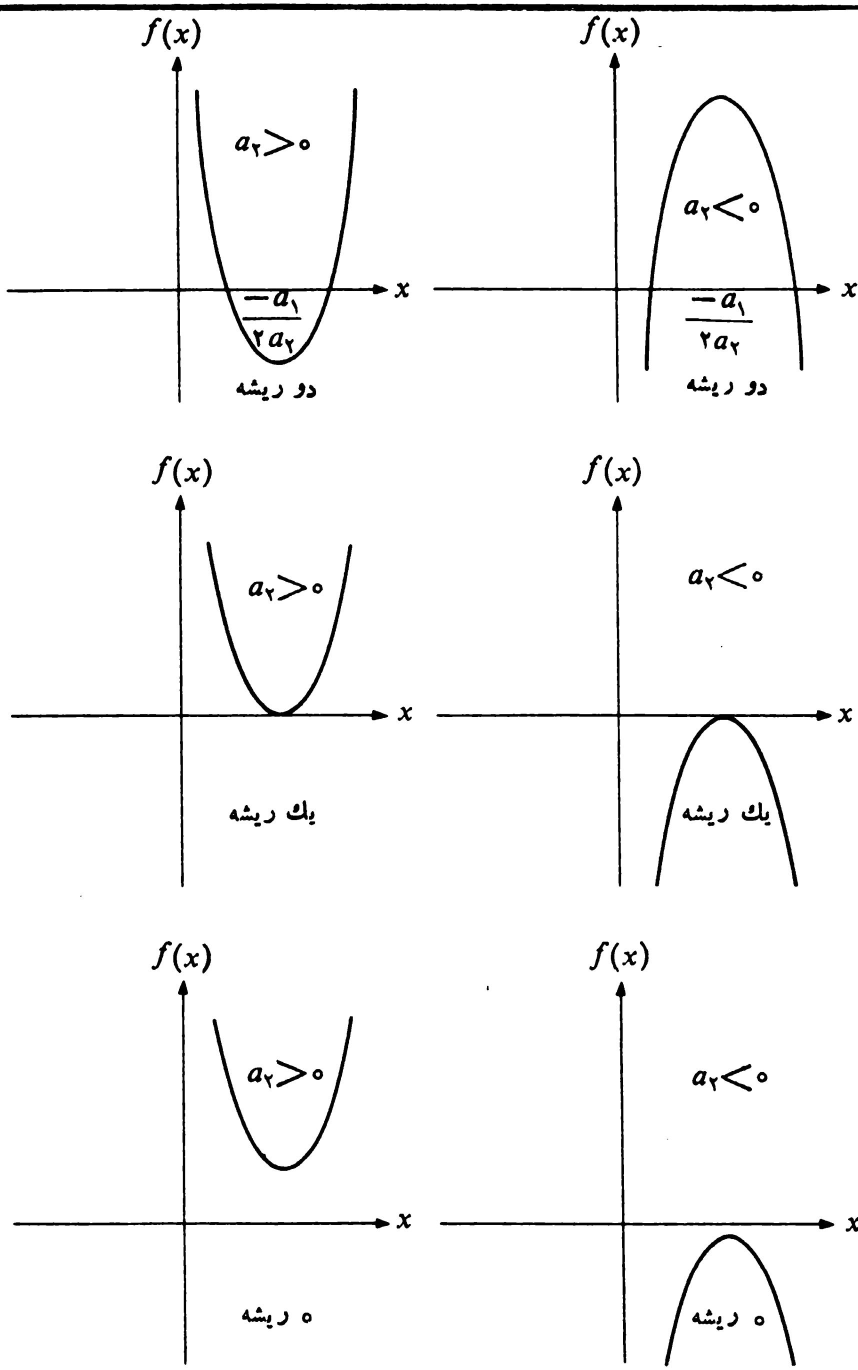
نمودار چند جمله‌ئی درجه دوم، سهمی نامیده می‌شود. توجه داشته باشید که $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی یا یك ریشهٔ حقیقی یاصفرریشهٔ حقیقی است. ریشه‌های حقیقی صفر هنگامیکه، به‌عنوان مثال،

$$a_2>0 \quad \text{و} \quad f(-a_1/2a_2)>0$$

باشد رخ می‌دهند. درمورد تابع یك مجذوری درصورتیکه یك صفر حقیقی‌موجودباشد،

---

1. quadratic function 2. perfect square



$f(x)$
$a_۲>۰$
x
$\frac{-a_۱}{۲a_۲}$
دو ریشه
$f(x)$
$a_۲<۰$
x
$\frac{-a_۱}{۲a_۲}$
دو ریشه
$f(x)$
$a_۲>۰$
x
یك ریشه
$f(x)$
$a_۲<۰$
x
یك ریشه
$f(x)$
$a_۲>۰$
x
۰ ریشه
$f(x)$
$a_۲<۰$
x
۰ ریشه

شکل ۶.۰.۴

$f(-a_۱/۲a_۲)=۰$ میشود. نمودارهـای توابـع یك مجذوری در شکل ۶ . ۴ داده شده‌اند.

اعداد درصورت اعشاری Numbers in Decimal Form

درنوشتن اعداد طبیعی به‌صورت اعشاری آنقدرعادت‌کرده‌ایم که ممکن است معنی‌حقیقی چنین عباراتی را فراموش‌کرده باشیم. خواننده ۱۲۳۴ را به‌صورت یك هزارو دویست‌و سی وچهار می‌شناسد، اما ممکن است در توضیح اینکه۲ در ۱۲۳۴ در واقع چه چیز را نمایش می‌دهد اشکال داشته باشد. درحقیقت،

$$۱۲۳۴=(۱)(۱۰^۳)+(۲)(۱۰^۲)+(۳)(۱۰)+۴$$

است،که چند جمله‌ئی‌یی با $x=۱۰$ و اعداد طبیعی به صورت ضرایب است، و ضرایب آن، **ارقام**[1] نامیده می‌شوند. عدد ۱۲۳۴ دارای ارقام ۱ ، ۲ ، ۳ ، و ۴ است . به همین ترتیب، عدد ۳۲۷،۸۱۵

$$(۳)(۱۰^۵)+(۲)(۱۰^۴)+۷(۱۰^۳)+۸(۱۰^۲)+(۱)(۱۰)+۵$$

را نمایش می‌دهد.

بگذارید اعمال جمع وتفریق را با به‌کاربردن اعداد نمایش داده شده به‌صورت چند جمله‌ئی، به‌کاربریم. خواننده می‌تواند بـه‌همین تـرتیب ضرب و تقسیم را مورد بررسی قراردهد. فرض می‌کنیم که می‌خواهیم ۲۳۱ را بـا ۳۷۵ جمع کنیم. نوشتن این اعداد به‌صورت چند جمله‌یی به

$$۲۳۱=(۲)(۱۰^۲)+(۳)(۱۰)+۱ \quad و \quad ۳۷۵=(۳)(۱۰^۲)+(۷)(۱۰)+۵$$

منتج می‌شود. این اعداد را می‌توان به‌صورت

$$\begin{array}{l}(۲)(۱۰^۲)+(۳)(۱۰)+۱\\ (۳)(۱۰^۲)+(۷)(۱۰)+۵\\ \hline (۵)(۱۰^۲)+(۱۰)(۱۰)+۶\end{array}$$

جمع‌کرد. واضح است‌که $(۱۰)(۱۰)$ ، $۱۰^۲$ است و بایـد با $(۵)(۱۰^۲)$ ترکیب شود. به این ترتیب:

1. digits

$$(5)(10^2)+(10^2)+6=(6)(10^2)+6=606$$

و آشکار است که این همان چیزی است که در جمع معمولی انجام می گیرد.

اکنون یك مسألهٔ تفریق را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض می کنیم بخواهیم ۲۸۷ را از ۳۷۵ کم کنیم. در این صورت $287=(2)(10^2)+(8)(10)+7$ و $375=(3)(10^2)+(7)(10)+5$ است. از آنجا که ۷ از ۵ بزرگتر است، و این موضوع تفریق مورد بحث را دچار اشکال می‌سازد، ۳۷۵ را به‌صورت

$$(3)(10^2)+(7)(10)+5=(3)(10^2)+(6)(10)+15$$

بازنویسی می کنیم. دراین‌صورت

$$\begin{array}{rl} & (3)(10^2)+(6)(10)+15 \\ - & (2)(10^2)+(8)(10)+7 \\ \hline & (10^2)-(2)(10)+8 \end{array}$$

اما ، $(10)(10)=10^2$. بنابراین ،

$$(10)(10)-(2)(10)+8=(8)(10)+8=88$$

امید است که بحث فوق درك دانشجو را از اعمال حساب افزایش داده باشد.

اغلب خوانندگان آموخته‌اند که کسرها را برحسب اعشار بنویسند. دراین صورت برای آنها که موضوع را فراموش کرده‌اند، معنی چنین عبارتی را به طور مختصر مورد بحث قرار می‌دهیم. به عنوان مثال، عدد ۲۳۷/۳۱ را می‌توان به‌صورت

$$(2)(10^2)+(3)(10)+(7)(10^0)+(3)(10^{-1})+(1)(10^{-2})$$

که البته همان

$$(2)(10^2)+(3)(10)+(7)(10^0)+(3)(1/10)+(1)(1/100)$$

است نوشت. به این ترتیب با استفاده از توانهای منفی می‌توانیم هرعدد حقیقی را بیان کنیم. به‌عنوان مثال دیگر ، ۰/۰۳۵ می‌توانـد به صورت $(3)(10^{-2})+(5)(10^{-3})$ بیان شود.

اعداد در مبناهائی غیر از ده

Numbers to Bases Other Than Ten

ما به‌اعداد نوشته شده درمبنای ۱۰ عادت کرده‌ایم، و اگر به‌جای ده مبنای دیگری قرار

دهیم بسیاری ازخوانندگان دچار اشتباه می‌شوند. اما درصورتیکه بحث بخش قبل‌دنبال شود کارکردن با مبناهای دیگــر، خیلی مشکل نیست. به عنوان مثال، اگر ۳۵۲۱ عددی نوشته شده درمبنای ۷ باشد دراین صورت

$$۳۵۲۱=(۳)(۷^۳)+(۵)(۷^۲)+(۲)(۷)+۱$$

که معادل با

$$(۳)(۳۴۳)+(۵)(۴۹)+(۲)(۷)+۱$$

یا ۱۲۸۹ درمبنای ۱۰ است. اگر دوعدد درمبنای ۷ باشند، می‌توانیم آن‌ها را به همان طریق اعداد در مبنای ۱۰ جمع کنیم. به عنوان مثال ۲۳۱۴+۳۵۲۱ را می‌توان بــه صورت

$$\begin{array}{r} (۳)(۷^۳)+(۵)(۷^۲)+(۲)(۷)+۱ \\ (۲)(۷^۳)+(۳)(۷^۲)+(۱)(۷)+۴ \\ \hline (۵)(۷^۳)+(۸)(۷^۲)+(۳)(۷)+۵ \end{array} +$$

نوشت. اما،

$$(۸)(۷^۲)=(۷)(۷^۲)+(۷^۲)=(۷^۳)+(۷^۲)$$

دراین صورت پاسخ در مبنای ۷ عبارتست از

$$(۶)(۷^۳)+(۱)(۷^۲)+(۳)(۷)+۵=۶۱۳۵$$

ثابت شده‌که نوشتن اعداد درمبناهائی غیر از ده عملی مفید است. به‌عنوان‌مثال، کامپیوترهای رقمی[1] جدید که هر محاسبهٔ پیچیده‌یی را انجام می‌دهند در مبنای ۲ کار می‌کنند.

لگاریتم Logarithms

پیش ازاین تابع نمایی $f(x)=a^x$ را مورد بررسی قراردادیم. دراین بخش‌بامعکوس تابع نمایی به‌ازاء a مثبت، که درآن $a\neq۱$ باشد، سروکارداریم. به‌ازاء هرعدد $b>۰$ می‌توانیم xی بیابیم که درمعادلهٔ $a^x=b$ صدق‌کند. مقدار x به‌لگاریتم b موسوم است وبه‌صورت $\log_a^b$ نوشته می‌شود. علامت $\log_a^b$ را، «لگاریتم b درمبنای a»[2] می‌خوانیم. درفصل ۸، خواص زیر درلگاریتم را ثابت خواهیم کرد:

1. digital computer
2. the logarithm of b to the base a

$$\text{(i)}\quad \log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

$$\text{(ii)}\quad \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

$$\text{(iii)}\quad \log_a b^d = d(\log_a b)$$

در حالات (i)، (ii)، و (iii)، b و c مثبت‌اند و d عددی حقیقی است. خواص فوق، ضرب اعداد را به‌جمع لگاریتمهاشان، تقسیم اعداد را به‌تفریق لگاریتمهاشان، و نماها را به‌ضرب تبدیل می‌کنند. این خواص، اساس طرح خط‌کش محاسبه[1] را تشکیل می‌دهند. در مورد مبناها مقادیری‌که بسیار به‌کار می‌روند عبارت از $a=$ ۱۰ و $a=e$ می‌باشند (e ثابت ۲/۷۱۸۲۸۱ است‌که درپایان بخش‌مربوط به‌توابع‌نمایی مورد بحث قرار گرفته‌است.) اگر ۱۰ به‌جای‌مبنا به‌کار رود دراین‌صورت‌شخص با **لگاریتم‌معمولی**[2] سروکار دارد، در حالیکه اگر e به‌کار رود، لگاریتم، **لگاریتم طبیعی**[3] نامیده می‌شود. لگاریتمهای معمولی غالباً در محاسبه به‌کار می‌روند، در صورتی که لگاریتمهای طبیعی در عملیات علمی غلبه دارند. از آنجاکه توضیح لگاریتمهای معمولی نسبةً آسان است، به شرح موارد استعمالشان می‌پردازیم، و برای این منظور از جدول I ضمیمه استفاده می‌کنیم.

برای استفاده از جدول لگاریتم، لازم است‌که لگاریتم ۱۰^k، که در آن k عدد صحیحی است را بدانیم. اما از آنجا کـه با لگاریتمهای درمبنای ۱۰ سروکار داریم، می‌توان ازخاصیت (iii) برای به‌دست آوردن

$$\log ۱۰^k = k \log ۱۰ = k(۱) = k$$

استفاده‌کرد. به‌این ترتیب،

$$\log ۱۰۰ = \log ۱۰^۲ = ۲ \text{ ، } \log ۱۰\text{،}۰۰۰ = \log ۱۰^۴ = ۴$$
$$\log ۰/۰۰۱ = \log ۱۰^{-۳} = -۳$$

اکنون عدد ۷۳۱/۲ را درنظر می‌گیریم:

$$\log ۷۳۱/۲ = \log(۷/۳۱۲)(۱۰^۲) = \log ۷/۳۱۲ + \log ۱۰^۲$$
$$= \log ۷/۳۱۲ + ۲$$

1. slide rule 2. common logarithms
3 natural logarithms

بنا به‌این دلیل، عدد وارد درجدول لگاریتم را میتوان درمورد اعداد ۷۳۱۲ ، ۷/۳۱۲، ۰/۷۳۱۲ و غیره به کاربـرد، و دراین مورد عدد وارد درجدول، متناظر بـا ۷/۳۱۲ است، و دراین صورت، اگرمثلا بخواهیم $\log ۷۳/۱۲$ رابه‌دست آوریم مقدارش‌مساوی

$$\log [(۷/۳۱۲)(۱۰)] = \log ۷/۳۱۲ + \log ۱۰ = ۱ + \log ۷/۳۱۲$$

می‌شود.

برای به‌کاربردن جدول لگاریتم از بحث فوق‌کمك می گیریم، وبرای این منظور فرض میکنیم که می‌خواهیم $\log_{۱۰} ۷۳/۱$ را به دست آوریم . ازآنجاکه درحال حاضر تنها بالگاریتمهای معمولی سروکارداریم، لازم نیست که مبنا را ذکرکنیم دراین صورت درجدول لگاریتم سطر:

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۷۲	۸۵۷۳	۸۵۷۹	۸۵۸۵	۸۵۹۱	۸۵۹۷	۸۶۰۳	۸۶۰۹	۸۶۱۵	۸۶۱۱	۸۶۲۷

را می‌یابیم که مشخص می‌کندکه $\log ۷/۲۱$ ، ۰/۸۵۷۹ است.از آنجاکه $\log ۷۱/۱$ را می‌خواهیم‌به $۱+\log ۷/۲۱$ یا $\log ۷۲/۱ = ۱/۸۵۷۹$ نیازمندیم. لگاریتم اعداد دیگر نیز به همین‌ترتیب به‌دست می‌آیند.

اکنون جریان معکوس به‌دست‌آوردن لگاریتم یك عدد، یعنی به‌دست‌آوردن‌عددی که لگاریتمش داده شده است را مورد بررسی قرارمی‌دهیم. به‌عنوان مثال، بامعلوم‌بودن اینکـه $\log b = ۲/۸۶۰۳$ ، b چقدر است؟ مقدار b آنتی لگاریتم[1] ۲/۸۶۰۳ نامیده می‌شود. برای به‌دست آوردن آنتی لگاریتم ۲/۸۶۰۳، باید درجدول لگاریتم به دنبال عدد ۰/۸۶۰۳ بگردیم. عددی‌که دراین صورت پیدا مـی‌کنیم ۷/۲۵ است. بنابراین ، آنتی لگاریتم ۲/۸۶۰۳ ، $۷۲۵ = (۱۰^{۲})۷/۲۵$ است.

سعی می‌کنیم بـا محاسبهٔ $A = [(۰/۰۳۵)(۷۲/۱)/۲/۰۱]^{۸}$ مورد استعمال لگاریتمهای معمولی را توضیح دهیم. برای این‌کار با استفاده از خواص لگاریتمها به دست می‌آوریم:

$$\log A = \log \left[\frac{(۰/۰۳۵)(۷۲/۱)}{۲/۰۱}\right]^{۸} = ۸\left[\log \frac{(۰/۰۳۵)(۷۲/۱)}{۲/۰۱}\right]$$

$$= ۸[\log (۰/۰۳۵) + \log (۷۲/۱) - \log (۲/۰۱)]$$

اکنون با استفاده ازجدول لگاریتم داریم:

1. anti logarithm

$$\log ۰/۰۳۵ = \log ۳/۵(۱۰^{-۲}) = -۲ + \log ۳/۵ = -۲ + ۰/۵۴۴۱$$

$$\log ۷۲/۱ = [\log (۷/۲۱)(۱۰)] = ۱ + ۰/۸۵۷۹ = ۱/۸۵۷۹$$

$$\log ۲/۰۱ = ۰/۳۰۳۲$$

بنابراین

$$\log A = ۸[-۲ + ۰/۵۴۴۱ + ۱/۸۵۷۹ - ۰/۳۰۳۲]$$

$$= ۸(۰/۰۹۸۸) = ۰/۷۹۰۴$$

دراین صورت برای به‌دست‌آوردن A نیاز به‌پیداکردن آنتی لگاریتم ۰/۷۹۰۴ ، که برابر ۶/۱۷ می‌باشد داریم. بنابراین $A = ۶/۱۷$.

این مثال مشخص می‌کندکه لگاریتم می‌تواند درمحاسبات عددی مفید واقع شود. چه دربعضی مسائل روش محاسبهٔ معقول دیگـری جز استفاده از محاسب[1] وجود ندارد. به‌عنوان مثال، یافتن $(۲۱۰۶)^{۱/۱۷}$ را درنظربگیرید. تمرینات پایان این فصل به‌دانشجو فرصت‌کافی برای تمرین در به‌کاربردن لگاریتم درمحاسبات عددی، میدهند.

در بحث فـوق ۰/۰۳۵ را به‌صورت $(۳/۵)(۱۰^{-۲})$ نوشتیم . چنین بسطهایـی می‌توانند درردیابی اعشاریهای محاسبات پیچیده مفید باشند. به‌عنوان مثال، اگر بخواهیم

$$B = \frac{(۳۵۲/۷۲)(۰/۰۰۲۱)}{(۲۹/۲۳)(۰/۰۰۷۲)}$$

را محاسبه‌کنیم، تشخیص اینکه ممیز درکجا قرارداده شود به‌گونه‌یی مشکل است.دراین مورد ممکن است B را به‌صورت زیربنویسیم:

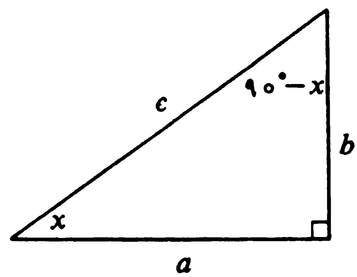
$$B = \frac{(۳/۵۲۷۲)(۱۰^{۲})(۲/۱)(۱۰^{-۳})}{(۲/۹۲۳)(۱۰)(۷/۲)(۱۰^{-۳})} = \left[\frac{(۳/۵۲۷۲)(۲/۱)}{(۲/۹۲۳)(۷/۲)}\right]۱۰$$

بنابراین، مقدارنهایی،بین ۱ و ۱۰ قرار می‌گیرد. در این مـرحله، استفاده از این نوع برخورد با محاسبات پیچیده را به‌این‌علت ترغیب می‌کنیم‌کـه قراردادن نادرست ممیز یکی ازخطاهای متداول درحساب است. درکتب درسی علمی و مهندسی، اعداد غالباً به صورت توانهائی از ده درنظرگرفته می‌شوند.

1. computer

توابع مثلثاتی Trigonometric Functions

درمثلث قائم‌الزاویهٔ[1] شکل ۴.۷ ، x زاویه‌یی است که با درجه اندازه‌گیری شده است، و به‌علت اینکه $۹۰°$ زاویه‌یی قائمه است، ومجموع زوایای هرمثلث $۱۸۰°$ می‌باشد، زوایای این مثلث قائم‌الزاویه $۹۰°$ ، x و $۹۰° - x$ اند. ازاین مثلث قائم‌الزاویه‌میتوان درتعریف توابع مثلثاتیx، چنانچه درجدول ۴.۴ نشان داده شده استفاده‌کرد.



شکل ۴.۷

جدول ۴.۴

تابع	علامت	تعریف
سینوس	$\sin x$	$\frac{b}{c}$
کسینوس	$\cos x$	$\frac{a}{c}$
تانژانت	$\tan x$	$\frac{b}{a}$
کتانژانت	$\text{cotan}\, x$	$\frac{a}{b}$
سکانت	$\sec x$	$\frac{c}{a}$
کسکانت	$\csc x$	$\frac{c}{b}$

1. right triangle

از تعاریف فوق چندین حقیقت به‌طور مستقیم نتیجه می‌شود. دراین صورت توجه داشته باشیدکه توابع سینوس وکسینوس[1] را می‌توان برای بیان توابع دیگر به‌کاربرد. به‌این ترتیب:

$$\tan x=\frac{b}{a}=\left(\frac{b}{c}\right) : \left(\frac{a}{c}\right)=\frac{\sin x}{\cos x}$$

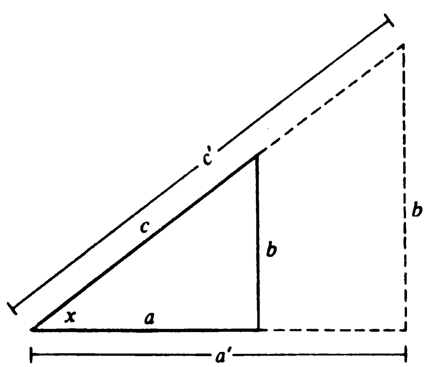
$$\operatorname{cotan} x=\frac{a}{b}=\left(\frac{a}{c}\right) : \left(\frac{b}{c}\right)=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x=\frac{c}{a}=\frac{۱}{\cos x}$$

$$\csc x=\frac{c}{b}=\frac{۱}{\sin x}$$

نیز ازشکل ۴.۷ آشکار است که ، به ازاء هر x واقع درفاصلهٔ $۰ \leqslant x \leqslant ۹۰^\circ$ ، $\sin (۹۰^\circ - x) = \cos x$ است. به‌این دلیل، تنها به محاسبهٔ جدول سینوس نیاز داریم و ازاین جدول درمحاسبهٔ توابع مثلثاتی دیگر استفاده می‌کنیم.

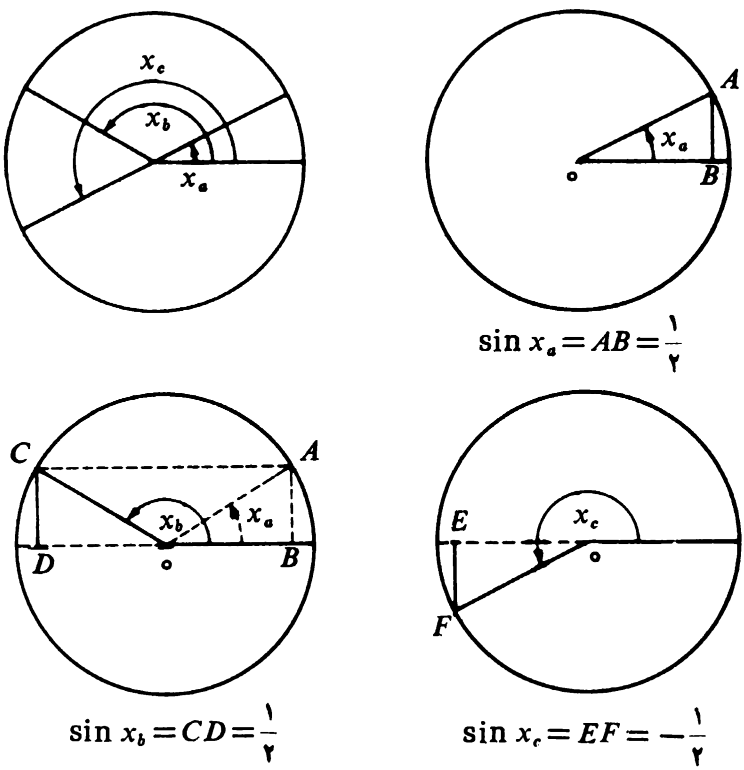
اکنون شکل ۴.۸ را درنظرمیگیریم. از آنجاکه مثلثهای دارندهٔ اضلاع a، b، c، و a' ، b'، c' مشابهند، $b'/c'=b/c$ و $a'/c'=a/c$ است . در این صورت‌واضحست که توابع مثلثاتی، نه‌به‌طول c بلکه تنها به‌زاویهٔ x وابسته‌اند.



شکل ۴.۸

1. sine and cosine functions

تعاریف توابع مثلثاتی، برمبنای مثلث قائم‌الزاویه، تنها درفاصلهٔ $۰ < x < ۹۰^\circ$ دارای معنی‌اند. اکنون تعریف مثلث قائم‌الزاویه را برای بررسی توابع مثلثاتی زوایا درحالت کلی بسط می‌دهیم. برای این منظور شکل ۴.۹ را که شامل دایره‌یی به شعاع ۱ است در نظر می‌گیریم. این شکل نشان می‌دهد که چگونه زاویهٔ مجاز[1] می‌تواند بـه ۳۶۰° بسط یابد. این مقدار ماکزیمم مقدار لازم است زیرا بعد از ۳۶۰° توابع مثلثاتی خودشان‌را تکـرار مـی‌کنند، یعنی، $\sin x = \sin(۳۶۰^\circ + x) = \sin(۷۲۰^\circ + x)$ ، و غیره. توابعی که دارای چنین خاصیت تکرارکنندگی‌یی هستند متناوب نامیده می‌شوند.



شکل ۴.۹

در شکل ۴.۹ زاویهٔ x_a برابر ۳۰° است، و $\sin x_a$ خط AB کـه مساوی ۱/۲ است می‌باشد. زاویهٔ x_b ، ۱۵۰°، واضحاً بزرگتر از ۹۰° است، و $\sin x_b = CD$ نیز

1. allowable angle

برابر ۱/۲ است. توجه داشته باشید که $AB=CD$، بنابراین $\sin x_a = \sin x_b$. زاویهٔ x_c بزرگتر از °۱۸۰ است. درواقع این زاویه برابر °۲۱۰ است. $\sin x_c$ برابر ۱/۲− است. کسینوسهای این زوایا به‌ترتیب زیرند:

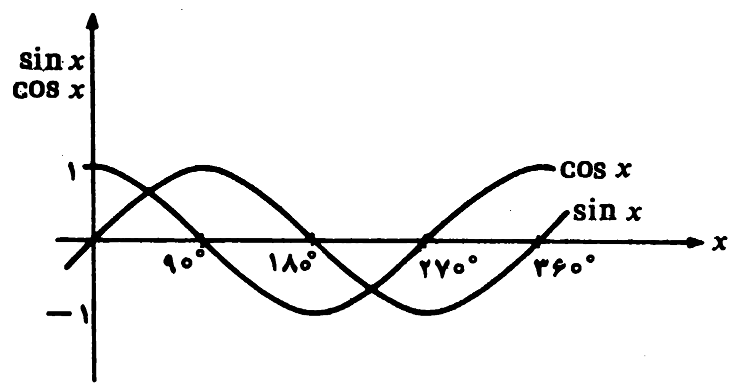
$$\cos x_a = \cos ۳۰^\circ = OB = ۰/۸۶۶$$

$$\cos x_b = \cos ۱۵۰^\circ = OD = -۰/۸۶۶$$

$$\cos x_c = \cos ۲۱۰^\circ = OE = -۰/۸۶۶$$

از آنجا که $OD=OE$، $\cos x_c = \cos x_b$. شخص می‌تواند این را نیز ملاحظه کند که:

$$\sin(۱۸۰^\circ - x) = \sin x \quad و \quad \cos(۱۸۰^\circ - x) = -\cos x$$



شکل ۴.۱۰

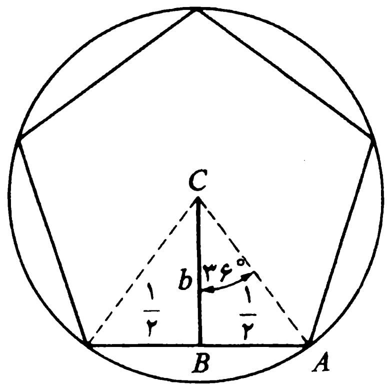
نمودار توابع سینوسی درشکل ۴.۱۰ نشان داده شده است. مقادیر $\sin ۳۰^\circ$، $\sin ۴۵^\circ$، و $\sin ۶۰^\circ$ از جدول سینوس ضمیمه به‌دست‌آمده و دراینجا درجدول ۴.۵ توسعه یافته‌اند.

جدول ۴.۵

x	$\sin x$
۰	۰
°۳۰	$\frac{۱}{۲}$
°۴۵	۰/۷۰۷۱
°۶۰	۰/۸۶۶۰
°۹۰	۱
°۱۲۰	۰/۸۶۶۰
°۱۳۵	۰/۷۰۷۱
°۱۵۰	$\frac{۱}{۲}$
°۱۸۰	۰
°۲۱۰	$-\frac{۱}{۲}$
°۲۲۵	۰/۷۰۷۱−
°۲۴۰	۰/۸۶۶۰−
°۲۷۰	۱−
°۳۰۰	۰/۸۶۶۰−
°۳۱۵	۰/۷۰۷۱−
°۳۳۰	$-\frac{۱}{۲}$
°۳۶۰	۰

مثال ۴.۱۴ مساحت پنج ضلعی منتظمی با اضلاع مساوی یك واحد رابه‌دست آورید.

برای‌این مقصود، شکل ۴.۱۱، که در آن مساحت‌مثلث ABC برابر $b(۱/۲)(۱/۲)(۲/۱)$ است، را درنظر می‌گیریم.



شکل ۴.۱۱

فرض مـی‌کنیم P مساحت چند ضلعی بـاشد در این صورت به دست می‌آوریم $P = ۱۰(۱/۲)(۱/۲)b$. واضحست‌که $b : ۱/۲ = \cot an\ ۳۶^\circ$ ، یا

$$b = (۱/۲)(\cot an\ ۳۶^\circ)$$

بنابراین: $$P = (۱۰)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)(\cot an\ ۳۶^\circ) = \left(\frac{۵}{۴}\right)(\cot an\ ۳۶^\circ)$$

اما $\cot an\ ۳۶^\circ = ۱/۳۷۶$. بدین‌ترتیب، $P = (۵/۴)(۱/۳۷۶) = ۱/۷۲۰$.

در بحث قبلی‌توابع مثلثاتی، زاویه را برحسب درجه اندازه‌گرفتیم. اما،دربسیاری ازکاربردهای علمی،زاویه با رادیان اندازه‌گیری می‌شود. اندازهٔ ۲π رادیان متناظر بـا $°۳۶۰$ است. سایرمقادیررا می‌توان با استفاده از رابطهٔ فوق به‌عنوان اساس‌کار،به‌دست آورد. به‌این ترتیب، y درجه برابر x رادیان می‌شود و درآن:

$$\frac{x}{۲\pi} = \frac{y}{۳۶۰} \quad \text{یا} \quad x = \frac{۲\pi y}{۳۶۰} = \frac{\pi y}{۱۸۰}$$

شخص می‌تواند با استفاده از این فورمول، مثلاً $°۳۰$ را به:

$$x = \frac{۳۰\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۶} \quad \text{رادیان}$$

تبدیل‌کند.

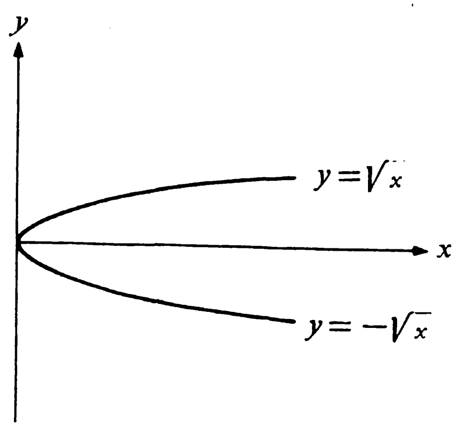
نسب Relations

گرچه بسیاری از نسبتهای بین متغیرات در ملاك[1] توابع صدق‌میکنند نسبتهای بی‌شماری وجود دارندکــه چنین نیستند. دراین مــورد حالت $x=y^2$ یا $y=\pm\sqrt{x}$ را درنظر میگیریم. پیش‌از این‌درمثال ۴.۴ مشخص‌کردیم که دراین مورد، نسبت،تابعی بین‌متغیرx[2] و متغیر y نیست زیرا، به ازاء هرمقدار مثبت x، دومقدار ممکن برای y موجود است. اکنون قاعدهٔ $y\leqslant x$ را در نظر مــی‌گیریم. دراین مورد به ازاء هرمقدار x[3] بی‌نهایت مقدار ممکن برای y وجود دارد.

مثالهای فوق را می‌توان به صورت مدلی در تعریف عبارت «نسبت بین متغیرات» به‌کار برد. دراین صورت‌نسبت،به‌عنوان قاعده‌یی‌که اعضاء دامنه را به اعضاء حوزه تبدیل می‌کند تعریف‌می‌شود. توجه داشته باشیدکه این تعریف به منحصر به‌فرد بودن نیازندارد و تبدیل هر عضو دامنه را به اعضاء بسیاری از حوزه مجاز می‌کند. به همین دلیل تابع نوع خاصی از نسبت است، به‌این ترتیب‌که تابع عضو دامنه را به‌عضو **منحصربه‌فردی**[4] ازحوزه تبدیل می‌کند.

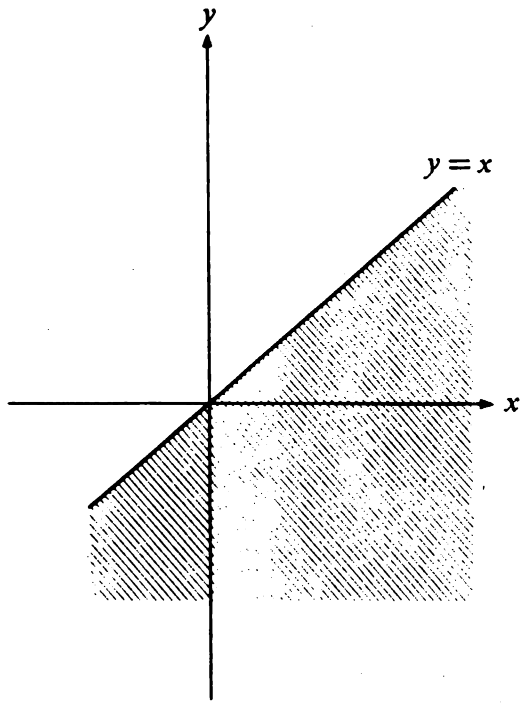
پیش از این،نمودار چندین تابع را رسم کرده‌ایم. اکنون بــه رسم نمودار چند نسبت که تابع نیستند می‌پردازیم .

مثال ۴.۱۵ نمودار نسبت $y=\pm\sqrt{x}$ درشکل۴.۱۲ نشان داده شده‌است. توجه‌داشته

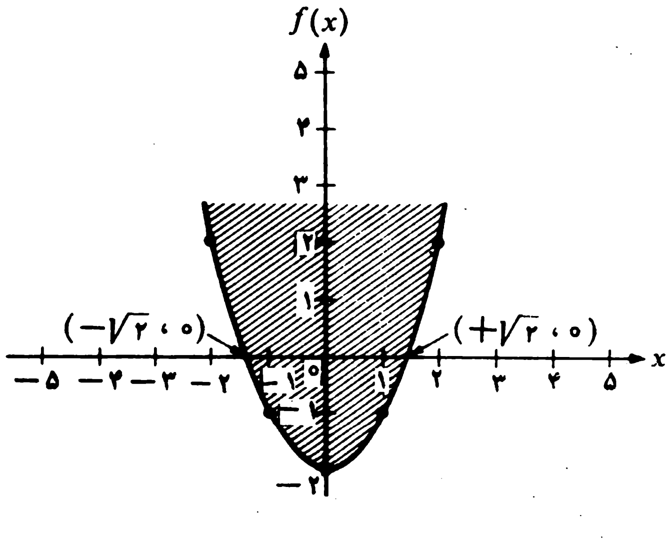


شکل ۴.۱۲

1. criterion
2. x variable
3. x value
4. unique



شکل ۳.۱۳



شکل ۳.۱۴

باشید که به ازاء هرمقدار مثبت x، دقیقاً دو مقدار y برای این نمودار موجود است.

مثال ۴.۱۶ اکنون نسبت $y \leqslant x$ را درنظر می‌گیریم. درشکل ۴.۱۳، خط $y=x$ را رسم می‌کنیم. نسبت $y \leqslant x$ شامل تمام نقاط واقع براین خط یا زیرآنست. توجه داشته باشید که این نسبت منجر به‌ناحیه‌یی از صفحهٔ xy که در شکل هاشور خورده است می‌شود.

مثال ۴.۱۷ اکنون نسبت $y > x^{2} - 2$ را درنظر می‌گیریم. دراین مورد ابتدا نیاز به رسم نمودار $y = x^{2} - 2$، که درشکل ۴.۱ انجام شده داریم. نسبت مطلوب، ناحیهٔ واقع درمنحنی فنجان شکل هاشور خورده درشکل ۴.۱۴ است.

علامت مجموع Summation Notation

پیش از بررسی مجموع، به توضیح مورد استفادهٔ متغیرهای اندیس‌دار[1] می‌پردازیم. در دوره‌های قبل ممکن است از متغیرهای x، y، z، A، r، وغیره برای نمایش دادن کمیات‌ارتباط مستقیم[2] به‌کاربرده باشیم. اگرشخص، تنها به سه متغیرنیازمند باشد،دراین صورت x، y، z کفایت میکنند. اما مواردی پیش‌می‌آیندکه درآنها به‌متغیرات‌بسیاری نیاز است. در چنین وضعیاتی ممکن است فایده داشته باشد که متغیرهای اندیس‌دار[3] x_1، x_2، x_3، . . . ، که درآنها x_1 متغیر اول، x_2 متغیر دوم، x_3 متغیرسوم، و در حالت‌کلی، x_i متغیر i ام رانمایش می‌دهد،را مورد بررسی‌قراردهیم. علامت‌اندیس‌دار[4] نه‌تنها استفاده از متغیرهای بسیار را ممکن می‌سازد، بلکه،علاوه براین، پی گیری ورد آنها را آسان‌تر می‌سازد. چه بسیارآسان‌تراست‌که به‌جای z، x_3 را به‌عنوان متغیرسوم به‌خاطر داشته باشیم.

به‌عنوان مثال، محاسبهٔ پرداخت‌کل حقوق دریك شرکت بزرگ رادرنظرمیگیریم. دراین‌صورت اگر x_i حقوق هفتگی‌کارمند i را نمایش دهد، عبارت:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{2000}$$

---

1. variables with subscripts
2. quantities of immediate concern
3. subscripted variables
4. subscript notation

کل پرداخت حقوق هفتگی درشرکتی با ۲۰۰۰ کارمند را به‌دست می‌دهد.

ازآنجاکه اغلب چنین مجموعاتی رخ می‌دهند، علامت مجموع فشرده‌یی اختراع شده‌که به ذکرآن می‌پردازیم. به‌جای نوشتن

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2000}$$

علامت $\sum_{i=1}^{2000} x_i$ را به‌کار میبریم. دراین مورد Σ (زیگما، حرف یونـانی) مجموع را نمایش میدهد. معادلـۀ $i=1$ واقع در زیر علامت Σ مشخص می‌کندکـه دراولین جملۀ مجموع به‌جای i، ۱ قرارداده شده است، و مقدار ۲۰۰۰ دربالای علامت Σ به این معنی است‌که درآخرین جملۀ مجموع به‌جای i، ۲۰۰۰ قرارگرفته است. به‌این ترتیب ابتدا به‌جای i، ۱ قرارگرفته و x_1 به‌دست‌آمده؛ بعد به‌جای i، ۲ قرارگرفته و جملۀ حاصل با x_1 جمع شده؛ بعد ازاین‌کار، به‌جای i، ۳ قرارگرفته و x_3 به x_1+x_2 افزوده شده است، واین جریان ادامه یافته تا اینکه به جای i، ۲۰۰۰ قرارگـرفته است و در این مرحله، مجموع

$$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2000}$$

شده است. درحالت‌کلی،

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n$$

دراین مورد نیازنیست‌که شخص، مجموع را با x_1 آغازکند. مجموع

$$x_r+x_{r+1}+\cdots+x_n$$

را می‌توان با $\sum_{i=r}^{n} x_i$ علامتی‌کرد. دراین صورت مجموع را با قـرار دادن r به جای i آغازکرده جمع بندی را تا قراردادن n به جای i ادامه میدهیم.

استفاده از علامت مجموع را با چند مثال توضیح می‌دهیم.

مثال ۴.۱۸ فرض می‌کنیم $x_1=2$، $x_2=-3$، $x_3=3/2$، و $x_4=4$ باشد. در این صورت

$$\sum_{i=1}^{4} x_i=x_1+x_2+x_3+x_4=2+(-3)+\frac{3}{2}+4=4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

مثال ۴.۱۹ مجموع زیر را به‌دست آورید:

$$(a)\quad \sum_{i=1}^{5} i \quad ; \quad (b)\quad \sum_{i=3}^{7} i^2$$

حل:

$$(a)\qquad \sum_{i=1}^{5} i = 1+2+3+4+5=15$$

در مجموع فوق با قراردادن یك به‌جای i آغاز کردیم و عمل جمع را تا $i=5$ ادامه دادیم.

(b)

$$\sum_{i=3}^{7} i^2 = 3^2+4^2+5^2+6^2+7^2 = 9+16+25+36+49 = 135$$

یکی از فواید علامت مجموع اینست که می‌تواند به جای مجموعات به تفصیل نوشته شده،علائم ریاضی مختصر را جانشین کند. این مطلب در مثال ۴.۲۰ توضیح‌داده شده است.

مثال ۴.۲۰ علامت مجموع را برای‌بیان موارد زیر به‌کار برید:

$(a)\quad (1)(2)+(2)(3)+\cdots+(100)(101)$

$(b)\quad 1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$

$(c)\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots-\frac{1}{100}$

حل:

(a)

$$(1)(2)+(2)(3)+(3)(4)+\cdots+(100)(101) = \sum_{i=1}^{100} i(i+1)$$

$$(b)\qquad 1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$$

$$(c)\qquad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots-\frac{1}{100}=\sum_{i=1}^{100}\frac{(-1)^{i+1}}{i}$$

پس از چند تمرین دانشجو باید در به‌کاربردن علامت مجموع روان شود. بحث بیشتری درمورد علامت مجموع را درفصل ۸ که درآن بعضی خواص علامت مجموع را استخراج کرده توضیحات بیشتری از موارد استعمالش به‌دست می‌دهیم، می‌توان یافت.

تکالیف و مسائل فصل ۴

۱. فرض میکنیم $f(x)=x^{۲}-۳x+۴$ باشد. محاسبه‌کنید:

(a) $f(۱)$

(b) $f(\sqrt{۲})$

(c) $f(-۱)$

(d) $f(۲)$

(e) $f(-۴)$

۲. فرض میکنیم $f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}+x+۱$ باشد. محاسبه کنید:

(a) $f(۲)$

(b) $f(-۲)$

(c) $f(۰)$

(d) $f\left(\frac{۳}{۲}\right)$

(e) $f\left(-\frac{۱}{۳}\right)$

۳. حوزهٔ هریك از نسب زیررا مشخص کنید:

(a) $f(x)=x+۱$ دامنه‌شامل اعداد حقیقی است.

(b) $f(x)=x^{۳}-۱$ دامنه شامل اعداد حقیقی است.

(c) $f(x)=x^{۲}$ دامنه شامل اعداد صحیح است.

(d) $f(x)=x^{۲}-۴$ دامنه شامل اعداد حقیقی است.

(e) $[f(x)]^{2}+x=1$ دامنه شامل اعداد حقیقی است.

۴. یك صفر هر تابع را بیابید:

(a) $f(x)=x-3$

(b) $f(x)=x^{2}-6$

(c) $f(x)=x^{3}-x^{2}+2x-2$

(d) $f(x)=2^{x}-1$

(e) $f(x)=x^{2}-2x+1$

۵. فرض‌میکنیم: $f(x)=x^{2}+2x-1$ و $g(y)=y^{2}+2$. محاسبه کنید:

(a) $g(f(2))$

(b) $g(f(0-1))$

(c) $g(f(4))$

(d) $g(f(1/4))$

(e) $g(f(x))$

۶. f^{-1} را برای هریك از موارد زیر به‌دست آورید:

(a) $f(x)=3x+1$

(b) $f(x)=4x-6$

(c) $f(x)=x^{3}$

(d) $f(n)=p_{n}$ که درآن n عددی طبیعی و p_{n} ، n امین عدد اول است.

(e) $f(x)=x^{5}+1$

۷. دامنهٔ هریك از توابع زیرشامل مجموعهٔ اعداد حقیقی است، نمودار آنهارارسم کنید:

(a) $f(x)=x^{2}+2$

(b) $f(x)=2^{x}$

(c) $f(x)=x+3x^{2}+2$

$(d)\quad f(x)=x^{۳}$

$(e)\quad f(x)=x^{۳}-۲x^{۲}+۱$

۸. نمودار نامعادلات زیررا رسم کنید:

$(a)\quad f(x)\leqslant ۱$

$(b)\quad [f(x)]^{۲}\leqslant x$

$(c)\quad f(x)+x\leqslant ۳$

$(d)\quad [f(x)]^{۲}+x^{۲}\leqslant ۱$

$(e)\quad [f(x)]^{۲}\geqslant x+۲$

۹. عبارات درجه دوم زیررا به‌صورت $(x-r_{۱})(x-r_{۲})$ تجزیه‌کنید:

$(a)\quad x^{۲}-۳x+۲$

$(b)\quad x^{۲}+۵x+۶$

$(c)\quad x^{۲}-۲x+۱$

$(d)\quad x^{۲}+۳$

$(e)\quad x^{۲}-\frac{۱}{۶}x-\frac{۱}{۶}$

۱۰. شیب وعرض‌از مبدأهریك ازچند جمله‌ئی‌های درجه اول زیررا به‌دست دهید.سپس نمودار چند جمله‌ئی مورد بحث را رسم‌کنید:

$(a)\quad f(x)=۳x-\frac{۱}{۲}$

$(b)\quad f(x)=\frac{۱}{۲}x-۲$

$(c)\quad f(x)=x+\sqrt{۲}$

$(d)\quad f(x)=-۲x+۳$

$(e)\quad f(x)=-۳x+\sqrt{۲}$

۱۱. نمودار سهمی‌های زیر را رسم کنید:

$(a)\quad f(x)=x^{۲}+۱$

$(b)\quad f(x)=-x^{۲}+۱$

$(c)\quad f(x)=x^{۲}+۲x-۱$

$(d)\quad f(x)=-x^{۲}+۳x+۲$

$(e)\quad f(x)=x^{۲}-۳x+۲$

۱۲. اعداد زیر را به‌صورت چند جمله‌ئی‌هایی با $x=۱۰$ بیان کنید:

(a) ۲۳۷۱

(b) ۱۲۳۱

(c) ۲۲۲

(d) ۱۱۱۱

(e) ۱۲۵۱

۱۳. اعداد زیر را به‌صورت:

$$a_k ۱۰^k + a_{k-۱} ۱۰^{k-۱} + \ldots + a_{۰} ۱۰^{۰} + b_{۱}\, ۱۰^{-۱} + b_{۲}\, ۱۰^{-۲} + \ldots + b_r\, ۱۰^{-r}$$

بیان کنید. دراین‌جا k ، r ، a_i و b_i اعداد صحیح نامنفی‌اند.

(a) ۱۰۱

(b) ۱۲۴۵/۱

(c) ۳۲،۰۰۰/۱۲

(d) ۰/۰۱۰۱۰۲

(e) ۰/۲۱۳۴

(f) ۱۲/۰۴

۱۴. اعداد زیر درمبنای ۶اند، آنها را درمبنای ۱۰ بیان کنید:

(a) ۱۴۲۳

(b) ۲۴۱۲

(c) ۳۰۰۱

(d) ۲۱۰۱

(e) ۵۰۰۰

۱۵. برای انجام محاسبات زیر از لگاریتم استفاده کنید:

(a) $(۲۳)(۳۷/۱)$

(b) $(۲۳/۱)^{۴}$

(c) $\dfrac{(۳۲/۱)(۲۱/۳)}{۱۵/۲}$

(d) $\left[\dfrac{(۱۱/۱)(۲۱/۲)}{۳۰/۵}\right]^{۴}$

(e) $(۱۰)^{۱/۱۰}$

(f) $\dfrac{(۱۳/۲)(۱۲/۱)+(۱۷/۹)(۱۸/۲)}{۰/۰۳۲}$

(g) $\dfrac{(۱۹/۷)^{۴}+(۹۳/۱)^{۳}+(۲/۱)^{۱۰}}{(۱۸/۱)^{۴}+(۷/۳)^{۶}}$

۱۶. عدد ۷۳۱/۲ می‌تواند به صورت $(۱۰^{۲})۷/۳۱۲$ نوشته شود. اعداد زیر را به صورت:

$(k_۱/k_۲k_۳\cdots k_m)(۱۰^{r})$

که درآن k_i عدد طبیعی کمتر از ۱۰ و r عدد صحیح است، بیان کنید:

(a) ۳۴۲۱/۲

(b) ۱۲۳/۷

(c) ۰/۰۰۳۲

(d) ۰/۰۰۰۱۰

(e) $(۱۲۳)(۱۰^{۴})$

۱۷. نمودار توابع زیررا رسم کنید:

(a) $f(x)=-x$

(b) $f(x)=|-x|$

(c) $f(x)=|۲x+۳|$

(d) $f(x)=۱+|x|$

(e) $f(x)=|x-۶|$

۱۸. توابع مثلثاتی زیررا با تنها استفاده از $\sin ۳۰^\circ=۱/۲$ ، $\sin ۶۰^\circ=۰/۸۶۶۰$، $\sin ۴۵^\circ=۰/۷۰۷۱$ محاسبه کنید:

(a) $\tan ۴۵^\circ$

(b) $\text{cotan}\ ۳۰^\circ$

(c) $\sec ۳۰^\circ$

(d) $\csc ۳۰^\circ$

(e) $(\cos ۳۰^\circ)(\tan ۳۰^\circ)$

۱۹. هشت ضلعی[1] منتظمی باطول هرضلع برابر ۱را درنظر می گیریم. مساحت این هشت ضلعی را حساب کنید.

۲۰. مجموعات زیر را محاسبه کنید:

(a) $\sum_{i=۱}^{۳} i^۳$

(b) $\sum_{i=۳}^{۵} \left(\frac{۱}{i}\right)$

(c) $\sum_{i=۲}^{۵} (-۱)^i i$

(d) $\sum_{i=۳}^{۵} (-۱)^i ۲^{-i}$

(e) $\sum_{i=۲}^{۴} (۳i+۲)$

۲۱. موارد زیررا با استفاده از علامت مجموع بیان کنید:

1. hexagon

(*a*) $۱+۲+۲^{۲}+۲^{۳}+۲^{۴}+\cdots+۲^{n}$

(*b*) $۱-\frac{x}{۲}+\frac{x^{۲}}{۳}-\frac{x^{۳}}{۴}+\frac{x^{۴}}{۵}-\frac{x^{۵}}{۶}+\frac{x^{۶}}{۷}$

(*c*) $\frac{x}{۱}+\frac{x^{۲}}{۲}+\frac{x^{۳}}{۳}+\cdots+\frac{x^{n}}{n}$

(*d*) $\sin x+\sin ۲x+\sin ۳x+\sin ۴x+\cdots+\sin nx$

(*e*) $(۲)(۱)+(۲)(۲)+(۲)(۳)+(۲)(۴)+\cdots+(۲)n$

فصل ۵ Chapter 5

معرفی اثباتها

Introduction to Proofs

درفصل ۱، ریاضیات را چون بازی‌ئی درنظر گرفتیم . در این صورت لازم است که دانشجوی ریاضیات ، با استفاده از این شباهت، ابتدا قواعد اساسی آن را بیاموزد و بعد چگونگی انجام دادن این بازی را یاد بگیرد. قواعد اساسی استدلال درست رادرفصل ۲ معرفی کردیم،وآنچه باقیمانده‌آموختن جریان عملی‌انجام دادن بازی‌ریاضیات است.

انجام دادن این بازی عبارت ازاثبات یا عدم اثبات[1] قضایاست. متأسفانه، دانستن چند قاعدهٔ منطقی و دست داشتن در روش استدلالی‌ئی‌که منجر به اثبات درستی شود، دارای تفاوت بسیارند. اغلب دانشجویان تازه‌کارکاملاً مطمئن نیستندکه اثبات‌درست در حقیقت چیست و، به همین دلیل نمی‌دانندکه اثبات درست چه وقت مبرهن شده است. بنابراین، در این فصل اصول اثبات درست را مورد بحث قرار می‌دهیم و بعد با استفاده از مثالهای مفصل به توضیح موارد استعمالشان می‌پردازیم، و در فصول آینده روشهای گوناگونی را که در اجرای عملی اثباتهای ریاضی مفیدند معرفی می‌کنیم.

---

1. proving or disproving

کلمات «اثبات ریاضی[1]» غالباً در این متن ظاهر شده‌اند، بنابراین پیش از به‌دست دادن بحث مفصل چنین اثباتهائی، مفید است که معنی این کلمات را روشن کنیم. اثبات ریاضی استدلال دقیقی است که برای متقاعد کردن خود و دیگران در اینکه قضیهٔ ریاضی خاصی راست است به‌کار میرود. برخلاف استدلالاتی که در بحثهای روزمره به‌کار می‌رود، هر مرحله از اثبات ریاضی باید از لحاظ منطقی درست باشد، و همین ملاك است که اثباتهای ریاضی را بسیار مشکل می‌کند، چه در این مورد شخص نمی‌تواند به سادگی دستش را حرکت دهد و مجموعه‌یی از گزاره‌های معقول بسازد. در ریاضیات، هر مرحله باید شامل یك استدلال درست، یا درستی‌ئی شامل استفادهٔ صحیح از قواعد منطق باشد، و درصورتی که اجرای دنباله‌یی از چنین مراحل منطقی‌یی منجر به تحقیق قضیهٔ مورد بحث شود، گفته می‌شود که قضیه اثبات شده است.

در اثبات ریاضی، اولین مرحله باید مطالعهٔ دقیق متن کامل قضیه باشد. گرچه ممکن است این سخن واضح به‌نظر برسد، اما بسیاری از دانشجویان صرفاً نگاهی به قضیه می‌اندازند و بعد بدون اینکه زحمت به طور کامل واضح کردن معنی هر یك از شرایط واقع در قضیه را به خود هموار کنند به اثبات قضیه می‌پردازند، هرقضیه در حالت کلی شامل دو جزء: گزاره‌یی از آنچه باید اثبات شود و شرایطی که باید برقرار باشند، است واثبات قضیه باید برای برقرار کردن تمام شرایط، به قدر کافی کلی باشد. یکی از مغالطه‌های متداول[2] اثبات گزاره‌یی است که شرایط ساده‌تر شرایطی که عملاً مشخص شده‌اند را بر قرار می‌کند. به عنوان مثال، اگر قضیه‌یی بر این دعوی باشد که نامساوی مشخصی در مورد جمیع اعداد حقیقی مثبت راست است، دراین صورت تحقیق نامساوی در مورد اعداد طبیعی به‌طور واضح کافی نیست.

هنگامی که گزارهٔ دقیق قضیه واضح شد. شخص می‌تواند شروع به اثبات کند و در سرتاسر اجرای اثبات، دانشجو باید مطمئن باشد که هر مرحله شامل استدلالی درست است؛ چه اگر تنها یك مرحله نادرست باشد در این صورت کل اثبات نادرست خواهد بود. با توجه به این مطلب، شخص باید آگاه باشد که بزرگترین علت اثباتهای مغالطه آمیز[3] استفاده از استدلالهائی که به طور شهودی صحیح به‌نظر میرسند اما محقق نشده‌اند است. برای اجتناب ازچنین استدلالاتی و، بنابراین، اجتناب از اثباتهای کاذبی[4] که ممکن نادرست باشند، به اندکی شکیبائی بیشتر نیازاست، بار دیگر بایدتأکید شود که، در اثبات

---

1. mathematical proof
2. common fallacy
3. fallacious proofs
4. pseudo proofs

یك قضیه، دانشجو باید مطمئن باشد که هر مرحله از اثباتش صحیح است.

از آنجاکه اثبات، استدلال‌است، خواننده باید تاآنجاکه امکان داشته باشد آنرا به طور واضح اجراکند، در این صورت شخص باید مطمئن شود که مراحل اثبات به طور منطقی‌ازیکدیگر تبعیت‌می‌کنند،ودر موردهریك‌ازآنها باید دلیل‌خوبی‌موجودباشد. ورود گزاره‌های غیرلازم تنها به‌مشکل‌تر ساختن اثبات می‌انجامد. ممکن است دانشجوی تازه کاری معادلهٔ $۴x=۸$ را به صورت

$$۴x=۸$$

$$۲x=۴$$

$$x=۲$$

حل کند. مرحلهٔ دوم واضحاً غیرلازم به نظر می‌رسد؛ چه شخص می‌تواند مرحلهٔ آخر را مستقیماً از اولی، از آنجاکه $۴x=۸$ مستلزم $x=(۸/۴)=۲$ است، به دست‌آورد.

برای اثبات‌قضایای ریاضی، شخص باید غالباً آنها را به صورت علامتی‌درآورد و سپس با علائم به دست آمده عمل‌کند، و به‌این علت بد نیست‌که تبدیل گزاره‌های شفاهی به علاماتی مرور شود.

مثال ۵.۱ گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

(i) مجموع دو عدد صحیح فرد، یك عدد صحیح زوج است.

(ii) حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی[1]، مساوی شش است.

(iii) مجموع دو عدد حقیقی، کمتر از دو است.

(iv) مجموع مربعات دوعدد برابر یك است.

(v) پنج برابر عددی منهای هفت، مساوی دو برابر آن عدد است.

اکنون این گزاره‌ها را به صورت علامتی می‌نویسیم:

(i) فرض می‌کنیم $n_۱$، $n_۲$، و $n_۳$ سه عدد صحیح باشند. در این صورت واضحست که $۲n_۱+۱$، $۲n_۲+۱$ دو عدد صحیح فردند، و ازآنجا که $n_۱$ و $n_۲$ مشخص نشده‌اند، $۲n_۱+۱$ و $۲n_۲+۱$ دو عدد صحیح فرد دلخواهند. به‌همین ترتیب، $۲n_۳$ عدد صحیح زوجی است، در این صورت گزاره براینست‌که:

1. consecutive integers

$$(۲n_۱+۱)+(۲n_۲+۱)$$

را می‌توان به صورت $۲n_۳$ نوشت.

(ii) فرض می‌کنیم n عـــدد صحیحی باشد. در ایـــن صـــورت گزاره براین است کـــه $n(n+۱)=۶$

(iii) فرض می‌کنیم x وy دو عدد حقیقی باشند. در این صورت $x+y<۲$ صـــورت علامتی گزاره است.

(iv) اگر x و y دو عدد باشند، در این صورت $x^۲+y^۲=۱$ طریق عـــلامتی نمایش دادن گزاره است.

(v) فرض می‌کنیم x عدد مورد بحث باشد. دراین صورت گزاره را می‌توان به‌صورت $۵x-۷=۲x$ نوشت.

دانشجو می‌تواند با انجام مسألهٔ ۱ تمرینات، تمرین بیشتری در تبدیل گزاره‌های شفاهی به صورتهای علامتی به‌دست آورد.

در این مرحله به بررسی چند مثال از اثباتهای نسبهٔ ساده می‌پردازیم . تأکید در مورد هر یك از این مثالها، بیشتر از خود اثبات، بـــر بحث برچگونگـــی اثبات نتیجهٔ آنهاست. دانشجو باید ابتدا به مطالعهٔ دقیق این مثالها بپردازد و بعدکـــوشش در اثبات بعضی از قضایای بیان شده در مسائل تکلیفی واقع در پـــایان این فصل کند. مثال ۵.۲ مفهوم اثبات را با بررسی وضعیتی که ممکن است در داستانی اسرارآمیز رخ دهدتوضیح میدهد. این مثال باید به دانشجو در تعقیب اثباتهای مثالهای کمیتی[1] ۵.۳ ، ۵.۴،و۵.۵ که بعد از آن می‌آیند کمك کند.

مثال ۵.۲ هانی وینکل پیر[2]،آخرین بارون از بارونهای بزرگ غارتگر، در یك شب طوفانی ورثهٔ خود را برای تنظیم وصیت نامه‌اش دعوت کرد، و از آنجا کـــه آدمـــی عجیب و غریب و بدگمان بود آزمایشهای مختصری برای افراد ذینفع، که شامل پسر برادر، نا پسری، خواهر، دو نوهٔ خواهر، منشی وفادارش، والبته، پیشکـــارش بودند، در نظر گرفت. اندکـــی بعداز جمع شدن گروه، صدای رعد شنیده شد و بعد از آن جریان برق قطع گردید. طی زمان کوتاه خاموشی صـــدای شلیك تیری شنیده شد، و هنگامیکـــه چراغها دوباره روشن شدند، هانی وینکل در صندلیش، مرده، افتاده بود. بازرس پلیس از آنجاکه اثر انگشتی بر روی هفت‌تیر نبود نتیجه گـــرفت که موضوع خودکشی بوده

1. quantitative examples　　2. old Mr. Honeywinkle

است، اما بعداً وصیت نامهٔ قدیمی‌یی را که پیش از تولد پسر برادر، نوهٔ کوچکتر خواهر، و نا پسریش تنظیم شده بود به دست آورد. این وصیت‌نامه تمام ثروتش را به خواهرش میلی سنت هانی وینکل[1] واگذار میکرد. بررسی باروت روی زخم مشخص کرد که گلوله از فاصله‌یی که بیشتر از سه‌فوت نبوده آتش شده است. میلی سنت تنها شخص داخل اتاق بود که درکمتر از ده فوتی هانی وینکل قرار داشت. او درمقابله با این مدرك به‌جنایت اقرارکرد، و مسأله به این ترتیب حل شد.

مثال ۵.۳ مربع هر یك از پنج عدد فرد اولیه،

$$۱^۲=۱ ، ۳^۲=۹ ، ۵^۲=۲۵ ، ۷^۲=۴۹ ، ۹^۲=۸۱$$

باز عددی فرد است. آیا این موضوع در حالت‌کلی راست است‌یا تنها در مورداین پنج عدد برقرار میباشد؟ اگر فکر می‌کنیم‌که این موضوع درحالت‌کلی برقراراست،میتوانیم آن را به‌طور اختصار به صورت قضیهٔ زیربیان کنیم:

مربع هر عدد صحیح فرد، خود عدد صحیح فردی است.

این قضیه یا راست یا دروغ است. بـرای اثبات نا راستی آن، تنها لازم است‌که عدد صحیح فردی بیابیم‌که مربعش زوج باشد. ازطرف دیگر اثبات راستی‌آن نیازمنداینست که قضیه به ازاء جمیع اعداد صحیح فرد راست باشد.

ممکن است چنین به نظر برسد که قضیه را، به‌علت اینکه بـه ازاء جمیع حالات مورد بررسی راست بوده، اثبات کرده‌ایم . اما واضح است‌که این اثبات، اثبات درستی نیست، زیرا در این مورد عدد ۳۷۷۴۱، یا ۳۴۹ ، ۴۲، یا تعداد بسیاری از اعدادصحیح فرد دیگر را مورد بررسی قرار نداده‌ایم. برای به دست آوردن اثبات درست بایداثبات شود که گزارهٔ مورد بحث به ازاء جمیع اعداد صحیح فرد راست است.

اما پیش از اینکه اثبات را آغازکنیم، قضیه را به دقت می‌خوانیم. ابتدا تـوجه می‌کنیم که قضیه تنها با اعداد فرد سروکار دارد. اما اعداد فردکدامند؟ آنها را بدین‌ترتیب تعریف کرده‌ایم که بتوانند به‌صورت $۲n+۱$، که درآن n عدد صحیحی است، نوشته شوند. قضیهٔ مذکور بیان می‌کند که چون عدد فردی مربع شود نتیجه، عددی‌فرد است. $۲n+۱$ صورت‌کلی[2] عدد فرد است، در این صورت،قضیه بر این بیان است‌که:

$$(۲n+۱)^۲=(۲r+۱)$$

---

1. Millicent Honeywinkle 2. general form

که درآن r عدد صحیحی است، یعنی میگوید که $(۲n+۱)^۲$ می‌تواند به صورت‌عددی فرد نوشته شود.

اکنون اقدام به اثبات قضیه می‌کنیم. در این مورد معقول به نظر می‌رسد که ابتدا نیاز به ساده کردن $(۲n+۱)^۲$ داشته باشیم. در این صورت

$$(۲n+۱)^۲=(۲n)^۲+۲(۲n)+۱=۴n^۲+۴n+۱$$

اگر $۴n^۲+۴n+۱$ عدد فردی باشد، میتواند به صورت $۲r+۱$ نوشته شود. $۴n^۲+۴n+۱$ را به‌صورت $۲(۲n^۲+۲n)+۱$ تجزیه میکنیم. از آنجا که n عددصحیحی است، چند جمله‌ئی‌یی از n با ضرایب صحیح، باز هم صحیح است. به این دلیل، $۲n^۲+۲n$ عددی صحیح است. از قرار دادن حرف r به جای $۲n^۲+۲n$ ، $۲r+۱$ نتیجه می‌شود. دراین صورت نشان دادیم که $(۲n+۱)^۲$ عددی فرد است، و از آنجا که قضیهٔ مورد اثبات همین بود، در تحقیق درستی قضیه توفیق حاصل کرده‌ایم.

مثال ۵.۴ نشان دهید که مربع عدد زوج،عددی زوج است. در این‌مورد یکی ازطرقی که ممکن است توسط بعضی از دانشجویان به‌کار رود طریق زیر است: عدد صحیح یا زوج یا فرد است. در مثال ۵.۳ نشان دادیم که مربع یك عدد فرد،یك عدد فرداست. از این نتیجه می‌شودکه مربع یك عدد زوج،یك‌عدد زوج است. گر چه ممکن است این اثبات معقول به نظر برسد ، نادرست است. چه تنها به‌خاطر اینکه مربع یك عدد فرد، یك عددفرد است‌نتیجه نمیشودکه مربع یك عدد زوج نمی‌تواند عددی فرد باشد. به این دلیل؛شخص باید طریق دیگری برای به دست‌آوردن اثبات درست‌این قضیه حاصل‌کند.

یکی ازطرق ساده و درعین حال درست اقدام، با تعریف عدد زوج انجام‌میگیرد. عدد صحیح زوج،عددی است‌که می‌تواند به صورت $۲n$، که درآن n نیز عدد صحیحی است، نوشته شود. در این صورت $(۲n)^۲=۴n^۲=۲(۲n^۲)$ و اکنون به جای $۲n^۲$، m را قرار می‌دهیم. از آنجا که n عددی صحیح است m نیز هست. به این ترتیب نشان دادیم که $(۲n)^۲=۲m$ که در آن m عدد صحیحی است. این معادله طریق ریاضی بیان اینست که $(۲n)^۲$ عددی زوج می‌باشد و قضیه محقق است.

مثال ۵.۵ نشان دهید که مربع یك عدد فرد منهای یك، بر ۴ قابل قسمت است. دراین قضیه، از اعداد فرد و تقسیم پذیری[1] بر ۴ سخن رفته است. قبلاً ملاحظه کردیم که عدد

---

1. divisibility

فرد عددی است که می‌تواند به‌صورت $۲n+۱$، که در آن n عدد صحیحی است، نوشته شود. گزاره، از عدد فردمربع شدهٔ منهای یك، صحبت می‌کند، واین را می‌توان به صورت $(۲n+۱)^۲-۱$ نوشت. قضیه‌مان براینست کـه $۴:[(۲n+۱)^۲-۱]$ عـددی صحیح است، و این گزارهٔ اخیر را باید اثبات کرد.

برای اینکار ابتدا عبارت را ساده میکنیم:

$$\frac{(۲n+۱)^۲-۱}{۴}=\frac{۴n^۲+۲(۲n)+۱-۱}{۴}=\frac{۴n^۲+۴n}{۴}=n^۲+n$$

از آنجا که n عددی صحیح است، $n^۲+n$ عددی صحیح است. بنابراین: $۴:[(۲n+۱)^۲-۱]$ عددی صحیح است و به این ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

فرهنگ لغات اثبات‌ها Vocabulary of Proofs

ریاضیدانها مانند سایر دانشمندان، فرهنگ لغات خاص خـودشان را دارند، وبعضی از کلماتی که به‌کار می‌برند برای ناآشنا کاملاً جدیدند، در حالیکه بعضی دیگر، کلماتی متعارف با معنی خاص درزمینهٔ ریاضی‌اند. دراین صورت پیش ازاینکه شروع به‌بررسی روشهای گوناگون اثبات کنیم لازم است که معنی کلماتی را کـه در ارتباط با اثباتها به کرات به‌کار می‌روند بدانیم.

پیش از این، کلمهٔ «آکسیوم» را چندین بار به‌کار بـرده‌ایم. آکسیوم را میتوان به عنوان گزاره‌یی ریاضی کـه فرض بر اینست که راست است تعریف کرد. بعضی کتب به جای آکسیوم ازکلمهٔ پوستولات[1] به معنی مسلم فرض شده، استفاده می‌کنند. به عنوان مثال لاندو[2]، در طرح دستگاههای عددی در مبانی آنالیزش[3]، آکسیوم استقراء پئانو را به‌صورت«به ازاء هر x، دقیقاً یك عدد طبیعی، موسوم به تالی x، که با x' نمـایش داده می‌شود، موجود است» بیان میکند. این گزاره، گزاره‌یی برای اثبات نیست بلکه فرضی است که لاندو در نظرگرفته است. با این فرض، شخص تنها نیاز به تعریف عدد۱ دارد زیرا ۲ به‌صورت $۱'$ و ۳ به‌صورت $۲'$ وغیره نتیجه می‌شود. می‌تـوان شاخهٔ کاملی از ریاضیات را با تعدادکمی آکسیوم خوب انتخاب شده، توسعه داد. بـه ایـن ترتیب، آکسیومهای پئانو را می‌توان در توسعهٔ اعداد و خواصشان به‌کاربـرد؛ آکسیومهای

1. postulate 2. Landau
3. Fundations of Analysis

اقلیدس منجر به هندسهٔ اقلیدسی می‌شوند؛ و آکسیومهای کولموگوروف[1] احتمال را نتیجه می‌دهند. اخیراً روش آکسیوماتیک[2] که دستگاهی ریاضی را با تعدادکمی آکسیوم به دقت انتخاب شده، توسعه می‌دهد، کاملاً متداول شده است. خوانندهٔ علاقه‌مندمیتواند شرح کاملی از رهبرد آکسیوماتیک را در کتاب مبانی آنالیزلانَدو بیابد.

گرچه هر مجموعه از آکسیومها را میتوان در توسعهٔ یك دستگاه ریاضی به‌کار برد، این آکسیومهانبایدخود- متناقض[3] باشند. و این‌کار ممکن است در مورد مجموعهٔ خاصی از آکسیومهای دارای اهمیت، شرط کاملاً مشکلی باشد. از این گذشته، مجموعهٔ آکسیومها نباید شامل آکسیومهائی‌که مستلزم آکسیومهای دیگرند باشند. به‌عنوان مثال، فرض می‌کنیم شخص‌کار را با چندین آکسیوم که ازآنها دوآکسیوم A و B خاصیت $B \Longrightarrow A$ را برقرار می‌کنندآغاز کند. اگرقضیهٔ Cیی از B منتج شود، یعنی $C \Longrightarrow B$ در این صورت البته $A \Longrightarrow C$. بنا به این دلیل، باید B از A اثبات شود و به‌عنوان آکسیوم داخل نشود.

خوشبختانه، ازلحاظ دانشجوی تازه‌کار، برخورد دانشجوبا روش آکسیوماتیك، به جای تحقیق سازگاری[4] آکسیومها، شامل اثبات نتایج است. در روش آکسیوماتیك از دانشجو خواسته می‌شود که مجموعه‌یی از آکسیومها را به صورت راست‌فرض، و از آنها قضیه پشت قضیه اثبات کند تا اینکه خواص دستگاه ریاضی‌یی راکه می‌توان از این آکسیومها استخراج‌کرد به دست‌آورد.

کلمهٔ دیگری که به‌کرات به کار می‌رود کلمهٔ «تعریف» است. تعریف، قراردادی بین مؤلف وخواننده برای به‌کاربردن کلمه (یاکلماتی) درنمایش مفهومی ریاضی‌است. به عنوان مثال، می‌توانیم مربع را به‌عنوان، مستطیلی با اضلاع به‌طولهای‌مساوی، تعریف کنیم. به‌همین ترتیب، هرعدد صحیحی که بتواند به‌صورت $2n$ نوشته شود عدد صحیح زوج نامیده می‌شود. در این صورت اگر شخص این تعریف عدد صحیح زوج را به خاطر داشته باشد، می‌تواند تعیین‌کندکه ۸ عدد صحیح زوجی است، درحالیکه ۷ نیست. تعریف ریاضی مشابه توصیف فرهنگ لغات از یك کلمه است.

کلمهٔ دیگری که قبلا از آن‌سخن گفته‌ایم «علامت‌گذاری»[5] است. درزمینهٔ خاص، مشخص‌کردن علائم خاصی‌که معانی مخصوص داشته باشند علامت‌گذاری‌نامیده‌می‌شود. به عنوان مثال، ممکن است شخص قرار بگذارد که n را برای نمایش عدد طبیعی، p

1. Kolmogorov
2. axiomatic approach
3. self–contradictory
4. consistency
5. notation

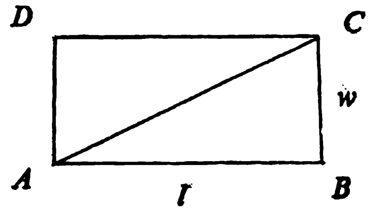
را برای نمایش عدد اول، و x را برای نمایش عدد حقیقی به‌کاربرد. اما همین‌شخص، در متن دیگر آزاد است‌که علامت‌گذاری دیگری را به‌کاربرد و در آنجا ممکن است‌از p برای نمایش عدد حقیقی بین صفر و یك استفاده کند. به تفاوت بین تعریف و علامت گذاری خاص توجه داشته‌باشید. هنگامیکه شخص تصمیم میگیرد n را برای نمایش‌عدد صحیحی به کار برد،نیازنداردتوصیف کندکه عدد صحیح چیست، وآزاد است که‌علامت گذاری‌را تغییر دهد و مثلا در حالت دیگراز r یا m برای عدد صحیح استفاده‌کند. در زمینه‌های متفاوت، مؤلف غالباً علامت‌گذاریش را، درصورتیکـه پیچیده یا اشتباه آور باشد، تغییر می‌دهد.

کلمه «قضیه»[1] قبلاً بەصورت‌گزاره‌یی که می‌تواند محقق یا نا محقق شود تعریف شده است. دوکلمهٔ دیگر «قضیهٔ فرعی[2]» و «لم[3]» معانی‌یی مشابه دارند، و ازآنجا که دو کلمهٔ اخیر در نوشته‌های ریاضی رخ می‌دهند، کوشش در تعریف آنها خواهیم کرد. در اثبات یك قضیهٔ پیچیده، شخص ممکن است فاقد حقایقی باشدکه باید، پیش از آنکـه اقدام به اثبات آن قضیه شود، محقق شونـد. چنین نتایج ثانویه‌یی ، با اینکه در استفادهٔ اولیه‌شان به‌عنوان‌کمکی در اثبات قضیهٔ اصلی به‌کار می‌روند، می‌توانند به‌صورت‌قضیه در نظر گرفته شوند. ریاضیدانان چنین قضایای فرعی‌یی را لم مـی‌نامند. ازاین‌گذشته، هنگامیکه قضیه‌یی ثابت شود امکان دارد نتایج مهمی از آن به دست‌آید. این نتایج نیز می‌توانند قضیه درنظر گرفته شوند، اما آنها مستقیماً از قضیهٔ اصلی نتیجه گرفته شده‌اند، و به همین علت آنها را قضیهٔ فرعی مینامند. درعمل، ممکن است اثبات یك قضیهٔ‌پیچیده شامل‌اثبات چندین لم باشد و ، هنگامیکه قضیه ثابت شد ممکن است چندین قضیهٔ‌فرعی مستقیماً از آن به دست آید.

می‌توان از فورمول محاسبهٔ مساحت مستطیل به عنوان توضیحی در مورد به‌دست آوردن قضایای فرعی از یك قضیه استفاده کرد. قضیه‌یی در هندسه وجود دارد که‌مقرر می‌کند که مساحت مستطیل ازفورمول $A=lw$ مشخص می‌شود. یعنی، مساحت‌آن برابر طول آن ضربدرعرض‌آن[4] است.مربع، نوع خاصی مستطیل است، یعنی‌مستطیلی‌که درآن $l=w$ است. با فرض $l=w=s$، به عنوان طول ضلع مربع، مساحت مربع را به‌صورت $A=(s)(s)=s^2$ و به عنوان یك قضیهٔ فرعی بـه دست مـی‌آوریم. قضیهٔ فرعی دیگر فورمول مساحت مستطیل، فورمول مساحت مثلث قائم‌الزاویه است. از شکل ۵:۱ شخص می‌تواند ملاحظه کندکـه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ هم نهشت[5] دارای قطـر مشترك ABC و

1. theorem 2. corollary 3. lemma
4. the length times the width 5. congruent

ADC، يك مستطيل می‌سازند. بنا به این دلیل، مساحت مثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC يك دوم مساحت مستطيل $ABCD$ است. به‌عبارت دیگر $A=(۱/۲)lw$ مساحت مثلث‌قائم‌الزاویهٔ ABC را به دست می‌دهد.



شکل ۵۰۱

تکالیف و مسائل فصل ۵

۱. عبارات شفاهی زیر را به صورت علامتی تبدیل کنید:

(a) مجموع يك عدد زوج و يك عدد فرد، عددفرد است.

(b) عددی بعلاوهٔ پنج، مساوی دوبرابر آن عدد است.

(c) رقم دهگان[1] يك عدد دو رقمی[2]، دوبرابر رقم یکان[3] آن است.

(d) مجموع مربعات دو عدد صحیح متوالی، بزرگتر از ۲۰ است.

(e) حاصلضرب دوعدد حقیقی، برابر مجموعشان است.

(f)ده درصد قیمت شیئی، برابر سود آن است.

(g) ریشهٔ سوم[4] عددی، دو برابر آن عدد است.

(h) ارتفاع، برابر ثابتی ضربدر، مربع زمان (t) است.

(i) مکعب يك عدد اول، بزرگتر از هفت برابر آن عدد، بعلاوهٔ پنج است.

(j) عدد مثبتی، برابر ریشهٔ دوم[5] بعلاوهٔ ریشهٔ سوم خودش است.

اثبات کنید:

۲. مجموع دوعدد صحیح متوالی، فرد است.

۳. حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی، زوج است.

۴. اگر n زوج باشد، n^p، که در آن p عددطبیعی است، نیز زوج می‌باشد.

---

1. tenths digit
2. two_digit number
3. unit digit
4. cube root
5. square root

۵. حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی، بر ۶ قابل قسمت است.
۶. حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی، با فرد بودن عدد وسط، بر ۲۴ قابل قسمت است.
۷. حاصلضرب چهار عدد صحیح متوالی، بر ۲۴ قابل قسمت است.
۸. مجموع چهار عدد صحیح متوالی، زوج است.
۹. اگر عدد n بر p^{2} قابل قسمت باشد، در این صورت n^{2} بر p^{2} قابل قسمت است.
۱۰. اگر n بر p قابل قسمت باشد، در این صورت n^{2} بر p^{2} قابل قسمت است.
۱۱. اگر nm ، np را عاد کند، در این صورت m ، p را عاد می‌کند.
۱۲. فرض می‌کنیم b عددی نامنفی باشد. اگر $a \leqslant b$ و $1 \leqslant x$، در این صورت $a \leqslant xb$.
۱۳. فرض میکنیم a ، b و c سه عدد نامنفی با $b \leqslant c$ باشند. در این صورت $ab \leqslant ac$.
۱۴. فرض می‌کنیم a و b دوعدد نامنفی با $a \leqslant b$ باشند. در این صورت $a^{2} \leqslant b^{2}$.
۱۵. اگر $a \leqslant b$ و $b = c$، در این صورت $a \leqslant c$.
۱۶. اگر a و b دو عدد نامنفی چنان باشند که $a \leqslant b$، در این صورت عدد xی، که در آن $0 \leqslant x \leqslant 1$ است، چنان موجود است که $a = bx$.
۱۷. تابع لگاریتمی را در فصل ۴ تعریف کرده‌ایم. نشان دهید که $\log_a^1 = 0$.
۱۸. نشان دهید: $\log_a^a = 1$.
۱۹. در فصل ۴، تابع نمایی $f(x) = a^x$ ، $a \neq 0$، را تعریف و مشخص کردیم که دارای خاصیت $a^x a^y = a^{x+y}$ است. نشان دهید که این موضوع مستلزم اینست که:

$$(a) \quad a^{0} = 1$$

$$(b) \quad a^{-x} = \frac{1}{a^{x}}$$

۲۰. اگر دامنهٔ تابع f شامل اعضائی به تعداد متناهی و f^{-1} موجود باشد، در این صورت دامنهٔ f^{-1} شامل همان تعداد عضو است.

Chapter 6 فصل ۶

استقراء

Induction

بحث صوری از اثبات ریاضی را با معرفی روشی موسوم به استقراءریاضی[1] آغاز می‌کنیم. روش استقراء، درحالت کلی، نشان دادن این مطلب است که، اگر گزاره‌یی به ازاء عدد صحیح rی راست باشد، به‌ازاء عدد صحیح $(r+1)$ نیزراست خواهدبود.

روش مذکور روش مستقیمی است که اغلب در تحقیق قضایای ریاضی خاصی به کارمی‌رود، وبه‌عنوان یك روش اثبات هم امتیازات هم محدودیتهای جدی دارد. استقراء در حل مسائل خاصی که در آنها سایر روش‌ها یا عملی نیستند یا بسیار مشکلند مفید است. امتیاز دیگر این روش اینست که، از آنجاکه روشی آلگوریتمیك[2] است، میتواند بدون نیاز به ابتکارهای زائد مفید باشد، وبه عبارت دیگر، شخص تنها لازم دارد که برای اثبات، ازجریان مشخصی پیروی کند، و برای اینکار به بینش خاصی نیاز نیست.

ازطرف دیگر، عدم امتیاز آن محدود بودن استقراء، به‌قضایائی که‌با اعداد صحیح سروکار دارند، می‌باشد. این روش اساساً، یك روش تحقیق است، و تنها می‌تواند در

1. mathematical induction

۲. روش آلگوریتمیك «algorithmic procedure» جریان تکرار شونده‌یی «repetitive» است که، بعداز تعدادی مراحل اجرا شدهٔ متشابه، منجر به جواب میشود.

اثبات نتایجی کــه درستی آنها را معلوم کرده یا حدس زده‌ایم، به کار رود ، و به این ترتیب، به طور ساده درجریان پیشرفت معارف جدید ریاضی قرار نمی‌گیرد.

استقراء ریاضی را با استفاده از مثال زیر توضیح میدهیم: فرض می‌کنیم که‌حدس زده‌ایم که $(1+x)^n \geqslant (1+nx)$، بـه ازاء هر عدد طبیعی n و تمام $x \geqslant -1$های ، بر قرار است. در این مورد اگر شخص نداند‌که چگونه این نتیجه رااثبات کند،حداقل می‌تواند کنجکاوی خود را با بررسی حالاتی‌که به تصادف انتخاب شده‌اند تسکین‌دهد. به عنوان مثال، اگر:

$n=1$ ، $(1+x)^1 \geqslant (1+x)$ ، که واضحاً راست است.

$x=-1$ ، $n=3$ ؛ $(1-1)^3 \geqslant (1-3)$ ، که بازهم نتیجه‌یی درست است.

$x=1$ ، $n=5$ ؛ $(1+1)^5 \geqslant [1+(5)(1)]$ یا $32 \geqslant 6$.

واضحست که چنین تحقیقاتی را می‌توان به طور نا محدود[1] ، بدون در بر گرفتن جمیع حالات ممکن، ادامه داد. اما پیش از ترك این طریق، بگذارید ملاحظه کنیم کـه آیا می‌تواند به طریقی تبدیل شود‌که هم‌کاربرد معقول داشته، هم توانائی در بر گرفتن جمیع حالات ممکن را دارا باشد یا خیر.

مثالمان را درنظرمیگیریم. نشان دادیم‌که گزارهٔ آن به‌ازاء $n=1$ راست است. اکنون اگرگزارهٔ مورد بحث را به ازاء $n=2$ تحقیق کنیم، هنوزبایـد نشان دهیم که به ازاء $n=3$ راست است وهمینطور الی‌آخر. در این صورت آنچه‌که به‌آن نیازداریم یك روش تحقیق سیستماتیك است.

فرض میکنیم بتوانیم نشان دهیم که اگر گزارهٔ مورد بحث به ازاء عــدد صحیح rی راست باشد، در این صورت به ازاء عدد صحیح $(r+1)$ نیز راست است. یعنـی بتوانیم بگوییم، اگر بـه فرض $(1+x)^r \geqslant (1+rx)$ راست بـاشد در این صـورت $(1+x)^{r+1} \geqslant [1+(r+1)x]$ نیز راست خواهد بود. بنابراین، از آنجـا که قبلاً نشان داده‌ایم‌که نامساوی مورد بحث به ازاء $n=1$ برقرار است، آلگوریتم استقرایی[2] فوق‌مستقیماً مستلزم این‌میشودکه نامساوی به ازاء $n=1+1=2$ نیز برقراراست.راست بودن نامساوی به ازاء $n=2$ مستلزم این استکـه نامساوی به ازاء $n=2+1=3$ راست است و همینطور الی آخر. واضح است که این موضوع سرانجام تمام حالات ممکن را دربر می گیرد وبنابراین، صحت نامساوی مورد بحث را اثبات می کند.

اکنون روش استقراء ریاضی را خلاصه می کنیم:

---

1. indefinitely 2. induction algorithm

اگر گزاره‌های (i) و (ii) راست باشند، دراین صورت قضیه به ازاء جمیع اعداد صحیح $n \geqslant n_\circ$ درست است.

(i) قضیه به ازاء عدد صحیح $n_\circ$ی راست است.

(ii) اگر قضیه به ازاء هر عدد صحیح $n \geqslant n_\circ$ راست باشد، در این صورت به ازاء عدد صحیح $(n+۱)$ نیز راست است.

اکنون نامساوی‌مان را با استفاده از استقراء ریاضی اثبات می‌کنیم. از آنجا که در نامساوی با اعداد طبیعی سروکار داریم، $n_\circ = ۱$ را انتخاب می‌کنیم. ابتدا بایدشرط (i)، یعنی، این که نامساوی به ازاء عدد صحیح $n_\circ = ۱$ برقرار است، را برقرارکنیم.

(i) به ازاء $n_\circ = ۱$، داریم $(۱+x)^۱ \geqslant (۱+x)$، که واضحاً راست است.برای نشان دادن اینکه شرط (ii) برقرار است، فرض میکنیم که نامساوی به‌ازاء عدد طبیعی rی، $r \geqslant ۱$ برقرار است. یعنی فرض می‌کنیم که:

$$(۱+x)^r \geqslant (۱+rx) \qquad (۶.۱)$$

(ii) اکنون مانده که نشان دهیم $(۱+x)^{r+۱} \geqslant [۱+(r+۱)x]$

اما $(۱+x)^{r+۱} = (۱+x)^r(۱+x)$

از (۶.۱) داریم:

$$(۱+x)^r \geqslant (۱+rx)$$

از آنجا که $x \geqslant -۱$ مستلزم اینست که $۱+x \geqslant \circ$، داریم:

$$(۱+x)^{r+۱} = (۱+x)^r(۱+x) \geqslant (۱+rx)(۱+x)$$

نیز:

$$(۱+rx)(۱+x) = ۱+x+rx+rx^۲ = ۱+(۱+r)x+rx^۲$$

واضحست که $x^۲$ و r هردو نامنفی‌اند، و این مستلزم اینست که $rx^۲ \geqslant \circ$.

بنابراین:

$$(۱+rx)^{r+۱} \geqslant (۱+rx)(۱+x)$$

یا معادلا[۴]:

$$(۱+rx)^{r+۱} \geqslant [۱+(۱+r)x+rx^۲]$$

یا

$$(۱+rx)^{r+۱} \geqslant [۱+(r+۱)x]$$

به این ترتیب، شرط (ii) را برقرار و نامساوی مورد بحث را محقق کرده‌ایم.
باقی این فصل به چند مثال در مورد اثبات با استفاده از استقراء ریاضی اختصاص دارد.

مثال ۶.۱ فرض می‌کنیم می‌خواهیم اعداد متوالی از یك تا ۲۰۰۰ را جمع کنیم. از آنجا که انجام این عمل به‌مقدار قابل ملاحظه‌یی کار نیاز دارد، مفید است که از راه میان‌بر استفاده کنیم. در این صورت، با جستجو درمیان چند کتاب درسی، سرانجام به فورمول زیر توجه می‌کنیم:

$$\sum_{i=۱}^{n} i = ۱+۲+۳+\cdots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

اگر این فورمول راست باشد، دراین صورت:

$$\sum_{i=۱}^{۲۰۰۰} i = ۱+۲+۳+\cdots+۲۰۰۰ = \frac{(۲۰۰۰)(۲۰۰۱)}{۲} = (۱۰۰۰)(۲۰۰۱)$$
$$= ۲،۰۰۱،۰۰۰$$

از آنجا که این عمل بسیار ساده‌تر از جمع ۲۰۰۰ عدد است، ارزش دارد که برای تحقیق فورمول مزبور کوشش کنیم.

اثبات:

(i) به ازاء $n_۰ = ۱$، داریم $۱ = ۲/(۲)(۱) = ۱$، که شرط (i) را برآورده میکند.

اکنون فرض می‌کنیم که معادله به ازاء $n = r$ راست است، یعنی

$$\sum_{i=۱}^{r} i = \frac{r(r+۱)}{۲} \tag{۶.۳}$$

(ii) لازم است که نشان دهیم که معادله به ازاء $n = (r+۱)$ نیز راست است. این حالت به ترتیب زیر محقق می‌شود:

$$\sum_{i=۱}^{r+۱} i = ۱+۲+۳+\cdots+r+(r+۱) = \sum_{i=۱}^{r} i+(r+۱) \tag{۶.۴}$$

از آنجاکه از معادلهٔ (۶.۳): $\sum_{i=1}^{r} i = \frac{r(r+1)}{2}$ است، معادلهٔ (۶.۴) می‌شود:

$$\frac{r(r+1)}{2}+(r+1)=\frac{r(r+1)+2(r+1)}{2}=\frac{(r+1)(r+2)}{2}$$

بنابراین، اگر قضیه به ازاء $r \geqslant 1$ی راست باشد، بـه ازاء $(r+1)$ نیز راست است. و این، تحقیق معادلهٔ (۶.۲) را تکمیل می‌کند.

مثال ۶.۲ به عنوان مثال سادهٔ دیگر، نشان می‌دهیم که مجموع مربعات n عدد اولیه‌با فورمول زیر معلوم میشود.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1+4+9+16+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (6.5)$$

اثبات:

(i) به ازاء $n=1$، داریم:

$$1^2=\frac{1(1+1)(2+1)}{6} \quad \text{یا} \quad 1=1$$

اکنون فرض می‌کنیم معادلهٔ (۶.۵) به ازاء $n=r$ برقرار است، یعنی:

$$\sum_{i=1}^{r} i^2=\frac{r(r+1)(2r+1)}{6} \qquad (6.6)$$

(ii) نشان می‌دهیم که معادله به ازاء $n=r+1$ برقرار است، که بـه‌ترتیب زیرمحقق می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{r+1} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+r^2+(r+1)^2=\sum_{i=1}^{r} i^2+(r+1)^2 \qquad (6.7)$$

با قرار دادن $\sum_{i=1}^{r} i^2$ از معادلهٔ (۶.۶) در(۶.۷)، حاصل می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^{r+1} i^2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}+(r+1)^2$$

$$=\frac{r(r+1)(2r+1)+6(r+1)^2}{6}=\frac{(r+1)[r(2r+1)+6(r+1)]}{6}$$

$$=\frac{(r+1)[2r^2+r+6r+6]}{6}=\frac{(r+1)[2r^2+7r+6]}{6}$$

$$=\frac{(r+1)(r+2)(2r+3)}{6}=\frac{(r+1)(r+2)[2(r+1)+1]}{6}$$

و این، اثبات درستی معادلهٔ (۶.۵) را تکمیل می‌کند.

مثال ۶.۳ به ازاء هرعدد طبیعی $n\geqslant 2$:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n} \qquad (6.8)$$

اثبات:

(i) به ازاء $n=2$ داریم، $(1/2)=(2/1-1)$. اکنون فرض می‌کنیم که رابطه به ازاء $n=r$ راست است، یا

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r} \qquad (6.9)$$

(ii) در این صورت به ازاء $(r+1)$

$$\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r}\right)\right]\left[1-\frac{1}{1+r}\right]=\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{r+1}\right]$$

زیرا طبق معادلهٔ (۶.۹): $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{r}\right)=\frac{1}{r}$

با انجام اعمال جبری:

$$\frac{1}{r}\left[1-\frac{1}{r+1}\right]=\frac{1}{r}\left[\frac{r+1-1}{r+1}\right]=\frac{1}{r}\left[\frac{r}{r+1}\right]=\frac{1}{r+1}$$

و این، نتیجه را اثبات می‌کند.

در این مرحله شخص میتواند ملاحظه کندکه اثبات با استقراء ریاضی اساساً در مورد هر مسأله یکسان است، و تفاوت اصلی در این است که اعمال جبری متفاوتی در مورد هر مثال لازم است.

مثال ۶.۴ به ازاء هرعدد طبیعی $n \geqslant ۲$، $(n^۳-n)$ بر ۳ بخش پذیر است.

(i) به ازاء $n=۲$، $۶=۲-۸=(۲-۲^۳)$، که بر۳ بخش پذیر است.

فرض می‌کنیم که گزاره به ازاء $n=r$ راست است، یعنی $(r^۳-r)$ بنا به فرض بر۳ قابل قسمت است.

(ii) دراین صورت به ازاء $(r+۱)$ داریم:

$$[(r+۱)^۳-(r+۱)]=r^۳+۳r^۲+۳r+۱-r-۱$$
$$=r^۳-r+۳(r^۲+r) \qquad (۶.۱۰)$$

از آنجا که $(r^۳-r)$ بنا به فرض بر ۳بخش پذیر است، و $۳(r^۲+r)$ به‌طور واضح بر۳قابل قسمت است، $(r+۱)^۳-(r+۱)$ بر۳ بخش پذیر میباشد، واین،نتیجه را اثبات میکند.

مثال ۶.۵ ممکن است بعضی‌ازدانشجویان توجه‌کرده باشندکه،اگرمجموع‌ارقام یك عدد صحیح بر ۳ بخش پذیر باشد، در این صورت‌آن عدد صحیح نیز چنین است. (به عنوان مثال، ۲۹۴ را میتوان به صورت ۴+۹۰+۲۰۰ یا $۲(۱۰)^۲+۹(۱۰)^۱+۴(۱۰)^۰$ نوشت . دراینجا ۲ ، ۹ ، و ۴ ارقام این عددند .) با به کار بردن ۲۹۴ به عنوان مثال، ملاحظه میکنیم که مجموع ارقامش $۱۵=۴+۹+۲$ است؛ ۱۵ بر۳ ولذا ۲۹۴ بر۳ بخش پذیر است،زیرا $۹۸=(۲۹۴/۳)$. اما آیااین واقعه اتفاقی است‌یا مثالی از نتیجه‌یی بسیار عمومی‌تر می‌باشد؟ ادعا اینست که واقعهٔ مذکور همواره راست است. یعنی، اگر:

$$N=a_n(۱۰)^n+a_{n-۱}(۱۰)^{n-۱}+\cdots+a_۱(۱۰)+a_۰ \qquad (۶.۱۱)$$

که در آن هر a_i عدد صحیحی واقع در فاصلهٔ $۰\leqslant a_i\leqslant ۹$ است، و $\sum_{i=۰}^{n} a_i$ بر۳بخش‌پذیر باشد، N نیز هست.

ازآنجاکه اثبات این قضیه به‌گونه‌یی پرزحمت است و عبارات مشمول آن‌کاملاً پیچیده‌اند،مراحل اثبات را بامثال عددی‌یی که‌درانتهای اثبات‌آمده توضیح‌میدهیم. ممکن است‌برای دانشجو بهترباشدکه ابتدابه مطالعهٔ این مثال بپردازدو سپس‌گزارهٔ اصلی را در هر مرحله، مورد بررسی قرار دهد.

اثبات:

(i) اگر $n=۰$ باشد نتیجه به طور جزئی راست است.

اکنون فرض میکنیم که نتیجه به ازاء عدد صحیح r ی راست است. یعنی میگوئیم، اگر $\sum_{i=0}^{r} a_i$ بر ۳ بخش پذیر باشد، در این صورت:

$$N=a_r(10)^r+a_{r-1}(10)^{r-1}+\cdots+a_1(10)+a_0 \qquad (6.12)$$

نیز هست.

(ii) نشان میدهیم که این مطلب در حالت $(r+1)$ نیز راست است.

عدد:

$$R=b_{r+1}(10)^{r+1}+b_r(10)^r+b_{r-1}(10)^{r-1}+\cdots+b_1(10)+b_0$$

را چنان در نظر میگیریم که $\sum_{i=0}^{r+1} b_i$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد. در این مورد نیز: $0 \leqslant b_i \leqslant 9$، $i=0, 1, 2, \ldots, r+1$ است. در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

$$R=b_{r+1}(10)^{r+1}+[b_r(10)^r+b_{r-1}(10)^{r-1}+\cdots$$
$$+b_1(10)+(b_0+b_{r+1})]-b_{r+1} \qquad (6.13)$$

تا این مرحله، عمل تکمیل اثبات به‌خوبی پیش می‌رود، اما به نظر می‌رسد که در مورد عبارت b_0+b_{r+1} مشکلی، به این ترتیب، موجود است که، به عنوان مثال، اگر $b_0=b_{r+1}=9$ باشد، در این صورت $b_0+b_{r+1}=18$ می‌شود که واضحاً بزرگتر از ۹ است. بنا به این دلیل، برای انجام دادن اثباتی درست، باید شرط (i) را به صورت «تمام اعداد طبیعی ۱۸ یا کمتری که مجموع ارقامشان بر ۳ قابل قسمت است، بر ۳ بخش پذیرند» تغییر دهیم. اعداد با ارقامی که مجموعشان عدد قابل قسمت بر ۳ می‌شود و مشمول این شرطند عبارت از: ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۸ میباشند، و واضح است که تمام این اعداد بر ۳ بخش‌پذیر است. بااین تغییر (i)، حالت b_0+b_{r+1} میتواند به‌صورت رقم یکان در نظر گرفته شود، و می‌توانیم به اثبات ادامه دهیم.

اکنون عبارت داخل کروشه را در نظر میگیریم. توجه کنید که درجهٔ چند جمله‌یی، r، و مجموع ضرایب، که فرض شده که بر ۳ قابل قسمت است، $\sum_{i=0}^{r+1} b_i$ است. فرض کرده‌ایم که تمام اعدادی که بزرگترین جملهٔ بسطشان r و مجموع ارقامشان بر ۳ بخش‌پذیر است نیز بر ۳ بخش‌پذیرند. بنابراین، بنا به فرض:

$$R_1=b_r(10)^r+b_{r-1}(10)^{r-1}+\cdots+b_1(10)+(b_0+b_{r+1}) \qquad (6.14)$$

بر ۳ بخش‌پذیر است. علاوه براین:

$$R_2 = b_{r+1}(10)^{r+1} - b_{r+1} = b_{r+1}[(10)^{r+1} - 1] \qquad (6.15)$$

اما، $9\ldots 99999 = 1 - {}^{r+1}(10)$ است که واضحاً بر ۳ بخش‌پذیر است. بنا براین $b_{r+1}[(10)^{r+1} - 1]$ نیزچنین است زیرا حاصلضرب یك‌عدد صحیح‌بخش‌پذیر بر۳ وعدد صحیح‌دیگر نیز بر۳ بخش پذیر است. دراین‌صورت ازآنجا که $R = R_1 + R_2$ و R_1 و R_2 هر دو بر۳ بخش‌پذیرند، R نیز چنین‌است، واین مطلب، اثبات‌دقیق نتیجه رانکمیل می‌کند.

در زیر مثالی عددی آورده شده است.

به عنوان مثال، فرض می‌کنیم ۶۳،۴۷۱ $=R$. در این صورت $b_4 = 6$، $b_3 = 3$، $b_2 = 4$، $b_1 = 7$ ، $b_0 = 1$ ، و

$$R = 6(10)^4 + 3(10)^3 + 4(10)^2 + 7(10) + 1$$

توجه کنید که:

$$\sum_{i=0}^{4} b_i = 6 + 3 + 4 + 7 + 1 = 21$$

که بر۳ بخش پذیر است. نیز ازمعادلهٔ (۶.۱۳) می‌توان نوشت:

$$R = 6(10)^4 + [3(10)^3 + 4(10)^2 + 7(10) + (1+6)] - 6 \qquad (6.13')$$

عبارت داخل‌کروشه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مجموع ارقـام آن :

$\sum_{i=0}^{4} b_i = 21 = 7 + 7 + 4 + 3$ می‌باشد. از آنجا که بیشترین توان آن $r = 3$ است،

$$R_1 = 3(10)^3 + 4(10)^2 + 7(10) + 7$$

بنا به فرض، بر ۳ بخش‌پذیر است. اکنون :

$$R_2 = 6(10)^4 - 6 = 6(10^4 - 1)$$

را در نظر می‌گیریم. درآن $9999 = 1 - 10^4$ است که به طور واضح بر۳ بخش‌پذیر است. بنابراین $6(9999)$ بر ۳ بخش پذیر است. از آنجا که ۳۴۷۷ و $6(9999)$ بر ۳ بخش پذیرند، $3477 + 6(9999)$ نیز هست. توجه داشته باشید که در این جریان، عددی با $r = 4$ را به مجموع دوعدد: یکی با $r = 3$ و دیگری بخش پذیر بر ۳ تقسیم کرده‌ایم.

تاکنون مثالهائی را درنظرگرفته‌ایم که در مورد آنها می‌تـوانیم استقراء ریاضی را مستقیماً به‌کاربریم. اما دربسیاری ازکاربردهای استقراء ریاضی ،شخص نیازداردکه

روش استقراء ریاضی را برای تحقیق در یک نتیجه تغییر دهد. در مثالهای زیر به توضیح استفاده از استقراء ریاضی با تغییرات در روش استاندارد آن پرداخته‌ایم.

مثال ۶.۶ به ازاء هر عدد طبیعی n:

$$\frac{۱}{۱^۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲}<۲ \qquad (۶.۱۶)$$

(i) به ازاء $n=۱$، داریم $۲>۱$.

برای تحقیق در شرط دوم استقراء، نیاز به تغییر گزارهٔ فوق داریم، زیرا در مورد صورت کنونی آن نمی‌توان استقراء را به‌کار برد. برای توضیح این نکته، توجه‌میکنیم که، اگر فرض کنیم که نامساوی به ازاء $n=r$ راست است، در این صورت به ازاء $n=(r+۱)$ خواهیم داشت:

$$۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{r^۲}+\frac{۱}{(r+۱)^۲}$$

و هیچ تضمینی وجود نداردکه این مجموع کمتر از ۲ باشد.

بنابراین، نیاز داریم که طرف راست نامساوی را چنان تغییر دهیم که تابعی از n شود، و در این مورد، یکی ازروشها اینست که مسأله را به صورت نامعادلهٔ (۶.۱۷) بازگو کنیم:

$$۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲}\leqslant ۲\left(\frac{n}{n+۱}\right) \qquad (۶.۱۷)$$

از آنجاکه $[n/(n+۱)]$ همواره کمتر از یک است، $۲>۲[n/(n+۱)]$ است. بنابراین ، تحقیق نامعادلهٔ (۶.۱۷) به وضوح مستلزم این می‌شود که نامعادلهٔ (۶.۱۶) درست است. اکنون نامعادلهٔ (۶.۱۷) را ثابت می‌کنیم.

(i) اگر $n=۱$، $۱\leqslant ۱/(۱+۱)$ می‌شودکه‌واضحاً راست است. فرض میکنیم (۶.۱۷) به ازاء $n=r$ راست است. یعنی:

$$۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{r^۲}\leqslant ۲\left(\frac{r}{r+۱}\right) \qquad (۶.۱۸)$$

(ii) می‌خواهیم نشان دهیم‌که، به ازاء $n=(r+۱)$:

$$\left(۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{r^۲}\right)+\frac{۱}{(r+۱)^۲}\leqslant ۲\left(\frac{r+۱}{r+۲}\right)$$

در این صورت با استفاده از نا معادلهٔ (۶.۱۸) داریم:

$$\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{1}{(r+1)^2} \leqslant 2\left(\frac{r}{r+1}\right)+\frac{1}{(r+1)^2}$$

اکنون باقی می‌ماند که نشان دهیم‌که :

$$2\left(\frac{r}{r+1}\right)+\frac{1}{(r+1)^2} \leqslant 2\left(\frac{r+1}{r+2}\right)$$

یا:

$$2\left(\frac{r+1}{r+2}\right)-2\left(\frac{r}{r+1}\right)-\frac{1}{(r+1)^2} \geqslant 0 \qquad (6.19)$$

برای تحقیق (۶.۱۹) درطرف چپ نامعادله،مخرج مشترك می‌گیریم و به دست‌می‌آوریم:

$$\frac{2(r+1)^3-2r(r+1)(r+2)-(r+2)}{(r+2)(r+1)^2}$$

$$=\frac{2r^3+6r^2+6r+2-2r^3-6r^2-4r-r-2}{(r+2)(r+1)^2}$$

$$=\frac{r}{(r+2)(r+1)^2}>0$$

و به این ترتیب، نامساوی (۶.۱۶) اثبات میشود.

مثال ۶.۷ نشان دهیدکه هرعدد طبیعی $n \geqslant 18$ را می‌توان به‌صورت:

$$n=4a+7b \qquad (6.20)$$

که در آن a و b اعداد صحیح نامنفی‌اند، نوشت.

معادلهٔ (۶.۲۰) را نمی‌توانیم به ازاء $n<18$ نشان دهیم زیـرا وقتی $n=17$ باشد معادله برقرار نیست.

(i) چند عددرا امتحان میکنیم:

$$18=4(1)+7(2)$$

$$19=4(3)+7(1)$$

$$20=4(5)+7(0)$$

$$21=4(0)+7(3)$$
$$22=4(2)+7(2)$$
$$23=4(4)+7(1)$$
$$24=4(6)+7(0)$$

فرض میکنیم معادلهٔ (۶.۲۰) به ازاء $n=r$، که در آن $r\geqslant 18$ می‌باشد، راست باشد، به عبارت دیگر: $r=4a+7b$ باشد.

(ii) در این صورت به ازاء $(r+1)$، داریم $(r+1)=4a+7b+1$، که میتواند به‌صورت $4a+8+7b-7$ یا $4(a+2)+7(b-1)$ نوشته شود. برای اینکه $(a+2)$ و $(a-1)$ اعداد صحیح نامنفی باشد، باید b بزرگتر ازیا مساوی با ۱ باشد. اما در فهرست مثالهای فوق بعضی از رویدادهای $b=0$ را ملاحظه می‌کنیم. این حالت به اثباتی خاص نیاز دارد.

اولین عددی‌که نیازمند صفر بودن b است ۲۰ است. اگر $r\geqslant 20$ باشد باید a حداقل ۵ باشد. در این صورت:

$$(r+1)=4a+1=4a-20+21=4(a-5)+7(3)$$

از آنجاکه فرض کردیم $a\geqslant 5$، این مطلب، معادلهٔ (۶.۲۰) را برای تمام حالات اثبات میکند.

مثال ۶.۸ فرض میکنیم:

$$u_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \qquad (6.21)$$

نشان دهید به ازاء هر عدد طبیعی n، u_n عددی صحیح است.

اثبات این نتیجه با کاربرد مستقیم استقراء ریاضی به مشکلات قابل ملاحظه‌یی مینجامد. روش دیگر برخورد با مسألهٔ فوق اینست که دومین ملاك استقراء را به صورت زیر تغییر دهیم: اگر فرض کنیم گزاره‌یی به ازاء $n=(m-1)$ و $n=m$ راست‌است، در این صورت به ازاء $n=(m+1)$، که در آن $(m-1)\geqslant n_0$ است نیز می‌باشد. این موضوع مستلزم اینست‌که گزاره به ازاء جمیع مقادیر $n\geqslant n_0$ راست باشد.

گاهی برای به دست آوردن راه حل، شخص ناچار است‌که روش استقراء را تغییر دهد. هنگام انجام یك اثبات، نکتهٔ مهمی که باید در خاطر داشت اینست‌که بسیاری

از روشها یا ترکیباتی از روشها را می‌توان به‌کاربرد، و اساسی است که انعطاف‌پذیر باشیم و سفت و سخت به روش خاصی نچسبیم.

گزارهٔ تغییر یافتهٔ فوق، صورت محدودتر ملاك اصلی استقراء ریاضی است. اکنون این صورت را برای اثبات نتیجه‌مان به‌کار می‌بریم:

اثبات:

(i) به ازاء $n=1$، داریم:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{1}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=1$$

به ازاء $n=2$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}}{\sqrt{5}}=\frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4\sqrt{5}}=$$

$$=\frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=1$$

اکنون فرض میکنیم گزاره به ازاء $n=(m-1)$ و $n=m$ راست باشد. به‌عبارت دیگر، فرض میکنیم u_{m-1} و u_m اعداد صحیح باشند. در این صورت واضح است که $u_{m-1}+u_m$ نیز چنین است. اما:

$$u_{m-1}+u_m=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}}{\sqrt{5}}+\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m}}{\sqrt{5}} \quad (6.22)$$

با فاکتور گرفتن در (۶.۲۲)، حاصل میکنیم:

$$u_{m-1}+u_m=$$

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}\left[1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m-1}\left[1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{m-۱}\left(\frac{\sqrt{۵}+۳}{۲}\right)-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{m-۱}\left(\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}\right)}{\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{m-۱}\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{m-۱}\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{۲}}{\sqrt{۵}}$$

$$=\frac{\left(\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}\right)^{m+۱}-\left(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\right)^{m+۱}}{\sqrt{۵}} \qquad (۶.۲۳)$$

عبارت معادلهٔ(۶.۲۳)واضحاً $u_{m+۱}$ است،و این مستلزم اینست که $u_{m+۱}$ عددصحیح می‌باشد، و گزاره ثابت می‌شود.

اعدادی که توسط معادلهٔ (۶.۲۱) معلوم می‌شوند، یعنی ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ...،به اعداد فیبو ناجی[1] موسومند . این اعداد ازلحاظ تاریخی قابل ملاحظه‌اند و تحقیقات بسیاری در موردشان انجام شده است. دراین مورد برای بحث و مثالهای بیشتر، فصل ۸، تمرین ۳۵، نیز مرجع (۹) را ملاحظه کنید.

تکالیف ومسائل فصل۶

معادلات ۱۹-۱ را مورد تحقیق قرار دهید:

۱. $$\sum_{i=۰}^{n}(-۱)^{i}=\frac{۱+(-۱)^{n}}{۲}$$

۲. $$\sum_{i=۱}^{n}(۲i-۱)=n^{۲}$$

۳. $$\sum_{i=۱}^{n}i(i+۱)=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$$

۴. $$\sum_{i=۱}^{n}(۲i-۱)^{۲}=\frac{n(۴n^{۲}-۱)}{۳}$$

---

1. Fibonacci numbers

۵. $\sum_{i=0}^{n}(-۲)^i=\frac{(-۱)^n۲^{n+۱}+۱}{۳}$

۶. $\sum_{i=0}^{n}(-۳)^i=\frac{(-۱)^n۳^{n+۱}+۱}{۴}$

۷. $\sum_{i=0}^{n}(-a)^i=\frac{(-۱)^na^{n+۱}+۱}{a+۱}$ ، $a\neq -۱$ در آن

۸. $\sum_{i=۱}^{n}(۲i-۱)^۳=n^۲(۲n^۲-۱)$

۹. $\sum_{i=۱}^{n}i۲^i=۲^{n+۱}(n-۱)+۲$

۱۰. $\sum_{i=۱}^{n}i۲^{-i}=\frac{۲^{n+۱}-n-۲}{۲^n}$

۱۱. $\sum_{i=0}^{n}x^i=\frac{۱-x^{n+۱}}{۱-x}$ ، $x\neq۱$ به‌ازاء

۱۲. $\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{i(i+۱)}=\frac{n}{n+۱}$

۱۳. $\sum_{i=۱}^{n}i(i+۱)(i+۲)=\frac{n(n+۱)(n+۲)(n+۳)}{۴}$

۱۴. $\sum_{i=۱}^{n}(۲i)^۲=\frac{۲n(n+۱)(۲n+۱)}{۳}$

۱۵. $\sum_{i=۱}^{n}\frac{۱}{(a+i-۱)(a+i)}=\frac{n}{a(a+n)}$ ، $a>0$ در آن

۱۶. $\sum_{i=۱}^{n}i^۳=\left(\sum_{i=۱}^{n}i\right)^۲$

۱۷. $\left(۱+\frac{۱}{۱}\right)\left(۱+\frac{۱}{۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۳}\right)\cdots\left(۱+\frac{۱}{n}\right)=n+۱$

۱۸. $\left[۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲\right]\left[۱-\left(\frac{۱}{۳}\right)^۲\right]\cdots\left[۱-\left(\frac{۱}{n}\right)^۲\right]=\frac{n+۱}{۲n}$

۱۹.

$$\left(۱+\frac{۱}{۱}\right)\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\left(۱+\frac{۱}{۳}\right)\cdots\left(۱+\frac{۱}{۲n-۱}\right)\left(۱-\frac{۱}{۲n}\right)=۱$$

۲۰. نشان دهید به‌ازاء هر عدد صحیح $n\geqslant 1$ ، $(9)10^{2n+1}+(3)10^{2n-1}+1$ بر ۱۱ بخش پذیر است.

۲۱. نشان دهید به‌ازاء هرعدد صحیح $n\geqslant 1$ ، $(8)10^{2n}+(6)10^{2n-1}+9$ بر ۱۱ بخش پذیر است.

۲۲. نشان دهیدبه‌ازاءهرعددصحیح $n\geqslant 1$ ، $(2)10^{n}+(3)10^{n-1}+4$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۲۳. ثابت کنید اگر مجموع ارقام یك‌عدد صحیح بر ۹ بخش‌پذیر باشد، خود آن عدد هم هست.

۲۴. در مثال ۶.۵ نشان دادیم که اگرمجموع ارقام عددی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن عدد *نیز* هست. ارقام، طبق‌تعریف، اعدادکمتر از ۱۰ اند. عدد $(25)10^{2}+(11)(10)+6$ را در *نظر*می گیریم. مجموع ضرایب آن $42=6+11+25$ است که بر ۳ بخش‌پذیر است. عدد:

$$(25)10^{2}+(11)(10)+6=2500+110+6=2616$$

نیز بر ۳ بخش‌پذیر است. در حالت‌کلی ثابت‌کنید که چون عدد $R=\sum_{i=0}^{n}a_i 10^{i}$ ، که در آن a_iها اعداد طبیعی‌اند، دارای $\sum_{i=0}^{n}a_i$ بخش‌پذیر بر ۳ باشد، در این صورت R نیز بر ۳ بخش‌پذیر است.

واضح است که این مسأله بسط *نتیجهٔ* ۶.۵ است.

۲۵. نشان دهید به ازاء هر عدد صحیح $n>1$ ، $n^{3}-n$ بر ۶ بخش‌پذیر است.

۲۶. نشان دهید $\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i}<0$ است.

۲۷. نشان دهید:

$$\frac{1}{2^{0}}+\frac{2}{2^{1}}+\frac{3}{2^{2}}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}<4$$

است.

راهنمائی: نشان دهید به‌ازاء $n>3$:

$$1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}<4-\frac{1}{2^{n-3}}$$

۲۸. نشان دهید:

$$\frac{۱}{(۱)(۳)}+\frac{۱}{(۲)(۴)}+\cdots+\frac{۱}{[(n)(n+۲)]}<\frac{n}{n+۱}$$

است.

۲۹. نشان دهید هر عدد صحیح $n\geqslant ۲$ می‌تواند به صورت $n=۲a+۳b$، که در آن a و b اعداد صحیح نامنفی‌اند، نوشته شود.

۳۰. نشان دهید به ازاء هرعدد صحیح مثبت N، عدد صحیح nی چنان موجود است که:

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{n}>N$$

۳۱. نشان دهید به ازاء هر عدد صحیح مثبت N، عدد صحیح nی چنان موجود است که:

$$۱+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}+\cdots+\frac{۱}{۲n-۱}>N$$

Chapter 7 فصل ۷

اثبات مستقیم ۱

Direct Proof I

روش مستقیم اثبات، روشی است که به‌کرات درریاضیات به‌کار می‌رود، نیز روشی است که از آن غالباً درتجربه‌های قبلی‌مان استفاده کرده‌ایم. در واقع هردفعه که معادله‌یی حل می‌کنیم، محاسبات حسابی‌یی انجام می‌دهیم، یا تعادل بین سمت راست وسمت چپ یك اتحاد را نشان می‌دهیم، موارد ساده‌یی از اثبات مستقیم را به‌کار می‌بریم. درحقیقت استقراء ریاضی نیزمورد دیگری از اثبات مستقیم است.

روش مستقیم اثبات را می‌توان برحسب روشهای ریاضی‌یی که در فصل ۲ مطرح کردیم توضیح داد . درآنجا، همانطورکه ملاحظه کردیم، اگر A و B دوگزاره باشند و A مستلزم B باشد، دراین صورت اگر A راست باشد B نیز هست. این موضوع ، مبنای اثبات مستقیم است. اما، در این مورد ممکن است پیش از رسیدن از A به B به مراحل بسیاری نیاز باشد.

برای اثبات گزاره‌یی با استفاده از روش مستقیم، ابتدا به جمع‌آوری گزاره‌های راستی که ممکن است با مسألهٔ مورد بحث در ارتباط باشند می‌پردازیم. این گزاره‌ها می‌توانندپوستولات یا گزاره‌های قبلا محقق باشند. با شروع بااین گزاره‌هاشخص میتواند با استفاده از قوانین جبروسایراعمال درست، ازمرحله‌یی به مرحله‌یی دیگرقدم بگذارد.

گزارهٔ نهائی چنین جریانی پاسخ مسأله است، چه ازآنجاکه کار را باگزاره‌های راست آغاز، وبا عملیات درست اقدام کرده‌ایم پاسخمان نیز باید راست باشد، و به علت اینکه این پاسخ همان پاسخی‌است که درجستجوی اثبات‌کردنش بوده‌ایم، جریان‌فوق‌به‌تکمیل اثبات درست گزاره مینجامد.

ممکن است از بحث فوق چنین آشکارشودکه روش مستقیم اثبات، روش ساده‌یی برای به‌کاربردن است. این مطلب می‌تواند در مورد حالات خاصی صادق باشد، اما در بسیاری از موارد استعمال این روش، برای اثبات نتیجهٔ مطلوب بـه مواد اولیهٔ بسیاری نیاز داریم، وبرخلاف استقراء ریاضی‌که درآن اساساً می‌دانیم کـه چگونه اقدام‌کنیم، شروع با اثبات مستقیم، مشکلاتی به‌وجود می‌آورد. به‌این‌ترتیب‌که شخص باید ابتدااز میان تمام حقایق ممکن آنهائی را انتخاب‌کندکه مفیدند، سپس ازمیان تمام طرق ممکن اقدام، به اثبات آنهائی‌که منجربه اثبات درست می‌شوند بپردازد. دراین مورد گاهــی شخص بینشهایی ازبه قهقرا رفتن حاصل می‌کند؛ و گاهی «کلکهائی»[1] چون ضرب‌کسری در ۲/۲ یا جمع و تفریق ۱ کاررا انجام می‌دهند.

اثباتهای مستقیم غـالباً بسیار مشکلند، و تحصیل تخصص معقول دراین مسیر، تنها پس از تمرینات بسیار میسر می‌شود. مثالهای زیــر استفاده از روش مستقیم اثبات را توضیح می‌دهند.

مثال ۷.۱ نشان دهیدکه به ازاء هرعدد طبیعی n ، $(۱+۱/n)^n \geqslant ۲$ است.

ممکن است اولین فکرمان استفاده‌کــردن از استقراء ریـاضی باشد، زیرا دراین مرحله، مهارتی درمورد این روش‌به‌دست‌آورده‌ایم. اما پیش‌ازاقدام ازاین‌طریق،بگذارید این سؤال را مطرح کنیم‌کـه آیا گزاره‌یی شبیه‌گزارهٔ فوق ملاحظه‌کرده‌ایم یانه؟اندکی اندیشه دراین مورد به پاسخ مثبت، یعنی، نامساوی:

$$(۱+x)^n \geqslant ۱+nx \quad ، \quad \text{به ازاء } x \geqslant -۱ \text{ و } n \text{ عدد طبیعی}$$

منجرمی‌شود. دراین صورت سعی دربه‌کاربــردن نامساوی فوق در اثباتمان می‌کنیم. از آنجاکه می‌دانیم $(۱+x)^n \geqslant ۱+nx$، سعی می‌کنیم $(۱+x)^n$ را مانند $(۱+۱/n)^n$ کنیم. این‌کار را میتوان با انتخاب $x=۱/n$ انجام داد. دراین‌صورت گزاره به‌صورت زیرتبدیل می‌شود:

---

1. gimmick

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n \geqslant ۱+\frac{۱}{n}(n) \quad \text{یا} \quad \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n \geqslant ۱+۱$$

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n \geqslant ۲ \quad \text{یا} \quad ۲ \leqslant \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n$$

و به‌این ترتیب، نتیجه‌اثبات میشود.

مثال ۷.۲ نشان دهیدکه به‌ازاء هرعدد p واقع درفاصلهٔ $۱ \geqslant p \geqslant ۰$:

$$p(۱-p) \leqslant \frac{۱}{۴}$$

کار را با مشخص‌کردن تعدادی از حالات ممکن، درجدول ۷.۱ ، آغاز میکنیم. واضح است‌که (۰/۵)(۰/۵) یا ۰/۲۵ ماکزیمم مقادیر $p(۱-p)$ در جدول مذکور است. اما این برهان تنها در مورد تعدادکمی ازمقادیر ممکن p برقرار است. و تازمانیکه مطمئن نشویم‌که هیچ یك‌ازمقادیردیگر p حاصلضرب بزرگتری‌را تسلیم‌نمیکند، تشکیل اثبات نمیدهد.

جدول ۷.۱

p	$(۱-p)$	$p(۱-p)$
۰/۱	۰/۹	۰/۰۹
۰/۲	۰/۸	۰/۱۶
۰/۳	۰/۷	۰/۲۱
۰/۴	۰/۶	۰/۲۴
۰/۵	۰/۵	۰/۲۵
۰/۶	۰/۴	۰/۲۴
۰/۷	۰/۳	۰/۲۱
۰/۸	۰/۲	۰/۱۶
۰/۹	۰/۱	۰/۰۹

مسأله را به‌طور تحلیلی حل می‌کنیم. ازآنجاکه تصور می‌رودکه $p=۱/۲$ به ماکزیمم حاصلضرب مورد بحث مینجامد، p را به‌صورت $p=۱/۲+x$ می‌نویسیم. بنابراین،

$$(۱-p) = ۱ -\frac{۱}{۲}- x =\frac{۱}{۲}-x$$

با قراردادن مقدار فوق در عبارت $p(۱-p)$، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{۱}{۲}+x\right)\left(\frac{۱}{۲}-x\right)=\frac{۱}{۴}-x^۲$$

از آنجاکه $x^۲$ همواره بزرگتر از یا مساوی با صفر است، $۱/۴-x^۲\leqslant ۱/۴$ است. نیز وقتی $x=۰$ باشد، $۱/۴-x^۲=۱/۴$ می‌شود. توجه داشته باشیدکه از این نتیجه می‌توان، برای ملاحظهٔ تأثیراتی‌که انحرافات از $p=۱/۲$ بر $p(۱-p)$ دارند استفاده کرد. به عنوان مثال، اگر $p=۰/۶$ باشد، دراین صورت $x=۰/۱$ و $x^۲=۰/۰۱$ میشود. بنابراین، $p(۱-p)$ به ازاء $p=۰/۵$ و $p=۰/۶$ تقریباً یکسانند. این خاصیت دراحتمال به‌کار می‌رود.

مثال ۷.۳ به‌ازاء هرعدد $n\geqslant ۲$، $(n^۳-n)$ بر۶ قابل قسمت است.

توجه داشته باشیدکه گزاره‌یی مشابه این گزاره، به‌صورت مثال ۶.۴ درفصل ۶، با استفاده از استقراء ثابت شد.

اثبات :

برای حل این مسأله ابتدا $(n^۳-n)$ را به‌صورت زیر تجزیه می‌کنیم:

$$n^۳-n=n(n^۲-۱)=n(n-۱)(n+۱) \quad \text{یا} \quad (n-۱)n(n+۱)$$

به این‌ترتیب حاصلضرب‌سه‌عددمتوالی راداریم. خاصیتی از اعداد صحیح‌که درفصل ۳ مورد بحث قرار گرفت را مرور می‌کنیم. اگر اعداد طبیعی به‌ترتیب:

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، . . .

نوشته شوند،ملاحظه می‌کنیم‌که هردومین عدد بر ۲ بخش پذیراست. به عبارت دیگرهر دومین عدد صحیح متوالی،زوج است. نیز ملاحظه می‌شود که هرسومین عدد، یعنی، ۳، ۶، ۹، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۲۱، و غیره، بر۳ بخش‌پذیر است. ازآنجاکه درمثالمان سه

عدد متوالی داریم، یکی از آنها باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. نیز از آنجاکه هردومین عدد صحیح بر ۲ بخش پذیراست، حداقل یکی ازسه عدد صحیح متوالیمان بر ۲ قابل قسمت است. ازآنجاکه $(n^۳-n)$ دارای اعداد ۲ و ۳ به‌عنوان عوامل خود است، $(n^۳-n)$ بر $۶=(۳)(۲)$ بخش‌پذیراست واین، نتیجه را اثبات می‌کند.

مثال ۷.۴ اگر $p\geqslant ۵$ عددی اول بـاشد، دراین صورت $(p^۲-۱)$ بر ۲۴ قابل قسمت است. البته عدد اول عددی است‌که تنها بریك و خودش بخش پذیراست.

اثبات :

ازآنجاکه اثبات این نتیجه، مشابه با روش مثال۷.۳ انجام می‌گیرد، اولین مرحلهٔ اثبات، تجزیهٔ $(p^۲-۱)$ است:

$$(p^۲-۱)=(p-۱)(p+۱)$$

اکنون عوامل ضرب را درنظر می‌گیریم. اولا، از آنجاکه p اول و $p\geqslant ۵$ استمیدانیم که p فرد است زیرا، اگرم p زوج باشد، بر۲ بخش‌پذیر می‌شود. بنابراین، هم $(p-۱)$ هم $(p+۱)$ زوج است. ازاین‌گذشته، هرچهارمین عدد صحیح، یا معادلاً هردومین عدد زوج بر۴ بخش پذیراست. بنابراین، حداقل یکی از دو عدد $(p-۱)$ و $(p+۱)$ بر۴ و دیگری بر۲ بخش‌پذیر است. ازطرف دیگر ، یکی از اعداد دنبالهٔ سه عددی $(p-۱)$، p،$(p+۱)$ باید بر۳ بخش‌پذیر باشد. اما ازآنجاکه، بنابه‌تعریف، این عدد نمی‌تواند عدد اول p باشد، باید $(p-۱)$ یا $(p+۱)$ باشد. تااینجا نشان دادیم که $(p-۱)$ و $(p+۱)$ هردو بر۲ بخش پذیرند، $(p-۱)$ یا $(p+۱)$ بر۳ بخش پذیر است، و $(p-۱)$ یـا $(p+۱)$ بر۴ بخش پذیراست. بنابراین، $(p^۲-۱)$ بر $۲۴=(۴)(۳)(۲)$ قابل قسمت است. و این، اثبات گزارهٔ مورد بحث را تکمیل می‌کند.

مثال ۷.۵ ساده‌کنید:

$$\sum_{i=۱}^{n} i=۱+۲+۳+\cdots+n$$

این مسأله،درمثال ۶.۱ با استفاده از استقراء حل شد.

$\sum_{i=۱}^{n} i$ را به دوترتیب صعودی[1] و نزولی[2] نوشته، نتایج را باهم جمع می‌کنیم:

1. ascending 2. descending

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n \\ \sum_{i=1}^{n} i = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \cdots + 1 \\ \hline 2\sum_{i=1}^{n} i = (n+1) + (n+1) + (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \quad (7.1) \end{array}$$

طرف راست معادلهٔ (۷.۱) شامل n جمله هریك مساوی با $(n+1)$ است، بنابراین سرانجام:

$$2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1) \quad \text{یا} \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

را به‌دست می‌آوریم.

دراین مورد توانستیم مجموعـی را بدون آنکـه پاسخ آن را ازپیش فرض کنیم ساده نمائیم. علاوه براین، طرح یك اثبات هوشمندانه، چون اثبات فوق، کاملاهیجان آور وارضاءکننده است و ریاضیات راازلحاظ خودش جالب توجه می‌کند.

مثال ۷.۶ نشان دهیدکه به ازاء $x \neq 1$ ،

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

این مسأله به‌عنوان تمرین ۱۱، درفصل استقراء بیان شد.

برای اثبات مستقیم:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$$

را درنظر می‌گیریم. ازآنجا کـه مایل به‌ساده‌کـردن این مجموعیم، می‌توانیم آن را A فرض کنیم، یعنی:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = A$$

دراین صورت دوطرف آن را در x ضرب می‌کنیم. بنابراین:

$$x(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) = xA$$

یا:

$$x+x^{2}+x^{3}+\cdots+x^{n}+x^{n+1}=xA \qquad (7.2)$$

سمت چپ معادلهٔ فوق را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}x+x^{2}+x^{3}+\cdots+x^{n}+x^{n+1}\\ &=x+x^{2}+x^{3}+\cdots+x^{n}+x^{n+1}+1-1\\ &=(1+x+x^{2}+x^{3}+\cdots+x^{n})+x^{n+1}-1\\ &=A+x^{n+1}-1\end{aligned}$$

با بازگشت به‌معادلهٔ (۷.۲) داریم:

$$A+x^{n+1}-1=xA \quad \text{یا} \quad A-xA=1-x^{n+1}$$

وسرانجام:

$$A=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

و این، اثبات نتیجه را تکمیل می‌کند. توجه داشته باشید که این بار نیاز نداشتیم که پاسخ را از قبل بدانیم ، چه پاسخ در راه حلمان مشخص شد، و این یکی از امتیازات مهم روش مستقیم اثبات نسبت به استقراء ریاضی‌است. نیز، توجه داشته باشیدکه دراین مورد، جانشین‌کردن ساده‌کافی نبود، ولازم بود که برای به‌دست آوردن نتیجهٔ درست $(+1)$ و (-1) را اضافه‌کنیم.

مثال ۷.۷ ساده‌کنید:

$$\sum_{i=1}^{n}(-a)^{i}$$

ساده ترین روش درحل این مسأله، توجه به شباهتش با مثال پیشین است. در واقع اگر به‌جای $-a$ ، x را قرار دهیم، به‌جای $\sum_{i=1}^{n}(-a)^{i}$ ،

$$\sum_{i=0}^{n}x^{i}-x^{0}=\sum_{i=0}^{n}x^{i}-1$$

را خواهیم داشت. اگر نتیجهٔ مثال ۷.۶ را دراین رابطه قرار دهیم، به دست می‌آوریم

$$\sum_{i=0}^{n} x^i - ۱ = \frac{۱-x^{n+۱}}{۱-x} - ۱ = \frac{۱-x^{n+۱}}{۱-x} - \frac{۱-x}{۱-x}$$

$$= \frac{۱-x^{n+۱}-۱+x}{۱-x} = \frac{-x^{n+۱}+x}{۱-x}$$

با قراردادن $x=-a$، حاصل می‌کنیم:

$$\frac{-(-a)^{n+۱}+(-a)}{۱-(-a)} = \frac{-۱(-a)^{n+۱}-a}{۱+a}$$

$$= \frac{-۱(-۱)^{n+۱}(a)^{n+۱}-a}{۱+a}$$

$$= \frac{(-۱)^n a^{n+۱}-a}{a+۱}$$

مثال ۷.۸ فورمولی برای ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم[1] یا یك مجذوری به دست آورید. به عبارت دیگر، $ax^۲+bx+c=۰$ را برای x حل کنید. در اینجا $a\neq ۰$ است.

برای حل این معادله، باید بعضی اعمال جبری مقدماتی را انجام دهیم. ابتدا طرفین معادله را بر a تقسیم می‌کنیم تا $x^۲+(b/a)x+c/a=۰$ را به دست آوریم. بعد مربع را کامل می‌کنیم، یعنی، $(x^۲+(b/a)x)$ را به‌صورت مربع کامل[2] درمی‌آوریم. این کار را می‌توان با اضافه کردن $b^۲/۴a^۲$ انجام داد. بنابراین:

$$x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲}=\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲$$

به‌طور خلاصه، $x^۲+\dfrac{b}{a}x=-\dfrac{c}{a}$ معادل

$$x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲}=-\frac{c}{a}+\frac{b^۲}{۴a^۲}$$

است، یا

1. quadratic equation 2. perfect square

$$\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^{۲}=-\frac{c}{a}+\frac{b^{۲}}{۴a^{۲}}=\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}$$

یا

$$\left(x+\frac{b}{۲a}\right)=\pm\sqrt{\frac{b^{۲}-۴ac}{۴a^{۲}}} \quad \text{یا} \quad \left(x+\frac{b}{۲a}\right)=\pm\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

یا

$$x=-\frac{b}{۲a}\pm\frac{\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

یا

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^{۲}-۴ac}}{۲a}$$

به‌عنوان مثال، برای پیداکردن صفرهای $۲x^{۲}+۳x+۱$ ، ملاحظه می‌کنیم که $a=۲$ ، $b=۳$ ، $c=۱$ ، بنابراین:

$$x=\frac{-۳\pm\sqrt{۹-(۴)(۲)(۱)}}{(۲)(۲)}=\frac{-۳\pm\sqrt{۱}}{۴}=\frac{-۳\pm۱}{۴}$$

دراین صورت

$$x=\frac{-۳-۱}{۴}=-۱ \quad \text{و} \quad x=\frac{-۳+۱}{۴}=-\frac{۱}{۲}$$

اکنون نتایج فوق را امتحان می‌کنیم. چون $x=-۱$ ،

$$۲x^{۲}+۳x+۱=۲(-۱)^{۲}+۳(-۱)+۱=۲-۳+۱=۰$$

چون $x=-۱/۲$:

$$۲x^{۲}+۳x+۱=۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۲}+۳\left(-\frac{۱}{۲}\right)+۱=۲\left(\frac{۱}{۴}\right)-\frac{۳}{۲}+۱$$

$$=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}+۱=۰$$

مثال ۷.۹ لم‌های بسیاری موجودندکه منجر به‌محاسبات حسابی سریع می‌شوند. و شخص اغلب چنین لم‌هائی را بدون اینکه بداند چرا چنین‌کاری‌اند می‌آموزد. درزیر یکی از این لم‌ها را معرفی وبعد، درستی آن را تحقیق می‌کنیم.

فرض می‌کنیم شخص بخواهد اعدادی‌که به‌پنج ختم می‌شوند، مثلاً[۴](۱۵)(۱۵)،را مربع‌کند. پاسخ را می‌توان‌با افزودن‌یك واحد به رقم دهگان، ضرب‌آن در رقم دهگان تغییر نیافته، و قراردادن (۵)(۵) یا۲۵ بعد ازاین حاصلضرب، به‌دست‌آورد. (۱۵)(۱۵) عبارت از (۲)(۱) که پس ازآن (۵)(۵) قرارگیرد، یعنی ۲۲۵، است. $۴۵^۲$ مساوی (۵)(۴)که بعد از آن (۵)(۵) واقع شود، یعنی، ۲۰۲۵، است.

بگذارید درستی این لم حسابی را اثبات‌کنیم. اگر N عددی باشد که به ۵ ختم می‌شود، آنرا می‌توان به صورت $N=۱۰i+۵$ نوشت . به‌عنوان مثال، اگر $N=۱۵$ باشد، $i=۱$ است. دراین‌صورت:

$$N^۲=(۱۰i+۵)^۲=۱۰۰i^۲+(۲)(۱۰)(۵)i+۲۵=۱۰۰i^۲+۱۰۰i+۲۵$$

$$=۱۰۰(i^۲+i)+۲۵=۱۰۰i(i+۱)+۲۵ \qquad (۷.۳)$$

درمورد مثالهای فوق:

$۱۵^۲$ ؛ $i=۱$ ، بنابراین $۱۰۰(۱)(۲)+۲۵=۲۲۵$

$۴۵^۲$ ؛ $i=۴$ ، بنابراین $۱۰۰(۴)(۵)+۲۵=۲۰۲۵$

معادلهٔ (۷.۳) نه تنها درستی محاسبات حسابی قبلی را محقق می‌کند ، بلکه پاسخ عمومی چنین مسائلی را نیز به‌دست می‌دهد.

مثال ۷.۱۰ بسیاری از معماهای ریاضی با اعداد صحیح سروکار دارند و غالباً شامل روابط بین ارقامند. شخص آماتور، برای حل چنین مسائلی اغلب روش آزمایش و خطا را به‌کار می‌برد. درحالیکه اگرشخص از روش ریاضی استفاده‌کند حل این مسائل‌غالباً بسیار ساده می‌شود. به‌عنوان مثال، فرض می‌کنیم‌که معما، پیداکردن عدد صحیحی که چون به‌هررقم آن۱ اضافه شود عدد دوبرابر گردد، باشد.بگذارید عدد رابه عمومی‌ترین صورتش بنویسیم ؛ یعنی ، اگر N عدد صحیح مورد بحث باشد، دراین صورت $N=a_n۱۰^n+a_{n-۱}۱۰^{n-۱}+\dots+a_۱۱۰+a_۰$ که درآن a_n ، $a_{n-۱}$، . . . ، $a_۱$، $a_۰$ ارقامند. اگر عدد مزبور با افزودن ۱ به‌هریك از ارقامش دو برابر شود، دراین صورت

$$۲N=(a_n+۱)۱۰^n+(a_{n-۱}+۱)۱۰^{n-۱}+\cdots$$
$$+(a_۱+۱)۱۰+(a_۰+۱)$$

یا

$$۲(a_n۱۰^n+a_{n-۱}۱۰^{n-۱}+\cdots+a_۱۱۰+a_۰)$$
$$=(a_n+۱)۱۰^n+(a_{n-۱}+۱)۱۰^{n-۱}+\cdots+(a_۱+۱)۱۰+(a_۰+۱)$$

یا

$$(۲a_n)۱۰^n+(۲a_{n-۱})۱۰^{n-۱}+\cdots+(۲a_۱)۱۰+۲a_۰$$
$$=(a_n+۱)۱۰^n+(a_{n-۱}+۱)۱۰^{n-۱}+\cdots+(a_۱+۱)۱۰+(a_۰+۱)$$

یا

$$(۲a_n-a_n-۱)۱۰^n+(۲a_{n-۱}-a_{n-۱}-۱)۱۰^{n-۱}+\cdots+$$
$$+(۲a_۱-a_۱-۱)۱۰+(۲a_۰-a_۰-۱)$$
$$=(a_n-۱)۱۰^n+(a_{n-۱}-۱)۱۰^{n-۱}+\cdots+(a_۱-۱)۱۰+$$
$$+(a^\circ-۱)=۰$$

بنابراین، یك جواب عبارتست از: $a_۰=a_۱=a_۲=\cdots=a_n=۱$
زیرا هنگامیکه $a_i=۱$ باشد $a_i-۱=۰$ می‌شود. بنابراین اعداد به‌صورت:

$$۱، ۱۱، ۱۱۱، ۱۱۱۱، ۱۱۱۱۱، \ldots$$

شرط را برقرار می‌کنند.

تکالیف و مسائل فصل ۷

بدون استفاده از استقراء ریاضی، نتایج مسائل ۴ـ۱ را تحقیق کنید. n درهرحالت عددی طبیعی است.

۱. $\sum_{i=۱}^{n}(۲)^{-i}=۱-\left(\frac{۱}{۲}\right)^n$

۲. $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$

۳. $\sum_{i=2n}^{2n+1}\frac{(-1)^i}{i}<\frac{1}{4n^2}$

۴. $\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{i}<0$

۵. دو عــدد ناصفر x و y ، بــا خاصیت $x+y=1$، را در نظر مــی‌گیریم . نشان دهید که:

$$\left[1-\frac{1}{x}\right]\left[1-\frac{1}{y}\right]=1$$

۶. نامساوی زیررا در مورد هرعدد طبیعی اثبات کنید:

$$\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$$

۷. نامساوی زیررا درمورد هرعدد طبیعی n اثبات کنید:

$$\frac{n}{n+1}\leqslant\frac{n^2}{n^2+1}$$

۸. دوعدد صحیح بیابید که مجموعشان ۷۵ و تفاضلشان ۱۳ باشد.

۹. دوعدد حقیقی بیابید که حاصلضربشان سه برابر مجموعشان و چهار برابر تفاضلشان باشد.

۱۰. دوعدد صحیح به‌دست‌آورید که در شرایط زیرصدق کنند:

(a) مجموعشان چهار برابر تفاضلشان باشد.

(b) هردو بر ۵ قابل قسمت باشند.

۱۱. عدد صحیحی بیابید که دارای این خاصیت است که تعویض رقمهای اول و آخرش ۶۳ واحد به‌عدد اضافه می‌کند.

۱۲. عدد چهاررقمی‌ئی[1] بیابید که‌اولین رقمش یك واحد ازدومی بزرگتراست، مجموع

1. four – digit number

ارقامش ۱۳، وتفاضل بین رقم سوم وچهارمش ۲ است.

۱۳. درمثال ۷.۹ فورمول محاسبه‌ئی میان‌بری[1] را برای به‌دست‌آوردن مربع اعدادی‌که به ۵ ختم می‌شوند توضیح دادیم. فورمولهای میان برمشابهی برای:

(a) اعداد شامل تنها ۹؛ یعنی، ۹، ۹۹، ۹۹۹، وغیره.

(b) اعداد شامل تنها ۱،

به‌دست آورید.

۱۴. نشان دهید به‌ازاء هرعدد طبیعی n، n^5-n بر ۶ قابل قسمت است.

۱۵. ثابت‌کنید‌که اگر n فرد باشد، دراین صورت n^5-n بر ۱۶ بخش پذیراست.

۱۶. ثابت‌کنید n^5-n بر ۵ بخش پذیراست.

۱۷. بدون استفاده از استقراء، نشان دهیدکه هرعدد طبیعی $n \geqslant ۲$، می‌تواند به‌صورت $n=۲a+۳b$، که درآن a و b اعداد صحیح نامنفی‌اند نوشته شود.

۱۸. فرض‌می‌کنیم $p_۰$ و $p_۱$ دوعدد حقیقی، چنان‌باشندکه $۰<p_۰<۱$ و $۰<p_۱<۱$، و

$$q_۰=۱-p_۰ \quad , \quad q_۱=۱-p_۱$$

را تعریف می‌کنیم. اگر $p_۰<p_۱$، ثابت‌کنیدکه:

$$\frac{p_۰q_۱}{p_۱q_۰}<۱$$

۱۹. تحقیق‌کنیدکه مکعب هرعدد فرد، عددی فرد است.

۲۰. فرض می‌کنیم n و m دوعدد صحیح باشند. نشان دهید زوج بودن $n^۳-m^۳$، معادل زوج بودن $n-m$ است.

۲۱. می‌خواهیم $ax^۲+bx+c$ را به‌صورت $Ay^۲+B$ تبدیل‌کنیم. دراین‌صورت لازم است‌که جملهٔ وسط‌را، به‌طوریکه $ax^۲+bx+c=Ay^۲+B$ باشد، حذف کنیم. y را برحسب x، a، b، c (لازم نیست‌که همه بـه‌کاربروند) و A و B را برحسب a، b، c بیان‌کنید.

۲۲. اکنون رابطه‌ئی بین $x_۱$ و x، y، a، b، c، و A و B برحسب a، b، و c برای تبدیل $ax^۲+bxy+cy^۲$ به $Ax_۱^۲+By^۲$ به‌دست‌آورید.

۲۳. نشان دهیدکه حاصلضرب هرچهار عدد صحیح متوالی بعلاوهٔ یك، مربع‌کامل‌است.

---

1. computational short cut formula

۲۴. در مثال ۷.۲ نشان دادیم کــه بــه ازاء $\circ \leqslant p \leqslant ۱$ ، $p(۱-p) \leqslant ۱/۴$ است. از این نتیجه در تحقیق نامساوی $ab \leqslant (a+b/۲)^۲$، به‌ازاء هر دوعدد مثبت a،b، استفاده کنید.

راهنمایی: فرض می‌کنیم $l=a+b$ و $a=pl$ درحالیکه $b=(۱-p)l$.

۲۵. درمورد هرعدد مثبت a نشان دهید که:

$$\frac{a+\frac{۱}{a}}{۲} \geqslant ۱$$

۲۶. ثابت کنید که ازمیان مستطیلهای با محیط ثابت، مربع دارای بیشترین سطح است.
راهنمایی: از $ab \leqslant ((a+b)/۲)^۲$ به ازاء هر $a \geqslant \circ$ ، $b \geqslant \circ$ ، استفاده کنید.

۲۷. درمثال ۷.۸ فورمولی برای به‌دست‌آوردن دوریشهٔ معادلهٔ درجه دوم:

$$ax^۲+bx+c=\circ$$

به‌دست آوردیم. نشان دهید که مجموع صفرهای تابع درجه‌دوم $ax^۲+bx+c$ برابر $-b/a$ وحاصلضرب صفرهای آن برابر c/a است.

۲۸. اکنون معادلهٔ درجه سوم[1] $x^۳+a_۲x^۲+a_۱x+a_\circ=\circ$ را درنظرمی‌گیریم. نشان دهید که مجموع ریشه‌های آن $-a_۲$ و حاصلضرب ریشه های آن برابـر $-a_\circ$ است.

راهنمایی: فرض می‌کنیم ریشه‌ها $r_۱$ ، $r_۲$ و $r_۳$ ، بعد:

$$(x-r_۱)(x-r_۲)(x-r_۳)=x^۳+a_۲x^۲+a_۱x+a_\circ$$

۲۹. چند جمله‌یی کلی:

$$x^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+a_{n-۲}x^{n-۲}+\cdots+a_۱x+a_\circ$$

را درنظرمی‌گیریم. نشان دهید که مجموع صفرهای آن مساوی $-a_{n-۱}$ وحاصلضرب صفرهای آن برابر $(-۱)^n a_\circ$ است. توجه کنید که مسائل ۲۷ و۲۸ حالات خاصی از مسألهٔ ۲۹ می‌باشند.

۳۰. هنگام بسط اعدادگویا به اعشاری[2] ، شخص می‌تواند ملاحظه کند کــه، بسط مورد بحث، بعد از تمام شدن تعداد مشخصی‌رقم، شروع به‌داشتن نمونهٔ تکــراری اعداد صحیح قابل پیش‌بینی می‌کند. به‌عنوان مثال:

---

1 cubic equation   2. decimals

$$\frac{۱۵}{۷}=۲/۱۴۲۸۵۷۱۴۲۸۵۷\cdots$$

به‌عبارت دیگر، عدد ۷/۱۵ چون به‌صورت اعشاری نوشته‌شود شامل نمونهٔ مکرر اعداد ۱۴۲۸۵۷ به‌استثنای اولین عدد است. نشان دهید هر عددی که دارای چنین نمونهٔ مکرر ارقام است عددی گویاست.

۳۱. نشان دهید که هر عدد گویا، با امکان استثنای چند عدد اولیهٔ آن، باید شامل چنین نمونهٔ مکرری از اعداد صحیح باشد.

۳۲. ثابت کنید که هر عدد بین دو عدد حقیقی، A و B، میتواند بصورت $pA+(۱-p)B$، که در آن $۱\geqslant p\geqslant ۰$ است، بیان شود.

فصل ۸

Chapter 8

اثبات مستقیم II

Direct Proof II

در فصل قبل، با استفاده از روشهای مستقیم، بـه اثبات تعدادی قضیهٔ ریاضی پرداختیم. درهریك از آن‌مثالها به‌کمك روشی، گاه باجانشین‌کردن، گاه باعملیات جبری، ازقضیه‌یی به قضیهٔ دیگر رفتیم. درآنجا هرمسأله، حالتی خاص داشت.

دراین فصل، می‌خواهیم بـه‌جای اثبات قضایای خاص، به اثبات خواص طبقات عمومی[1] بپردازیم. چنین خواصی را، هنگامیکه اثبات شدند، مـی‌توان در مورد حالات خاص بسیاری به‌کاربرد و ، از این گذشته، از آن‌هـا می‌توان در استخراج نتایج حتی پیچیده‌تر استفاده کرد.

طبقه‌بندی مسائل به دستگاههای تعمیم‌یافته[2]، مرحله‌یی پیشرفته‌تر درتوسعهٔ‌ریاضیات است. چنین طبقه‌بندیهائی از واقعیات، به عنوان یك مفهوم، منحصر بـه‌ریاضیات نیست بلکه درتمام رشته‌های معرفت به کار می‌رود. عمل مقدماتی در درك هرپدیده، طبقه بندی آن درقالبی عمومی و سپس، مقایسه بین این پدیده و پدیده‌های مشابه دیگراست. بررسی چنین قالبی می‌تواند معرفت‌مان از یك رشتهٔ‌کامل را بسط دهد.

---

1. general classes 2. generalized systems

مثالهایی ازچنین طبقه‌بندیهایی از حقایق‌را میتوان درتمام نظامها[1] یافت. فی‌المثل، درشیمی جدول مندلیف[2] راجع به عناصر[3] را داریم؛ در فیزیك قوانین حرکت نیوتن[4] موجوداست،وغیره. به‌همین‌ترتیب،درریاضیات‌می‌توانیم خواص‌دستگاهی که‌شامل‌مجموعه‌یی از عناصر وشرایط است را مورد تحقیق قرار دهیم. حقایق ریاضی‌یی کـه به این طریق استخراج می‌شوند تا حدودی متفاوت از «قوانین» رشته‌ها یـا میدانهای دیگرند. برای واضح‌تر دیدن این تفاوت، دلایل آن را به‌طور مختصر مورد بحث قرار می‌دهیم.

گفته می‌شود که ریاضیات مهمترین قسمت علم است، وبه‌همین لحاظ، نقشی‌اساسی در زندگی ما ایفا می‌کند. این نقش عارضی[5] نیست بلکه جزء ذات ولاینفك از طبیعت این موضوع است، و دراین مورد چندین دلیل موجود است.

درمرحلهٔ اول، ریاضیات زبان علوم است. به‌این ترتیب که درك رابطهٔ پیچیده‌یی کـه به‌صورت علامتی درآورده شده باشد آسان‌تراست. بیان انـدیشه با علائم، معمولاً اصل تحت بررسی را واضح می‌کند. این‌استفاده از علائم دربیان افکار، به خودی‌خود اهمیت ریاضیات را تضمین می‌کند.

دراین مورد جنبهٔ دیگری وجود دارد کـه حداقل به اهمیت جنبهٔ علامتی آنست. این جنبه با ثبات و استحکام[6] عظیم نتایج ریاضی سروکار دارد. هنگامیکه نتیجه‌یی‌اثبات شد راست است، و دیگر به استدلال بیشتری درمورد درستی‌گزارهٔ اثبات شده نیازنیست. دراین مورد ریاضیات را با یکی ازعلوم اجتماعی، مثلاً، تاریخ درمقابل هم‌میگذاریم. ممکن است دقت نظریات وقوانین علوم اجتماعی،ازلحاظی،کمتر از دقت‌علوم محضی‌که قبلاً ذکرشان رفت باشد و این علوم بیشتر ازعلوم محض از عقاید محقق تأثیرپذیرند، اما ازین لحاظ‌که نظریـه‌هاشان چون اطلاعـات بیشتری در دسترس باشد وروش‌هـای اندازه‌گیری دقیق‌ترشوند تغییر وتوسعه می‌یابند مشابهند.

اگرشخص به مطالعهٔ تاریخ حادثه‌یی بپردازد، می‌تواند به شباهتهای بین آن‌حادثه وحوادثی شبیه‌آن توجه‌کند. دراین صورت ممکن است درمورد چنین حادثه‌یـی‌حقایقی استنتاج‌کند که در اتخاذ تصمیمات سیاسی عصرحاضر مفید باشد. به‌عنوان مثال، ممکن است تاریخ دانی جنگ خاصی را مورد بررسی قرارداده آنرا با جنگهای دیگری، که مشابه‌آن درنظر گرفته، مقایسه ومقابله‌کند، ونتیجه‌گیری‌اش را در مورد یکی ازجنگهای

1. disciplines
2. Mendeliev's table
3. elements
4. Newton's Laws of Motion
5. accidental
6. stability

جاری به‌کار برد. درحالیکه، ممکن است تاریخ‌دان دیگری تقریباً همین حوادث گذشته را بررسی کند و به‌علت عدم توافقش درمورد جنبه‌های مربوط، علت ومعلولها، شباهتها و تفاوتها، به‌نتایجی کاملاً متفاوت برسد، دراین مورد، خوانندهٔ تاریخ بـا چنین تعبیرات متفاوتی از حوادث گذشته عادت می‌کند.

از طرف دیگر ثبات عبارات ریـاضی را مورد بررسی قرار مـی‌دهیم. قبلاً نشان دادیم که:

$$۱+۲+۳+\ldots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

دراین صورت اگـر کسی بخواهـد $۱+۲+۳+\ldots+۱۰۰$ را محاسبه کند میتواند از این فورمول استفاده کرده $۵۰۵۰=(۲/(۱۰۱))۱۰۰$ را به‌دست آورد. هر کس این فورمول را به کاربرد همین نتیجه را حاصل می‌کند. هنگامیکه یك فورمول ریاضی اثبات شود، می‌تواند، با اطمینان کامل، هرمرتبه که لازم باشد به‌کار رود. این ثبات همراه بـاتوان قراردادن مفاهیم پیچیده به‌صورت علامتی است کـه ریاضیات را «زبان علم[1]» ساخته است.

تا اینجا نتایج نسبة خاص را، با به‌کار بـردن اثباتی متفاوت در هرمسأله، مورد بررسی قرار داده‌ایم. به این‌ترتیب، درفصل ۶ ملاحظه‌کردیم که:

$$(۱+x)^n\geqslant(۱+nx)$$

به ازاء هرعدد طبیعی n و $x\geqslant -۱$ برقرار است. نیزمحقق کردیم که:

$$\sum_{i=۱}^{n} i=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

دراین فصل تأکیدمان برنامساوی یا مجموع خاصی نیست؛ وبه‌عوض آن، به‌مطالعهٔ موضوع نامساویها برای تعیین‌خواص مشترك آنها می‌پردازیم. به‌همین‌ترتیب، سعی نمیکنیم که هیچیك از فورمولهای مجموع فصل ۶ را حل‌کنیم، بلکه سعی می‌کنیم روشی به‌دست آوریم که در قراردادن چنین مجموعاتـی به‌صورت فشرده و مختصر[2] مفید باشد. قابل تصور[3] است که چنین رهبردی روشهایی به‌دست می‌دهدکـه به‌جای حالات خاص، قابل کاربرد درحالات عمومی باشند.

1. language of science 2. compact form
3. conceivable

جالب است که توجه داشته باشیم که آنچه که بسیاری از ریاضیدانها انجام میدهند مطالعهٔ چنین دستگاههای تعمیم یافته‌یی است. به‌عبارت دیگر، آنها تنها به اثبات نتایج خاص علاقه ندارند بلکه به‌جای آن به‌طبقه‌بندی چنین نتایجی درقالب‌های عمومی‌تر می‌پردازند، وسپس کوشش در اثبات خواص این دستگاه‌های عمومی می‌کنند. در این صورت هنگامیکه این خواص اثبات شوند، می‌توانند درموارد بسیاری به‌کارروندومنجر به درك بیشتری از موضوع مورد بررسی شوند.

دراین فصل به‌بررسی دوبارهٔ بعضی ازمفاهیمی‌که قبلاً به‌کار برده‌ایم می‌پردازیم. واین بار، به‌جای‌تأکید براثبات مسائل خاص، اثبات‌خواص طبقات وسیع‌تری‌ازگزاره‌ها را موردبررسی‌قرارمی‌دهیم‌وامیدواریم، خواننده بعد ازاینکه مطالعهٔ این فصل رابه پایان برد، درك[1] واضحتری از دلیل اینکه چرا ریاضیدانان بیشتر ، وقت خود را به‌جای اینکه صرف حل مسائل‌کنند به بررسی دستگاه‌های تعمیم یافته اختصاص می‌دهند، داشته باشد.

علامت مجموع Summation Notation

اکنون به‌بررسی علامت مجموع می‌پردازیم:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

خواص چنین مجموعاتی کدامند؟ به‌عنوان مثال، اگر x_iها با فوت اندازه‌گیری شده باشند و تمام مقادیر را به اینچ تبدیل‌کنیم، این‌کار چه تأثیری برمجموع خواهد داشت؟ به‌خاطرپاسخ گفتن به چنین سؤالاتی بعضی از خواص علامت مجموع‌را اثبات می‌کنیم.

خاصیت ۱:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc \qquad \text{که درآن } c \text{ یك ثابت است}$$

اثبات :

$$\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c$$

1. appreciation

ازآنجاکه مجموع فرق، مجموع n مقدار c است، داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} c = nc$$

به عنوان مثال:

$$\sum_{i=1}^{4} 5 = 5+5+5+5 = (4)(5) = 20$$

خاصیت ۲:

$$\sum_{i=1}^{n} (cx_i) = c\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)$$

ابتدا به توضیح این نتیجه می‌پردازیم. مجموع زیر را درنظر می گیریم:

$$\sum_{i=1}^{3} (2i) = (2)(1)+(2)(2)+(2)(3) = 2(1+2+3) = (2)(6) = 12$$

توجه داشته باشیدکه:

$$(2)(6) = 2\Big(\sum_{i=1}^{3} i\Big)$$

در حالت‌کلی:

$$\sum_{i=1}^{n} (cx_i) = cx_1 + cx_2 + \cdots + cx_n = c(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$= c\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)$$

به این ترتیب، اگر x_iها به فوت باشند و به اینچ تغییر یابند، در این صورت $c = 12$ ومجموع جدید، در حالیکه واحد اینچ را به‌عنوان نتیجه دارد $12\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)$ یا ۱۲ برابر مجموع اصلی است.

خاصیت ۳:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

بار دیگر به‌خاطر توضیح مطلب فرض می‌کنیم $x_i=i$ و $y_i=i^2$ ، دراینصورت:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}(i+i^2) &= (1+1^2)+(2+2^2)+(3+3^2)\\ &= (1+2+3)+(1^2+2^2+3^2)\\ &= 6+14=20\end{aligned}$$

درحالت کلی :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i) &= (x_1+y_1)+\cdots+(x_n+y_n)\\ &= (x_1+x_2+\cdots+x_n)+(y_1+y_2+\cdots+y_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}y_i\end{aligned}$$

خاصیت ۴:

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+by_i)=a\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)+b\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$$

اثبات :

با استفاده از خاصیت ۳، به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+by_i)=\sum_{i=1}^{n}(ax_i)+\sum_{i=1}^{n}(by_i)$$

از کاربرد خاصیت ۲ نتیجه می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n}ax_i=a\sum_{i=1}^{n}x_i \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{n}by_i=b\sum_{i=1}^{n}y_i$$

با جمع نتایج ساده شدهٔ فوق، نشان می‌دهیم:

$$\sum_{i=1}^{n}(ax_i+by_i)=\sum_{i=1}^{n}ax_i+\sum_{i=1}^{n}by_i=a\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)+b\left(\sum_{i=1}^{n}y_i\right)$$

خاصیت زیررا به‌عنوان نتیجهٔ خاصیت ۴ به دست می‌آوریم:

خاصیت ۵

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i$$

اثبات :

درخاصیت ۴ ، $a=1$ و $b=-1$ درنظر می‌گیریم، دراین صورت :

$$\sum_{i=1}^{n}(1x_i+(-1)y_i)=\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i$$

هنگامیکه خواص فوق را ثابت کردیم، می‌توانیم آنها را درحل بسیاری از مسائل به‌کار بریم. سه مثال زیر برای توضیح این نکته کفایت می‌کنند.

مثال ۸.۱ مجموع سری حسابی:

$$a+(a+b)+(a+2b)+\cdots+(a+(n-1)b)$$

که درآن a و b ثابت‌اند، را بیابید.

با استفاده از خاصیت علامت مجموع داریم:

$$a+(a+b)+(a+2b)+\cdots+(a+(n-1)b)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(a+(i-1)b)=\sum_{i=1}^{n}a+b\sum_{i=1}^{n}(i-1)$$

اما ،

$$\sum_{i=1}^{n}a=na \text{ ،} \sum_{i=1}^{n}(i-1)=\sum_{i=1}^{n-1}i=\frac{(n-1)n}{2}$$

بنابراین :

$$\sum_{i=1}^{n}(a+(i-1)b)=na+\frac{(n-1)n}{2}b=\frac{2na+(n-1)nb}{2}$$
$$=\frac{n}{2}[2a+(n-1)b]=\frac{n}{2}[a+(a+(n-1)b)]$$

یعنی، مجموع سری حسابی، برابر $n/2$ مجموع جملات اول و آخر آنست. به‌عنوان مثال، درمحاسبهٔ:

$$۳+۵+۷+۹+\cdots+۲۳$$

$a=۳$ ، $b=۲$ ، $n-۱=۱۰$ ، و $a+(n-۱)b=۲۳$ ، بنابراین:

$$۳+۵+۷+۹+\cdots+۲۳=\frac{۱۱}{۲}(۳+۲۳)=\frac{۱۱}{۲}(۲۶)=۱۴۳$$

مثال ۸.۲

$$\sum_{i=۱}^{n}(۲i-۱)^۲=((۲)(۱)-۱)^۲+((۲)(۲)-۱)^۲+\cdots+(۲n-۱)^۲$$
$$=۱^۲+۳^۲+۵^۲+\cdots+(۲n-۱)^۲$$

اما :

$$\sum_{i=۱}^{n}(۲i-۱)^۲=\sum_{i=۱}^{n}(۴i^۲-۴i+۱)=\sum_{i=۱}^{n}۴i^۲+\sum_{i=۱}^{n}(-۴i)+\sum_{i=۱}^{n}۱$$
$$=۴\sum_{i=۱}^{n}i^۲-۴\sum_{i=۱}^{n}i+n$$

از آنجاکه :

$$\sum_{i=۱}^{n}i=\frac{n(n+۱)}{۲} \quad \text{و} \quad \sum_{i=۱}^{n}i^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

داریم :

$$\sum_{i=۱}^{n}(۲i-۱)^۲=\frac{۴n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}-۴\left(\frac{n(n+۱)}{۲}\right)+n$$
$$=\frac{۲n(n+۱)(۲n+۱)}{۳}-۲n(n+۱)+n$$
$$=\frac{۲n(n+۱)(۲n+۱)}{۳}-\frac{۶n(n+۱)}{۳}+\frac{۳n}{۳}$$
$$=\frac{n}{۳}[۲(n+۱)(۲n+۱)-۶(n+۱)+۳]$$
$$=\frac{n}{۳}(۴n^۲+۶n+۲-۶n-۶+۳)=\frac{n}{۳}(۴n^۲-۱)$$

که همان نتیجهٔ مسألهٔ ۶.۴ است.

مثال ۸.۳ مجموع ده اندازه‌گیری درجه حرارت (به فارنهایت) ۱۲۲۰ است. اگر حرارت‌ها را با سانتی‌گراد اندازه بگیریم مجموع چقدر میشود؟

فورمول تبدیل $C=(۵/۹)(F-۳۲)$ است که در آن C و F به‌ترتیب اشاره به درجه سانتی‌گراد وفارنهایت دارند. فرض میکنیم C_i، i امین‌اندازه‌گیری سانتی‌گراد و F_i، i امین اندازه‌گیری فارنهایت باشد، دراین صورت به دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=۱}^{۱۰} C_i=\sum_{i=۱}^{۱۰} \frac{۵}{۹}(F_i-۳۲)=\frac{۵}{۹}\sum_{i=۱}^{۱۰}(F_i-۳۲)=\frac{۵}{۹}\left(\sum_{i=۱}^{۱۰} F_i-\sum_{i=۱}^{۱۰}۳۲\right)$$

داده شده که $\sum_{i=۱}^{۱۰} F_i=۱۲۲۰$. بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{۱۰} C_i=\frac{۵}{۹}(۱۲۲۰-۳۲۰)=\left(\frac{۵}{۹}\right)(۹۰۰)=۵۰۰$$

نامساویها Inequalities

علامت دیگری که غالباً به کار میرود علامت نامساویهاست. در فصل ۳، $a\leqslant b$ را، به این معنی که عدد نامنفی cیی چنان موجود باشد که $a+c=b$ باشد، تعریف کردیم. این تعریف برای مطرح کردن خواص نا مساویهامان کافی است.

خاصیت ۶ اگر $a\leqslant b$ و $b\leqslant c$، در این صورت $a\leqslant c$.

برای توضیح $a=۱$ ، $b=۲$ ، $c=۳$ را درنظرمیگیریم. در این صورت $۱\leqslant ۲$ و $۲\leqslant ۳$، بنابراین $۱\leqslant ۳$ نیز هست. در حالت کلی $a\leqslant b$ مستلزم اینست که عدد نامنفی $d_۱$ئی چنان موجود است که $a+d_۱=b$. به همین ترتیب، از آنجا که $b\leqslant c$، عدد نامنفی $d_۲$ئی چنان موجود است که $b+d_۲=c$. با ترکیب این نتایج، به دست می‌آوریم: $c=b+d_۲=(a+d_۱)+d_۲=a+(d_۱+d_۲)$. ازآنجا که $d_۱$ و $d_۲$ نامنفی‌اند، $d_۱+d_۲$ نیز چنین است، بنابراین، بنا به تعریف نامساوی داریم $a\leqslant c$.
و این، اثبات گزارهٔ مورد بحث را تکمیل میکند.

خاصیت ۷ اگر $c\geqslant ۰$ و $a\leqslant b$، در این صورت $ca\leqslant cb$.

باز به قصدتوضیح $1 \leqslant 2$ را در نظرمی‌گیریم. دراین صورت $(3)(1) \leqslant (3)(2)$ نیز بر قرار است.

اثبات:

از آنجا که $a \leqslant b$، عدد نامنفی dئی چنان موجود است که $a+d=b$. این تساوی مستلزم اینست که $c(a+d)=cb$ یا $ca+cd=cb$. از آنجا که هم c هم d نامنفی‌اند، cd نیز هست. بنابراین، $ca \leqslant cb$.

خاصیت ۸ اگر $a \leqslant b$ و $c \leqslant 0$، در این صورت $ca \geqslant cb$.

برای توضیح این خاصیت، $a=1$، $b=2$، $c=-1$ را در نظرمی‌گیریم. در این صورت $1 \leqslant 2$ اما $(-1)(1) \geqslant (-1)(2)$.

اثبات:

از آنجا که $a \leqslant b$، عدد $d \geqslant 0$ی چنان موجود است که $a+d=b$. در این صورت $c(a+d)=cb$ یا $ca+cd=cb$. این‌بار $c \leqslant 0$ و $d \geqslant 0$، یا $cd \leqslant 0$است. بنابراین، $-cd \geqslant 0$. اما $ca+cd=cb$ مستلزم‌اینست که $ca=cb+(-cd)$ یامعادلاً $ca \geqslant cb$.

خاصیت ۹ اگر $a \leqslant b$ و $c \geqslant 0$، در این صورت $a \leqslant (b+c)$.

اثبات:

$a \leqslant b$ مستلزم اینست که عدد $d \geqslant 0$ی چنان موجود است که $a+d=b$ یا $a+(d+c)=b+c$. از آنجا که $d \geqslant 0$ و $c \geqslant 0$، $(d+c) \geqslant 0$، واین، مستلزم این است که $a \leqslant (b+c)$.

خاصیت ۱۰ اگر $a \leqslant b$، در این صورت $(a-c) \leqslant (b-c)$.

اثبات:

$a \leqslant b$ مستلزم اینست‌که عدد $d \geqslant 0$ی چنان موجوداست‌که $a+d=b$. بنابراین، $(a-c)+d=(b-c)$، و این، مستلزم اینست‌که $(a-c) \leqslant (b-c)$.

نتایج فوق را میتوان در بسیاری موارد به کار برد. به عنوان مثال، از آنجا که نشان داده‌ایم که $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leqslant 2$، معادلاً داریم‌که $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leqslant 1$. یا فرض میکنیم می‌خواهیم

$(2x+1) \leqslant (4x+3)$ را حل کنیم، در این صورت:

$$(4x+3-2x) \leqslant (2x+1-2x) \quad \text{یا} \quad (2x+3) \leqslant 1$$

در این صورت $(3-1) \leqslant (2x+3-3)$ یا $-2 \leqslant 2x$. سرانجام با تقسیم دو طرف بر ۲ (یا با ضرب در $1/2$)، $-1 \leqslant x$ را به دست می‌آوریم.

مثال ۸.۴ اگر $a \geqslant 0$، $b \geqslant 0$، نشان دهید که $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

اثبات:

جملهٔ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ به طور واضح نامنفی است. از آنجا که:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a-2\sqrt{a}\sqrt{b}+b$$

$$a-2\sqrt{ab}+b \geqslant 0$$

یا:

$$a-2\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab} \geqslant 2\sqrt{ab}$$

را به دست می‌آوریم، که تبدیل به $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ یا $(a+b)/2 \geqslant \sqrt{ab}$ میشود.
نتیجه‌یی مشابه، به عنوان مسالهٔ ۷.۲۴ فصل قبل، بیان شده است.

لگاریتم Logarithms

در فصل۴، تابع لگاریتمی را به صورت معکوس تابع نمایی تعریف کردیم؛ یعنی، $\log_a^{a^x} = x$. با استفاده از این تعریف، چند خاصیت اساسی لگاریتم را بیان و اثبات می‌کنیم. در مورد هر یك از این خواص فرض میکنیم a، c، و d اعداد حقیقی مثبت با $a \neq 1$ و $a^x = c$ و $a^y = d$ باشند. اگر a را به صورت مبنای لگاریتم به‌کار بریم، $\log_a^{a^x} = x$ و $\log_a^{a^y} = y$ را به دست می‌آوریم.

خاصیت ۱۱ $\log_a^{cd} = \log_a^c + \log_a^d$

اثبات:

$$\log_a^c = \log_a^{a^x} = x \quad \text{و} \quad \log_a^d = \log_a^{a^y} = y$$

نیز

$$\log_a^{cd} = \log_a^{a^x a^y} = \log_a^{a^{(x+y)}} = (x+y)$$

این، خاصیت ۱۱ را محقق میکند.

خاصیت ۱۲ $\log_a^{c/d}=\log_a^c-\log_a^d$

اثبات:

$$\log_a^c-\log_a^d=x-y$$

نیز

$$\frac{c}{d}=\frac{a^x}{a^y}=a^{(x-y)}$$

بنابراین،

$$\log_a^{c/d}=\log_a\frac{a^x}{a^y}=\log_a^{a^{(x-y)}}=x-y$$

این، اثبات خاصیت ۱۲ را تکمیل میکند.

خاصیت ۱۳ $\log_a^{c^g}=g(\log_a^c)$

در این مورد g عدد حقیقی است.

اثبات:

$$\log_a^c=x$$

بنابراین،

$$\log_a^{c^g}=\log_a(a^x)^g=\log_a^{a^{xg}}=xg=g(\log_a^c)$$

این، اثبات خاصیت ۱۳ را تکمیل میکند.

خاصیت ۱۴ به ازاء $a>1$، $\log_a^c$ بزرگتر از، مساوی با، یا کمتر از صفر است وقتیکه c به‌ترتیب بزرگتر از، مساوی با، یا کوچکتر از یك باشد.

اثبات:

با توجه به علامتمان، $\log_a^c=x$، که بدین معنی است که میتوانیم x یا $\log_a^c$ را با یکدیگر تعویض کرده به کار بریم، اگر $c>1$، در این صورت $a^x>1$ و $a>1$ مستلزم اینست که $x>0$ باشد. به همین ترتیب، اگر $c=1$، دراین صورت $a^x=1$ یا $x=0$ میشود. بالاخره اگر $c<1$، در این صورت $a^x<1$ و $a>1$ مستلزم اینست که $x<0$ است. این، نتیجه‌مان را ثابت میکند.

برای توضیح حالت اخیر، $a=۲$ و $c=(۱/۲)$ را در نظر میگیریم، در این صورت $۲^x=(۱/۲)$ مستلزم اینست که $x=-۱$.

خاصیت ۱۵ $\log_a^c=(\log_a^b)(\log_b^c)$

این فورمول، فورمول تغییر یك مبنا به مبنای دیگر است.

اثبات:

فرض میکنیم $c=a^x=b^y$. در این صورت $\log_a^c=x$ و $\log_b^c=y$. بنابراین،

$$\log_a^c=\log_a^{b^y}=y(\log_a^b)$$

این رابطه با استفاده از خاصیت ۱۳ به دست آمده است. از آنجا که $y=\log_b^c$، به دست می‌آوریم:

$$\log_a^c=(\log_b^c)(\log_a^b)$$

و این، اثبات خاصیت ۱۵ را تکمیل میکند.

به عنوان مثالی از موارد استعمال لگاریتم، ربح مرکب سالانه‌یی که برای دو برابر کردن سرمایهٔ اصلی در ده سال لازم است، را به دست می‌آوریم. فورمول به دست آوردن دو دلار از یك دلاری که ده سال پیش در حساب پس‌اندازقرارداده شده عبارتست از $(۱+x)^{۱۰}=۲$. باگرفتن لگاریتم از دو طرف این رابطه حاصل میکنیم:

$$\log_a^۲=۱۰[\log_a(۱+x)] \quad \text{یا} \quad \frac{۱}{۱۰}\log_a^۲=\log_a(۱+x)$$

اگر $a=۱۰$ (لگاریتم معمولی) در نظر بگیریم و از جدول لگاریتم استفاده کنیم، به دست می‌آوریم $\log_a^۲=۰/۳۰۱۰$. بنابراین:

$$\frac{۱}{۱۰}(\log_{۱۰}^۲)=۰/۰۳۰۱۰ \quad \text{یا} \quad (۱+x)=۱/۰۷$$

یعنی، ربح مرکب ۷ درصد سالانه، بعد از ده سال سرمایهٔ شخص را دو برابر میکند.

تابع قدر مطلق Absolute Value Function

در فصل ۴ تابع قدر مطلق به صورت $|a|=\sqrt{a^۲}$ تعریف شد. اکنون با استفاده از این تعریف، چند خاصیت این‌تابع را ثابت می‌کنیم.

خاصیت ۱۶ تابع قدر مطلق در شرایط زیر صدق میکند:

(i) $|a|=a$ اگر $a \geqslant 0$،

(ii) $|a|=-a$ اگر $a<0$،

اثبات:

اگر $a \geqslant 0$، در ایـن صورت $\sqrt{a^2}=a$. این، شرط (i) را محقق میکند.
به همین ترتیب، اگر $a<0$، در این صورت $-a>0$، که مستلزم اینست که $\sqrt{a^2}=-a$. واین، اثبات را تکمیل میکند.
خاصیت ۱۶ غالباً به عنوان تعریف تابع قدر مطلق داده میشود.

خاصیت ۱۷ $a \leqslant |a|$

اثبات:

این رابطه از تعریف قدر مطلق نتیجه میشود. اگر $a \geqslant 0$، دراینصورت $a=|a|$، و تساوی بـرقرار است. اگـر $a<0$، $|a|>0$؛ مقدار مثبت همواره از مقدار منفی بزرگتر است، و نامساوی بر قرار است.

خاصیت ۱۸

(i) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$

(ii) $|a-b| \geqslant |a|-|b|$

اثبات (i):

$$\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{a^2+b^2+2ab}$$

اما از خاصیت ۱۷، $2ab \leqslant 2|a|\,|b|$. بنابراین:

$$a^2+b^2+2ab \leqslant a^2+b^2+2|a|\,|b|=(|a|+|b|)^2$$

درمسألهٔ تکلیفی ۱۰b ی اینفصل، بیان شده که، اگر $a \leqslant b$، $a \geqslant 0$ ، $b \geqslant 0$، دراین صورت $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$. با استفاده از این خاصیت به دست می‌آوریم:

$$\sqrt{(a+b)^2} \leqslant \sqrt{(|a|+|b|)^2} \quad \text{یا} \quad |a+b| \leqslant |a|+|b|$$

اثبات (ii):

اگر $|a|<|b|$، دراینصورت $|a|-|b|<0$. بنابراین، $|a-b|>|a|-|b|$

اکنون فرض میکنیم که $|b|\leqslant|a|$، در این صورت:

$$|a|-|b|=\sqrt{(|a|-|b|)^2}=\sqrt{a^2-2|a||b|+b^2}$$

از آنجا که: $-2|a||b|\leqslant 0$ ، $-2|a||b|\leqslant -2ab$

بنابراین،

$$a^2-2|a||b|+b^2\leqslant a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

یا

$$\sqrt{(|a|-|b|)^2}\leqslant\sqrt{(a-b)^2} \quad \text{یا} \quad |a|-|b|\leqslant|a-b|$$

و این، اثبات این خاصیت را تکمیل میکند.

بخش‌پذیری Divisibility

قبلاً، گه گاه از خاصیت بخش پذیری سخن گفتیم، و در فصل ۳، بخش‌پذیری را به صورت زیر تعریف کردیم:

اگر m و n اعداد صحیح باشند، در این صورت گفته میشود m بر n بخش پذیر یا قابل قسمت[1] است اگر m/n عددی صحیح باشد.

اکنون بعضی از خواص بخش‌پذیری را مورد بررسی قرار میدهیم.

خاصیت ۱۹ اگر m بر n و n بر m بخش‌پذیر باشد، در این صورت $m=\pm n$.

اثبات:

از آنجا که m بر n بخش‌پذیر است، عدد صحیح n_1 ی چنان موجود است که $(m/n)=n_1$ یا $m=nn_1$. به همین ترتیب، از آنجا که n بر m بخش‌پذیر است، عدد صحیح n_2 ئی چنان موجود است که $(n/m)=n_2$ یا $n=mn_2$. با ترکیب این دو نتیجه، $m=nn_1=mn_2n_1$ یا $n_1n_2=1$ را به دست می‌آوریم.

بنابراین، یا $n_1=n_2=1$ یا $n_1=n_2=-1$ است. میتوان ملاحظه کرد که $n_1=n_2=1$ و $n_1=n_2=-1$ به ترتیب متناظر با $m=n$ و $m=-n$ اند. گزارهٔ $m=n$ یا $m=-n$ معادل $m=\pm n$ است، و این، اثبات این خاصیت را تکمیل میکند.

خاصیت ۲۰ اگر m بر n و n بر k بخش پذیر باشد، در این صورت m بر k

1. divisible

بخش پذیر است.

اثبات :

از آنجاکه m بر n بخش پذیر است، عـدد صحیح n_1 ی چنان موجود است که $(m/n)=n_1$ یا $m=nn_1$. نیز، ازآنجا که n بر k بخش‌پذیر است، عدد صحیح n_2 ئی چنان موجود است که $(n/k)=n_2$ یا $n=kn_2$. بنابراین: $m=nn_1=kn_1n_2$ یا $(m/k)=n_1n_2$. از آنجاکه n_1 و n_2 اعـداد صحیحند، n_1n_2 نیز عددی‌صحیح است. این، اثبات خاصیت ۲۰ را تکمیل میکند.

خاصیت ۲۱ اگر m و r هردو بر n بخش‌پذیر باشند، دراین صورت $am+br$ نیز هست. در اینجا a و b اعداد صحیحند.

اثبات : از آنجا کـه m بر n بخش پذیـر است، به ازاء عـدد صحیح n_1 ی، $(m/n)=n_1$. به همین ترتیب، $(r/n)=n_2$. در این صورت $m=nn_1$ و $r=nn_2$. بنابراین،

$$am+br=ann_1+bnn_2=n(an_1+bn_2)$$

یا

$$\frac{am+br}{n}=an_1+bn_2$$

از آنجاکه a ، n_1 ، b ، n_2 اعدادصحیحند، an_1+bn_2 عددی صحیح است، واین،معادل با این است که n ، $am+br$ را عاد میکند.

مثالهایی از مورد استفادهٔ این خواص عبارتند از: ۹۹ بـر ۱۱ بخش‌پذیر است و ۹۹۹۹ بر ۹۹ بخش پذیر است. بنابراین ۹۹۹۹ بر ۱۱ بخش‌پذیر است. یا از آنجاکه هم ۱۲ هم ۳۶ بر ۶ بخش پذیرند، در این صـورت $156=(36)(3)+(12)(4)$ نیز هست.

اعدادگویا Rational Numbers

در فصل ۳، R را هنگامیکه بتواند به صورت (m/n)، کـه در آن m و n هر دو عدد صحیحند،نوشته شود عددگویا تعریف کردیم . اکنون به بررسی بعضی‌از خواصی که چنین اعدادی دارا میباشند می‌پردازیم.

خاصیت ۲۲ اگر R_1 و R_2 گویا باشند دراین صورت R_1+R_2 نیز هست.

اثبات:

از آنجا که R_1 و R_2 اعدادی گویا هستند، میتوانند به صورت $R_1=(m_1/n_1)$ و $R_2=(m_2/n_2)$، که در آنها m_1 ، m_2 ، n_1 ، و n_2 اعدادی صحیحند، نوشته شوند. بنا براین:

$$R_1+R_2=\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+n_1m_2}{n_1n_2}$$

از آنجا که $(m_1n_2+n_1m_2)$ و n_1n_2 اعداد صحیحند، R_1+R_2 عددی گویاست.

خاصیت ۲۳ اگر R_1 و R_2 گویا باشند، در این صورت R_1R_2 نیز هست.

اثبات: باز فرض میکنیم $R_1=(m_1/n_1)$ و $R_2=(m_2/n_2)$. در این صورت:

$$R_1R_2=\left(\frac{m_1}{n_1}\right)\left(\frac{m_2}{n_2}\right)=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}$$

از آنجا که m_1m_2 و n_1n_2 اعداد صحیحند، R_1R_2 عددی گویاست.

خاصیت ۲۴ اگر R_1 ، R_2 ، R_3، R_4 اعدادی گویا باشند ، در این صورت $R_1R_2+R_3R_4$ نیز هست.

اثبات:

این خاصیت به صورت نتیجهٔ خواص ۲۲ و۲۳ حاصل میشود. ابتدا ملاحظهمیکنیم که از آنجا که R_1 و R_2 گویا هستند، R_1R_2 نیز هست. به همین ترتیب از آنجا که R_3 و R_4 گویا میباشند، R_3R_4 نیزگویاست. بنابراین $(R_1R_2)+(R_3R_4)$ عددی گویا میباشد.

مثالی از مورد استفادهٔ خواص اعدادگویای فوق عبارتست از: اگر چهار کسر (۱/۲) ، (۱/۵)، (۲/۹) ، (۳/۷) را در نظر بگیریم، در این صورت می‌دانیم که (۱/۲)(۱/۵)+(۲/۹)(۳/۷) رامی‌توان به صورت کسری، یعنی(۴۱/۲۱۰) نوشت.

تفاضلات متناهی Finite Differences

به عنوان آخرین مطلب، به بررسی مورد استفادهٔ تفاضلات متناهی در استخراج معادلات مجموع فصل۶ می‌پردازیم. یعنی، با معلوم بودن مجموعی، چون $\sum_{i=1}^{n} i^2$ ، روشی رامطرح

می‌کنیم که این مجموع را حل کرده فورمول:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

را به دست آوردیم.

برای مطرح کردن چنین روشی، عاملی[1] (علامت تعیین‌کنندهٔ تبدیل یك تابع به‌تابع دیگر) به نام تفاضل متناهی را معرفی می‌کنیم.

تعریف : فرض می‌کنیم w_i تابعی از i باشد، دراین صورت عامل تفاضل متناهی Δ را به‌صورت $\Delta w_i = w_{i+1} - w_i$ تعریف می‌کنیم.

به‌عنوان مثال، اگر $w_i = 2i$ ، دراین صورت:

$$\Delta w_i = 2(i+1) - 2i = 2i + 2 - 2i = 2$$

به‌همین ترتیب، اگر $w_i = 2^i$ ، دراین صورت:

$$\Delta 2^i = 2^{i+1} - 2^i = 2^i(2-1) = 2^i$$

دراین مرحله ممکن است توضیح عددی مقدماتی‌یی مفید باشد. دراین صورت، فرض می‌کنیم میل داریم $\sum_{i=0}^{4}(2i+1)$ را محاسبه کنیم . یك راه انجام این کار ، جمع کردن اعداد مجموع است، یعنی:

$$\sum_{i=0}^{4}(2i+1) = 1+3+5+7+9 = 25$$

طریق دیگر رهبرد به حل این مجموع، تمرکز حول تابع $v_i = i^2$ است. v_i به این علت انتخاب شده‌که دارای خاصیت جالب زیر است:

$$\Delta v_i = \Delta i^2 = (i+1)^2 - i^2 = i^2 + 2i + 1 - i^2 = 2i + 1 = u_i$$

بنابراین:

$$\sum_{i=0}^{4}(2i+1) = \sum_{i=0}^{4} u_i = \sum_{i=0}^{4} \Delta v_i = \sum_{i=0}^{4}(v_{i+1} - v_i) = \sum_{i=0}^{4}((i+1)^2 - i^2)$$
$$= (1-0) + (4-1) + (9-4) + (16-9) + (25-16)$$
$$= 25 - 0 = 25$$

1. operator

درمجموع فوق، تمام جملات جز ۰ و ۲۵ حذف شده‌اند. اکنون حالت کلی حل:

$$\sum_{i=r}^{n} u_i = u_r + u_{r+1} + u_{r+2} + u_{r+3} + \cdots + u_n$$

را درنظر می‌گیریم وفرض می‌کنیم می‌توانیم تابع دیگر v_i ، دارای خاصیت $\Delta v_i = u_i$، را بیابیم. دراین صورت:

$$\sum_{i=r}^{n} u_i = \sum_{i=r}^{n} \Delta v_i = \sum_{i=r}^{n} (v_{i+1} - v_i)$$
$$= (v_{r+1} - v_r) + (v_{r+2} - v_{r+1}) + (v_{r+3} - v_{r+2}) + \cdots + (v_{n+1} - v_n)$$
$$= v_{n+1} - v_r$$

یعنی تمام جملات v_i جز v_{n+1} و v_r حذف می‌شوند.

اکنون روش تفاضل متناهی درحل مجموعات اعداد را خلاصه می‌کنیم ، بـه این ترتیب‌که اگرمیل داشته باشیم $\sum_{i=r}^{n} u_i$ را حل کنیم ، بایـد به جستجوی v_iئـی چنانکه $\Delta v_i = u_i$ باشد بپردازیم. چه دراین صورت:

$$\sum_{i=r}^{n} u_i = v_{n+1} - v_r$$

اکنون مورد استفادهٔ این روش را باحل چند مجموع توضیح میدهیم:

مثال ۸.۵ ساده‌کنید : $\sum_{i=0}^{n} 2^i$

دراینجا، می‌خواهیم v_iئی، چنانکه $\Delta v_i = 2^i$ باشد، بیابیم. یکی ازحدسهای‌معقول اولیه، انتخاب تابعی برای v_i به‌طوریکه مشابه u_i باشد ، است. دراین مورد $v_i = 2^i$ را امتحان می‌کنیم. دراین صورت :

$$\Delta 2^i = 2^{i+1} - 2^i = 2^i(2-1) = 2^i$$

بنابراین حدسمان مثمرثمر بوده، اکنون می‌توانیم مجموع مورد بحث را به‌صورت زیر ساده کنیم :

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = v_{n+1} - v_0 = 2^{n+1} - 2^0 = 2^{n+1} - 1$$

مثال ۸.۶ ساده کنید:

$$\sum_{i=0}^{n} x^i$$

به‌عنوان اولین حدس، Δx^i را بررسی می‌کنیم. دراین‌صورت داریم:

$$\Delta x^i = x^{i+1} - x^i = x^i(x-1)$$

که تقریباً u_i است، با این‌استثناء، که جملهٔ اضافه‌یی به‌صورت $(x-1)$ داریم. به‌همین دلیل $x^i/(x-1)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. دراین صورت:

$$\Delta \frac{x^i}{x-1} = \frac{x^{i+1}}{x-1} - \frac{x^i}{x-1} = \frac{x^i(x-1)}{x-1} = x^i$$

بنابراین:

$$v_i = \frac{x^i}{x-1}$$

و

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = v_{n+1} - v_0 = \frac{x^{n+1}}{x-1} - \frac{x^0}{x-1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

و این، همان نتیجهٔ مسألهٔ تکلیفی ۱۱ درفصل ۶ است.

مثال ۸.۷ ساده کنید:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$$

کار را با بررسی:

$$\Delta \frac{1}{i} = \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i} = \frac{i-(i+1)}{i(i+1)} = \frac{-1}{i(i+1)}$$

آغاز می‌کنیم. نتیجهٔ به‌دست‌آمده با آنچه مـی‌خواهیم بسیار نزدیك است. باید آشکار باشدکه تغییرمناسب دراین‌مورد $v_i = -1/i$ است چه دراین صورت:

$$\Delta v_i = \frac{-1}{i+1} - \frac{-1}{i} = \frac{1}{i(i+1)}$$

چون v_i را به‌دست آوردیم، می‌توانیم به‌سادگی $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ را به‌صورت:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = v_{n+1} - v_1 = \frac{-1}{n+1} - \left(-\frac{1}{1}\right) = \frac{-1}{n+1} + \frac{n+1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

بنویسیم و این، همان نتیجهٔ به‌دست آمده در فصل ۶ برای مسألهٔ تکلیفی ۱۲ است.

مسائل دیگری که قبلاً مورد بررسی قرارداد‌ایم به‌صورت $\sum_{i=1}^{n} i$ ، $\sum_{i=1}^{n} i^2$ ، $\sum_{i=1}^{n} i^3$ ، وغیره میباشند. برای ساده‌کردن چنین مجموعاتی، مفید است که تابع:

$$i^{(r)}=i(i-1)(i-2)\ldots[i-r+1]$$

را درنظر بگیریم. به‌عنوان مثال :

$$3^{(2)}=(3)(2)=6$$

$$7^{(4)}=(7)(6)(5)(4)=840$$

$$i^{(2)}=i(i-1)=i^2-i$$

$$i^{(4)}=i(i-1)(i-2)(i-3)=i^4-6i^3+11i^2-6i$$

اکنون کار را با بررسی $\Delta(i^{(r)}/r)$ ، که در آن r ثابت است، آغاز می‌کنیم:

$$\Delta\ \frac{i^{(r)}}{r}=\frac{(i+1)^{(r)}}{r}-\frac{i^{(r)}}{r}$$

$$=\frac{1}{r}[(i+1)(i)(i-1)(i-2)\ldots(i-r+2)-(i)(i-1)(i-2)\ldots(i-r+1)]$$

$$=\left[\frac{(i)(i-1)(i-2)\ldots(i-r+2)}{r}\right][(i+1)-(i-r+1)]$$

$$=\left[\frac{i^{(r-1)}}{r}\right][i+1-i+r-1]=i^{(r-1)}$$

با ساده‌کردن، نشان داده‌ایم که:

$$\Delta\frac{i^{(r)}}{r}=i^{(r-1)} \tag{8.1}$$

اکنون چند مثال از این نتیجه به‌دست می‌دهیم.

مثال ۸.۸ ساده‌کنید : $\sum_{i=1}^{n} i$

درمعادلهٔ (۸.۱)، فرض می‌کنیم $r=2$ باشد. دراین‌صورت $i=i^{(1)}=\Delta(i^{(2)}/2)$

لذا

$$v_i = \frac{i^{(۲)}}{۲} = \frac{i(i-۱)}{۲}$$

بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{n} v_i = v_{n+۱} - v_۱ = \frac{(n+۱)n}{۲} - \frac{(۱)(۰)}{۲} = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

و این، همان نتیجهٔ قبلاً به‌دست‌آمده است.

اکنون ، فرض می‌کنیم می‌خواهیم $\sum_{i=۱}^{n} i^۲$ را به‌دست‌آوریم. دراین صورت، $r=۳$ را درنظر می‌گیریم. واین، منجر می‌شود به:

$$\Delta\left(\frac{i^{(۳)}}{۳}\right) = i^{(۲)} = i(i-۱) = i^۲ - i$$

ملاحظه مـی‌کنیم کـه $\Delta(i^{(۳)}/۳) = i^۲ - i$ و $\Delta(i^{(۲)}/۲) = i$ است. بنابراین ، فرض می‌کنیم:

$$v_i = \frac{i^{(۳)}}{۳} + \frac{i^{(۲)}}{۲}$$

دراین صورت :

$$\Delta\left(\frac{i^{(۳)}}{۳} + \frac{i^{(۱)}}{۲}\right) = \left(\frac{(i+۱)(i)(i-۱)}{۳} + \frac{(i+۱)(i)}{۲}\right)$$

$$-\left(\frac{(i)(i-۱)(i-۲)}{۳} + \frac{(i)(i-۱)}{۲}\right)$$

$$= \left(\frac{(i+۱)(i)(i-۱)}{۳} - \frac{(i)(i-۱)(i-۲)}{۳}\right)$$

$$+\left(\frac{(i+۱)(i)}{۲} - \frac{(i)(i-۱)}{۲}\right)$$

$$= \Delta\frac{i^{(۳)}}{۳} + \Delta\frac{i^{(۲)}}{۲} = i^{(۲)} + i^{(۱)} = i(i-۱) + i = i^۲$$

بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{n} i^{2}=v_{n+1}-v_{1}=\frac{(n+1)^{(3)}}{3}+\frac{(n+1)^{(2)}}{2}-\frac{1^{(3)}}{3}-\frac{1^{(2)}}{2}$$

$$=\frac{(n+1)(n)(n-1)}{3}+\frac{(n+1)n}{2}$$

$$-\frac{(1)(0)(-1)}{3}-\frac{(1)(0)}{2}$$

$$=\frac{(2)(n+1)(n)(n-1)}{6}+\frac{3(n)(n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)}{6}[2(n-1)+3]=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

بازهم، همان نتیجه‌یی است که قبلاً به‌دست آمده است.

شخص، اکنون باید امتیازات کوشش در اثبات نتایجی که به‌جای مربوط بودن به حالت خاص با حالت کلی در ارتباطند را ملاحظه کرده باشد. به‌عنوان مثال، هنگامیکه مجموعاتی به‌صورت $\sum_{i=1}^{n} u_i$ را بررسی می‌کردیم (درفصول ۶،۷)، مجبور بودیم که هر یك ازاین مجموعات را به‌طورجداگانه مورد بررسی قراردهیم. با استفاده از روشهای قبل نمی‌توانستیم چند مجموع از مجموعات فصل ۶ را، درصورتی که پاسخ‌های آنهارا به‌دست نیاورده بودیم، به‌آسانی ساده‌کنیم. ازطرف دیگر، هنگامیکه به‌بررسی اصول کلی این چنین مجموعاتی بپردازیم، ملاحظه می‌کنیم که تفاضلات متناهی نقشی کلیدی در حلشان ایفا می‌کنند. با استفاده ازتفاضلات متناهی، شخص برای ساده‌کردن یك مجموع، تنها به‌پیداکردن v_i مناسب نیاز دارد. تئوری تفاضلات متناهی، حل چنین مجموعاتی را به دنباله‌یی از اعمال جبری تبدیل می‌کند.

تکالیف و مسائل فصل ۸

۱. نامعادلات زیررا برای x حل کنید:

$(a)\quad 3x-2\leqslant 4x+7$

$(b)\quad 6x-5\leqslant 2x+3$

(c) $\frac{۱}{۳x+۱} \leqslant \frac{۲}{۴x-۱}$

۲. نشان دهید که خواص ۶ تا ۱۰ درصورتیکه به‌جای علامت $\leqslant$ علامت کمتر از ($<$) قرار دهیم برقرارند.

۳. ثابت کنید اگر $a \leqslant b$ و $b \leqslant a$ ، دراین صورت $a=b$.

۴. اگر $a_۱ \leqslant b_۱$، $a_۲ \leqslant b_۲$ ، . . . ، $a_n \leqslant b_n$ و $a_۱$ ، $a_۲$، ...، a_n هریك نامنفی باشند، دراین صورت: $(a_۱)(a_۲) \cdots (a_n) \leqslant (b_۱)(b_۲) \cdots (b_n)$

راهنمایی: از استقراء استفاده کنید.

۵. از نتیجهٔ فوق استفاده کرده نشان دهید اگر $a \leqslant b$ ، دراین صورت $a^۲ \leqslant b^۲$.

۶. نشان دهید اگر $a>۰$ ، $b>۰$ ، و $a \leqslant b$، دراین صورت $۱/a \geqslant ۱/b$.

۷. نشان دهید اگر $a>۰$ ، $b>۰$ ، $c>۰$ ، $a<b$ ، و $b<۱/c$ ، در این صورت $c<۱/a$.

۸. نشان دهید به‌ازاء $a>۰$ ، $b>۰$ ، $۲ : (۱/a+۱/b) \leqslant \sqrt{ab}$

راهنمایی: از $(۱/\sqrt{a}-۱/\sqrt{b})^۲ \geqslant ۰$ استفاده کنید.

۹. نشان دهید که $ab \leqslant (a^۲+b^۲)/۲$.

۱۰. (a) ثابت کنید اگر $b>۰$ و $a/b<۱$ ، دراین صورت $a<b$.

(b) نشان دهید اگر $a \geqslant ۰$ ، $b \geqslant ۰$ ، $a \leqslant b$ ، دراین صورت $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$.

۱۱. با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۱۰ نشان دهید که به ازاء هرعدد طبیعی n :

$$\frac{n}{n+۱} < \frac{n+۱}{n+۲}$$

۱۲. نشان دهید که خواص ۱ تا ۵ اگر به جای $\sum_{i=۱}^{n}$ علامت $\sum_{i=r}^{n}$ ، را قرار دهیم هنوز درستند.

۱۳. از:

$$\sum_{i=۱}^{n} i = \frac{n(n+۱)}{۲} ; \sum_{i=۱}^{n} i^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} ; \sum_{i=۱}^{n} i^۳ = \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$$

برای تحقیق مسائل تکلیفی ۲ ، ۳ ، ۸ ، ۱۳ ، ۱۴ از فصل ۶ استفاده کنید.

۱۴. از نتیجهٔ مسألهٔ تکلیفی ۱۱ ، فصل ۶، برای تحقیق نتیجهٔ مسألهٔ تکلیفی ۹، فصل ۶، استفاده کنید.

۱۵. فرض می‌کنیم : $x_1=0$ ، $x_2=1$ ، $x_3=-1$ ، $x_4=5$ ، $x_5=3$
موارد زیر را محاسبه کنید:

$$(a)\ \sum_{i=1}^{5}(3x_i-1)^2 \qquad (d)\ \sum_{i=1}^{5}(x_i-2)(x_i+2)$$

$$(b)\ \sum_{i=1}^{5}(2x_i-4) \qquad (e)\ \sum_{i=1}^{5}(2x_i+1)(x_i-1)$$

$$(c)\ \sum_{i=1}^{5}(x_i^2-3) \qquad (f)\ \sum_{i=1}^{5}(x_i+1)^2$$

راهنمایی : $\sum_{i=1}^{5}x_i$ ، $\sum_{i=1}^{5}x_i^2$ را بیابید.

درمورد مسائل ۱۶ تا ۲۵ ، فرض می‌کنیم:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}=X \quad \text{و} \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n}=Y$$

۱۶. نشان دهید که : $\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)=0$

۱۷. نشان دهید که : $\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)(Y_i-Y)=\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)Y_i$

۱۸. نشان دهید که : $\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n(X)^2$

۱۹. نشان دهید که : $\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)(Y_i-Y)=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-nXY$

۲۰. $Q=\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)^2$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هنگامیکه $a=X$ باشد Q کمترین است.

راهنمایی : Q را به‌صورت $\sum_{i=1}^{n}[(X_i-X)+(X-a)]^2$ نوشته بسط دهید.

۲۱. فرض می‌کنیم مرابحه، مرکب و شش ماه به شش ماه است و اصل سرمایه در ده سال دوبرابر شده است. نرخ سالانهٔ پرداخت شده چیست؟

۲۲. در معادلهٔ زیر برای به‌دست آوردن x از لگاریتم استفاده کنید:

$$y=\frac{a(۱+x)^{n}}{n(n+۱)}$$

۲۳. داده شده که $\log_a^{۳۶}=۴$ و $a>۰$. موارد زیر را حساب کنید:

(a) a

(b) $\log_a^{۱۲۹۶}$

(c) آن مقدار از d که درمعادلهٔ $\log_a^{d}=۱/۳$ صدق می‌کند را بیابید.

۲۴. می‌دانیم که $\log_۴^{۶۴}=۳$ است. از این رابطه و فورمول تغییر مبنا، برای محاسبهٔ $\log_۲^{۶۴}$ استفاده کنید.

۲۵. نشان داده شد که اگر $a>۰$ و $b>۰$ باشد، دراین صورت نامساویهای زیر راستند:

(a) $\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{۲}$

(b) $ab\leqslant\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}$

(c) $a+\frac{۱}{a}\geqslant ۲$

(d) $\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}\leqslant\sqrt{ab}$

(e) اگر $a\leqslant b$، دراین صورت $\frac{۱}{a}\geqslant\frac{۱}{b}$.

هرچند نامساویهای فوق‌درمورد اعداد مثبت، درستند، لازم‌نیست که درمورد اعداد حقیقی (ازجمله صفر و اعداد منفی) درست باشند. برای بازنویسی نامساوی‌های فوق در مورد دوعدد حقیقی a و b ازعلامت قدر مطلق استفاده کنید.

۲۶. خاصیت‌های قدرمطلق زیر را ثابت کنید:

$(a)\quad |-x|=|x|$

$(b)\quad |x||y|=|xy|$

$(c)\quad ||x|-|y||\leqslant|x-y|$

۲۷. نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$|x_۱+x_۲+\dots+x_n|\leqslant|x_۱|+|x_۲|+\dots+|x_n|$$

راهنمایی: از استقراء ریاضی استفاده کنید.

۲۸. فرض می‌کنیم a و b دوعدد حقیقی با $a\leqslant b$ باشد. نشان‌دهید که:

$$b=\frac{(a+b)+|b-a|}{۲}\quad \text{و}\quad a=\frac{(a+b)-|b-a|}{۲}$$

۲۹. نشان دهید اگر a بر b بخش پذیرباشد، دراین صورت a^k بر b^k بخش پذیراست. دراین مورد k عددی طبیعی است.

۳۰. فرض میکنیم c عددی صحیح باشد. اگر a بر b بخش پذیرباشد، دراین صورت ca بر cb بخش پذیراست.

۳۱. به ازاء هرعدد طبیعی k و عددگویای R ، R^k یك عدد گویاست.

۳۲. نشان دهید که:

$$\frac{\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۵}+\frac{۱}{۷}}{\frac{۳}{۱۱}+\frac{۲}{۹}}$$

یك عددگویاست.

۳۳. اگر a و b ثابت‌باشند، نشان‌دهید که: $\Delta(aw_i+b)=a(\Delta w_i)$

۳۴. با استفاده از تفاضلات متناهی، هریك از مجموعات زیررا حل‌کنید:

$(a)\quad \sum_{i=۱}^{n} i(i+۱)$

$(b)\quad \sum_{i=۱}^{n} i(i+۱)(i+۲)$

$(c)\quad \sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{(a+i)(a+i-۱)}\ ،\ a>۰$

(d) $\sum_{i=1}^{n} i^3$

(e) $\sum_{i=1}^{n} (-1)^i$

(f) $\sum_{i=1}^{n} i2^i$

(g) $\sum_{i=1}^{n} i2^{-i}$

۳۵. در فصل ۴ ، اعدادی به‌صورت:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}=u_n$$

یا $u_1=1$ ، $u_2=1$ ، $u_3=2$ ، $u_4=3$ ، $u_5=5$ ، وغیره را مورد بررسی قرار دادیم. این اعداد به اعداد فیبوناجی[1] موسومند. درمورد این اعداد نشان دهیدکه:

(a) $\Delta u_{i+1}=u_i$

(b) از نتیجهٔ فوق، در اثبات معادلهٔ زیر استفاده کنید:

$$\sum_{i=1}^{n} u_i=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}-1$$

۳۶. $w_i=\frac{-1}{i(i+1)(i+2)\cdots(i+r)}$ را درنظر می گیریم.

(a) پیداکنید Δw_i را.

(b) از نتیجهٔ فوق برای به‌دست‌آوردن:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}$$

استفاده کنید.

(c) نتیجهٔ (b) تان را با استقراء ثابت‌کنید.

---

1. Fibonacci numbers

۳۷. فرض می‌کنیم تابع f دارای خواص زیر باشد:

(i) به ازاء هرعدد حقیقی a ، $f(a)$ یك عدد حقیقی باشد.

(ii) $f((a)(b))=f(a)f(b)$

(iii) $f(-۱)=-۱$

خواص زیررا درمورد این تابع ثابت‌کنید :

(a) $f(۱)=۱$

(b) $f(۰)=۰$

(c) $f(-a)=-f(a)$

(d) اگر $a\neq ۰$ ، دراین صورت $f(a)\neq ۰$.

(e) $f\left(\frac{۱}{a}\right)=\frac{۱}{f(a)}$

(f) $f\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{f(a)}{f(b)}$

(g) به ازاء هرعدد طبیعی n:

$$f(a^n)=[f(a)]^n$$

Chapter 9　فصل ۹

اثبات غیرمستقیم

Indirect Proof

درفصول قبل با روشهای اثباتی سروکار داشتیم که، به‌طور شهودی، به‌نظر میرسیدند که بسیار با معنی‌اند زیرا درآنها، کار را باگزاره‌های راست آغاز می‌کردیم وبعد اعمال درستی به‌کارمی‌بردیم تا سرانجام بـه‌نتیجهٔ مطلوب می‌رسیدیم. اما در روش غیر مستقیم اثبات، طریق مخالف این روش را انجام می‌دهیم، به‌این ترتیب که کار را با قضیه‌یی نادرست آغـاز می‌کنیم و عملیات درستی انجام مـی‌دهیم تا سرانجام به گزارهٔ محالی[1] برسیم. درابتدای امرممکن است چنین روشی به‌کلی غیر معقول به‌نظربرسد، اما آشنایی بیشتر، دانشجو رامتقاعد خواهدکردکه تکنیك مورد بحث منطقی و درخیلی حالات، بسیار باکفایت نیز هست.

روش غیرمستقیم اثبات دربحث، دارای صورت یکسانی[2] موسوم به «برهان‌خلف[3]» به این ترتیب است که بحث‌کننده، نقطهٔ نظر طرف مقابل بحث را می‌پذیرد و بعد به‌طور منطقی استدلال او را تعقیب می‌کند تا به‌نتیجهٔ مهملی برسد. به‌عنوان مثال، فرض‌می‌کنیم

---

1. absurd　　2. counterpart
3. reductio ad absurdum

مهمان شامتان ادعاکندکه عمل تیراندازی به طرف هرکس که میل داشته باشیم، عملی درست است. دراین‌صورت، ممکن است بحث مستقیم‌علیه این فرض، شامل‌مباحث‌اخلاقی، قوانین موسی[1] و مواردی مشابه آن شود. ازطرف دیگر، ممکن است بحث را با این فرض‌که رفیقتان درست می‌گوید آغاز کنید، و دراین صورت او دراین مورد توافق خواهد داشت‌که، ازآنجاکه دلیلی برای وجود داشتن قوانین باز دارندهٔ مردم از انجام اعمال معقول، موجود نیست، داشتن قوانینی علت جنایت لزومی ندارد، وبه مجرد اینکه هردوشما برمشروعیت تیراندازی به هرکس‌که شخص میل داشته باشد توافق حاصل کردید، کاملاً معقول است‌که هفت‌تیری بگیرید و مهمانتان را تهدید به تیراندازی‌کنید. دراین صورت اگرچنین استدلالی او را متقاعد نکند، مشکل می‌توان تصور کرد‌که کدام استدلال می‌کند.

درستی روش غیرمستقیم اثبات، توسط بحث واقع در فصل ۲ مشخص شده است. دراینجا برای توضیح این روش اثبات، از علائم منطقی استفاده و فرض میکنیم گزارهٔ P ئی،که فکر می‌کنیم‌که راست است، را داشته باشیم. ازآنجاکه P گزاره است، یا خودش راست می‌باشد یا $\sim P$ راست است. فرض می‌کنیم $\sim p$ گزارهٔ راست باشد. در این صورت اگر بتوانیم نشان دهیم‌که $\sim P$ مستلزم A است، و A گزارهٔ محالی، چون $2=1$، است، این‌کار بدین معنی است که $\sim P$ نمی‌تواند راست باشد، یا معادل با آن، $P \Longleftrightarrow \sim(\sim P)$ بایدراست باشد. این‌طریق،به‌طور اساسی‌خلاصهٔ روش غیرمستقیم اثبات را به‌دست می‌دهد.

اساس این روش اثبات، آغازکردن با نقیض گزاره‌یی‌که شخص می‌خواهد اثبات کند و بعد، نشان دادن اینکه این فرض به محال منجر می‌شود است. دراین مرحله شخص می‌تواند بگویدکه تناقضی رخ داده است. اما از آنجاکه در انجام این اثبات، تنها، روشهای درست به‌کار رفته، باید تنها منبع ممکن این تناقض، فرض راستی گزارهٔابتدائی ($\sim P$) باشد. به‌همین دلیل است‌که روش غیر مستقیم اثبات غالباً به اثبات با استفاده از تناقض موسوم است.

دربسیاری حالات ازهردوروش‌مستقیم وغیرمستقیم‌اثبات می‌توان استفاده‌کرد، و در اغلب‌چنین وضعیاتی‌روش‌مستقیم‌اثبات‌هم‌ساده‌تر هم دردسترس‌تر است وبنابراین، براثبات با استفاده از تناقض مرجح است. بااینهمه، در بعضی حالات‌استفاده‌ازروش‌غیرمستقیم، بسیارآسان‌تر است، و وجودچنین وضعیاتی بررسی این روش اثبات را ضروری می‌کند. دراین مرحله، روش غیرمستقیم اثبات را با دومثال شفاهی، که به خواننده کمك

1. Mosaic Law

می‌کنند که منطق مثالهای عددی‌یی که بعداً می‌آیند را درك کنند، توضیح می‌دهیم. مثالهای عددی مذکور، به‌توضیح حالاتی که درآنهامی‌توان روش مستقیم اثبات را به‌طورساده‌تری به‌کاربرد می‌پردازند. نیز وضعیاتی که به کار بردن روش مستقیم در مورد آنها اگـر ناممکن نباشد مشکل‌است، را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

درمثال شفاهی اول پدری سعی می‌کندکه برای پسرش اثبات‌کند که زمین مسطح نیست.

پسر: آیا بعضی از این هواپیماهای دور پرواز از زمین سقوط می‌کنند؟

پدر: مگرفرض کرده‌یی که زمین مسطح است؟

پسر: مگر نیست؟

پدر: نه، در زمانهای خیلی پیش، مردم معتقد بودندکه زمین مسطح‌است، امامردی جسور، به‌نام کریستف کلمب[1] این فرض را باطل کرد.

پسر: چگونه؟

پدر: بدون اینکه اززمین سقوط‌کند باکشتی از اسپانیا به‌آمریکا رفت وبرگشت. (پدر هنگام صحبت به نقشه اشاره می‌کند.)

پسر: اما این تنها نشان می‌دهدکه زمین از آنچه مردم تصور می‌کـردند وسیع‌تر است.

پدر: خوب مچم را گرفتی. خوب، بعد ازکریستف، سفردریائی‌یی تحت‌نظرماژلان[2] که دورزمین مسافرت‌کرد وبه اسپانیا بازگشت انجام‌گرفت. اگرزمین مسطح بود چنین کار مهمی غیرممکن بود.

پسر: با این حساب فکر می‌کنم‌که زمین مسطح نیست.

به داستان توضیح دهندهٔ دیگری، می‌پردازیم . یك مأمور معروف ادارهٔ جاسوسی بریتانیا، شبی به‌آهستگی درمه لندن قدم می‌زد. ازپشت سرش صدای دومرد را شنیدکـه به‌تندی با یکدیگربحث می‌کردند . از آنـدو صدای دشمن سرسختش دکترکوئینك[3] را به‌آسانی تشخیص داد، و درست هنگامیکه تشخیص دادکه صدای دیگر متعلق بـه مأمور پلیس بین‌المللی[4] جدیدی است‌که همان روز، پیش ازظهر ملاقات‌کرده، در اثر ضربه‌یی برپشت سرش، به زمین افتاد. هنگام به‌هوش آمدن در مطب دکتر، اولین فکرش این‌بود که توسط دشمن قدیمی‌اش مورد حمله قرارگرفته است، گرچه هریك از دومـرد معاقب

1. columbus
2. Magellan
3. Dr. Quink
4 interpol agent

او می‌توانستند ضارب او باشند. بلندی قهرمان ما ۵ فوت و ۱۰ اینچ است و هنگامیکه به برآمدگی فرق سرش دست گذاشت، دریافت که ممکن نیست‌که دکتر کوئینك، که تقریباً ۵ فوت و دواینچ قد دارد، توانسته باشد ازآن زاویه او را مضروب‌کند. بنابراین، کسی‌که او را از ناحیهٔ سرمضروب‌کرده مأمور مزبور بوده است.

مثال ۹.۱ عدد حقیقی‌یی بیابید که درمعادلهٔ زیرصدق‌کند:

$$x^{12}-4x^{9}+6x^{6}-4x^{3}+3=0$$

با معلوم بودن چنین معادله‌یی، ممکن است دانشجو، حداکثر کوشش خود را برای به طریق مستقیم حل‌کردن آن به‌کاربرد، وممکن است یك روش و بعد روش دیگر را تا به‌دست‌آوردن جواب امتحان‌کند. بالاخره‌ممکن‌است پس ازصرف کوشش‌قابل‌ملاحظه‌یی، احساس عجزکند و درتوانایی خود برای حل این معادله دچار تردید شود. هرچندممکن است‌که اشکال‌کار، درعدم توانایی دانشجو درحل مسأله نباشد، وبه فرضش،که جوابی موجود است، مربوط باشد. دراین صورت بگذارید فرض‌کنیم‌که جواب، a ، را داریم‌و ملاحظه‌کنیم‌که این جواب ما را به‌کجا می‌کشاند. از آنجاکه a جواب است باید $a^{12}-4a^{9}+6a^{6}-4a^{3}+3=0$ را برقرارکند. درتلاش برای تجزیهٔ این معادله، ممکن است توجه‌کنیم که : $a^{12}-4a^{9}+6a^{6}-4a^{3}+3$ به طریقی شبیه $(a^{3}-1)^{4}$ به نظرمی‌رسد. در واقع :

$$(a^{3}-1)^{4}=a^{12}-4a^{9}+6a^{6}-4a^{3}+1$$

بنابراین $(a^{3}-1)^{4}+2=0$ یا $(a^{3}-1)^{4}=-2$ را خواهیم داشت.

اگر $y=a^{3}-1$ باشد دراین صورت: $y^{4}=-2$ را داریم؛ اما به‌ازاء هرمقدار حقیقی y، $y^{4}\geqslant 0$ است، و بنابراین هرگز نمی‌تواند مساوی -2 یا هرعدد منفی دیگر باشد، واین بافرضمان‌که a جواب معادله است تناقض دارد. بنابراین، عدد حقیقی‌ئی که دراین معادله صدق‌کند موجود نیست.

مثال ۹.۲ نشان دهید که به ازاء هرعدد طبیعی n ، $\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}$

این مسأله درفصل ۷ به‌عنوان تمرین ۶ بیان شد. دراین‌جا نامساوی را بااستفاده‌از تناقض اثبات می‌کنیم. اما پیش از انجام این‌کار، ممکن است یادآوری نکته‌یی،که در فصل ۲ مورد بحث قرارگرفت، به‌دانشجو کمك‌کند، و آن نکته اینست که اگر P به‌جای

این گزاره‌که، نامساوی به ازاء جمیع اعداد طبیعی‌راست است، قرارداشته باشد، دراین صورت $\sim P$ براینست‌که نامساوی حداقل به ازاء یك عدد طبیعی، n_0 ، راست نیست. به‌این ترتیب، برای‌تکذیب P ، باید تنها، یك عدد طبیعی‌که به ازاء آن نامساوی‌راست نیست بیابیم.

اکنون به اثبات می‌پردازیم. ابتدا فرض می‌کنیم‌که نامساوی راست نیست. این بدین معنی است‌که حداقل یك عدد طبیعی، مثلاً n_0 ، چنان موجود است‌که نامساوی‌فوق، به ازاء عدد صحیح n_0 برقرارنیست. یعنی‌اینکه:

$$\frac{n_0}{n_0+1} \geqslant \frac{n_0+1}{n_0+2}$$

یا معادلاً ،

$$\frac{n_0}{n_0+1} - \frac{n_0+1}{n_0+2} \geqslant 0$$

یا

$$\frac{n_0(n_0+2)}{(n_0+1)(n_0+2)} - \frac{(n_0+1)(n_0+1)}{(n_0+1)(n_0+2)} \geqslant 0$$

یا

$$\frac{n_0^2+2n_0-(n_0^2+2n_0+1)}{(n_0+1)(n_0+2)} \geqslant 0$$

یا

$$n_0^2+2n_0-n_0^2-2n_0-1 \geqslant 0 \quad \text{یا} \quad -1 \geqslant 0$$

که واضحاً یك تناقض است. دراین صورت از آنجاکه هریك از مراحل جبری درست بوده، تنها توضیح این تناقض، این‌گزاره‌که، عدد طبیعی n_0‌ای موجود است‌که به ازاء آن نامساوی اصلی دروغ است، می‌باشد. طریق دیگر بیان این مطلب، اینست‌که به ازاء جمیع اعداد طبیعی n، نامساوی مزبور برقرار است.

باید توجه شده باشدکه این اثبات، به‌گونه‌یی مفصل‌تر از اثبات مستقیم داده شده درفصل ۷ می‌باشد.

مثال ۹.۳ نشان دهیدکه $\sqrt{2}$ اصم است.

دراین‌جا، حالتی داریم که درآن، حتی سؤال وجود اثبات مستقیم، بالاتر از سطح این کتاب‌است، اما اثبات غیرمستقیم کلاسیك ساده‌یی، نتیجه را به سادگی اثبات می‌کند.

اثبات:

گزارهٔ مقابل، یعنی اینکه $\sqrt{۲}$ عددی گویاست، را فرض مــی‌کنیم. از آنجا کــه اکنون فرض شده‌که $\sqrt{۲}$ عددی‌گویاست، می‌توان آن را به‌صورت $n_۱/n_۲$، کــه درآن $n_۱$ و $n_۲$ اعدادی صحیحند، نوشت. ازاین‌گــذشته فرض می‌کنیم که تمام مقسوم علیه‌های مشترك $n_۱$ و $n_۲$ را حذف‌کرده‌ایم؛ به‌عنوان مثال، اگر $n_۱{}^*=۳۰$ و $n_۲{}^*=۵۰$، دراین صورت $n_۱/n_۲=۳۰/۵۰=۳/۵$، دراین حالت، $n_۱=۳$ و $n_۲=۵$ را انتخاب‌میکنیم. اکنون به اثبا‌تمان ادامه می‌دهیم. با انتخاب به این طریق $n_۱$ و $n_۲$، $\sqrt{۲}=n_۱/n_۲$ یا $(\sqrt{۲})^۲=(n_۱/n_۲)^۲$ یا $۲=(n_۱)^۲/(n_۲)^۲$ یا $۲n_۲^۲=n_۱^۲$ را خواهیم داشت. بنابراین، $n_۱^۲$ عددی زوج است، زیرا بر ۲ قابل قسمت می‌باشد. این، مستلزم اینست‌که $n_۱$ عددی زوج است (مسألهٔ تکلیفی۱ این فصل را ملاحظه‌کنید). بنابراین $n_۱$ را می‌توان‌به‌صورت $۲n_۳$، که درآن $n_۳$ عددی صحیح است، نوشت. بنابراین، داریم:

$$\sqrt{۲}=\frac{n_۱}{n_۲}=\frac{۲n_۳}{n_۲}$$

یا

$$(\sqrt{۲})^۲=\left(\frac{۲n_۳}{n_۲}\right)^۲$$

یا

$$۲=\frac{۴n_۳^۲}{n_۲^۲}$$

یا

$$۲n_۲^۲=۴n_۳^۲$$

یا

$$n_۲^۲=۲n_۳^۲$$

به این ترتیب، $n_۲^۲$ عددی زوج است؛ و این، مستلزم اینست که $n_۲$ نیزعددی زوج است. بنابراین، $n_۲$ می‌تواند به‌صورت $۲n_۴$ نوشته شود، و:

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{2n_3}{2n_4}=\frac{n_3}{n_4}$$

اما دراین مرحله، باید به خاطر بیاوریم که فرض کرده بودیم که n_1 و n_2 مقسوم علیه مشترك ندارند، و علیرغم این فرض، مـی‌توانیم نشان دهیم که n_1 و n_2 هردو بر ۲ بخش پذیرند. این تناقض مستلزم اینست که $\sqrt{2}$ نمی‌تواند عددی گویا باشد. بنابراین $\sqrt{2}$ باید عددی اصم باشد.

مثال ۹.۴ اگـر R عدد گویـای ناصفری و X عددی اصم باشد، دراین صورت RX عددی اصم است.

این گزاره، به سادگی با استفاده از روش غیرمستقیم ثابت می‌شود. بـرای انجام این کار، ابتدا فرض می‌کنیم که RX عددی گویا، مثلاً $RX=R_1$ است. دراین صورت $X=R_1/R$ ، یا X گویاست. اما فرض کرده بودیم که X گویاست. این مطلب، این فرض که RX گویاست را نقض می‌کند، بنابراین RX باید عددی اصم باشد.

مثال ۹.۵ نشان دهید که $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ عددی اصم است.

این گزاره را با دو روش کاملاً متفاوت اثبات مـی‌کنیم؛ هردو روش، اثباتهای با استفاده از تناقض‌اند.

اثبات (روش ۱) :

فرض می‌کنیم که گزاره، راست نباشد. دراین صورت $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ باید عددی گویا، مثلاً n_1/n_2 ،که درآن n_1 و n_2 اعدادی صحیحند، باشد. بنابراین:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{n_1}{n_2}$$

یا

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=\frac{(n_1)^2}{(n_2)^2}$$

که به:

$$2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3=\frac{(n_1)^2}{(n_2)^2}$$

یا
$$۲\sqrt{۶} = \frac{(n_۱)^۲}{(n_۲)^۲} - ۵ = \frac{n_۱^۲ - ۵n_۲^۲}{n_۲^۲}$$

وسرانجام:
$$\sqrt{۶} = \frac{n_۱^۲ - ۵n_۲^۲}{۲n_۲^۲}$$

تبدیل می‌شود. ازآنجاکه $(n_۱^۲ - ۵n_۲^۲)/۲n_۲^۲$ عددی گویاست، $\sqrt{۶}$ نیز باید باشد. اما مسألهٔ تکلیفی $۹b$ی این فصل مقرر می‌کندکه $\sqrt{۶}$ اصم است. این تناقض، مستلزم اینست که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ نمی‌تواند عددی گویا باشد، یا معادلاً این که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ عددی اصم است.

اثبات (روش ۲):

$\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ را در نظر می گیریم. دراین مورد، سه حالت ممکن، موجود است.

(i) $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ هردو اعدادی گویا هستند.
(ii) دقیقاً یکی از این دو، عددی گویا و دیگری اصم است.
(iii) هردو اصمند.

حالات فوق را به ترتیب مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض مـی‌کنیم حالت (i) راست باشد. در این حالت $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ هردو اعدادی گویا هستند. در این صورت $(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})+(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$ نیز باید عددی‌گویـا باشد زیرا مجموع دو عددگویا، عددی‌گویاست. اما:

$$(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})+(\sqrt{۲}-\sqrt{۳}) = ۲\sqrt{۲}$$

درمثال ۹.۴،ثابت کردیم که حاصلضرب یك عددگویای ناصفر ویك عدد اصم، اصم است. به این ترتیب $۲\sqrt{۲}$ اصم است و حالت (i) نمی‌تواند راست باشد.

فرض‌می‌کنیم‌حالت (ii)راست باشد. ازآنجاکه یکی ازاین‌اعداد، عددی‌گویاست و دیگری فرض شده‌که اصم باشد، دراین صورت بنا به مثال ۹.۴، حاصلضربشان باید اصم باشد. اما

$$(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})(\sqrt{۲}-\sqrt{۳}) = ۲-۳ = -۱$$

بنابراین حالت (ii) نمی‌تواند راست‌باشد. دراین‌صورت تنها حالت (iii) باقی میماند.

بنابراین $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ هردو اعدادی اصمند.

مثال ۹.۶ از بحث قبلی‌مان درمورد اعداد اول، باید آشکار باشدکه تعداد بسیاری از این اعداد موجوداند. سؤال اینکه: «تعداد این اعداد چقدر است؟» توسط اثبات نسبةً سادهٔ زیر، که هزاران سال است که انجام گرفته، پاسخ داده شده است. در واقع، این اثبات دریکی از کتب اقلیدس[۱]، که در آن نشان‌داده شده‌است که بی‌نهایت عدد اول موجود است، مضبوط می‌باشد.

اثبات:

فرض می‌کنیم که گزارهٔ فوق دروغ است. یعنی، فرض می‌کنیم که به تعدادی متناهی عدد اول موجود است. اگر تنها تعدادی متناهی عدد اول موجود باشد، از لحاظ تئوری می‌توانیم آنها را فهرست کنیم، مثلاً $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ که درآن $p_1=2$ ، $p_2=3$ ، $p_3=5$ ، $p_4=7$ ، $p_5=11$ ، $p_6=13$ وغیره است.

دراینجا p_n بزرگترین عدد اول است، و این عدد، از آنجاکه تنها تعدادی متناهی عدد اول موجود است، باید وجود داشته باشد.

اکنون عدد $N=p_1p_2p_3\cdots p_n+1$ را در نظر می‌گیریم. این عدد، عدد صحیحی است که واضحاً از p_n بزرگتراست. بنابراین، بنابه این فرض که p_n بزرگترین عدد اول است، N نمی‌تواند عدد اول باشد. اما اگر N عدد اول نیست پس بایدحداقل بریکی از اعداد اول مذکور، مثلاً P_i، قابل قسمت باشد. در این صورت N/P_i باید عددی صحیح باشد. اما:

$$\frac{N}{p_i}=\frac{p_1p_2\cdots p_i\cdots p_n}{p_i}+\frac{1}{p_i}$$

$$=p_1p_2p_3\cdots p_{i-1}\,p_{i+1}\cdots p_n+\frac{1}{p_i}$$

می‌توان ملاحظه کرد که $p_1p_2p_3\cdots p_{i-1}\,p_{i+1}\cdots p_n$ عددی صحیح است درحالیکه $1/p_i$ کسری است که کمتر از ۱ می‌باشد. به این دلیل N/p_i عددی صحیح نیست. و این، مستلزم اینست که اگر p_n بزرگترین عدد اول باشد، دراین صورت، N نیز عددی

۱. اعتقاد براین است که اقلیدس طی سالهای ۳۳۰ تا ۲۷۵ قبل از میلاد زندگی می‌کرده است.

اول است. اما ازآنجاکه N بزرگتر از p_n است، p_n نمی‌تواند بزرگترین عدد اول باشد. این تناقض نشان می‌دهد که بزرگترین عدد اول موجود نیست، یا معادلاً به تعداد نامتناهی عدد اول وجود دارد.

مثال ۹.۷ می‌خواهیم ثابت کنیم که هیچ دوعدد فیبوناچی متوالی‌ئی نمی‌توانندبه‌هیچ عدد طبیعی‌یی جز ۱ بخش پذیرباشند.

به خاطربیاوریدکه دنبالهٔ اعداد فیبوناچی با شروع با دویك متوالی و به دست آوردن هرعدد بعدی از افزودن دوعدد ماقبل آن تشکیل می‌شود. به‌این ترتیب، چندعدد اول اعداد فیبوناچی عبارتند از:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ۳۴، ...

این رابطهٔ بازگشتی[1] بین اعداد فیبوناچی را می‌توان به‌صورت:

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$$

نوشت. دراین تساوی u_n، n امین عدد فیبوناچی است.

اکنون به اثبات قضیه می‌پردازیم. فرض می‌کنیم u_{n+2} و u_{n+1} بر N، که عدد طبیعی‌یی است که واحد نیست، بخش پذیراند. از آنجاکه $u_n=u_{n+2}-u_{n+1}$، u_n نیز بایدبرN بخش پذیرباشد. اما u_{n-1}، عدد فیبوناچی ماقبل u_n، برابر $u_{n+1}-u_n$ است، و ازآنجاکه u_{n+1} و u_n، همانگونه‌که در فوق گفته شد، برN بخش پذیرند u_{n-1} نیز برN بخش پذیرمی‌باشد. و شخص می‌تواند این عمل را در مورد تمام اعداد فیبوناچی تا عدد اول انجام دهد. اما ازآنجاکه $u_1=1$ وهریك ازاین اعداد بر N بخش‌پذیرند، N نیزباید ۱ باشد. این، متناقض باگزارهٔ اصلی است واثبات را تکمیل می‌کند.

مثال ۹.۸ درفصل ۶، روش استقراءریاضی، را دراثبات نتایج، مورد بحث قرارداديم. یك شرح از استقراء ریاضی درصفحهٔ ۱۵۷ بیان شد. اکنون اثبات صوری این شرح از استقراء ریاضی را به‌دست می‌دهیم. دراین مورد همان علامت نویسی گزارهٔ صفحهٔ ۱۵۷ را به‌کار خواهیم برد. برای اثبات درستی روش مورد بحث، فرض می‌کنیم که این‌شرح[2] از استقراء ریاضی، روش درست اثبات نیست. این، مستلزم این است که قضیهٔ دروغی موجود است‌که می‌تواند با استفاده از استقراء ریاضی به عنوان راست اثبات شود. از آنجاکه این قضیه، ملاك استقراء ریاضی را برقرار می‌کند، در حالت n_0 راست است؛

1. recursive relationship
2. version

و، اگر به‌ازاء $n_0 \leqslant r$ی راست باشد، دراین صورت به‌ازاء حالت $(r+1)$ نیز راست است. علیرغم این مطلب، فرض ما اینست که قضیه راست نیست. در این صورت، عدد صحیح $N_1 > n_0$ی وجود داردکه به ازاء آن قضیه راست نیست. فرض می‌کنیم N کوچکترین چنین اعدادی باشد، یعنی، قضیه به ازاء N راست نباشد، اما به ازاء n_0، n_0+1، . . . ، $N-1$ راست باشد. از آنجاکه قضیه درحالت $N-1$ راست است، بنا به استقراء به ازاء $N = (N-1)+1$ راست است، و این موضوع، این گزاره، که قضیهٔ مورد بحث به ازاء N راست نیست ، را نقض، و اثبات می‌کند که این شرح از از استقراء ریاضی، روش درستی از اثبات است.

تکالیف و مسائل فصل ۹

قضایای مسائل ۷–۱ را با استفاده از تناقض ثابت‌کنید. درمورد این مسائل فرض براینست که n و r اعدادی طبیعی‌اند.

۱. اگر n^2 زوج باشد، دراین صورت n نیزهست.

۲. اگر n^2 فرد باشد، دراین صورت n نیزهست.

۳. اگر n^3 زوج باشد، دراین صورت n نیزهست.

۴. اگر n^3 فرد باشد، دراین صورت n نیزهست.

۵. اگر $n^2 : r^2 = p$، که درآن p عدد اولی‌است، دراین‌صورت n برـ p بخش‌پذیراست.

۶. اگر n برـ r بخش پذیرباشد، دراین صورت n^2 برـ r^2 بخش پذیراست.

۷. اگر n برـ r بخش‌پذیر نباشد، دراین صورت n^p نیز برـ r بخش پذیرنیست. دراین‌جا p عددی طبیعی است.

۸. نامساویهای زیر را با استفاده ازتناقض اثبات‌کنید. دراینجا n عددی طبیعی و a و b هردو، اعداد حقیقی مثبت‌اند.

$$(a) \quad \frac{n}{n+a} \leqslant \frac{n+a}{n+2a}$$

$$(b) \quad \frac{n^2}{n^2+1} \leqslant \frac{n^2+1}{n^2+2}$$

$$(c) \quad a+b \geqslant \sqrt{a^2+b^2}$$

$$(d) \quad \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

(e) $\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}} \geqslant \sqrt{ab}$

۹. ثابت کنید هریك ازاعداد زیر اصم است. در اینجا p ، $p_۱$ ، و $p_۲$ اعداد اولند؛ r عدد طبیعی بزرگتر از ۱ است.

(a) $\sqrt{۳}$

(b) $\sqrt{۶}$

(c) $\sqrt{p}$

(d) $\sqrt[r]{۶}$

(e) $\sqrt{p_۱ p_۲}$

(f) $\sqrt{۵}-\sqrt{۶}$

(g) $\sqrt{p_۱}+\sqrt{p_۲}$

(h) $\sqrt{p_۱}-\sqrt{p_۲}$

(i) $\sqrt[r]{۲}$

(j) $\sqrt{۲}+\sqrt[۳]{۲}$

۱۰. اگر $R_۱$ و $R_۲$ اعدادی گویـا با $R_۲ \neq ۰$ بـاشند و bعددیاصم باشد، دراین صورت $R_۱+R_۲ b$ اصم است.

دراثبات قضایای مسائل ۲۰-۱۱ ازتناقض استفاده کنید.

۱۱. $x \leqslant |x|$

۱۲. $\log_a^{x^y}=(y)(\log_a^x)$

۱۳. اگر $a<b$ ، دراین صورت $a+c<b+c$

۱۴. اگر $a<b$ ، و $c>۰$ ، دراین صورت $ac<bc$

۱۵. اگر $a<b$ ، و $c<۰$ ، دراین صورت $ac>bc$

۱۶. اگر a ، b ، وcسه عددطبیعی با a عادکنندهٔ b و b عادکنندهٔ c باشند،دراین‌صورت a ، c را عاد می‌کند.

۱۷. نشان دهیدکه عدد نوشته شده به‌صورت اعشاری‌یی کـه دورهٔ تناوب نداشته باشد باید اصم باشد.

۱۸. شرح زیر از استقراء ریاضی را درنظر می‌گیریم : اگـر قضیه‌یی به‌ازاء $n_۰$ راست باشد و آنرا به‌ازاء $n_۰$ ، $n_۰+۱$ ، $n_۰+۲$ ، . . . . ، r راست فـرض‌کنیم، در این صورت نشان می‌دهیم که به‌ازاء $r+۱$ راست است. این شرایط مستلزم اینندکه

قضیه به‌ازاء جمیع اعداد صحیح $n \geqslant n_0$ راست است . درستی این شرح از استقراء ریاضی را اثبات کنید.

۱۹. این باراین شرح از استقراء ریاضی را اثبات کنید: قضیه‌یی به‌ازاء n_0 راست‌است و، اگر به‌ازاء $r \geqslant n_0$ ی راست باشد، به‌ازاء $r+1$ نیز راست است. علاوه براین، اگر قضیهٔ مزبور به‌ازاء $m \leqslant n_0$ ی راست باشد، دراین صورت به‌ازاء $m-1$ نیز راست است. این‌شرایط مستلزم‌ایننده که قضیه به‌ازاء جمیع اعداد صحیح، راست‌میباشد.

۲۰. ممکن است عقل متعارف دربرخورد با تعداد متناهی‌ئی ازاشیاء مفید باشد، اما امکان داردکه هنگام سروکارداشتن با تعداد نامتناهی‌ئی ازاشیاء دچار اشکال‌شود. به‌عنوان توضیح، وضعیت زیررا مورد بررسی قرارمی‌دهیم: سه‌ظرف به شماره‌های ۱، ۲، ۳ درنظرمی گیریم. ظروف۲و۳ خالیند، درحالیکه ظرف ۱ محتوی‌مهره‌هائی به‌شماره‌های ۱، ۲، ۳، . . . است، یعنی، به‌ازاء هرعدد طبیعی یك مهره‌موجوداست. اکنون فرض مـی‌کنیم شخصی مهره‌های شماره ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ را برداشته آنها را درظرف ۲ قراردهد ، ومهرهٔ شماره ۱ را از ظرف۲ برداشته‌در ظرف ۳ قراردهد، وپس ازاین‌که این‌کارانجام‌گـرفت مهره‌های شمارهٔ ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰ را برداشته آنها را درظرف ۲ قرار دهد، بعد مهرهٔ شماره ۲ را برداشته درظرف ۳ بگذارد، وبه‌جریان برداشتن ده مهرهٔبعدی ازظرف ۱ وقراردادن آنها درظرف۲، سپس برداشتن مهرهٔ ۳ وگذاشتن آن‌درظرف ۳ ادامه دهد. فرض می‌کنیم این جریان تا خالـی شدن ظرف ۱ ادامه داشته باشد. دراین صورت چند مهره درظرف ۲ وچند مهره درظرف ۳ قراردارد؟

فصل ۱۰ Chapter 10

وجود

Existence

غالب قضایای ریاضی‌ئی که خواننده تاکنون باآنها برخورد کرده شامل سور عمومی بوده‌اند. این قضایا، شامل عباراتی چون: «به‌ازاء جمیع اعداد طبیعی»، «تمام اعداد حقیقی بین صفر و یك»، یا «تمام اعداد اول بزرگتر از سه»اند. اثبات درستی چنین گزاره‌هائی زمانی حاصل می‌شودکه گزاره، به‌ازاء جمیع اعضائی که‌توسط سورعمومی مقید شده‌اند اثبات شود. به عنوان مثال، اگرفرض بر اینست که‌گزاره‌ئی به ازاء جمیع اعداد طبیعی راست است، در این صورت اثبات، تنها، وقتی‌کامل است‌که راستی گزاره نه تنها به ازاء چندعدد طبیعی بلکه به ازاء جمیع اعداد طبیعی نشان داده شود. حتی اگر چنین قضیه‌یی به ازاء جمیع اعداد طبیعی به استثنای عدد ۲۰ راست باشد، دروغ‌است و در نتیجه باید تغییر یابد.

اما قضایائی‌هم‌وجود دارندکه برحسب سور وجودی بیان شده‌اند. مثالهائی ازآنها عبارتند از: صفر مثبتی از چند جمله‌ئی :اصی موجود است؛ بین هر دو عدد گویای نامساوی، عددی گویا موجود است؛ یا، با توجه به این موضوع، حیات هوشمندانه در سایر سیاراتموجود است.شخص انتظار داردکه اثبات قضایایی‌که شامل‌سوروجودی‌اند از نمونه‌یی، متفاوت با اثبات قضایای شامل سور عمومی، پیروی‌کند. همانگونه که در فصل مربوط به منطق، ملاحظه شد، برای اثبات وجود باید، تنها یك حالت، که‌گزاره

به ازاء آن درست است، به دست‌آورده شود. به‌عنوان مثال، اگر شخص بخواهد وجود حیات هوشمندانه را در سایرسیارات اثبات کند، تنها لازم است‌که یك‌موجود هوشمند از سیارهٔ دیگر حاصل کند. بهاین ترتیب ممکن است اثبات‌قضایای شامل سور وجودی‌بسیار ساده به نظر برسد چه، آنها برای اینکه قضیه اثبات شود به تنها یك حالت نیاز دارند.

اما درعمل، شخص با وضعیاتی‌روبرو میشودکه در آنها به دست آوردن‌حتی یك حالت ساده بی‌نهایت مشکل است. به‌عنوان‌مثال، وجود حیات هوشمندانه درسایرسیارات را در نظر می‌گیریم. مورد این مثال گرچه ممکن است بسیار دور از دسترس به نظر برسد، مشابه بعضی از گزاره‌هایی‌که ریاضیدانان با آنها روبرو میباشند، و در مورد آنها حتی دربارهٔ وجود یك حالت‌که طبق آن گزاره راست باشد یقین ندارند، است. امکان دارد که ریاضیدانی در آغاز احساس‌کندکه اثبات مسألـه‌اش بـه اندازهٔ اثبات وجود حیات هوشمندانه درسایر سیارات مشکل است، اما، این وضع ناگـوار، معمولاً موقتی است چه اغلب قضایای ریاضی، پس از تحلیل‌های دقیق و غالباً مفصل، یا ثابت میشوند یا مردود می‌گردند.

در این جا، باید تذکر داده شودکه مثالهای به‌کار رفته در این فصل را عامداًبه خاطر سادگی‌شان انتخاب کرده‌ایم. در این مورد اثبات‌های وجودی زیبائی موجودند که کاملا پیچیده‌اند اما، به دلایل آشکار، نمیتوانند در این کتاب آورده شوند. چه در این فصل،تنها سعی ما اینست‌که به خواننده، اثبات قضایای شامل سور وجودی رامعرفی کنیم، و بنابراین، اثباتهای مشکل از این نوع را، مورد بحث قرار نخواهیم داد.

در این مورد، مثال‌وجودی زیررا درنظر میگیریم: دافی[1] الکلیست معروف‌شهر، به ادارهٔ پلیس وارد شد و با هیجان به‌کلانترگفت‌که قتلی انجام گرفته است. کلانترمؤدبانه به دافی گفت‌که منتظر بماند، زیرا موارد ضروری‌تـر تصادفات وسائـل نقلیه در دست رسیدگی است. پس ازگذشتن سه ساعت، کلانتر با بی‌میلی معاونش را همراه دافـی به صحنهٔ «جنایت» فرستاد. درمیان تعجب بسیارکلانتر، جسدی در نزدیکی خانـهٔ متروکی پیدا شد. بازرسی دقیق نشان دادکه علت مرگ کارد دسته زردی‌که در میان دنده‌هـا جای داده شده، بوده است. به این ترتیب، ثابت شد که قتلی انجام گرفته است.

مثال ۱۰.۱ نشان دهیدکه معادلهٔ: $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$ دارای جواب حقیقی‌یـی‌که در فاصلهٔ بین $x = 1$ و $x = 2$ قرار دارد، است.

ابتدا ملاحظه میکنیم‌که $x^4 - 2x^2 - 3$ یك چند جمله‌ئی است. یکی از خواص

---

1. Duffy

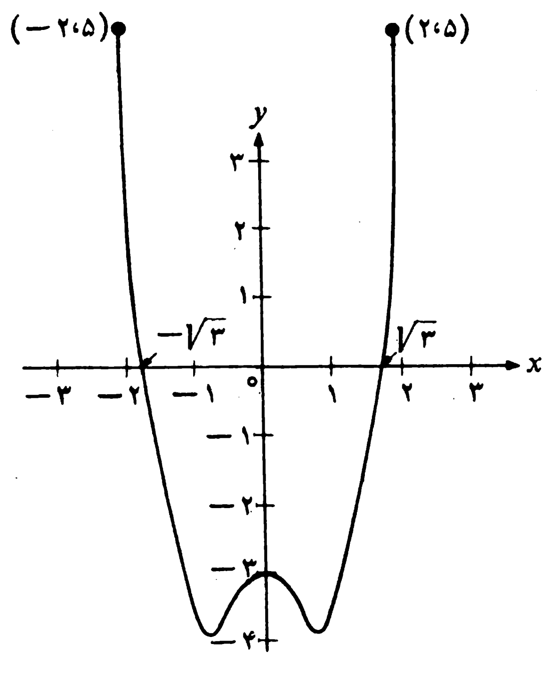
چند جمله‌ئی‌ها اینست که نمودارهاشان منحنی‌های متصلی بدون هیچگونه پارگی است. اگر چند جمله‌ئی به ازاء مقداری x، مثلاً $x = a$، منفی و به ازاء مقدار دیگر، $x = b$، مثبت باشد، دراین صورت باید درجائی بین این دو صفر باشد. زیرا، ازآنجا که منحنی چند جمله‌ئی پارگی ندارد، نمیتواند از مقدار منفی به مقدار مثبت بدون گذر از محور xها در محلی بین a و b جهش کند. در مثالمان، $x = ۱$ منجر به:

$$x^{۴} - ۲x^{۲} - ۳ = ۱ - ۲ - ۳ = -۴$$

و $x = ۲$ منجر به:

$$۲^{۴} - (۲)(۲)^{۲} - ۳ = ۵$$

میشود. بنابراین، چون نمودار $x^{۴} - ۲x^{۲} - ۳$ رسم شود، ازدو نقطهٔ $(۱، -۴)$ و $(۲،۵)$ میگذرد و از محور xها در محلی بین این دونقطه عبور میکند. این ثابت میکندکه جواب $x^{۴} - ۲x^{۲} - ۳ = ۰$ بایدجائی بین $x = ۱$ و $x = ۲$ موجود باشد. شکل ۱۰.۱ نمودار $x^{۴} - ۲x^{۲} - ۳$ است. خوشبختانه این نمودار کمك میکند که استدلال فوق به‌گونه‌یی



شکل ۱۰.۱

واضح‌تر بیان شود. هنگامیکه دانستیم که جوابی موجود است، میتوانیم برای به دست آوردن جواب دقیق معادله ازروشهای عددی یا کامپیوتراستفاده کنیم. باید توجه داشت که کاملاً مفید است که پیش از صرف مقدار زیادی وقت برای به‌دست آوردن جواب یك معادله، بدانیم که چنین جوابی موجود است یاخیر.

جالب است‌که توجه داشته باشیم که از روش فوق میتوان برای محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های معادلهٔ:

$$f(x)=x^{۴}-۲x^{۲}-۳=۰$$

استفاده کرد. ملاحظه کردیم‌که $f(۱)=-۴<۰$ و $f(۲)=۵>۰$. بنابه‌این دلیل، میدانیم‌که جواب، جائی در فاصلهٔ $۱<x<۲$ وجود دارد. به عنوان اولین حدس، میان این فاصله، یعنی $x_۱=(۱+۲)/۲=۳/۲$ را انتخاب میکنیم. در این صورت:

$$f\left(\frac{۳}{۲}\right)=\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۴}-۲\left(\frac{۳}{۲}\right)^{۲}-۳=-\frac{۳۹}{۱۶}<۰$$

از آنجا که $f(۲)>۰$ و $f(۳/۲)<۰$ ، جواب جائی بین $x=۳/۲$ و $x=۲$ است به عنوان‌دومین حدس،

$$x_۲=\left(\frac{۳}{۲}+۲\right):۲=\frac{۷}{۴}$$

را انتخاب می‌کنیم. در این صورت:

$$f\left(\frac{۷}{۴}\right)=\left(\frac{۷}{۴}\right)^{۴}-۲\left(\frac{۷}{۴}\right)^{۲}-۳=\frac{۶۵}{۲۵۶}>۰$$

ازآنجاکه $f(۳/۲)<۰$ و $f(۷/۴)>۰$ ، جواب، جایی‌بین $x=۳/۲$ و $x=۷/۴$ است. اکنون:

$$x_۳=\left(\frac{۳}{۲}+\frac{۷}{۴}\right):۲=\frac{۱۳}{۸}$$

را انتخاب میکنیم. در این صورت:

$$f\left(\frac{۱۳}{۸}\right)=\left(\frac{۱۳}{۸}\right)^{۴}-۲\left(\frac{۱۳}{۸}\right)^{۲}-۳=-\frac{۵۳۵۹}{۴۰۹۶}<۰$$

حدس بعدیمان:

$$x_{۴}=\left(\frac{۱۳}{۸}+\frac{۷}{۴}\right)\ :\ ۲=\frac{۲۷}{۱۶}$$

است. در این صورت، اگر جواب را به طور تقریب (۲۷/۱۶) در نظر گیریم،حداکثر خطا :

$$\left(\frac{۷}{۴}-\frac{۱۳}{۸}\right)\ :\ ۲=\frac{۱}{۱۶}$$

می‌شود. جواب واقعی مسألهٔ فوق: $x=\sqrt{۳}=۱/۷۳۲$ است،زیرا: $f(\sqrt{۳})=۰$ است. توجه داشته باشیدکه خطای واقعی در این مورد:

$$\sqrt{۳}-\frac{۲۷}{۱۶}=۱/۷۳۲-۱/۶۸۸=۰/۰۴۴$$

است، درحالیکه حداکثر خطای مجاز $(۱/۱۶)=۰/۰۶۳$ میباشد.

با استفاده از این روش، می‌توانیم تقریبی با هر درجه از دقت به دست آوریـم. چنین روشی به سادگی قابل وفق با عملیات کامپیوتری است.

مثال ۱۰.۲ بین هردو عدد گویای نایکسان، عدد گویای دیگری موجود است.

این مطلب‌را ابتدابامثالی توضیح میدهیم. اگردوعددگویا (۱/۳) و(۱/۲)باشند، در این صورت اعدادگویای بسیاری بین آنها موجودند. بعضی از این اعـداد عبارتند از (۳/۸) ، (۴/۱۰)، (۵/۱۲)، وغیره. محققاً واسطهٔ حسابی این دوعدد یعنی عدد : $(۵/۱۲)=۲:(۱/۳+۱/۲)$ در این طبقه می‌افتد.

در حالت‌کلی، دو عدد گویای نامساوی a و b داریم. از آنجا کـه یکی از این دو عدد بزرگتر از دیگری است، فرض میکنیم b عدد بزرگتر باشد. واسطهٔ حسابی a و b، یعنی $(a+b)/۲$ را در نظر میگیریم. از آنجا کـه $a<b$ ، $(a+b)<(b+b)$. بنابراین نتیجه میشودکه $(a+b)/۲<(b+b)/۲$ یا $(a+b)/۲<b$ است. به‌همین ترتیب، $(a+a)/۲<(a+b)/۲$ یا $a<(a+b)/۲$ است. به این تـرتیب، اثبات کرده‌ایم‌که واسطهٔ حسابی دوعدد گویا بین آنها قراردارد. قبلا نشان دادیم که‌مجموعات و حاصلضربهای اعداد گویا بـه اعداد گویا منجر میشوند. بنابه‌این دلیل $(a+b)/۲$ عددی‌گویاست. بنابراین، $(a+b)/۲$ عددی گویائی است که بین a وb قرارمیگیرد، و این، نتیجه‌را اثبات میکند.

ممکن است خواننده متوجه تفـاوت اساسی بین راه حلهـای مثال ۱۰.۱ و مثال

۱۰.۲ شده باشد. درمثال ۱۰.۱ ادعا کردیم که جوابی از معادلهٔ مورد بحث بین $x=1$ و $x=2$ موجود است، و بعد ادعامان را ثابت کردیم، و هرچند وجود جواب را اثبات کردیم، جوابی واقعی به‌دست ندادیم. درحالیکه، در مثال ۱۰.۲ نه‌تنها ادعا کردیم که بین‌دو عدد گویای دلخواه a و b عدد گویای‌دیگری وجوددارد بلکه عملاً عدد گویای $(a+b)/2$، که درشرایط صدق می‌کرد، را به دست دادیم. هنگامیکه پاسخ دقیقی به دست داده‌شود، روش را اثبات باساخت[1] می‌نامیم. اثبات با ساخت بیش ازاثبات معمولی وجود، مورد تقاضاست و، به این دلیل، در صورت امکان، مرجح میباشد.

مثال ۱۰.۳ بین هر دوعدد گویای متمایز عددی اصم موجوداست.

بار دیگر، گزاره را با بناکردن چنین عدد اصمی اثبات می‌کنیم، و باز، فرض‌میکنیم a و b دو عدد گویا با $a<b$ باشند. عدد اصم کوچکتر از یکی، مثلا $(\sqrt{2}/2)$، را در نظر میگیریم. از آنجا که $b=a+(b-a)$، که عددبزرگتراست، $a+(\sqrt{2}/2)(b-a)$ باید در شرایط این مسأله صدق‌کند. اکنون به اثبات این مطلب می‌پردازیم.

از آنجا که $a<b$ ، $(b-a)/2>0$. از این گذشته، $(b-a)/2$، از آنجاکه از تفاضل و حاصلضرب اعدادگویا به دست آمده (ترکیب خطی اعداد گویا)، عددی گویاست. ازآنجا که حاصلضرب یك عدد گویای ناصفر و یك عدد اصم، عددی اصم‌است، $\sqrt{2}(b-a)/2$ و، بنابراین، $a+\sqrt{2}(b-a)/2$ عددی اصم است. بـه خاطر داشتن اینکه $0<(\sqrt{2}/2)<1$ منجر به:

$$a+0(b-a)<a+\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)<a+1(b-a)$$

می‌شود. اما، $a+0(b-a)=a$ و $a+1(b-a)=b$. با ترکیب مواردفوق، داریم:

$$a<a+\frac{\sqrt{2}}{2}(b-a)<b$$

به این ترتیب عدد اصم $a+(\sqrt{2}/2)(b-a)$، که در فاصلهٔ a و b قرار دارد، را به دست آوردیم. و بنابراین اثباتمان تکمیل می‌شود.

مثال ۱۰.۴ به ازاء هر عدد اصم a ، عدد اصم b دیگری چنان موجود است که $(a)(b)$ گویاست.

---

1. proof by construction

ابتدا نشان میدهیم که اگر a عددی اصم باشد، در این صورت $(1/a)$ نیز اصم است. فرض میکنیم $R=(1/a)$ عددی گویاست، در این صورت $(1/R)=a$ نیزعددی گویاست. این تناقض نشان می‌دهدکه اگر a اصم باشد، $(1/a)$ نیز هست. اکنون بـا انتخاب $(1/a)=b$، به دست می‌آوریم $1=(1/a)(a)$. واضـح است کـه ۱ عددی گویاست، وبدین ترتیب اثباتمان تکمیل می‌شود.

مثال ۱۰.۵ قبلا چندین نامساوی را مورد بررسی قرار داده‌ایم. گاهی دانستن ایـن مطلب مفید است که چه وقت، درصورت امکان، یك نامساوی به مساوی تبدیـل میشود. به عنوان مثال، نشان داده‌ایم که به ازاء جمیع مقادیر $0 \leqslant a$ و $0 \leqslant b$،

$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

است. از طرف دیگر، گزارهٔ $\sqrt{ab}=(a+b)/2$ واضحاً راست نیست، زیرا مقادیر بسیاری از a و b که به ازاء آنها $\sqrt{ab}\neq(a+b)/2$ است موجودند. در این‌صورت آنچه‌که مورد نیازاست اینست‌که گزارهٔ سور دار[1] مزبور رابه‌گزارهٔوجودی تبدیل کنیم. در این صورت قضیه را به قضیه‌یی‌که بر اینست $0 \leqslant a$ و $0 \leqslant b$ی چنان موجوداست‌که $\sqrt{ab}=(a+b)/2$، بازگویی‌میکنیم. اکنون با تشکیل این گزارهٔ وجودی[2] مقادیر aو b را پیدا می‌کنیم:

از آنجا که $\sqrt{ab}=(a+b)/2$، در این صورت:

$$ab=\frac{(a+b)^2}{4}$$

یا

$$4ab=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

یا

$$a^2-2ab+b^2=0$$

با تجزیه $(a-b)^2=0$ یا $a=b$ را به دست مـی‌آوریم. و این تنها جـواب $\sqrt{ab}=(a+b)/2$ است.

---

1. quantified statement 2. existence statement

مثال۱۰.۶ یکی از خطاهای جبـری متداول، فرض $۱/(a+b)=(۱/a)+(۱/b)$ است. واضح است‌که این تساوی به ازاء جمیع مقادیر حقیقی a و b راست نیست.ولی آیا این تساوی در صورتیکه قضیه طوری تغییر یابـد که شامل سور وجـودی شود دارای معنی میشود؟ یعنی، آیا مقادیر حقیقی a و b چنان وجود دارندکه:

$$\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

برقرار باشد؟ واضحست‌که این معادله تنها وقتی‌که $a\neq ۰$ ، $b\neq ۰$ ، و $a\neq -b$ باشد دارای معنی است. یکی از طرق کوشش برای به دست‌آوردن جواب، ساده‌کردن‌معادلهٔ:

$$\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

یا معادل آن:

$$\frac{۱}{a+b}-\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}=۰$$

است. این معادله به:

$$\frac{ab-b(a+b)-a(a+b)}{(a+b)ab}=۰$$

تبدیل میشود.

مخرج‌کسر حاصل،بنا به‌فرض، صفر نیست. بنا براین به حل معادله با ضرب دوطرف آن در $ab(a+b)$ ادامه میدهیم، و :

$$ab-b(a+b)-a(a+b)=۰$$

یا

$$ab-ab-b^۲-a^۲-ab=۰$$

یا

$$-(a^۲+ab+b^۲)=۰$$

یا

$$a^۲+ab+b^۲=۰$$

را به دست می‌آوریم.

از آنجاکه $a^{2}+ab+b^{2}$ یك چند جمله‌یی درجه دوم[1] برحسب a است،میتوانیم از فورمول حل معادلهٔ درجه دوم برای به دست آوردن:

$$a=\frac{-b\pm\sqrt{b^{2}-4b^{2}}}{2}=\frac{-b\pm\sqrt{-3b^{2}}}{2}$$

استفاده‌کنیم. از آنجاکه $\sqrt{-3b^{2}}$ هیچگاه عددی حقیقی نیست، جواب حقیقی‌یی برای معادله وجود ندارد. به عبارت دیگر، مقادیر حقیقی a و b چنانکه:

$$1/(a+b)=1/a+1/b$$

برقرار باشد موجود نیستند.

در این مثال، معادله‌یی به دست‌آوردیم که شامل حتی یك جــواب نیست، و این وضعیتی راآشکار میکند که‌گاه‌گاه رخ می‌دهد ودرآن حتی یك حالت‌که شرط رابرقرار کند موجود نیست. اما،گزارهٔ فوق به‌طور کامل بدون معنی نیست زیرا می‌توان به‌سادگی نشان داد‌که، اگر $a>0$ و $b>0$ باشد در این صورت : $1/(a+b)\leqslant 1/a+1/b$ است. ترکیب این نامساوی با نتیجهٔ فوق به تغییر نامساوی اصلی به:

$$1/(a+b)<1/a+1/b$$

رهنمون میشود .

مثال ۱۰.۷ تابعی موجود است‌که دامنه‌اش مجموعهٔ اعداد حقیقی و حوزه‌اش مجموعهٔ اعداد صحیح است.

برای تکمیل مثال ۱۰.۷، تنها لازم است‌که یك تابع که در شرایط فــوق صدق میکند به دست دهیم. اما به دست‌آوردن چنین تابعی نیازمند پاره‌یی تفکر است. فرض می‌کنیم r عددی صحیح باشد و تابع f، تعریف شده با قاعدهٔ $f(x)=r$ به ازاء هر x واقع در فاصلهٔ:

$$r-\frac{1}{2}\leqslant x<r+\frac{1}{2}$$

را در نظر میگیریم . قاعدهٔ f، تابعی را تعریف میکندکه هر عضو دامنه‌اش در یك عضو منحصر به فرد حوزه انتقال یافته است. علاوه بر این، دامنهٔ این تابع حوزهٔ اعدادحقیقی و حوزه‌اش شامل مجموعهٔ اعداد صحیح است. بنابراین، تابعی به دست آورده‌ایم که در شرایط مورد نظر صادق است.

1. quadratic polynomial

اتصال (پیوستگی) Continuity

قبلا درچند مورد، مفهوم تابع متصل را به‌کار بردیم. در اینجا تعریف دقیق‌تری از این مفهوم می‌دهیم و با چند مثال به توضیح آن می‌پردازیم. برای این منظور، تابع: $f(x)=۳x$ را در نظر می گیریم. شخص می‌تواند ملاحظه کند که :

$$f\left(\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۳}{۲}$$

$$f\left(\frac{۳}{۴}\right)=\frac{۹}{۴}$$

$$f\left(\frac{۴}{۵}\right)=\frac{۱۲}{۵}$$

$$f\left(\frac{۹}{۱۰}\right)=\frac{۲۷}{۱۰}$$

$$f\left(\frac{۹۹}{۱۰۰}\right)=\frac{۲۹۷}{۱۰۰}$$

یعنی، هرچه x به ۱ نزدیکتر شود، $f(x)$ به ۳ نزدیکتر میشود. و این، مفهوم‌حد است. مفهوم حد رامیتوان با تساهل‌چنین‌بیان‌کردکه، چونx به a نزدیك شود،$f(x)$ بهb نزدیك می‌شود. این معنی به صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ نوشته و بـه صورت «حد $f(x)$ چون x بهa نزدیك شود مساوی b است» خوانده می‌شود. تعریف دقیق$\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ عبارتست از :

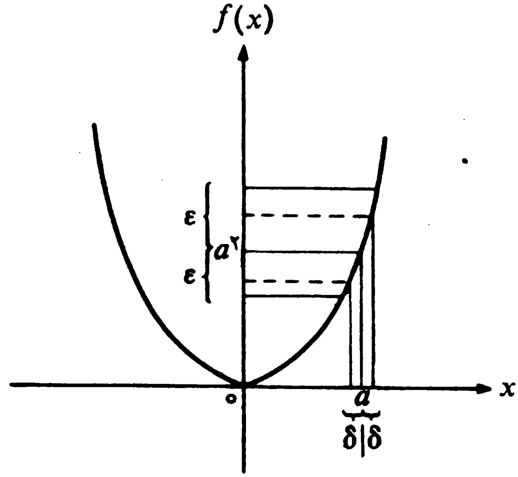
تعریف: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ «است است اگر به ازاء هر عدد حقیقی $\varepsilon>۰$ ، عدد $\delta>۰$ی چنان موجود باشد که هرگاه $|x-a|<\delta$ ، $|f(x)-b|<\varepsilon$ باشد.

ممکن است ملاحظهٔ توضیح این مفهوم در مورد $f(x)=x^۲$ برای خواننده مفید باشد. این عمل در شکل ۱۰.۲ انجام گرفته است.

اکنون ثابت میکنیم که در مورد $f(x)=۳x$ ، $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۳$ است. بـرای این کار $\varepsilon>۰$ی را چنان در نظر میگیریم که $|۳x-۳|<\varepsilon$ باشد. در این صورت:

$$|f(x)-۳|=|۳x-۳|=۳|x-۱|<\varepsilon$$

δ را برابر $(\varepsilon/۳)$ انتخاب، و به این ترتیب اثبات را کامل میکنیم.



شکل ۱۰.۲

در این مورد درست همانطور که، هنگامیکه تعریف نامساوی به طور واضح بیان شد، توانستیم خواص نامساویها را اثبات کنیم، می‌توانیم به‌اثبات خواص حدود بپردازیم. درزیر تنها یکی ازچنین خواصی را اثبات میکنیم.

مثال ۱۰.۸ اگر $\lim_{x\to a} f(x)=b$ ، $\lim_{x\to a} g(x)=d$ ، در این صورت:

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=b+d$$

اثبات :

$\lim_{x\to a} f(x)=b$ بدین معنی است که به‌ازاء هر $\varepsilon_1>0$، $\delta_1>0$ ی چنان موجود است که هر گاه $|x-a|<\delta_1$ ، $|f(x)-b|<\varepsilon_1$ باشد. به همین ترتیب، $\lim_{x\to a} g(x)=d$ به این معنی است که به ازاء هر $\varepsilon_2>0$ ، $\delta_2>0$ ی چنان موجود است که هر گاه $|x-a|<\delta_2$، در این صورت $|g(x)-d|<\varepsilon_2$ باشد. بنابراین،

$$|(f(x)+g(x))-(b+d)|=|(f(x)-b)+(g(x)-d)|\leqslant|(f(x)-b)|+|(g(x)-d)|$$

اما، به ازاء هر $\varepsilon>0$، فرض میکنیم $\varepsilon_1>0$ ، $\varepsilon_2>0$ در $\varepsilon_1+\varepsilon_2\leqslant\varepsilon$ صدق کند. δ را به‌صورت کوچکتر از δ_1 و δ_2 انتخاب میکنیم. در این صورت هر گاه $|x-a|<\delta$،

$$|f(x)+g(x)-(b+d)|\leqslant|f(x)-b|+|g(x)-d|<\varepsilon_1+\varepsilon_2\leqslant\varepsilon$$

و بدین ترتیب، اثبات کامل می‌شود.

اکنون می‌توانیم مفهوم حد را برای تعریف اتصال یا پیوستگی در نقطهٔ a به کار بریم.

تعریف: به تابع $f(x)$ در نقطهٔ a متصل[1] میگویند اگر $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$، یعنی، حد و $f(a)$ هردو موجود ومساوی باشند.

یك خاصیت اتصال اینست که، اگر $f(x)$ و $g(x)$ هر دو در a متصل باشند، $f(x)+g(x)$ در a تابعی متصل است.

اثبات:

ابتدا، میدانیم که $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$. بنابراین، بنا به مثال ۱۰.۸، داریم که:

$$\lim_{x \to a} [f(x)+g(x)] = f(a)+g(a)$$

این نتیجه را میتوان بصورت زیر به‌کار برد: از آنجا که $\lim_{x \to ۱} ۳x = ۳$، که بدین معنی‌است که: $f(x) = ۳x$ در $x = ۱$ متصل است ومسألهٔ تکلیفی b ۱۰.۲۶ مقرر میکند که $f(x) = x^۲$ در $x = ۱$ متصل است، در این صورت $x^۲ + ۳x$ در $x = ۱$ متصل است.

تکالیف و مسائل فصل ۱۰

۱. نشان دهیدهریك ازچند جمله‌ئی‌های این مسأله صفری بین $x = ۰$ و $x = ۱$ دارد:

(a) $x^۳ + ۳x^۲ - ۲x - ۱$

(b) $x^۴ - ۴x^۲ + ۲x + \frac{۱}{۲}$

(c) $x^۵ - ۳x^۳ + ۱$

(d) $x^{۱۰} + x - ۱$

(e) $x^{۱۰۰} + ۳x - ۲$

1. continuous

۲. ثابت کنید که در مورد هر یك از معادلات زیر جوابی موجود است. متغیرات این مسأله محدود به مجموعهٔ اعداد ناصفرند.

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (a)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \qquad (b)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sqrt[n]{x_1 x_1 \cdots x_n} \qquad (c)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (d)$$

(e) به ازاء هر دو عدد $a>0$ و $c>0$، با $a<c$، عدد bئی با $a<b<c$، صادق در $ac=b^2$ موجود است.

۳. نشان دهید در مورد هر حالت زیر، عدد xی موجود است که به ازاء آن، نامساوی راست می‌باشد.

(a) $x^2 \leqslant x$

(b) $\frac{1}{x} \leqslant x$

(c) $\sqrt{x} \geqslant x$ ، $x \geqslant 0$

(d) $a^x \leqslant x$ ، به ازاء aئی

(e) $|\log x| \geqslant x$ ، $x>0$

موارد زیر را ثابت کنید:

۴. بین هر دو عدد اصم متمایز، عددی گویا موجود است.

۵. بین هر عدد گویا و عدد اصم، یك عدد اصم موجود است.

۶. بین هر دو عدد حقیقی متمایز، یك عدد گویا موجود است.

۷. بین هر دو عدد حقیقی متمایز، یك عدد اصم موجود است.

۸. به ازاء هر عدد اصم x، عدد اصم y چنان موجود است که $x+y$ عددی گویاست.

۹. عدد طبیعی‌یی موجود است که مجموع ارقامش برابر حاصلضرب ارقام آن است.

۱۰. عددی‌موجود است‌که ارقامش مقادیر افزایش یابنده‌دارند.بعلاوه، مجموع این ارقام ۱۵و حاصلضرب این ارقام ۲۴ است.

۱۱. عددی موجود است‌که مجموع ارقامش۱۵ وحاصلضرب ارقامش۳۶ است. تمام این ارقام اعداد اولند.

۱۲. اعداد اول p_1، p_2، ...، p_n، چنان وجود دارند که $p_1p_2\cdots p_n+3$ عددی اول است.

۱۳. تابعی‌موجود است‌که دامنه‌اش مجموعهٔ اعداد حقیقی وحوزه‌اش عبارت از مجموعهٔ اعداد طبیعی است.

۱۴. تابعی موجود است‌که دامنه‌اش مجموعهٔ اعداد حقیقی و حوزه‌اش عبارت از اعداد حقیقی مثبت است.

۱۵. تابعی موجود است‌که دامنه‌اش مجموعهٔ اعداد حقیقی وحوزه‌اش عبارت ازمجموعهٔ اعداد اول است.

۱۶. اگر دامنه و حوزهٔ تابع f هر دو شامل N عضو باشند، در این صورت f^{-1} موجود است.

۱۷. دو تابع، $f(x)$ و $g(x)$، چنان وجود دارند که: $f(x)+g(x)=f^{-1}(x)$.

۱۸. دو تابع، $f(x)$ و $g(x)$، چنان وجود دارند که: $f(x)g(x)=f^{-1}(x)$.

۱۹. دوتابع، $f(x)$ و$g(x)$، چنان‌موجودند که: $g(f(x))=g(x)+f(x)$.

۲۰. توابع $f(x)$ و $g(x)$ چنان موجودندکه: $g(f(x))=g(x)f(x)$.

۲۱. توابع $f(x)$ و $g(x)$ چنان موجودندکه: $g(f(x))=[g(x)]^2$.

۲۲. تابعی چنان موجود است‌که: $f=f^{-1}$.

۲۳. به ازاء هر دونقطهٔ متمایز، با $x_1<x_2$، شخص می‌تواند تابع خطی‌یی، $f(x)=a_1x+a_0$، که از این دو نقطه می گذرد به دست آورد.

۲۴. به ازاء هر سه نقطهٔ متمایز، $x_1<x_2<x_3$، شخص می‌تواند چند جمله‌ئی درجه دومی، $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$، که از آنها می‌گذرد بیابد.

۲۵. به ازاء هرچهار نقطهٔ متمایز، با $x_1<x_2<x_3<x_4$، شخص می‌تواند چندجمله‌ئی درجه سومی، $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$، که از آنها می‌گذرد بیابد.

۲۶. (a) نشان دهیدکه: $f(x)=3x$، به ازاء جمیع مقادیر حقیقی x، تابعی متصل است.

(b) نشان دهیدکه: $\lim\limits_{x\to 2} x^2=4$

(c) نشان دهید به ازاء هر عدد حقیقی a، $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$.

به این ترتیب x^2 به ازاء جمیع مقادیر حقیقی دامنه، تابعی متصل است.

۲۷. اگر $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$، در این صورت:

$$\lim_{x \to a} (c_1 f(x) + c_2) = c_1 [\lim_{x \to a} f(x)] + c_2$$

در اینجا c_1 و c_2 دو عدد حقیقی‌اند.

۲۸. $f(x) = x$ را به ازاء: $x \leqslant 1$ و $f(x) = 2x$ را به ازاء $x > 1$ تعریف میکنیم. نشان دهید که: $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ وجود ندارد.

۲۹. اگر $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ و $\lim\limits_{x \to a} g(x) = d$، در این صورت ثابت کنید که:

$$\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = [\lim_{x \to a} f(x)][\lim_{x \to a} g(x)]$$

۳۰. نشان دهید اگر $f(x)$ و $g(x)$ هردو در a متصل باشند، در این صورت: $f(x)g(x)$ در a متصل است.

Chapter 11 فصل ۱۱

مثال نقض

Counterexample

درفصول قبل به‌بررسی روشهای گوناگون مفیدی دراثبات نتایج پرداختیم، وموارد استعمال این روشها، گاه موفقیت، منتج به اثبات حقایق ریاضی می‌شد. از این لحاظ، استقراء ریاضی وروشهای مستقیم وغیرمستقیم اثبات را می‌توان به‌صورت روشهای بانی[1] درنظر گرفت، زیرا کاربردشان می‌تواند به‌طرح دانش تازه‌یی منجر شود. دراین فصل روش اثباتی را مورد بررسی قرارمی‌دهیم که در ذات مخرب[2] است، و کاربردش، اثر مقابل اثبات نتیجه را داراست؛ یعنی، برای اثبات عدم درستی قضیهٔ بیان شده‌یی به‌کار می‌رود.

ممکن است دروهلهٔ اول غریب به‌نظر برسد که هنگامیکه ریاضیدانان به‌خلق‌معرفتهای تازه بها می‌دهند ما به جریان اثبات عدم درستی علاقه نشان دهیم. اما این موضوع تنها درصورتیکه ریاضیدانها درمورد درستی تمام قضایائی‌که کوشش دراثباتشان می‌کنند مطمئن باشند خلاف قاعده است. متأسفانه، مواردی موجودندکه درآنها، تمام کوششها دراثبات قضیهٔ مفروضی[3] شکست می‌خورد واین تردید حاصل می‌شود که قضیهٔ موردبحث

---

1. constructive procedures
2. destructive
3. hypothesized theorem

چنانکه بیان شده، ناصحیح است. درچنین وضعیت‌هائی مفید است که روشی برای اثبات عدم درستی قضیه داشته باشیم. هنگامیکه عدم درستی قضیه اثبات شد، کذب گزارهٔ اصلی به‌طور قطع اثبات شده، و، به‌این طریق، دانش ریاضی افزونی یافته است.

اثبات عدم درستی[1] قضیهٔ اصلی، چون به‌دقت درنظر گرفته شود، می‌تواند درتحقیق ریاضی ازفایدهٔ بسیاربرخوردار باشد. عموماً، هنگامیکه درستی قضیه‌یی رد شود، بدان معنی نیست که گزارهٔ موردبحث به‌کلی دروغ است، بلکه تنها به این‌معنی است که قضیه **چنانکه بیان شده**[2] دروغ می‌باشد. و این اغلب به‌علت اینکه قضیه خیلی‌کلی است اتفاق می‌افتد؛ و دراین‌صورت ممکن است شرح تغییریافتهٔ باشرایط ضعیف شده‌یی از آن، اثبات شود. به‌عنوان مثال، ممکن است چنین بیان شده باشدکه گزارهٔ اصلی درمورد تمام اعداد حقیقی راست است. اما چون عدم درستی این قضیه اثبات شود ممکن است شخص فکر کندکه امکان دارد کـه گزاره، درصورتیکه محدود به اعداد طبیعی شود، راست باشد. گـزارهٔ دوم ممکن است درست و، بنابراین، شایستهٔ اثبات باشد. به‌عبارت دیگـر، عدم اثبات درستی یك قضیه می‌تواند به محقق توانا، این رهنمونی را بدهدکه قضیهٔ اصلی‌را به‌صورتی‌که درستیش اثبات شود بازگویی کند.

بیشترقضایای ریاضی‌یی‌که تاکنون با آنها برخوردکرده‌ایم درصورت سورعمومی بیان شده‌اند. به‌عنوان مثال، نامساوی $(1+x)^n \geqslant 1+xn$ را وقتی $x > -1$ بوددر نظرگرفتیم؛ وثابت شدکه این نامساوی، به ازاء جمیع اعداد طبیعی n راست است. بـه همین ترتیب، نشان داده شدکه معادلهٔ: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$ به ازاء جمیع اعداد طبیعی n برقرار است. گرچه نشان داده شده‌که امثلهٔ فوق راستند، شخص گاهی باگزاره‌هـای مشابهی مواجه می‌شود که دروغند. اما اگر فکرکنیم کـه قضیهٔ بیان شده برحسب سور عمومی‌یی دروغ است، چگونه نشان می‌دهیم‌که ظنمان صحیح است؟ این مطلب در فصل ۲، که درآن نشان دادیم‌که برای اثبات عدم درستی قضیهٔ بیان شده برحسب‌سورعمومی، تنها یك‌حالت، که به ازاء آن، قضیه راست نباشد لازم است، مورد بحث قرارگرفته‌است. به‌این ترتیب، برای نقض‌کردن این گزاره‌کـه قد تمام افراد بشر زیرهفت فوت است، شخص، تنها لازم داردکه فردی را پیداکندکـه بلندیش حداقل هفت پاست. واضح است که این‌کار، برای هرکس‌که با بسکتبال حرفه‌یی‌آشنایی داردکار مهمی نیست. مثالی‌که قضیه‌یی را نقض می‌کند به مثال نقض[3]، یعنی مثالی‌کـه علیه آن گزاره حرکت می‌کند،

1. disproval 2. as stated
3. counterexample

موسوم است. هنگامیکه به‌نظر برسد که گزاره‌یی ناصحیح است، به‌دست آوردن مثال نقض مناسبی می‌تواند از اتلاف کوشش‌های بسیاری جلوگیری کند. بنا به‌این دلیل، تمرین در مورد استفادهٔ مثالهای نقض ارزش صرف وقت دارد. اکنون چند حالت، که درآنهامثال نقض باکارآیی[1] به‌کاررفته، را مورد بحث قرار مـی‌دهیم، اما بگذارید برای آمادگی پیداکردن درمورد مثالهای ریاضی، به بررسی مثالی شفاهی بپردازیم.

دبلیو اورال هریمن[2] فارغ‌التحصیل دانشگاه ییل[3] وملیونراست؛ پل‌ملون[4] فارغ‌ـ التحصیل دانشگاه ییل و ملیونر است؛ ری آرثورهـانت[5] فارغ التحصیل دانشگاه ییل و ملیونراست. بنابراین، تمام فارغ‌التحصیلان دانشگاه ییل ملیونرند. این گزاره را میتوان به‌سادگی‌باتنهانامبردن ازیك استادتاریخ قرون‌وسطای گمنام، که بزرگترین تشخصش دیپلم دانشگاه ییل اوست، انکارکرد، وهمزمان با آن گزارهٔ ضعیف‌تری می‌تواند از پـاره‌یی صدق برخوردارباشد. به‌عنوان‌مثال، بسیارنامحتمل‌است‌که تعدادزیادی‌ازفارغ‌التحصیلان دانشگاه ییل در رفاه باشند.

مثال ۱۱.۱ فرض می‌کنیم میل داشته باشیم که :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)}$$

را جمع کنیم و دراین‌مورد معادلهٔ زیررا به‌دست آورده‌ایم :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)} = \frac{n(n+1)(3n+2)}{3(n^2+1)(2n+1)} \qquad (11.1)$$

فرض می‌کنیم، قبلاً ثابت شده‌که منبع معادلهٔ (۱۱.۱) غیرقابل اطمینان است وما دراستفاده از این معادله به‌گونه‌یی مرددیم، و درعین حال، استفاده از معادلهٔ (۱۱.۱) به مقدار زیادی از زحمتمان می‌کاهد. دراین صورت یکی ازراههای افزایش اعتمادمان‌به معادلهٔ (۱۱.۱)، ملاحظهٔ برقراربودن آن به‌ازاء چند حالت ساده است.

به‌عنوان مثال، اگر $n=1$ را انتخاب کنیم، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

1. effitiently
2. W. Averall Harriman
3. Yale
4. Paul Mellon
5. Roy Arthur Hunt

درحالیکه :

$$\frac{n(n+1)(4n+2)}{2(n^2+1)(2n+1)}=\frac{(1)(2)(5)}{(3)(2)(3)}=\frac{5}{9}$$

به این ترتیب، $n=1$ منجر به مثال‌نقض معادلهٔ (۱۱.۱) می‌شود و، بنابراین، معادلهٔمز بور درحالت‌کلی راست نیست.

مثال ۱۱.۲ ادعا شده‌که درمورد چند جمله‌یی:

$$2x^3-5x^2+x+2$$

صفرهای منفی موجود نیست. به‌عبارت دیگر، اعداد منفی صادق درمعادلهٔ:

$$2x^3-5x^2+x+2=0$$

وجود ندارند. دراین حالت‌پیداکردن‌مثال‌نقض،شامل فاکتورگیری می‌شود، اما به‌سادگی می‌توان‌تحقیق‌کردکه $x=-1/2$،مثال نقض این‌گزاره است. باقراردادن$x=-1/2$ درمعادله، شخص به‌دست می‌آورد:

$$2\left(-\frac{1}{8}\right)-5\left(\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{2}+2=-\frac{1}{4}-\frac{5}{4}-\frac{1}{2}+2=0$$

توجه داشته باشیدکه می‌توانیم‌گزارهٔ مثال ۱۱.۲ را با استفاده ازروشی‌که در درفصل قبل مورد بحث قرارگرفت به‌طریق بسیار ساده‌تری نقض‌کنیم، چه برای اثبات اینکه درمورد چند جمله‌ئی مذکور، صفر منفی‌یی موجود است تنها، لازم داریم‌که نشان دهیم‌که صفری بین $x=-1$ و $x=0$ وجود دارد، و این‌کار را می‌توان ، با ، ابتدا قراردادن $x=-1$ و بعد $x=0$ در چند جمله‌ئی، وملاحظهٔ تغییرعلامت آن، انجام داد:

$$x=-1\ ;\ 2(-1)^3-5(-1)^2+(-1)+2=-6$$

$$x=0\ ;\ 2(0)^3-5(0)^2+(0)+2=2$$

واضح است‌که این‌کار، برای نقض‌گزارهٔ مورد بحث‌کفایت می‌کند.

مثال ۱۱.۳ کوششهای بسیاری وقف بررسی اعداد اول شده است. یکی ازمسائل در ارتباط با اعداد اول اینست‌که، مشکل است‌که تعیین‌کنیم که عددی اول است یاخیر. بنا به‌این دلیل، بعضی‌ازریاضیدانهاکوشیده‌اندکه فورمولی،که تنها اعداد اول را تولیدکند، به‌دست آورند. فرض می‌کنیم‌کسی ادعاکندکه: 2^n+3 یك چنین فورمولی است؛ یعنی،

به ازاء هرعدد طبیعی n ، $۳+۲^n$ عددی اول است. محققاً این عبارت ساده، وشاید هم برای انجام عملی چنین هیبت‌انگیز بسیار ساده به‌نظرمی‌رسد. دراین مورد، عددی چنددر این فورمول قرارمی‌دهیم وملاحظه میکنیم که چه حاصل می‌شود:

به ازاء $n=۱$ ؛ $۲^۱+۳=۵$

به ازاء $n=۲$ ؛ $۲^۲+۳=۷$

به ازاء $n=۳$ ؛ $۲^۳+۳=۱۱$

به ازاء $n=۴$ ؛ $۲^۴+۳=۱۹$

ممکن است دراین‌مرحله، شروع به‌اطمینان‌کردن به فورمول مزبورکنیم. اما حالات بعد را امتحان می‌کنیم:

به ازاء $n=۵$ ؛ $۲^۵+۳=۳۵$، که عدد اول نیست.

این بار، مثال نقضی درمورد این گزاره، که عبارت مزبور تنها، عدد اول بـه‌دست می‌دهد، داریم. دراین مثال، مانند اغلب‌مثالهای‌عملی، به‌دست‌آوردن‌مثال نقض، عملی‌فوری نبوده به بررسی حالات بسیار نیازمند است.

باید درك شودکه مثال نقض، عدم‌درستی گزاره را، چنانکه بیان شده، اثبات‌میکند، واین، بدان معنی نیست‌که شرح تغییر یافته‌یی از این‌گزاره، بیفایده باشد. دراین حالت، عبارت: $۳+۲^n$ منجر به چند عدد اول می‌شود، ومثال نقض تنها، نشان داده‌که لازم نیست که به‌ازاء هرعدد طبیعی n به‌عدد اول تبدیل شود. به هرحال، ریاضیدانها نشان داده‌اند که $۳+۲^n$ بی‌نهایت عدد اول تولید می‌کند.

مثال فوق، این واقعیت مهم را توضیح میدهدکه مثال نقض می‌تواند به تغییری در گزاره منجرشود.وبه‌این ترتیب، به‌طرح قضیه‌یی صحیح وسودمندکمك‌کند.

تاکنون، مثال نقض را برای اثبات عدم درستی‌گزاره‌ها به‌کار برده‌ایم، درحالیکه میتوان از آنها به‌عنوان وسائل مؤثرآموزش نیز استفاده‌کرد.

مثال ۱۱.۴ دانش آموزان مبتدی، غالباً هنگام به‌کاربردن گزاره‌های جبری‌کم دقتندو به‌این‌دلیل، مستعدندکه به‌کرات خطای‌یکسانی را مرتکب شوند. موارد زیر دو مورداز چنین مواردند:

$$\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b} \quad \text{و} \quad \sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

ممکن است نشان دادن این مطلب که معادلات فوق، درحالت کلی، ناصحیح‌اند نیازمند بحثی فوق معلومات دانش آموز باشد. برخورد دیگر با این مطلب، به‌دست دادن مثال نقض مناسب است. با انجام این عمل در مورد معادلهٔ اول با $a=۱$ و $b=۱$ ، به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲} \quad و \quad \frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۱}=۲$$

واضحاً $۲\neq ۱/۲$.

این مثال نقض باید برای توضیح نادرستی : $۱/(a+b)=۱/a+۱/b$ کفایت کند. به همین ترتیب، اگر $a=۹$ و $b=۱۶$ را انتخاب کنیم، دراین صورت:

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۲۵}=۵$$

درحالیکه :

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}=۳+۴=۷$$

و این، بار دیگر خطای واقع درمحاسبات جبری دانش‌آموز را نشان می‌دهد.

بازهم در این‌جا، مثال نقض میتواند منجر به تغییر این گزاره‌ها از تساویها به نامساویها شود. گزاره‌های تغییر یافتهٔ مورد نظر عبارتند از:

$$\frac{۱}{a+b}<\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b} \qquad b>۰ \text{ ، } a>۰ \text{ به ازاء }$$

و

$$\sqrt{a+b}\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b} \qquad b\geqslant ۰ \text{ و } ، a\geqslant ۰ \text{ به ازاء }$$

نامساویهای فوق، قبلا مورد بحث قرار گرفته‌اند.

مثال ۱۱.۵ خطاهای تکرارشوندهٔ دیگر، دررابطه با استفاده از مجموعات‌اند. دراین مورد دوحالت ساده را توضیح می‌دهیم.

دانش آموزان اغلب فرض می‌کنند که:

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲=\Big(\sum_{i=۱}^{n} x_i\Big)^۲ \tag{۱۱.۲}$$

با انتخاب $n=۲$ و $x_۱=۱$ ، $x_۲=۲$ ، به‌دست می‌آوریم :

$$\left(\sum_{i=۱}^{۲} x_i\right)^۲=(۱+۲)^۲=۹$$

درحالیکه :

$$\sum_{i=۱}^{۲} x_i^۲=۱^۲+۲^۲=۵$$

مثال نقض فوق نشان می‌دهدکه معادلهٔ (۱۱.۲) ناصحیح است.

استفادهٔ غلط دیگر ازعلامت مجموع، این فرض است‌که :

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i y_i=\left(\sum_{i=۱}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=۱}^{n} y_i\right)$$

همواره راست است. مثال نقض این‌تساوی، عبارتست از $x_۱=۱$ ، $x_۲=۲$ ، $y_۱=۱$ ، $y_۲=۱$ ، و ازآن شخص حاصل می‌کند:

$$\sum_{i=۱}^{۲} x_i y_i=(۱)(۱)+(۲)(۱)=۳$$

و

$$\left(\sum_{i=۱}^{۲} x_i\right)\left(\sum_{i=۱}^{۲} y_i\right)=(۱+۲)(۱+۱)=(۳)(۲)=۶$$

مثال ۱۱.۶ پیش ازاین‌اعداد اصم را مورد بررسی قراردادیم. دراین مورد ممکن‌است دوخاصیت زیر معقول درنظر گرفته شوند:

(i) مجموع دوعدد اصم ، a و b ، عددی اصم است.

(ii) حاصلضرب دوعدد اصم، عددی اصم است.

دلایل خوبی برای باور داشتن این‌گزاره‌ها موجودند. درمیان مثالهای بسیاری که به‌ازاء آنهادرستند، $a=\sqrt{۲}$، $b=\sqrt{۳}$اند،چه‌دراین‌صورت: $a+b=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ و $(a)(b)=\sqrt{۶}$ می‌شود. هردوی این اعداد اصمند. اما اگرچه دوگزارهٔ مزبور درحالات بسیاری‌راستنددرحالت‌کلی‌راست‌نیستند. به‌عنوان‌مثال‌نقض، $a=۱+\sqrt{۲}$ و $b=۱-\sqrt{۲}$ را انتخاب می‌کنیم. دراین صورت:

$$a+b=۱+\sqrt{۲}+۱-\sqrt{۲}=۲$$

و:

$$(a)(b)=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=1-2=-1$$

این مقادیر a و b، به‌عنوان مثال نقض هردو گزارهٔ (i) و (ii) به‌کار می‌روند.

مثال ۱۱.۷ در مورد قضیهٔ «به‌ازاء هرتوابع f و g، تـابع مرکب $g(f(x))$ با معنی است» مثالی نقض به‌دست آورید.

یك طریق، یافتن مثالی است که درآن حوزهٔ f مشمول دامنهٔ g نیست. برای این منظور، تابع:

$$f(x)=1-x^2 \text{ و } g(y)=\log(y-2)$$

را درنظر می گیریم.

فرض می‌کنیم دامنهٔ f مجموعهٔ اعداد حقیقی باشد. دراین صورت:

$$g(f(x))=g(1-x^2)=\log[(1-x^2)-2]=\log[-(x^2+1)]$$

از آنجاکه: $-(x^2+1)$ همواره عددی منفی است وتابع لگاریتمی تنها به ازاء اعداد مثبت تعریف شده است، تابع مرکب فوق، $g(f(x))$، تعریف نشده است. به این ترتیب مثال نقضی درمورد قضیهٔ مثال ۱۱.۷ به‌دست‌آورده‌ایم.

تکالیف ومسائل فصل ۱۱

۱. هریك از معادلات زیر راست یا دروغند. اگـر معادله‌یی راست باشد، آنرا اثبات کنید؛ واگر دروغ است، مثال نقض مناسبی بیابید:

$$(a)\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{(i+1)}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6(n^2+1)}$$

$$(b)\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{i2^{i-1}}{(i+1)(i+2)}=\frac{2^n}{n+2}-\frac{1}{2}$$

$$(c)\quad \sum_{i=1}^{n}i^2x^i=\frac{(1-x^n)x^n}{1-x}\ ;\ x\neq 1$$

$$(d)\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{x^{2i-1}}{1-x^{2i}}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^{n+1}}\ ;\ x\neq 1$$

(e) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3=n^2(2n^2-1)$

۲. برای اثبات عدم درستی هریك ازموارد این مسأله، مثال نقض مناسبی به کار برید. تمام متغیرات، متغیرات حقیقی‌اند.

(a) $x\leqslant x^2$

(b) $xy\geqslant x+y$

(c) $\frac{1}{x}\leqslant x$

(d) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{x+y}$

(e) $\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}\leqslant\frac{x+y}{2}$

(f) $|x+y|=|x|+|y|$

(g) $\sqrt{xy}\leqslant\frac{1}{2}(x+y)$

(h) $xy\leqslant(x)(|y|)$

(i) $\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_i$

(j) $\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n}y_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2$

(k) $\sum_{i=1}^{n}x_i\geqslant\sum_{i=1}^{n-1}x_i$ ، $n>1$

(l) $\sqrt{xy}\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y)$

(m) $a^x\geqslant 1$ ، به ازاء $a>0$ و $x\geqslant 0$

(n) $\sqrt{x}\leqslant x$ به ازاء جمیع مقادیر $x\geqslant 0$

(o) $|\log_{10}^{x}|\leqslant x$ ، به ازاء $x>0$

(p) اگر $x\leqslant y$ ، دراین صورت $1/x\geqslant 1/y$

(q) اگر $x \leqslant y$، دراین صورت $y/x \geqslant 1$

(r) $g(f(x)) = g(x)f(x)$

(s) $g(f(x)) = f(g(x))$

(t) $f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$

(u) $[f(x)]^2 = f(x^2)$

برای نقض هریك از گزاره‌های زیر، از مثال نقض استفاده کنید:

۳. اگر p عددی اول باشد، دراین صورت $p+1$ نمی‌تواند عدد اول باشد.

۴. اگر p عدد اول باشد، دراین صورت p^2+1 نمی‌تواند عدد اول باشد.

۵. فرض می‌کنیم a ، b، و c سه عدد صحیح باشند. اگر a ، c را عاد کند و b ، c را عاد کند، دراین صورت یا a ، b را عاد می‌کند یا b ، a را عاد می‌کند.

۶. در مورد هرتابع f ،که دامنه‌اش شامل اعداد صحیح است، تابع معکوس f^{-1} همواره وجود دارد.

۷. به‌ازاء هرتابع f،که دامنه‌اش شامل اعداد طبیعی است، تابع معکوس f^{-1} همواره وجود دارد.

۸. به‌ازاء هرتابع f،که دامنه‌اش شامل تعدادی متناهی اعضاء است، تابع‌معکوس همواره موجود است.

۹. اگردامنه‌های f و g اعدادی مثبت باشند، دراین صورت $g(f)$ موجوداست.

۱۰. اگردامنه‌های f و g شامل تعدادی متناهی عضو باشند، دراین‌صورت $g(f)$ موجود است.

۱۱. اگر n عدد صحیح زوجی باشد، دراین صورت: $(n)^2+1$ بر ۵ بخش پذیراست.

۱۲. فرض می‌کنیم f تابعی باشد. اگر $y \leqslant x$ ، دراین صورت: $f(x) \leqslant f(y)$.

۱۳. فرض می‌کنیم f تابعی صادق در خاصیت: $f(x+y) = f(x)f(y)$ باشد. اگر $x \leqslant y$، دراین صورت: $f(x) \leqslant f(y)$.

۱۴. دوتابع f و g را درنظرمی‌گیریم. اگر: $f(x) = g(y)$، دراین صورت: $x = y$.

۱۵. اگر: p_i ، $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ ، n عدد اول باشد، دراین صورت:

$$p_1 p_2 p_3 \cdots p_n + 1$$

عددی اول‌است.

۱۶. مورد زیر از روش استقراء ریاضی را درنظرمی گیریم: اگـر قضیه‌یی که به‌ازاء عدد صحیح $r \geqslant n_0$ راست است، مستلزم این باشدکه قضیه به‌ازاء $r+1$ راست است، دراین صورت‌گزاره به‌ازاء جمیع اعداد صحیح $n \geqslant n_0$ راست میباشد. مثال نقضی درمورد این روش استقراء ریاضی به‌دست‌آورید.

۱۷. اگر: $a_1 \leqslant b_1$ و $a_2 \leqslant b_2$ ، دراین صورت: $a_1 a_2 \leqslant b_1 b_2$.

۱۸. $f(x^2) = x$ مستلزم اینست‌که : $f(x) = 1$.

۱۹. $\log xy = (\log x)(\log y)$ ؛ $x > 0$ و $y > 0$.

۲۰. فرض می‌کنیم Δ عامل تفاضل متناهی‌ئی باشد، دراین صورت:

$$(a) \quad \Delta x_i y_i = (\Delta x_i)(\Delta y_i)$$

$$(b) \quad \Delta \left(\frac{1}{x_i}\right) = \frac{1}{\Delta x_i}$$

Chapter 12

فصل ۱۲

تمثیل و اثبات هندسی

Analogy and Geometric Proof

یکی ازمشکلاتی‌که اغلب مردم با ریاضیات دارند اینست که بیشترآن به‌صورت مجرد[1] نوشته شده است. به‌عنوان مثال، به‌جای بررسی حالت خاص،۳/۱+۲/۱، شخص‌اغلب حالت کلی $a+b$ را موردبررسی قرارمی‌دهد. واضح‌است‌که بیشترمردم به‌چنین‌تعمیماتی عادت ندارند، و به این دلیل، بسیاری مردم درك مجردات را مشکل می‌یابند. اما موضوعات، در صورتیکه تجرید مورد بحث را با تمثیلات آشنا توضیح دهیم، غالباً بسیار ساده می‌شوند. این تمثیلات می‌توانندمثالهای عددی ساده، اشکال هندسی،یاابزار ریاضی معروف باشند.

استفاده از تمثیلات درتوضیح مفاهیم پیچیده، نه‌تنها در ریاضیات بلکه دربسیاری ازشاخه‌های دیگرکوشش بشری مفید است. مثلاً اگر شخص بخواهد جریانات روحی بشری رابرای یك متخصص‌کامپیوتر توضیح دهد، ترسیم شباهت بین مغزبشرویك‌کامپیوتر پیچیده میتواند مفیدباشد. به‌همین ترتیب،اگرشخص بخواهد احساسات نقاش بااستعدادی را برای ریاضیدانی‌که هیچ آگاهی‌یی از هنرندارد شرح دهد ممکن است ارزش‌زیبائی

1. abstract form

شناسی[1] یك اثبات جالب و یك نقاشی خوب را باهم مقایسه کند.

مثالهای فوق نکتهٔ مهم دیگری را درمورد استفاده از تمثیلات درتشریح اصول توضیح می‌دهند. تمثیل با کامپیوترممکن است به بعضی کمك کند هرچند می‌تواند بسیاری دیگررا به اشتباه بیندازد. به‌همین‌ترتیب، مقایسهٔ احساسات یك هنرمند با احساسات یك ریاضیدان‌خلاق می‌تواند برای اکثرخوانندگان‌مطلقاً بی‌معنی باشد. این‌مطلب‌درریاضیات نیزصادق است، و درآن، آنچه برای یك شخص مشکل است می‌تواند برای دیگری بسیار ساده باشد. یك روش هندسی ممکن است مطالب را برای بعضی دانش آموزان آسان کند، درحالیکه می‌تواند بقیه را تنها،گیج نماید. در واقع، دانش‌آموزانی وجود دارندکه هنگام‌سروکارداشتن با تجرید خالص دربهترین وضع خودند، واستفاده ازشکل یا مثالهای عددی، تنها آشفته‌شان می‌کند.

دربیشترمثالهای این فصل از اثباتهای هندسی، یعنی اثباتهای باشکل، استفاده شده است. هنگام استفاده از روش هندسی، شخص باید اطمینان حاصل‌کندکه حالت کلی ونه تنها حالتی خاص را توضیح می‌دهد. امـا همهٔ تمثیلات به‌هندسه نیاز ندارند؛ این فصل شامل چند مثال بی‌تصویرنیزهست.

مثال ۱۲.۱ می‌دانیم محیط دایره، متناسب با قطرآنست. به عبارت دیگر، $c=\pi d$،که درآن π ثابت تناسب است، می‌باشد. اکنون فرض می‌کنیم‌که مقدار π را نمی‌دانیم وبه حاصل‌کردن اطلاعاتی درمورد آن علاقه‌مندیم.

ابتدا مربع با خط پر[2] محیط بردایرهٔ شکل ۱۲.۱ را درنظرمی‌گیریم. ازآنجاکه اضلاع این مربع طول d دارند، محیط مربع، از محیط دایره‌یی کـه برآن محیط شده بیشتراست؛ بنابراین $۴d>\pi d$ یا $\pi<۴$. اکنون مربع نقطه چین[3] را درنظرمی‌گیریم. از آنجاکه زاویهٔ ABC مساوی زاویهٔ CAB است، $AC=BC$ می‌شود ، وبنا بـه این دلیل :

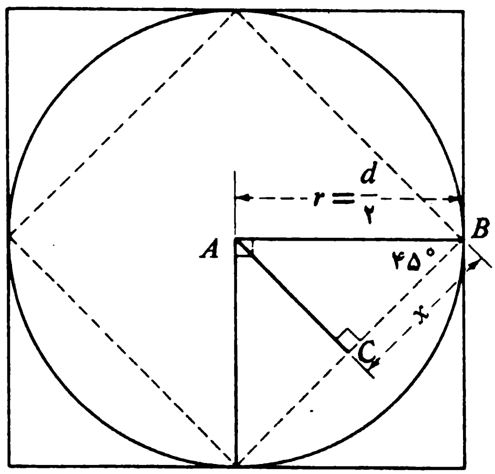
$$\frac{d}{۲}=\sqrt{x^۲+x^۲}=x\sqrt{۲} \quad \text{یا} \quad x=\frac{d}{۲\sqrt{۲}}$$

در این صورت، ضلع مربع نقطه چین به طول :

$$۲x=\frac{۲d}{۲\sqrt{۲}}=\frac{d}{\sqrt{۲}}$$

1. aesthetic value 2. solid lined square 3. dotted – line square

که مستلزم اینست که محیط آن $۴d/\sqrt{۲}$ است، می‌شود. از آنجا که مربع نقطه‌چین به طور کامل در دایره محاط شده، باید محیطش کوچکتر از محیط دایره باشد. بنابراین، $\pi d > ۴d/\sqrt{۲}$ یا $\pi > ۲/\sqrt{۲}$. ترکیب این دو نامساوی فاصلهٔ: $۴ > \pi > ۴/\sqrt{۲}$ را نتیجه می‌دهد. باید توجه شود که این روش محاسبهٔ π ، تنها اهمیت تاریخی دارد؛ ودر حال حاضر می‌توان آن را بـه دقت با استفاده از روشهای بحث شده در اکثر کتابهای انتگرال و دیفرانسیل تخمین زد.



شکل ۱۲۰۱

مثال ۱۲۰۲ با استفاده از روش نموداری[1] نشان دهید که :

$$\sum_{i=۱}^{n} (۲i-۱) = n^۲$$

ابتدا ملاحظه می کنیم که :

$$۲i-۱ = (i-۱)+(i-۱)+۱$$

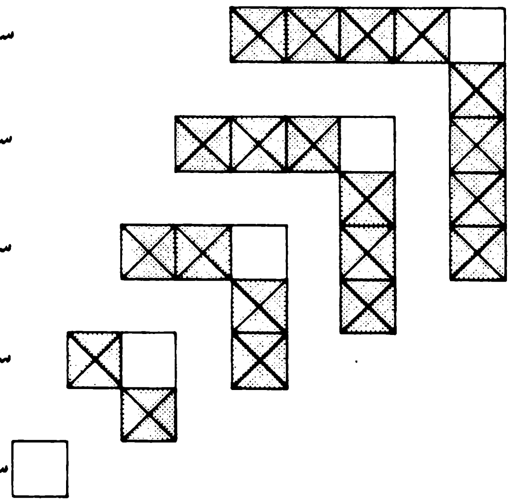
بعد مشاهده مـی‌کنیم که تعداد مربعهای هـاشور خوردهٔ ردیف i ام و ستون i ام شکل ۱۲۰۲a ، عبارتست از :

$$(i-۱)+(i-۱)+۱ = ۲i-۱$$

1. graphic approach

به‌عنوان مثال، چون $i=3$ باشد، تعداد مربعهای سطرسوم وستون سوم ۲+۲ مربع‌هاشور خورده بعلاوهٔ یك مربع هاشور نخورده، یعنی ۵ مربع است. این وضعیت درمورد پنج سطر وستون اولیه درشکل مشخص شده است.

سطر ۵ ، ستون ۵
سطر ۴ ، ستون ۴
سطر ۳ ، ستون ۳
سطر ۲ ، ستون ۲
سطر ۱ ، ستون ۱



شکل ۱۲.۲a

گذشته از این، از شکل ۱۲.۲b ، شخص‌می‌تواند ملاحظه‌کندکه تعداد مربعات، در تمام سطرها وستونها از ۱ تا n برابر n^2 است، یعنی، درمربعی، به n سطر و n ستون ، n^2 عضو موجود است. چنین مربعی را می‌توان، با ترکیب تمام مربعات سطر۱، ستون۱، باسطر۲، ستون ۲، وغیره تا آنکه سرانجام مربعات سطر n، ستون n نیز مشمول شود ، به‌دست آورد. قبلاً ملاحظه‌کردیم که تعداد مربعهای سطر i ، ستون i ،

$$(i-1)+(i-1)+1=2i-1$$

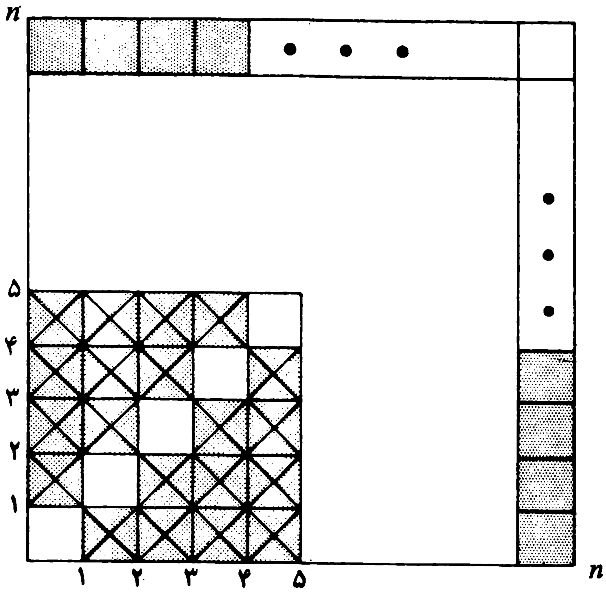
است. بنا به‌این دلیل، شخص می‌تواند به‌عنوان نتیجهٔ بحث فوق:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$$

را به‌دست‌آورد. جالب است‌که توجه‌کنیم که :

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$$

است که مجموع n عدد فرد اولیه است. نتیجهٔ فوق نشان می‌دهد که مجموع n عدد فرد اولیه برابر $n^۲$ است.



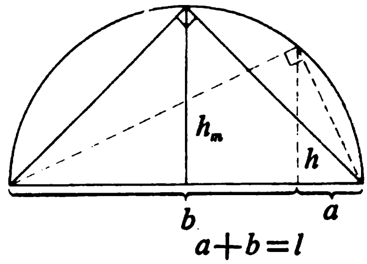
شکل ۱۲.۲b

مثال ۱۲.۳ نشان‌دهید که به‌ازاء $a \geqslant ۰$ و $b \geqslant ۰$ ، که در آن‌ها a و b اعدادی‌حقیقی‌اند:

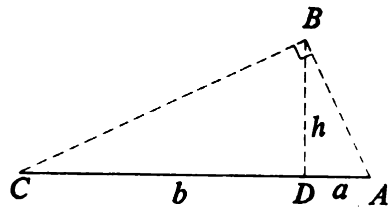
$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{۲}$$

این نامساوی را باکمك اشکال ۱۲.۳a و ۱۲.۳b اثبات می‌کنیم. ابتدا ملاحظه می‌شودکه $a+b=l$ ، که آن را ثابت درنظرمی گیریم. بعد، ملاحظه می‌کنیم که به ازاء مقادیر مختلف a و b ، مثلثهای متفاوت، محاط دریك نیمدایره، به‌دست مـی‌آوریم. مثلاً، مثلث نقطه‌چین، دارای یکی از تـرکیبات a و b است، درحالیکه مثلث باخط پر شامل حالت خاص $a=b$ می‌باشد. مثلثهای مزبور را طوری رسم کرده‌ایم که در یك نیمدایره محاط شده‌اند وبنابراین، همه قائم‌الزاویه‌اند.

شکل ۱۲.۳b را، که شامل یکی از مثلثهای شکل ۱۲.۳a است، در نظرمی گیریم. فرض می‌کنیم DB ، عمود شده بر AC ، ارتفاع مثلث CAB باشد. از آنجا کـه هر دو زاویهٔ ABC و ADB زوایای قائمه‌اند، زاویهٔ ACB مساوی‌زاویهٔ ABD است. بنابه‌این دلایل، مثلثهای ADB و BDC متشابهند. بنابراین:



شکل ۱۲.۳a



شکل ۱۲.۳b

$$\frac{a}{h}=\frac{h}{b} \quad \text{یا} \quad ab=h^{۲} \quad \text{یا} \quad h=\sqrt{ab}$$

از شکل ۱۲.۳a، ملاحظه می‌کنیم که بیشترین مقدار h وقتی رخ می‌دهد که $a=b$ باشد.
از آنجا که h_m، h ماکزیمم است، $h_m \geqslant h=\sqrt{ab}$. چون $a=b$، $h_m=h$ و

$$h_m=\sqrt{ab}=\sqrt{a^{۲}}=a=b$$

دراین حالت:

$$\frac{a+b}{۲}=\frac{h_m+h_m}{۲}=h_m$$

اما فرض کردیم که $a+b=l$ ثابت است . بنابراین $(a+b)/۲$ همواره مساوی h_m است و :

$$\frac{a+b}{۲}=h_m \geqslant \sqrt{ab}$$

و این، نامساوی را اثبات می‌کند.

توجه داشته باشید که این اثبات، بسیار پیچیده‌تر از روش به‌کاررفته درمثال ۸.۴ است .

مثال ۱۲.۴ نشان دهید به‌ازاء جمیع مقادیر x درفاصلهٔ $۰ \leqslant x \leqslant \pi/۲$:

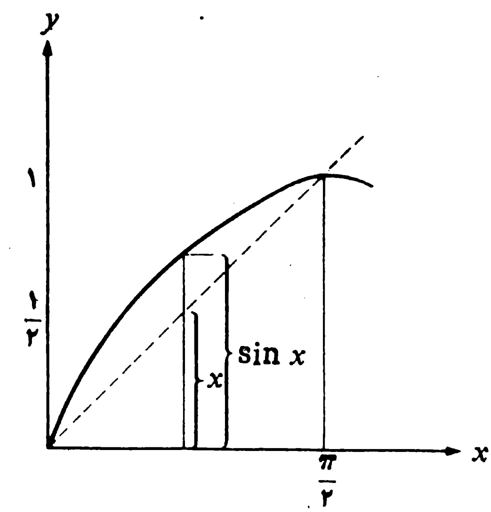
$$\sin x \geqslant (۲/\pi)x$$

ابتدا نمودار تابع سینوسی را، برای این فاصله درشکل ۱۲.۴، رسم می‌کنیم. این شکل با استفاده از جدول سینوسی، نشان داده شده درجدول ۱۲.۱ ،که درآن زوایا با رادیان اندازه گیری‌شده‌اند، رسم شده است. می‌توان مقادیر دیگری با استفاده ازجدول سینوسی

ضمیمه و تبدیل درجه به‌رادیان به‌دست آورد.

جدول ۱۲.۱

x	$\sin x$
۰	۰
$۰/۱۵\pi$	۰/۴۵۳۹۹
$\frac{\pi}{۶}$	۰/۵
$۰/۳\pi$	۰/۸۰۹۰۲
$\frac{\pi}{۲}$	۱/۰



شکل ۱۲.۴

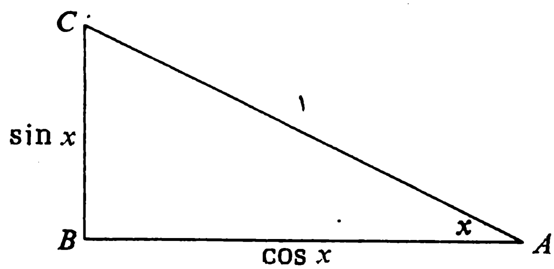
اکنون، خط نقطه چین را درنظر می گیریم. ازآنجاکه این خط زیرتابع سینوسی قراردارد، می‌دانیم‌که $\sin x > y$. دراین صورت تمام آنچه که برای انجام دادن باقیمانده، اینست‌که معادلهٔ این خط را به‌دست آوریم. خط مزبور از مبدأ مـی‌گذرد و شیب $\pi/۲ = ۲/\pi$: ۱ را دارد. بنابراین، $y = (۲/\pi)x$. لذا به ازاء هـر x درفاصلهٔ

$0<x<\pi/2$ ، $\sin x>(2/\pi)x$ است. نیز $\sin\pi/2=1$ و :

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)(0)=0 \quad \text{و} \quad \sin 0=0 \;،\; \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

بنابراین به ازاء هر x در فاصلهٔ $0\leqslant x\leqslant\pi/2$ ، $\sin x\geqslant(2/\pi)x$ ، و این، اثبات را تکمیل می‌کند. باید توجه داشت که این نتیجه، در چندین اثبات حساب انتگرال و دیفرانسیل به کار می‌رود.

مثال ۱۲.۵ نشان دهید به ازاء هر x واقع در فاصلهٔ $0<x<\pi/2$ ، $\sin x+\cos x>1$ است.



شکل ۱۲.۵

مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۱۲.۵، که قطرش به‌طول ۱ است، را درنظرمی‌گیریم. در این صورت، طول دوضلعش $\sin x$ و $\cos x$ اند. درهندسهٔ اقلیدسی، کوتاه‌ترین فاصله بین نقاط A و C قطعهٔ خط مستقیم AC است. بنابراین، $AC<AB+BC$ ، یا به ازاء هر x درفاصلهٔ $0<x<\pi/2$ ، $1<\sin x+\cos x$. واین، اثبات نامساوی موردبحث را تکمیل می‌کند.

مثال ۱۲.۶ تا اینجا، دراثباتهامان ازشکل استفاده کرده‌ایم. اکنون وضعیتی شامل نسبتی تابعی را درنظرمی‌گیریم. فرض می‌کنیم تابع $f(x)$ ی داریم که بردامنهٔ اعداد حقیقی یا حوزهٔ زیر مجموعهٔ اعداد حقیقی، تعریف شده است؛ و علاوه براین در تساوی: $f(x+y)=f(x)f(y)$ صادق است. بازفرض می‌کنیم x ی چنان موجود است که $f(x)\neq 0$. اگر ازماخواسته شود که خواص این تابع را به‌دست آوریم، ممکن است در تشخیص چگونگی آغازتحقیق در مورد آنها، دچار اشکال شویم.

طریق دیگر، سعی در به‌خاطرآوردن تابعی که دارای همان خاصیت تابع داده شده

دراینجا، یعنی $f(x+y)=f(x)f(y)$ است، می‌باشد. پس از پاره‌یی فکر، امکان دارد به‌خاطر بیاوریم که نماها دارای خاصیت $a^{x+y}=a^x a^y$ اند، و از آنجاکه خواص نماها را می‌دانیم، سعی درملاحظهٔ این می‌کنیم که آیا می‌توانیم خواص مشابهی برای تابع‌مان اثبات کنیم یا خیر؟ دراین مورد چند حالت را درنظرمی گیریم:

(i) $a^{\circ}=۱$، بنابراین، سعی در اثبات این می‌کنیم که $f(\circ)=۱$. فرض می‌کنیم x عددی چنان باشد که $f(x)\neq\circ$. دراین صورت: $f(\circ+x)=f(\circ)f(x)$. از آنجاکه $x=x+\circ$ است، $f(\circ+x)=f(x)$. بنابراین، $f(x)=f(\circ)f(x)$، وازآنجا که $f(x)\neq\circ$، داریم $f(x)=f(\circ)f(x)$: $f(x)$ یا $f(\circ)=۱$. به این ترتیب، نتیجه را اثبات کرده‌ایم.

(ii) از آنجاکه: a^x : $a^{-x}=۱$، نشان می‌دهیم که $f(x)$: $f(-x)=۱$.
برای این اثبات: $f(x-x)=f(\circ)=۱$ را درنظر می‌گیریم ((i) را درفوق ملاحظه کنید). اما:

$$۱=f(\circ)=f(x-x)=f(x)f(-x)$$

به‌این ترتیب: $f(x)f(-x)=۱$، یا $f(x)=f(-x)$: ۱، واین، گزارهٔ (ii) را محقق می‌کند.

(iii) توجه می‌کنیم که $a^{nx}=(a^x)^n$.
برای نشان دادن این مطلب در مورد حالتمان، از استقراء استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم که:

$$f(x+x)=f(x)f(x)=[f(x)]^{۲}$$

با فرض اینکه نتیجهٔ مزبور به ازاء $n=r$ برقرار است، حاصل می‌کنیم:

$$f[(r+۱)x]=f(rx+x)=f(rx)f(x)=[f(x)]^r f(x)$$
$$=[f(x)]^{r+۱}$$

و به‌این ترتیب، اثبات کامل می‌شود.

توجه داشته باشید که در این مورد خواص را، باتمثیل به‌دست آوردیم، اما، با روشهای دیگر اثبات کردیم.

دستگاهی‌مجرد[1] قرار دهند. جبرمجرد از توسعهٔ دستگاههائی که بعضی خواص زیرمجموعه‌های خاصی از اعداد حقیقی را دارند، سرچشمه گرفته شده است. به‌عنوان‌مثال، اعدادصحیح، همراه با عمل جمع، خواص گروه را برقرار می‌سازند. در این مورد به تعریف گروه پرداخته، بعضی خواص آن را به دست می‌آوریم.

تعریف : گروه، دستگاهی شامل مجموعهٔ S و عمل $\oplus$ بین هردو عضو از S است. علاوه براین، چهارخاصیت زیر باید در آن برقرار باشد:

(i) به ازاء هردو عضو a و b در S ، $a\oplus b\epsilon S$. خواننده به‌خاطر میاورد که علامت $a\epsilon S$ گزارهٔ «a عضو S است» را نمایش می‌دهد.

(ii) $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$

(iii) عضو $e\epsilon S$ی چنان موجودباشدکه به‌ازاء هر$a\epsilon S$ ، $a\oplus e=e\oplus a=a$ ؛ e به عضو عینیت[2] موسوم است.

(iv) به ازاء هرعضو $a\epsilon S$ ، عضو a^{-1}ی ، موسوم به معکوس a ، چنان موجود باشد که :

$$a\oplus a^{-1}=a^{-1}\oplus a=e$$

اکنون ثابت می‌کنیم که اعداد صحیح، تحت جمع، این خواص را برقرارمی‌کنند.

(i) اگر a و b اعداد صحیح باشند، دراین صورت $a+b$ واضحاً عدد صحیح است.

(ii) اگر a ، b ، وc اعدادصحیح‌باشند، دراین‌صورت $(a+b)+c=a+(b+c)$، قانون شرکت پذیری جمع، که واضحاً راست است.

(iii) صفر، «۰» ، به‌طور واضح e است.

(iv) a^{-1} ، $-a$ است. توجه داشته باشیدکه $a^{-1}\neq 1/a$ است وبه صورت عضوی چنان تعریف شده که $a+a^{-1}=e$.

درعین حال باید توجه داشت‌که اعداد صحیح دارای خواصی هستندکه‌لازم‌نیست درمورد گروهها صادق باشند. به‌عنوان‌مثال، اعدادصحیح‌دارای‌خاصیت $a+b=b+a$، خاصیت تعویض پذیری، اند، که درمورد بسیاری گروهها برقرارنیست.

1. abstract system
2. identity element

اکنون به دوخاصیت اعداد صحیح توجه کرده، سعی در اثبات آنها برای گروهها درحالت کلی می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که عینیت ۰ منحصر به‌فرد می‌باشد و هرعددصحیح a دارای عضومعکوس $-a$ است. دراین صورت دوخاصیت زیررا در مورد گروهها در حالت کلی اثبات می‌کنیم:

خاصیت ۱ : هر گروه دارای یك عینیت منحصر به‌فرد است.

اثبات:

فرض میکنیم گروهی با دوعینیت، e_1 و e_2 موجود است. دراین صورت به ازاء هرعضو $a \in S$ ، $e_1 \oplus a = e_2 \oplus a = a$. واضح است که:

$$e_1 \oplus (a \oplus a^{-1}) = e_2 \oplus (a \oplus a^{-1}) = a \oplus a^{-1}$$

اما ، بنا به تعریف a^{-1} ، $e_1 \oplus (a \oplus a^{-1}) = e_1$ ، و $e_2 \oplus (a \oplus a^{-1}) = e_2$. به این ترتیب، $e_1 = e_2$ که با این فرض،که دوعضو عینیت وجود دارد، متناقض است.

خاصیت ۲ : هرعضو گروه، دارای یك معکوس منحصر به فرد است.

اثبات:

فرض می‌کنیم عضو $a \in S$ ی‌که دارای دومعکوس a_1^{-1} و a_2^{-1} است وجود دارد. دراین صورت :

$$(a_1^{-1} \oplus a) \oplus a_1^{-1} = (a_2^{-1} \oplus a) \oplus a_1^{-1} = a_1^{-1}$$

یا

$$a_1^{-1} \oplus (a \oplus a_1^{-1}) = a_2^{-1} \oplus (a \oplus a_1^{-1})$$

یا

$$a_1^{-1} \oplus e = a_2^{-1} \oplus e$$

یا

$$a_1^{-1} = a_2^{-1}$$

که با این فرض، که برای a دومعکوس موجود است، درتناقض است.

بحث چند دستگاه جبری دیگر، به‌صورت مسائل تکلیفی داده شده، و بحث کامل در کتاب شماره ۴ فهرست کتب مرجع آمده است.

مثال ۱۲.۸ به‌عنوان مثال دیگری ازمورد استفادهٔ تمثیل، بعضی ازخواص منطق علامتی را موردبررسی قرارمی‌دهیم. درفصل ۲ ذکر کردیم که چندین خاصیت اساسی را می‌توان از جداول ارزش استخراج کرد و این خواص به نوبت خود می‌توانند برای اعمال جبری گوناگون گزاره‌های منطقی به‌کار روند. ازآنجاکه مایلیم منطق علامتی را، به‌عنوان جبر، مورد بررسی قرار دهیم مفید است که از لحاظ تمثیل تنها آن نوع جبر را که اکثر دانش‌آموزان با آن آشنا هستند، یعنی جبر عملیات محاسباتی را به‌کار بریم. دراین جبر غالباً سه علامت اساسی: $=$ ، $+$ ، و $\times$ رخ می‌دهند. دراین صورت اگر اصولاً تمثیل مورد بحث معنی داشته باشد $=$ و $\Longleftrightarrow$ باید دارای معنی مشابه باشند، وچنین اتفاق میفتد که $\vee$ متناظر $+$ و $\wedge$ متناظر $\times$ باشد. با این تمثیل، می‌توانیم خواص خاصی از منطق علامتی را به‌دست آوریم. و دراینجا کار خودرا به دو خاصیت ازچنین خواصی محدود می‌کنیم. اثباتها با استفاده ازجداول ارزش استخراج می‌شوند.

(i) درمورد اعداد اگر $a=b$، در این صورت $a+c=b+c$. خاصیت مشابه این خاصیت در مورد منطق علامتی، عبارت از اینست که، اگـر $Q \Longleftrightarrow P$، در این صورت $(Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \vee R)$. اکنون جدول ارزش را دراین حالت مورد بررسی قرارمی‌دهیم (جدول ۱۲.۲ را ملاحظه کنید). این خاصیت درجدول ۱۲.۲ مورد اثبات قرار گرفته است.

(ii) به عنوان مثال دوم، بگذارید خاصیت توزیع‌پذیری را اثبات کنیم. این خاصیت در مورد اعداد براین است که: $a(b+c)=ab+ac$ ، و در مورد منطق علامتی براین خواهد بود که:

$$P \wedge (Q \vee R) \Longleftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

بار دیگر این خاصیت را بااستفاده از جدول ارزشی که در جدول ۱۲.۳ داده‌شده است اثبات می‌کنیم.

جدول ۱۲.۲

P	Q	R	$P \Leftrightarrow Q$	$P \vee R$	$Q \vee R$	$(P \vee R) \Leftrightarrow (Q \vee R)$	$(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow [(P \vee R) \Leftrightarrow (Q \vee R)]$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	F	T	T

جدول ۱۲.۳

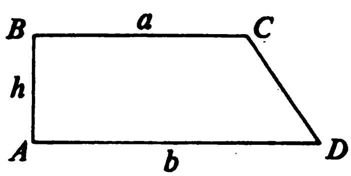
P	Q	R	$Q \vee R$	$P \wedge (Q \vee R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

جدول فوق خاصیت (ii) را اثبات میکند.

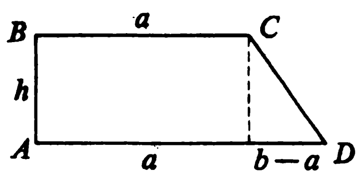
دراین‌مرحله، لازم است که اخطاری‌داده شود وآن اینست که هرچند جبراعدادوجبر بول دارای خواص مشترك بسیاری هستند، هم ارزنیستند. یعنی قضایایی موجودندکه در مورد اعداد حقیقی صادقند، در حالیکه قضایای منطق علامتی مشابه‌شان برقـرار نیستند. چندین مثال دیگرمنطق علامتی درضمن مسائل تکلیفی آورده شده‌اند.

تکالیف و مسائل فصل ۱۲

۱. (a) ذوزنقهٔ $ABCD$ ، از شکل ۱۲.۶a، را درنظر می‌گیریم. از راهنمائی داده‌شده درشکل ۱۲.۶b، برای به‌دست‌آوردن فورمولی برای‌مساحت ذوزنقه استفاده‌کنید.

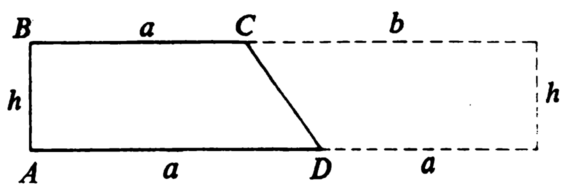


شکل ۱۲.۶a



شکل ۱۲.۶b

(b) اکنون از شکل ۱۲.۶c ، برای به‌دست‌آوردن فورمول مساحت ذوزنقه استفاده کنید.



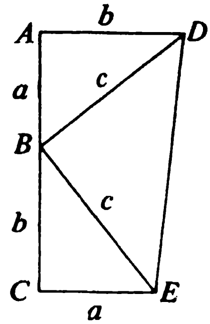
شکل ۱۲.۶c

۲. قضیهٔ فیثاغورس براین است که : مجموع مربعات دوضلع یك مثلث قائم‌الزاویه‌برابر مربع وترآن است. قضیه را باکمك شکل ۱۲.۷ اثبات‌کنید. یعنی نشان دهیدکه:

$$a^2+b^2=c^2$$

برای این منظور:

(a) مساحت ذوزنقهٔ $ACDE$ را به دست آورید.
(b) مساحات مثلثهای ABD ، BCE ، و BDE را به‌دست آورید.
(c) نتیجهٔ (a) را با نتیجهٔ (b) مساوی قرارداده، $c^۲$ را به‌دست‌آورید.



شکل ۱۲۰۷

۳. فرض می‌کنیم x و y دوعدد باشند. نشان دهیدکه :

$$(|x|+|y|)\geqslant\sqrt{x^۲+y^۲}$$

۴. نشان دهید به‌ازاء هر x درفاصلهٔ $۱۰ \leqslant x \leqslant ۱$:

$$\log_{۱۰}^{x} \geqslant \frac{۱}{۹(x-۱)}$$

۵. نشان دهیدکه :

$$\log_{۱۰}^{x}\leqslant x$$

۶. نشان دهیدکه :

$$\log_{۱۰}^{x}\leqslant x-۱$$

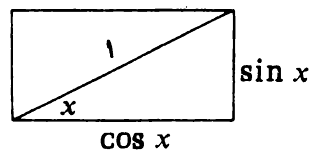
۷. نشان دهید به ازاء جمیع مقادیرx درفاصلهٔ $۱ \leqslant x \leqslant ۰$:

$$۱۰^{x}\leqslant ۹x+۱$$

۸. نشان دهید به ازاء جمیع مقادیر x درفاصلهٔ $۹۰^\circ \leqslant x \leqslant ۰$:

$$(\sin x)(\cos x) \leqslant \frac{۱}{۲}$$

راهنمایی : از شکل ۱۲.۸ استفاده کنید.



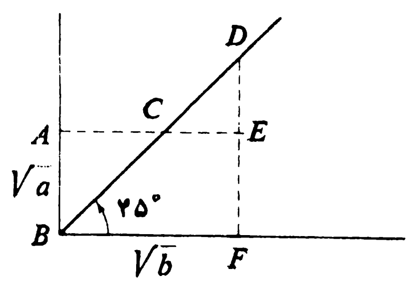
شکل ۱۲.۸

۹. در مثال ۱۲.۳ ، برای اثبات : $\sqrt{ab} \leqslant (a+b)/۲$ ، که در آن a و b دو عدد مثبت‌اند، از روش تصویری[1] استفاده کردیم. این بار آن را با کمك شکل ۱۲.۹ ثابت می‌کنیم. برای این منظور:

(a) مساحت مستطیل $ABEF$ را حساب کنید.

(b) مساحات مثلثهای ABC و BDF را حساب کنید.

(c) برای به دست آوردن $\sqrt{ab} \leqslant (a+b)/۲$ ، (a) و (b) را مقایسه کنید.



شکل ۱۲.۹

۱۰. نشان دهید به ازاء هر x واقع در فاصلهٔ $۰ \leqslant x \leqslant \pi/۲$ ، $\cos x \geqslant ۱ - (۲/\pi)x$

۱۱. در مثال ۱۲.۱ ، با در نظر گرفتن π به عنوان نسبت محیط یك دایره به قطر آن، فاصله‌یی برای π به‌دست آوردیم. اکنون π را به عنوان نسبت مساحت یك دایره بر مربع شعاعش درنظرمی‌گیریم. با شروع با این فرض، از شکل ۱۲.۱ برای به

---

1. pictorial approach

دست‌آوردن فاصله‌یی برای π استفاده‌کنید. چگونه این فاصله با فاصلهٔ مثال ۱۲۰۱ مقایسه می‌شود؟

۱۲. فرض می‌کنیم با امتحان تستهای چند جوابی مواجه شده باشیم وازماخواسته‌باشند که حجم کره‌یی با شعاع ۱ را پیداکنیم. درصورتیکه فورمول‌حجم‌کره را فراموش کرده باشیم‌کدامیك از جوابهای زیررا انتخاب می‌کنیم و چرا ؟

(a) $\frac{۳}{۴}\pi$، (b) ۱، (c) $\frac{۴}{۳}$ (d) ۳π

(e) ۴/۱۹ (f) ۰/۷۵۷

۱۳. با استفاده ازروش نموداری‌نشان‌دهید: $p(۱-p)\leqslant ۱/۴$، که درآن $۰\leqslant p\leqslant ۱$ است.

۱۴. با استفاده از مکعبها نشان دهیدکه :

$$\sum_{i=۱}^{n}[۳(i-۱)^۲+۳i-۲]=n^۳$$

۱۵. درمثال ۱۲۰۸، تمثیل بین $=$ و $\Longleftrightarrow$ را به‌کاربردیم. دومثال به‌دست دهیدکه در مورد تعادل درستند و درمورد تساوی بین اعداد درست نیستند.

۱۶. $\geqslant$ را با $\Longleftarrow$ مقایسه کنید. به عبارت دیگـر، وابستگی $a\geqslant b$ با $A\Longrightarrow B$ را مشخص کرده، از این تمثیل بـرای اثبات پنج گزارهٔ علامتی شامل $\Longleftarrow$ استفاده کنید.

۱۷. دوخاصیت بیابیدکه درمورد $\Longleftarrow$ راست باشند، اما درمورد $\geqslant$ راست نباشند.

درمسائل ۲۰-۱۸، توابعی را مورد بررسی قرار داده‌ایم‌که دامنه‌ها وحوزه‌هاشان شامل مجموعهٔ اعداد حقیقی یا زیرمجموعه‌یی ازاعداد حقیقی‌اند.

۱۸. تابع $f(x)$ را،که درخاصیت $f(xy)=f(x)+f(y)$ صادق است، بیابید.

(a) کدام تابع را به‌عنوان تمثیل $f(x)$ به‌کارمی‌برید؟

(b) پنج خاصیت $f(x)$ را به‌دست بیاورید.

(c) اکنون، خواصی را به‌دست‌آوریدکه درمورد $f(x)$ راستند، اما درمورد تابع (a) چنین نیستند.

۱۹. تابع $f(x)$ دارندهٔ خاصیت: $f(ax+b)=af(x)+b$ ، که در آن a و b اعداد حقیقی‌اند، را بیابید.

(a) کدام تابع را برای تمثیل با $f(x)$ به‌کار می‌برید؟

(b) $f(c)$ ، که در آن c عددی حقیقی است، را مشخص کنید.

۲۰. فرض می‌کنیم $f(x)$ دارای خاصیت $f(ax)=a^2f(x)$ باشد.

(a) کدام تابع را به‌عنوان تمثیل $f(x)$ به‌کار می‌برید؟

(b) صورت کلی $f(x)$ را به‌دست آورید.

۲۱. سه مثال از گروهها به‌دست دهید.

۲۲. گروهی را درنظر می‌گیریم که دارای خاصیت $a\oplus a=a$ درمورد تمام اعضاء aی گروه است. عضو عمومی این گروه را توصیف کنید.

۲۳. دستگاه شامل مجموعهٔ I و دوعمل $\oplus$ و $\odot$ ، بین ازواج عضوهای این مجموعه، «حلقه[1]» نامیده می‌شود اگرخواص زیررا برقرار کند : به ازاء هرعضو a و b که اعضاء I اند (هنگامیکه سه عضو به‌کار می‌رود a ، b ، $c\in I$)

(i) $a\oplus b\in I$

(ii) $(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$

(iii) عضو e چنان موجود است که: $a\oplus e=a=e\oplus a$

(iv) عضو $(-a)$ چنان موجود است که: $a\oplus(-a)=e=(-a)\oplus a$

(v) $a\oplus b=b\oplus a$

(vi) $a\odot b\in I$

(vii) $(a\odot b)\odot c=(a\odot b)\odot c$

(viii) $a\odot(b\oplus c)=(a\odot b)\oplus(a\odot c)$

(ix) $(b\oplus c)\odot a=(b\odot a)\oplus(c\odot a)$

با استفاده از این خواص:

(a) سه مثال از حلقه به‌دست دهید.

---

1. ring

(b) نشان دهیدکه اگر a ، $b \epsilon I$ ، دراین صورت:

$$[-(a \oplus b)] = [(-a) \oplus (-b)]$$

(c) نشان دهیدکه به ازاء جمیع مقادیر $a \epsilon I$:

$$a \odot e = e$$

(d) نشان دهیدکه:

$$((-a) \odot (-b)) = a \odot b$$

Chapter 13 فصل ۱۳

خلاصه

Summary

در این مرحله، خواننده روشهای گوناگونی را، که می‌توانند در اثبات قضایای ریاضی مفید باشند، آموخته است. فرصتهائی داده شده که درمورد هر فن، با استفاده از حل مسائل در پایان کتاب، تمرین شود. این مسائل را اتفاقی انتخاب نکرده‌ایم، بلکه چنان برگزیده شده‌اند که بتوان از فن تحت بررسی، در اثباتشان استفاده کرد، و این روش، با قصد اولیه از فصل ۶ تا ۱۲، که بیشتر از آنکه به‌کار طبقات عمومی مسائل ریاضی بپردازد به معرفی و تمرین روشی خاص می‌پرداخت، سازگار است.

روش مزبور برای این طرح شده که روشهای گوناگون اثبات ریاضی را معرفی کند و به دانش‌آموز بیاموزد که اثباتها را با فنون متفاوت انجام دهد. در عمل ممکن است اجرای یك اثبات بسیار مشکل‌تر باشد زیرا، در بیشتر اوضاع عملی، هیچ راهنمائی‌یی در مورد اینکه کدام روش اثبات به‌کار رود یاچگونه اقدام شود داده نشده است. امکان دارد که کار را با روشی آغاز کرده، گرفتار اثباتی بسیار مشکل و طولانی شویم، در حالیکه روش دیگری میتوانست به اثباتی کوتاه و ظریف منجر شود و پیش از اینکه شخص بتواند روشی که منجر به اجرای فشردهٔ اثباتی میشود، را به آسانی انتخاب کند به تجربهٔ قابل ملاحظه‌یی نیاز دارد. در اثبات نتایج، علاوه براین مهارت گسترده، به

توانائی اجرای اثبات، بعد از اینکه در مورد روش مناسبی، تصمیم گرفته شد، نیاز است.

در این کتاب، چندین مثال با روشهای گوناگون اثبات شده‌اند، واین‌عمل، ازروی عمد، برای توضیح این حقیقت که یك قضیه را میتوان با روشهای گوناگون اثبات کرد و بعضی از این روشها آسان‌تر ازروشهای دیگرند، انجام گرفته است. ودراین موردممکن است روشی که در اثبات قضیه‌یی آسان است در مورد دیگری بسیار مشکل باشد. مثلاً در نتیجهٔ:

$$\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2} \text{ و } \sqrt{ab}\leqslant \frac{a+b}{2}\text{، } a\geqslant 0\text{، } b\geqslant 0 \text{ چون}$$

بارها اثبات شده‌اند، و در مورد هر یك از آنها میتوان پیچیده‌ترین اثبات را در فصل ۱۲ و آسان‌ترین اثبات را به ترتیب در فصول ۷ و ۸ یافت. بـه همین ترتیب، مسألـهٔ تکلیفی ۲ در فصل ۱۲، شامل اثبات نسبةً ساده‌یی از قضیهٔ فیثاغورس است، در حالیکه اثبات مشکلی از این قضیه ممکن است به طریقی پیچیده‌تر باشد.

این فصل، که فصل آخراست، را میتوان به‌عنوان فصل خلاصهٔ مطالب قبل در نظر گرفت. مسائل واقع درآن منحصر به روش خاصی نیست؛ و انتخاب روش منـاسب به عهدهٔ خواننده واگذار شده است. درمورد بعضی مثالها چندین طریق مختلف امکان‌پذیر است، و دانشجو باید برای اقدام به اثبات، روش مناسب را انتخاب کند. از آنجا که روشهای گوناگونی به‌کار میرود، ممکن است خواننده این فصل را بـه‌عنوان «امتحان نهائی»[1] یا، حداقل مرور در نظر بگیرد، و اگر آن را بـه‌گونه‌یی معقول ساده بیابـد و اشکال کمی در مورد مسائل پایان فصل داشته باشد، در این صورت فنون اساسی انجام اثباتها را آموخته و برای مطالعهٔ مطالب پیشرفته آماده است. اما اگر در مورد این‌فصل اشکال بسیار دارد باید فصلهای مناسب پیشین را بار دیگر بررسی کند؛ چـه اشکال در این فصل، مشخص اینست که مفاهیم موجود در مطالب قبل به طور کامل فرا گرفته نشده است.

اکنون به بررسی چند مثال توضیحی می‌پردازیم.

مثال ۱۳.۱ بی‌نهایت عدد اصم موجود است.

در نگاه اول به نظر میرسد که اثبات این گزاره مشکل باشد. اما، در عمل، اثبات، بسیار ساده است.

1.final exam

درمثال ۹.۴، نشان داده شدکه، اگر R عدد گویای نا صفری و X عدد اصمی باشد، RX نیز اصم است. اثبات مورد بحث مستقیماً ازاین گزاره حاصل میشود. به عنوان مثال، فرض می کنیم R عدد طبیعی N و $X=\sqrt{2}$ باشد، در این صورت میدانیم که $N\sqrt{2}$ به ازاء هر عدد طبیعی N اصم است. از آنجا که بی‌نهایت عدد طبیعی موجود است، نتیجه میشود که بی‌نهایت عدد اصم به‌صورت $N\sqrt{2}$ وجود دارد، و به این ترتیب نتیجه اثبات می‌شود.

مثال ۱۳.۲ بین هر دو عدد گویای نایکسان[1] بی‌نهایت عدد گویا موجود است.

اثبات :

باز هم در این مورد گزاره‌یی داریم که پیچیده به‌نظر میرسد، درحالیکه اثبات آن کاملاآسان است. اولین مرحله درهر اثبات، جمع آوری تمام گزاره‌های مربوط یا مشابهی، که قبلاً اثبات شده‌اند، است، چه بسیار محتمل است که یکی از این گـزاره‌ها کلید حل مسألهٔ مورد بحث را به دست دهد. در مثال ۱۰.۲ نشان داده شدکـه، بین هـر دو عدد گویا، عدد گویای دیگری وجود دارد. از این حقیقت بـه عنوان مبنائـی در اثبات غیر مستقیم و سادهٔ گزاره‌مان استفاده می کنیم.

اکنون اقدام به‌اثبات گزاره میکنیم. فرض میکنیم گزارهٔ مزبور ناصحیح باشد،یعنی، بین هر دو عدد گویا بی‌نهایت عدد گویا موجود نباشد. از آنجاکـه قبلاً نشان داده‌ایم که بین هر دو عددگویا عددگویای دیگری موجود است، این فرض که بی‌نهایت عـدد گویا بین هردو عدد گویا موجود **نیست** مستلزم اینست که تعدادی متناهی از آنها، مثلاً N عدد، موجود است. دراین صورت اگردوعدد گویامان a و b باشند، a_1 ، a_2 ، a_3، . . . ،a_N، که‌درآن $a<a_1<a_2<a_3<\cdots<a_N<b$ است، را می‌توان به‌عنوان N عدد گویای بین a و b در نظر گرفت. از آنجاکه a و a_1 گویا هستند و $a<a_1$،در این صورت عددگویائی بین a و a_1 موجود است، و این فرض را که دقیقاً Nعددگویا بین a و b موجود است نقض میکند، وگزارهٔ مثال ۱۳.۲ اثبات میشود.

مثال ۱۳.۳ نشان دهیدکه:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i\right)^2 \qquad (۱۳.۱)$$

---

1. nonidentical

نا مساوی (۱۳.۱) به نامساوی کوشی-شوارتز[1] موسوم، و به ازاء هر اعداد حقیقی X_1، X_2، ...، X_n و Y_1، Y_2، ...، Y_n راست است. ازآنجاکه این نامساوی شامل n است، سعی میکنیم آن را با استفاده از استقراء ریاضی حل کنیم.

به ازاء $n=1$، داریم:

$$\Big(\sum_{i=1}^{1} X_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{1} Y_i^2\Big) \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{1} X_iY_i\Big)^2$$

یا

$$X_1^2Y_1^2 \geqslant X_1^2Y_1^2$$

که واضحاً راست است. اکنون فرض میکنیم گزاره به ازاء $n=r$ صادق است. یعنی:

$$\Big(\sum_{i=1}^{r} X_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r} Y_i^2\Big) \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{r} X_iY_i\Big)^2$$

بعد باید نشان بدهیم که نامساوی به ازاء $n=r+1$ برقرار است. یعنی:

$$\Big(\sum_{i=1}^{r+1} X_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r+1} Y_i^2\Big) \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{r+1} X_iY_i\Big)^2$$

اما

$$\Big(\sum_{i=1}^{r+1} X_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r+1} Y_i^2\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{r} X_i^2 + X_{r+1}^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r} Y_i^2 + Y_{r+1}^2\Big)$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{r} X_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r} Y_i^2\Big) + Y_{r+1}^2\Big(\sum_{i=1}^{r} X_i^2\Big)$$

$$+ X_{r+1}^2\Big(\sum_{i=1}^{r} Y_i^2\Big) + X_{r+1}^2Y_{r+1}^2$$

$$\geqslant \Big(\sum_{i=1}^{r} X_iY_i\Big)^2 + Y_{r+1}^2\Big(\sum_{i=1}^{r} X_i^2\Big)$$

$$+ X_{r+1}^2\Big(\sum_{i=1}^{r} Y_i^2\Big) + X_{r+1}^2Y_{r+1}^2$$

در بالا از این فرض که:

$$\Big(\sum_{i=1}^{r} X_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{r} Y_i^2\Big) \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{r} X_iY_i\Big)^2$$

است استفاده کردیم. در این مرحله باید به خاطر داشته باشیم که می‌خواهیم عبارت فوق

1. Cauchy – Schwarz

را با $\left(\sum_{i=1}^{r+1} X_iY_i\right)^2$ مقایسه کنیم، زیرا گزارهٔ اصلی:

$$\left(\sum_{i=1}^{r+1} X_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{r+1} Y_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{r+1} X_iY_i\right)^2$$

است. اما:

$$\left(\sum_{i=1}^{r+1} X_iY_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{r} X_iY_i + X_{r+1}Y_{r+1}\right)^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{r} X_iY_i\right)^2 + 2X_{r+1}Y_{r+1}\left(\sum_{i=1}^{r} X_iY_i\right) + X_{r+1}^2Y_{r+1}^2$$

به این ترتیب، برای اثبات نتیجهٔ مورد نظر، لازم است که نشان دهیم که:

$$Y_{r+1}^2\left(\sum_{i=1}^{r} X_i^2\right) + X_{r+1}^2\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i^2\right) + X_{r+1}^2Y_{r+1}^2 \geqslant$$

$$2X_{r+1}Y_{r+1}\left(\sum_{i=1}^{r} X_iY_i\right) + X_{r+1}^2Y_{r+1}^2$$

یا

$$Y_{r+1}^2\left(\sum_{i=1}^{r} X_i^2\right) + X_{r+1}^2\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i^2\right) \geqslant 2X_{r+1}Y_{r+1}\left(\sum_{i=1}^{r} X_iY_i\right) \qquad (۱۳.۲)$$

ممکن است با استفاده از استقراء ریاضی، سعی در اثبات نامساوی اخیر کنیم. اما راه ساده‌تر آنست که توجه کنیم که نا مساوی (۱۳.۲) را میتوان به صورت:

$$Y_{r+1}^2\left(\sum_{i=1}^{r} X_i^2\right) - 2X_{r+1}Y_{r+1}\left(\sum_{i=1}^{r} X_iY_i\right) + X_{r+1}^2\left(\sum_{i=1}^{r} Y_i^2\right) \geqslant 0$$

یا

$$\sum_{i=1}^{r} (X_{r+1}Y_i - Y_{r+1}X_i)^2 \geqslant 0$$

نوشت. ازآنجاکه $(X_{r+1}Y_i - Y_{r+1}X_i)^2$ مربع یک عدد حقیقی است، باید نامنفی باشد. بنابراین، $\sum_{i=1}^{r}(X_{r+1}Y_i - Y_{r+1}X_i)^2 \geqslant 0$. این مطلب، نامساوی (۱۳.۲) را اثبات میکند و به این ترتیب نامساوی (۱۳.۱) محقق میشود.

این اثبات نا مساوی کوشی ـ شوارتز نسبةً پیچیده است، و ممکن است روشی ساده‌تر، مناسب‌تر باشد. اثباتی‌مشابه با اثبات نامساوی (۱۳.۲)، این کار راانجام‌میدهد. در این صورت برای اثبات نامساوی (۱۳.۱) از روش اخیر استفاده میکنیم.

$(aX_i+Y_i)^۲$ را در نظر می گیریم. واضحست که، $(aX_i+Y_i)^۲ \geqslant ۰$. بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{n}(aX_i+Y_i)^۲ \geqslant ۰$$

یا

$$a^۲\Big(\sum_{i=۱}^{n}X_i^۲\Big)+۲a\Big(\sum_{i=۱}^{n}X_iY_i\Big)+\sum_{i=۱}^{n}Y_i^۲ \geqslant ۰$$

از آنجاکه:

$$f(a)=a^۲\sum_{i=۱}^{n}X_i^۲+a\Big(۲\sum_{i=۱}^{n}X_iY_i\Big)+\sum_{i=۱}^{n}Y_i^۲$$

تابع درجه دومی برحسب a و $f(a) \geqslant ۰$، به ازاء جمیع مقادیر a، است، منحنی آن نمیتواند زیر محور aها واقع شود و تابع میتواند یا دقیقاً یك صفر حقیقی داشته باشد یا صفر حقیقی نداشته باشد (شکل ۱۳.۱ را ملاحظه کنید).

از آنجاکه جواب (های) $f(a)=۰$ از:

$$a=\frac{-۲\sum_{i=۱}^{n}X_iY_i \pm \sqrt{۴\Big(\sum_{i=۱}^{n}X_iY_i\Big)^۲-۴\Big(\sum_{i=۱}^{n}X_i^۲\Big)\Big(\sum_{i=۱}^{n}Y_i^۲\Big)}}{۲\sum_{i=۱}^{n}X_i^۲}$$

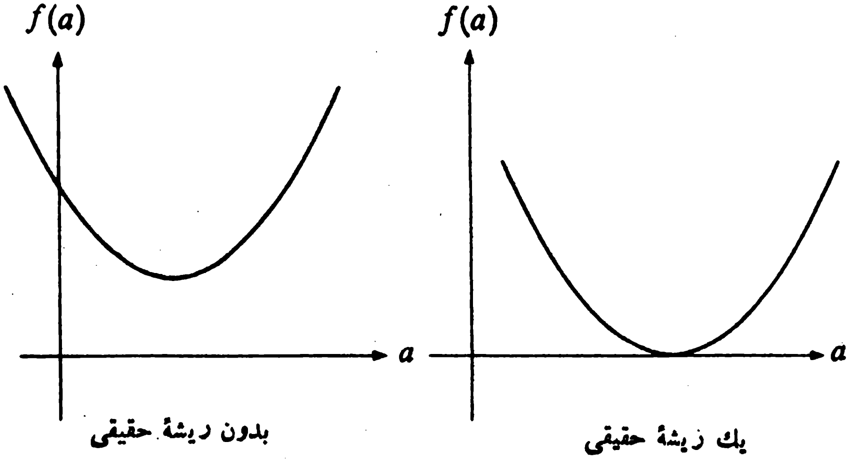
داده میشود باید داشته باشیم:

$$۴\Big(\sum_{i=۱}^{n}X_iY_i\Big)^۲-۴\Big(\sum_{i=۱}^{n}X_i^۲\Big)\Big(\sum_{i=۱}^{n}Y_i^۲\Big) \leqslant ۰$$

چه در غیر این صورت دو ریشهٔ حقیقی خواهیم داشت. بنابراین:

$$۴\Big(\sum_{i=۱}^{n}X_iY_i\Big)^۲ \leqslant ۴\Big(\sum_{i=۱}^{n}X_i^۲\Big)\Big(\sum_{i=۱}^{n}Y_i^۲\Big)$$

یا سرانجام:



شکل ۱۳۰۱

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_iY_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right)$$

اثبات اخیر به‌هوش بیشتری نیاز دارد اما در عمل بسیار ساده‌تر است.

مثال ۱۳۰۴ به ازاء هر مقادیر مثبت $Z_i > 0$، نشان دهیدکه:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{Z_i}\right) \geqslant n^2$$

بازهم میتوانیم کوشش کنیم نامساوی فوق را با استفاده از استقراء ریاضی اثبات کنیم. اما با توجه به اینکه این نامساوی مشابه به نامساوی کوشی- شوارتز است میتوان از انجام عملیات بسیار، جلوگیری کرد. در واقع به‌نظر میرسد کـه نامساوی مورد بحـث حالت خاصی از نامساوی کوشی ـ شوارتز باشد. در این صورت سعی میکنیم مقادیر Z_i را به شکل نامساوی کوشی-شوارتز قرار داده به‌اثبات نتیجه بپردازیم. ابتدا:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{Z_i}\right) \text{ را به‌صورت } \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sum_{i=1}^{n} Y_i^2$$

می‌نویسیم، دراین صورت‌واضحست که $X_i=\sqrt{Z_i}$ و $Y_i = 1/\sqrt{Z_i}$. و ازآنجا که:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} X_iY_i\right)^2$$

داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} Z_i \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{Z_i}\right) \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n}(\sqrt{Z_i})\left(\frac{1}{\sqrt{Z_i}}\right)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} 1\right]^2 = n^2$$

و به این ترتیب قضیه ثابت میشود.

مهمترین قسمت اثبات فوق شناختن نامساوی به‌صورت‌حالت خاصی از نتیجه‌یی قبلاً ثابت شده است. تنها در مواقع بسیار نادر است که باید اثباتی را از ابتدا آغاز کنیم و تمام مراحل آن را مانند اینکه اصلا چیزی درمورد آن نمیدانیم انجام دهیم. در اکثر حالات میتوان از حقایق بسیار قبلاً محقق شده در اثبات قضیهٔ مورد علاقه استفاده کرد.

ضرایب دوجمله‌یی — Binomial Coefficients

علامت فاکتوریل[1] به طور وسیعی درریاضیات به‌کار میرود. در اینجا به معرفی این علامت می‌پردازیم، و بعضی از خواص ضرایب دو جمله‌یی را ثابت میکنیم. $n!$ را به صورت فاکتوریل n[2] می‌خوانیم؛ علامت مذکور به‌صورت:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(1)$$

تعریف شده و، بنا به قرارداد، $0! = 1$ است. در این مورد مثالهای زیر رادرنظر میگیریم:

$$3! = (3)(2)(1) = 6$$

$$5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$$

$$3!\,2! = (3)(2)(1)(2)(1) = 12$$

$$\frac{2!}{4!} = \frac{(2)(1)}{(4)(3)(2)(1)} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{3!}{0!} = \frac{(3)(2)(1)}{(1)} = 6$$

ضرایب بسط $(a+b)^n$ به ضرایب دو جمله‌یی موسومند. آنها را با $\binom{n}{r}$، که در آن $0 \leqslant r \leqslant n$ است، مشخص میکنیم. بعداً نشان خواهیم داد که:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

1. factorial notation 2. n factorial

با فرض راست بودن این رابطه می‌توانیم محاسبات زیررا انجام دهیم:

$$\binom{۳}{۲} = \frac{۳\,!}{۲\,!\,۱\,!} = \frac{(۳)(۲)}{(۲)(۱)} = ۳$$

$$\binom{۵}{۲} = \frac{۵\,!}{۲\,!\,۳\,!} = \frac{(۵)(۴)(۳)(۲)}{(۲)(۳)(۲)} = ۱۰$$

$$\binom{۶}{۳} = \frac{۶\,!}{۳\,!\,۳\,!} = \frac{(۶)(۵)(۴)(۳)(۲)}{(۳)(۲)(۳)(۲)} = ۲۰$$

اکنون از این تعریف ضرایب دو جمله‌یی استفاده کرده، بعضی خواص شامل آنها را اثبات می‌کنیم.

مثال ۱۳.۵ نشان دهیدکه:

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad ، \quad ۰ \leqslant r \leqslant n$$

اثبات:

$$\binom{n}{r} = \frac{n\,!}{r\,!\,(n-r)\,!} \qquad (۱۳.۳)$$

$$\binom{n}{n-r} = \frac{n\,!}{(n-r)\,![n-(n-r)]!} = \frac{n\,!}{(n-r)\,!\,r\,!} \qquad (۱۳.۴)$$

از آنجاکه معادلات (۱۳.۳) و (۱۳.۴) برابرند، اثبات کامل است.

مثال ۱۳.۶ نشان دهیدکه به ازاء هرعدد طبیعی n :

$$\binom{n+۱}{i} = \binom{n}{i} + \binom{n}{i-۱}$$

دراینجا i می‌تواند ۱، ۲، ۳، ۴، . . . ، n باشد.

اثبات:

$$\binom{n+۱}{i} = \frac{(n+۱)\,!}{i\,!\,(n+۱-i)\,!} = \frac{n\,!}{(i-۱)\,!\,(n-i)\,!}\left[\frac{(n+۱)}{i(n-i+۱)}\right]$$

$$=\frac{n!}{(i-۱)!(n-i)!}\left[\frac{i}{i(n-i+۱)}+\frac{n-i+۱}{i(n-i+۱)}\right]$$

$$=\frac{n!}{(i-۱)!(n-i)!}\left[\frac{۱}{(n-i+۱)}+\frac{۱}{i}\right]$$

$$=\frac{n!}{(i-۱)!(n-i+۱)!}+\frac{n!}{i!(n-i)!}=\binom{n}{i-۱}+\binom{n}{i}$$

و به این ترتیب اثبات این اتحاد تکمیل می‌شود.

مثال ۱۳.۷ ثابت کنید به ازاء هرعدد صحیح نامنفی n :

$$\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\binom{n}{۲}+\cdots+\binom{n}{n}=۲^n \qquad (۱۳.۵)$$

از آنجاکه تساوی فوق شامل عدد صحیح n است، سعی می‌کنیم که دراثبات‌آن از استقراء ریاضی استفاده‌کنیم.

به ازاء $n=۰$ ، $۱=\binom{۰}{۰}$ و $۱=۲^۰$. فرض می‌کنیم تساوی (۱۳.۵) بـه ازاء $n=k$ راست باشد. بنابراین باید مبرهن‌کنیم اگر :

$$\binom{k}{۰}+\binom{k}{۱}+\binom{k}{۲}+\cdots+\binom{k}{k}=۲^k$$

دراین صورت :

$$\binom{k+۱}{۰}+\binom{k+۱}{۱}+\cdots+\binom{k+۱}{k+۱}=۲^{k+۱}$$

برای این منظور ازنتیجهٔ مثال ۱۳.۶ استفاده می‌کنیم. ابتدا توجه می‌کنیم‌که به ازاء هر عدد طبیعی r :

$$\binom{r}{۰}=\binom{r}{r}=۱$$

اما :

$$\binom{k+۱}{۰}+\binom{k+۱}{۱}+\binom{k+۱}{۲}+\cdots+\binom{k+۱}{k+۱}$$

$$=۱+\left[\binom{k}{۰}+\binom{k}{۱}\right]+\left[\binom{k}{۱}+\binom{k}{۲}\right]+\left[\binom{k}{۲}+\binom{k}{۳}\right]+\cdots$$

$$+\left[\binom{k}{k-1}+\binom{k}{k}\right]+\binom{k+1}{k+1}$$

$$=2\binom{k}{0}+2\binom{k}{1}+2\binom{k}{2}+\cdots+2\binom{k}{k}$$

$$=2\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}=2(2)^k=2^{k+1}$$

و به‌این ترتیب اثبات تساوی (۱۳.۵) تکمیل می‌شود. بعداً اثبات ساده‌تری درمورد این تساوی داده خواهد شد.

مثال ۱۳.۸ ملاحظه می‌کنیم که :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

دراین صورت آیا می‌توانیم عبارت عمومی $(a+b)^n$، که در آن n عدد صحیح نامنفی‌یی است را به‌دست‌آوریم؟ نشان داده می‌شودکه :

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n b^0+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\cdots+\binom{n}{n}a^0 b^n$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i \qquad (۱۳.۶)$$

تساوی (۱۳.۶) به قضیهٔ دو جمله‌یی موسوم است.

اثبات :

به ازاء $n=0$ ، $(a+b)^0=1$ و $\binom{0}{0}a^0b^0=1$

اکنون فرض می‌کنیم دوجمله‌یی به ازاء $n=k$ راست است. یعنی:

$$(a+b)^k=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}a^{k-i}b^i$$

دراین صورت به ازاء $n=k+1$ ، می‌خواهیم نشان دهیم‌که :

$$(a+b)^{k+1}=\sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}a^{k+1-i}b^{i}$$

اما :

$$\begin{aligned}(a+b)^{k+1}&=(a+b)^{k}(a+b)\\&=\left[\binom{k}{0}a^{k}b^{0}+\binom{k}{1}a^{k-1}b^{1}+\cdots+\binom{k}{k}a^{0}b^{k}\right](a+b)\\&=\left[\binom{k}{0}a^{k+1}b^{0}+\binom{k}{1}a^{k}b^{1}+\cdots+\binom{k}{k}a^{1}b^{k}\right]\\&\quad+\left[\binom{k}{0}a^{k}b^{1}+\binom{k}{1}a^{k-1}b^{2}+\cdots+\binom{k}{k}a^{0}b^{k+1}\right]\\&=\left\{\binom{k}{0}a^{k+1}b^{0}+\left[\binom{k}{1}+\binom{k}{0}\right]a^{k}b^{1}+\right.\\&\quad+\left[\binom{k}{2}+\binom{k}{1}\right]a^{k-1}b^{2}+\cdots+\left[\binom{k}{k}\right.\\&\quad\left.\left.+\binom{k}{k-1}\right]a^{1}b^{k}+\binom{k}{k}a^{0}b^{k+1}\right\}\end{aligned}\qquad(۱۳.۷)$$

از مثال ۱۳.۶، داریم که :

$$\left[\binom{k}{i}+\binom{k}{i-1}\right]=\binom{k+1}{i}\qquad i=1,2,\ldots,k$$ به ازاء

نیز :

$$\binom{k}{k}=\binom{k+1}{k+1}=\binom{k}{0}=\binom{k+1}{0}=1$$

بنابراین، معادلهٔ (۱۳.۷) می‌شود :

$$\binom{k+1}{0}a^{k+1}b^{0}+\binom{k+1}{1}a^{k}b^{1}+\binom{k+1}{2}a^{k-1}b^{2}+\cdots$$
$$+\binom{k+1}{k+1}a^{0}b^{k+1}$$

و بدین ترتیب اثبات قضیهٔ دوجمله‌یی تکمیل می‌شود .

اکنون اگر مایل باشیم $(a+b)^{5}$ را بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$(a+b)^5=a^5+\binom{5}{1}a^4b+\binom{5}{2}a^3b^2+\binom{5}{3}a^2b^3+\binom{5}{4}ab^4+b^5$$

اما :

$$\binom{5}{1}=\binom{5}{4}=5 \quad ; \quad \binom{5}{3}=\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=\frac{(5)(4)(3)(2)}{(2)(3)(2)}=10$$

بنا بر این :

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

مثال ۱۳.۹ اکنون برای اثبات تساوی (۱۳.۵) از قضیهٔ دو جمله‌یی استفاده می‌کنیم. بسط دوجمله‌یی به‌صورت:

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

با فرض $a=b=1$ ، به‌دست می‌آوریم:

$$(1+1)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}1^{n-i}1^i$$

یا :

$$2^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$$

واین اثبات بسیار ساده‌تر مثال ۱۳.۷ است.

تا اینجا خواننده فرصت مطالعهٔ روشهای گوناگونی از اثبات ریاضی وبه‌کار بردن این دانش درحل دهها مسألهٔ تکلیفی را داشته است. چه مطالب کتاب به این‌منظور طرح شده است که به خواننده درك بیشتری از ریاضیات درحالت کلی، و وسیلهٔ مجهزی در استدلال ریاضی بدهد. امید است که خواننده، از مطالعهٔ این کتاب، با دنیای وسیع و غریب ریاضیات به‌طورکامل‌تر آشنا شده باشد، و به‌کار کاوشش در این موضوع ادامه دهد.

تکالیف و مسائل فصل ۱۳

۱. بین هردوعدد گویا، به‌تعداد نامتناهی عدد اصم موجود است.

۲. بین هردوعدد حقیقی، بی‌نهایت عدد حقیقی موجود است.

۳. ازنامساوی کوشی ـ شوارتز برای نشان دادن اینکه : $\sqrt{ab} \leqslant (۱/۲)(a+b)$ است استفاده کنید. دراینجا a ، $b>۰$ است.

راهنمایی : فرض کنید $x_۱=\sqrt[۴]{a}$ ، $y_۱=\sqrt[۴]{a}$ ، $x_۲=?$ ، $y_۲=?$.

۴. نشان دهید به ازاء هرزوج عدد طبیعی $r\leqslant n$:

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^r < ۱+\frac{r}{n}+\frac{r^۲}{n^۲} \qquad (a)$$

(b) از نتیجهٔ قسمت (a) برای نشان دادن اینکه : $(۱+۱/n)^n < ۳$ است استفاده کنید.

۵. (a) ثابت کنید که به ازاء هر دوعدد مثبت a و bی صادق در $ab=۱$ ، $a+b\geqslant ۲$.

(b) اکنون n عدد مثبت : $x_۱$ ، $x_۲$ ، . . . . ، x_n ، صادق در :

$$(x_۱)(x_۲)\cdots(x_n)=۱$$

را درنظرمی‌گیریم. نشان دهید که :

$$x_۱+x_۲+\cdots+x_n\geqslant n$$

راهنمایی : اگر تمام x_iها برابر ۱ نباشد، از استقراء استفاده کنید. x_i ، مثلاً $x_۱<۱$ ، و x_j ، مثلاً $x_۲>۱$ را بیابید. $(x_۱)(x_۲)$ را برابر y فرض کرده، استقراء را درمورد $(y)(x_۳)\cdots(x_n)$ به‌کار ببرید.

(c) ازنتیجهٔ قسمت (b) برای نشان دادن اینکه :

$$\frac{۱}{n}(x_۱+x_۲+\cdots+x_n)\geqslant\sqrt[n]{(x_۱)(x_۲)\cdots(x_n)}$$

است استفاده کنید.

راهنمایی : فرض می‌کنیم $R^{۱/n}$: $y_i=x_i$ ، که درآن $R=(x_۱)(x_۲)\cdots(x_n)$ است. واسطهٔ حسابی[1] (M) ، واسطهٔ هندسی[2] (G) و واسطهٔ توافقی[3] (H) ، n عدد مثبت $x_۱$ ، $x_۲$ ، . . . . ، x_n به‌ترتیب به‌صورت زیرتعریف می‌شوند:

1. arithmetic mean
2. geometric mean
3. harmonic mean

$$M=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\dots+x_n)$$

$$G=\sqrt[n]{(x_1)(x_2)\dots(x_n)}$$

$$H=n:\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)$$

هم اکنون نشان داده‌ایم که واسطهٔ هندسی، حداکثر به بزرگـی واسطهٔ حسابی است. درمسألهٔ ۶ ازشما خواسته می‌شود که نشان دهید که واسطهٔ توافقی حداکثر به بزرگی واسطهٔ هندسی است ($H\leqslant G$).

۶. اگر x_1 ، x_2 ، . . . ، x_n اعدادی مثبت باشند، دراین صورت : $H\leqslant G$.

۷. به ازاء هرعدد صحیح $n\geqslant 1$ ، $n!\leqslant((n+1)/2)^n$.

راهنمایی : از $G\leqslant M$ استفاده کنید.

۸. فرض مـی کنیم p و q اعداد گویای مثبتی باشند کـه در : $(1/p)+(1/q)=1$ صدق میکنند.دراین صورت نشان دهید که درمورد هردو عدد نامنفی ، a و b :

$$(a^p:p+b^q:q)\geqslant ab$$

راهنمایی : با دردست داشتن $(1/p)=(r/n)$ ، فرض می‌کنیم:

$$x_1=x_2=\dots=x_r=x$$

و $x_{r+1}=x_{r+2}=\dots=x_n=y$. بعد از نامساوی $M\geqslant G$ استفاده می‌کنیم.

۹. فرض می‌کنیم : x_1 ، . . . ، x_n و y_1 ، . . . ، y_n اعدادی مثبت و p و q چنانچه درمسألهٔ ۸ تعریف شده‌اند باشند. اکنون نشان دهید که :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{1/q}\geqslant\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i$$

این نامساوی به‌نامساوی‌هولدن[1] موسوم است. توجه داشته باشید که چون $p=q=2$، نامساوی هولدن به نامساوی کوشی ـ شوارتز تبدیل می‌شود.

۱۰. نشان دهید که :

1. Hölden inequality

$$\sqrt{(x_1+y_1)^2(x_2+y_2)^2} \leqslant \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}$$

۱۱. نشان دهیدکه ضرایب دوجمله‌یی $\binom{n}{i}$ درتساوی زیر صدق میکنند :

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}=0$$

۱۲. نشان دهیدکه :

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=2^{n-1}$$

۱۳. نشان دهیدکه :

$$n\binom{n}{i}=(i+1)\binom{n}{i+1}+i\binom{n}{i}$$

که درآن $i+1\leqslant n$ است.

۱۴. نشان دهیدکه :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2=\binom{2n}{n}$$

راهنمایی : توجه داشته باشیدکه :

$$(1+t)^{2n}=(1+t)^n(1+t)^n$$

۱۵. فرض‌کنید که $y=(x_1)^n+(x_2)^n+\ldots+(x_r)^n$ عـددی اصم است. دراین صورت حداقل یکـی از x_1 ، x_2 ، . . . ، x_r باید اصم باشد. دراین جا n عددی طبیعی است.

مسائل ۲۰–۱۶ رجوع به بحث‌گروه و حلقه، واقع درفصل ۱۲، دارند.

۱۶. مثالی از گروهی بدهیدکه درآن $\oplus$ ناظر نه‌به جمع معمولی نه به ضرب معمولی است.

۱۷. دامنهٔ درست، حلقه‌یی با این خاصیت است‌که، اگر a و b اعضاء آن دامنهٔ درست با $a\neq e$ و $b\neq e$ باشند، دراین صورت $a\odot b\neq e$ می‌بـاشد. نشان دهید

کـه اعضاء یك دامنهٔ درست، دارای این خاصیتندکه : $a\odot b=a\odot c$ کـه درآن $a\neq e$، مستلزم اینست که $b=c$ می باشد.

۱۸. حلقهٔ تقسیم[1]،حلقه‌یی، با این خاصیت اضافی است‌که در مورد آن عضو $u\epsilon D$ (حلقهٔ تقسیم) چنان موجود است‌که $u\odot a=a\odot u=a$. دراین‌جـا $a\epsilon D$. علاوه براین، به‌ازاء هر$a\epsilon D$ یك $a^{-1}\epsilon D$ چنان موجود است‌که $a\odot a^{-1}=a^{-1}\odot a=u$.نشان دهیدکه هرحلقهٔ تقسیم، دامنه‌یی درست است.

۱۹. (a) مثالی ازحلقه‌یی‌که دامنهٔ درست نیست به‌دست دهید.

(b) مثالی از دامنهٔ درستی‌که حلقهٔ تقسیم نیست به‌دست دهید.

۲۰. اعدادمختلط به‌صورت : $z=a+bi$ ،که درآن $i=\sqrt{-1}$ وa وb اعدادحقیقی‌اند تعریف شده‌است. نشان دهیدکه مجموعهٔ اعداد مختلط با $\oplus$ به‌جای $+$ و $\odot$ بـه جای $\times$ (ضرب) یك حلقهٔ تقسیم تشکیل می‌دهند.

مسائل ۲۶ـ۲۱ رجوع به‌بحث حدود و اتصال، واقع درفصل ۱۰، دارند.

۲۱. (a) نشان دهیدکه : $\lim\limits_{x\to 2} x^3=8$

(b) نشان دهیدکه : $\lim\limits_{x\to a} x^3=a^3$. دراینجا a عددی حقیقی است.

۲۲. نشان دهیدکه : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=d\neq 0$ ، دراین صورت:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{d}$$

۲۳. نشان دهیدکه : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)\neq 0$ ، در این صورت : $f(x):g(x)$ تابع متصلی در a است.

۲۴. محاسبه کنید :

$$(a)\quad \lim_{x\to 1}\,[(x^2-1):(x-1)]$$

$$(b)\quad \lim_{x\to 1}\,[(x^3-1):(x^2-1)]$$

---

1. division ring

(c) $\lim\limits_{x\to -۱} \{[۳(x+۱)] : (x^۳+۱)\}$

(d) $\lim\limits_{x\to -۲} [(x^۳+۶x^۲+۱۲x+۸) : (x^۲+۴x+۴)]$

(e) $\lim\limits_{x\to ۰} [(x^۲+۳x) : ۷x]$

۲۵. تابع :

$f(x)=x$ به ازاء $x\leqslant ۰$

$f(x)=x+۱$ به ازاء $x>۰$

را درنظر می‌گیریم. نشان دهید که : $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ وجود ندارد.

۲۶. (a) نشان دهید که : $f(x)=x^n$ در $x=a$ متصل است. دراین مسأله، دامنهٔ $f(x)$ شامل اعداد حقیقی و n عددی طبیعی است.

(b) از نتیجهٔ فوق برای نشان دادن این‌که چند جمله‌یی :

$$f(x)=\sum_{i=۰}^{n} a_i x^i$$

با a_i اعداد حقیقی، به ازاء جمیع مقادیرحقیقی x متصل است، استفاده کنید.

۲۷. نشان دهید‌که: $R(x)=f(x) : g(x)$، که در آن $f(x)$ و $g(x)$ چندجمله‌یی‌هائی با ضرایب حقیقی‌اند ، به ازاء جمیع مقادیر حقیقی x که به ازاء آنها $g(x)\neq ۰$ است، تابعی متصل است.

۲۸. با استفاده از تفاضلات متناهی نشان‌دهید که :

$$\sum_{i=۱}^{n} \{۱ : [i(i+۲)]\}=(۳n^۲+۵n) : [۴(n+۱)(n+۲)]$$

۲۹. نشان دهید که :

$$\sum_{i=۱}^{n} [(i+۲) : i(i+۱)](۱ : ۲^i)=\{۱-[۱ : (n+۱)](۱/۲^n)\}$$

۳۰. ثابت کنید که :

$$\sum_{i=1}^{n}(x^i+i)(x^i-i)=[x^2(x^{2n}-1)]:(x^2-1)$$
$$-[n(n+1)(2n+1):6]$$

۳۱. نشان دهید که : $1/2+1/3+1/4+\dots+1/n$ نمی‌تواند عدد صحیح باشد.

Appendix

ضميمه

جدول I لگاریتم معمولی

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(بقیهٔ) جدول I

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9676	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9859	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

جدول II توابع مثلثاتی

↓→	sin	cos	tan	cot	sec	csc	
0°	.0000	1.0000	.0000	……	1.000	……	90°
1°	.0175	.9998	.0175	57.29	1.000	57.30	89°
2°	.0349	.9994	.0349	28.64	1.001	28.65	88°
3°	.0523	.9986	.0524	19.08	1.001	19.11	87°
4°	.0698	.9976	.0699	14.30	1.002	14.34	86°
5°	.0872	.9962	.0875	11.43	1.004	11.47	85°
6°	.1045	.9945	.1051	9.514	1.006	9.567	84°
7°	.1219	.9925	.1228	8.144	1.008	8.206	83°
8°	.1392	.9903	.1405	7.115	1.010	7.185	82°
9°	.1564	.9877	.1584	6.314	1.012	6.392	81°
10°	.1736	.9848	.1763	5.671	1.015	5.759	80°
11°	.1908	.9816	.1944	5.145	1.019	5.241	79°
12°	.2079	.9781	.2126	4.705	1.022	4.810	78°
13°	.2250	.9744	.2309	4.331	1.026	4.445	77°
14°	.2419	.9703	.2493	4.011	1.031	4.134	76°
15°	.2588	.9659	.2679	3.732	1.035	3.864	75°
16°	.2756	.9613	.2867	3.487	1.040	3.628	74°
17°	.2924	.9563	.3057	3.271	1.046	3.420	73°
18°	.3090	.9511	.3249	3.078	1.051	3.236	72°
19°	.3256	.9455	.3443	2.904	1.058	3.072	71°
20°	.3420	.9397	.3640	2.747	1.064	2.924	70°
21°	.3584	.9336	.3839	2.605	1.071	2.790	69°
22°	.3746	.9272	.4040	2.475	1.079	2.669	68°
23°	.3907	.9205	.4245	2.356	1.086	2.559	67°
24°	.4067	.9135	.4452	2.246	1.095	2.459	66°
25°	.4226	.9063	.4663	2.145	1.103	2.366	65°
26°	.4384	.8988	.4877	2.050	1.113	2.281	64°
27°	.4540	.8910	.5095	1.963	1.122	2.203	63°
28°	.4695	.8829	.5317	1.881	1.133	2.130	62°
29°	.4848	.8746	.5543	1.804	1.143	2.063	61°
30°	.5000	.8660	.5774	1.732	1.155	2.000	60°
31°	.5150	.8572	.6009	1.664	1.167	1.942	59°
32°	.5299	.8480	.6249	1.600	1.179	1.887	58°
33°	.5446	.8387	.6494	1.540	1.192	1.836	57°
34°	.5592	.8290	.6745	1.483	1.206	1.788	56°
35°	.5736	.8192	.7002	1.428	1.221	1.743	55°
36°	.5878	.8090	.7265	1.376	1.236	1.701	54°
37°	.6018	.7986	.7536	1.327	1.252	1.662	53
38°	.6157	.7880	.7813	1.280	1.269	1.624	52°
39°	.6293	.7771	.8098	1.235	1.287	1.589	51°
40°	.6428	.7660	.8391	1.192	1.305	1.556	50
41°	.6561	.7547	.8693	1.150	1.325	1.524	49
42°	.6691	.7431	.9004	1.111	1.346	1.494	48°
43°	.6820	.7314	.9325	1.072	1.367	1.466	47°
44°	.6947	.7193	.9657	1.036	1.390	1.440	46
45°	.7071	.7071	1.000	1.000	1.414	1.414	45°
	cos	sin	cot	tan	csc	sec	←↑

حل مسائل منتخب

Solution of Selected Problems

فصل ۲

۱. (a) گزاره.

(c) گزاره نیست.

(e) گزاره.

(g) گزاره.

(i) گزاره نیست.

۲. (a) ازآنجاکه او سخت‌کار می‌کند، یا ثروتمند است یا اتومبیلش شکسته، یا هردو.

(c) یا سخت‌کار کردن او مستلزم این است که ثروتمند است یا سخت کار کردن او مستلزم این است که فقیر است.

(f) ازآنجاکه او سخت‌کار می‌کند وثروتمند است، این مستلزم اینست که یا سخت کار می‌کند یا اتومبیلش شکسته (یا هردو).

(i) گزارهٔ «سخت‌کار می‌کند یا ثروتمند است (یا هر دو) معادل اتومبیلش شکسته است» معادل گزارهٔ «او سخت‌کار می‌کند و ثروتمند است معادل اتومبیلش‌شکسته است» می‌باشد.

۳. (a) فرض می‌کنیم P ، «جان بیمار است» را نمایش دهد.

فرض می‌کنیم Q ، «جان ثروتمند است» را نمایش دهد. دراین صورت گزاره را می‌توان به‌صورت PVQ نمایش داد.

(c) فرض می‌کنیم P، «او بازندهٔ بدی است» را نمایش دهد. فرض می‌کنیم Q، «با او بازی خواهیم کرد» را نمایش‌دهد. دراین‌صورت گزاره‌را می‌توان به‌صورت $P \Longrightarrow \sim Q$ نمایش داد.

(f) فرض می‌کنیم P ، «می‌داند چه می‌کند» را نمایش دهـد. فرض می‌کنیم Q ، «دیوانه است» را نمایش دهـد. در این صورت گـزاره می‌تواند به صورت $\sim(P \Longleftrightarrow Q)$ نمایش داده شود.

(i) فرض می‌کنیم $P(x)$ گـزارهٔ (قضیهٔ) عدد x مثبت است را نمایش دهد. فرض می‌کنیم x عددی طبیعی باشد. در این صورت گـزاره را می‌توان به صورت $(\forall x)P(x)$ نوشت.

۴. (a)

جدول ارزش

P	Q	$P\vee Q$	$P \Longrightarrow (P\vee Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

بنابراین استدلال درست است.

(c)

جدول ارزش

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$	$Q \Longleftrightarrow P$	$(P \Longleftrightarrow Q) \Longleftrightarrow (Q \Longleftrightarrow P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	T	T	T

(f)

جدول ارزش

P	Q	R	$P\vee Q$	$P\vee R$	$[(P\vee Q)\wedge(P\vee R)]$	$Q\wedge R$	$[P\vee(Q\wedge R)]$	$\{[P\vee(Q\wedge R)] \Longleftrightarrow [(P\vee Q)\wedge(P\vee R)]\}$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	F	T	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

جدول فوق، تعادل دوگزاره را ثابت میکند.

(i)

جدول ارزش

P	Q	R	$Q\Longrightarrow R$	$P\Longrightarrow(Q\Longrightarrow R)$	$P\wedge Q$	$(P\wedge Q)\Longrightarrow R$	$[P\Longrightarrow(Q\Longrightarrow R)] \Longleftrightarrow [(P\wedge Q) \Longrightarrow R]$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T

جدول فوق، درستی استدلال را اثبات می‌کند.

۵. (a)

علامت	گزاره
R	زوج یا فرد بودن
P	برای اعداد صحیح تعریف شده است
Q	ارزش ادبی دارد

بنابراین، گزاره عبارتست از:

$$[(R\Longrightarrow P)\wedge(P\Longrightarrow\sim Q)]\Longrightarrow(R\Longrightarrow\sim Q)$$

جدول ارزش

R	P	Q	$R\Longrightarrow P$	$\sim Q$	$P\Longrightarrow\sim Q$	$[(R\Longrightarrow P)\wedge(P\Longrightarrow\sim Q)]$	$R\Longrightarrow\sim Q$	$[(R\Longrightarrow P)\wedge(P\Longrightarrow\sim Q)]\Longrightarrow(R\Longrightarrow\sim Q)$
T	T	T	T	F	F	F	F	T
T	T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

بنابراین، استدلال درست است.

علامت	گزاره
H	مردمی سخت کوشند
P	ترفیع درجه می‌گیرند
M	پول بیشتری به‌دست می‌آورند

گزاره: $(H \Longrightarrow P) \wedge (P \Longrightarrow M) \Longrightarrow (H \Longrightarrow M)$

توجه داشته باشید که این گزاره مشابه ۵(a)، با R به جای H، P به جای P ، و $\sim Q$ به‌جای M است.

(f)

علامت	گزاره
H	امین است
P	درستکار است
W	محبوب است

گزاره: $[(H \Longrightarrow P) \wedge (P \Longrightarrow W) \wedge (P \wedge W)] \Longrightarrow H$

جدول ارزش

H	P	W	$H \Longrightarrow P$	$P \Longrightarrow W$	$P \wedge W$	$[(H \Longrightarrow P) \wedge (P \Longrightarrow W) \wedge (P \wedge W)]$	$\{[(H \Longrightarrow P) \wedge (P \Longrightarrow W) \wedge (P \wedge W)] \Longrightarrow H\}$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	F	F	T
T	F	F	F	T	F	F	T
F	T	T	T	T	T	T	F
F	T	F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	F	F	T
F	F	F	T	T	F	F	T

بنا براین استدلال درست نیست.

(i)

علامت	گزاره
H	استعداد دارد
R	درس‌خوان است
S	زرنگ است

گزاره: $[H\wedge(R\wedge S)] \Longrightarrow [(H\wedge R)\vee(H\wedge S)]$

جدول ارزش

H	R	S	$R\wedge S$	$[H\wedge(R\wedge S)]$	$H\wedge R$	$H\wedge S$	$[(H\wedge R)\vee(H\wedge S)]$	$[H\wedge(R\wedge S)] \Longrightarrow [(H\wedge R)\vee(H\wedge S)]$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	F	F	F	F	F	T
F	F	T	F	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

بنا براین استدلال درست است.

۶. (a)

علامت	گزاره
M	دوشنبه تعطیل رسمی است
Z	به باغ وحش میروم
H	در خانه میمانم

گزاره: $M \Longrightarrow [(\sim Z \vee H) \vee (\sim H \wedge \sim Z)]$

جدول ارزش

M	Z	H	$\sim Z$	$\sim H$	$(\sim Z \vee H)$	$(\sim H \wedge \sim Z)$	$(\sim Z \vee H) \vee (\sim H \wedge \sim Z)$	$M \Longrightarrow [(\sim Z \vee H) \vee (\sim H \wedge \sim Z)]$
T	T	T	F	F	T	F	T	T
T	T	F	F	T	F	F	F	F
T	F	T	T	F	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T	T

به این ترتیب گزاره به $M \Longrightarrow (\sim Z \vee H)$؛ یا، اگر دوشنبه تعطیل رسمی باشد، دراین صورت یا به‌باغ وحش نخواهم رفت یا در خانه خواهم ماند (یا هر دو) تبدیل میشود.

(e)

علامت	گزاره
S	او خیلی درس می‌خواند
U	موضوع را درک میکند.

گزاره: $[\sim(S\wedge U)]\wedge U$

جدول ارزش

U	S	$S\wedge U$	$\sim(S\wedge U)$	$[\sim(S\wedge U)]\wedge U$
T	T	T	F	F
T	F	F	T	T
F	T	F	T	F
F	F	F	T	F

که آن را میتوان ازلحاظ علامتی به صورت $(U\wedge\sim S)$، یا «او خیلی درس نمیخواند و موضوع را درك میکند» نوشت.

فصل ۳

۱. (d) زیر مجموعهٔ (a) و (c)

۲. (b) ۲۱

(d) $\frac{۱}{۶۸}$

(g) $\frac{۶۰}{۱۴۳}$

(j) ۶۶

۳. (a) $x^۲+y^۲$

(d) $x^۳+۳x^۲y+۳y^۲x+y^۳$

(h) $x^۳-(r_۱+r_۲+r_۳)x^۲+(r_۱r_۲+r_۱r_۳+r_۲r_۳)x-r_۱r_۲r_۳$

(i) $x_۱-x_۶$

۴. (a) $\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۱}$

(d) $(۴)(۵)+(۵)(۶)+(۶)(۷)+(۷)(۸)+(۸)(۹)+(۹)(۱۰)$

(g) $x_۴+x_۵+x_۶+x_۷+x_۸+x_۹$

(j) $\frac{x_۴}{۴}+\frac{x_۵}{۵}+\frac{x_۶}{۶}+\frac{x_۷}{۷}+\frac{x_۸}{۸}+\frac{x_۹}{۹}+\frac{x_{۱۰}}{۱۰}+\frac{x_{۱۱}}{۱۱}$

۵. (b) عددگویا

(e) عدد طبیعی

(i) عدد صحیح

(o) عدد طبیعی

۶. (b) ۲۶۳/۴۱۸

(e) ۵

(g) $-۱۲z$

(i) $۱۲-۱۶w$

۷. (a) x و y متغیرات حقیقی‌اند.

(d) D ثابت است.

۸. (b) (۲)(۲)(۷)

(e) (۲)(۱۴۹)

(j) (۱۵۱)

فصل ۴

۱. (c) $f(-۱)=(-۱)^۲-۳(-۱)+۴=۸$

۲. (d) $f\left(\frac{۳}{۲}\right)=\left(\frac{۳}{۲}\right)^۳-۲\left(\frac{۳}{۲}\right)^۲+\left(\frac{۳}{۲}\right)+۱=\frac{۱۱}{۸}$

۳. (c) حوزه، شامل اعداد صحیح نا منفی‌یی است که ریشهٔ دومشان نیز عـدد صحیح است.

۴. (d) $۲^x-۱=۰$ یا $۲^x=۱$. بنابراین $x=۰$.

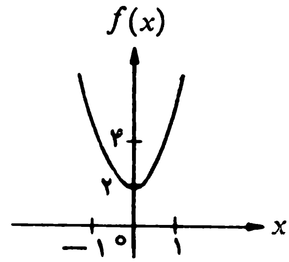
۵. (c) $f(۲)=۴^۲+(۲)(۴)-۱=۱۶+۸-۱=۲۳$

$g(f(۲))=g(۲۳)=۲۳^۲+۲=۵۳۱$

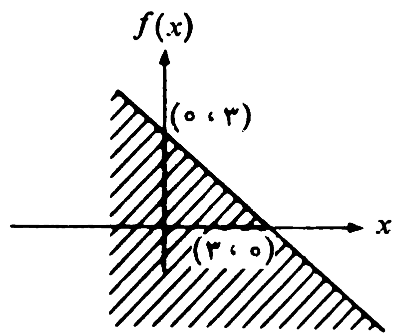
۶. (c) $f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y}$

(e) $f^{-1}(y)=\sqrt[5]{y-1}$

۷. (c) $3x^2+x+2=3\left(x^2+\frac{x}{3}\right)+2=3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+2-\frac{1}{36}$



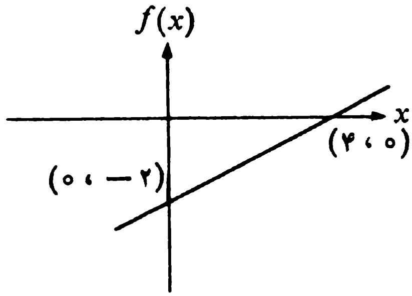
۸. (c) $f(x)+x\leqslant 3$ معادل با $f(x)\leqslant 3-x$ است.
ابتدا نمودار : $f(x)=3-x$ را رسم می‌کنیم. ناحیهٔ هاشورخوردهٔ شامل تمام نقاط واقع بر یا زیر خط $f(x)=3-x$ ، جواب نموداری این نامساوی است.



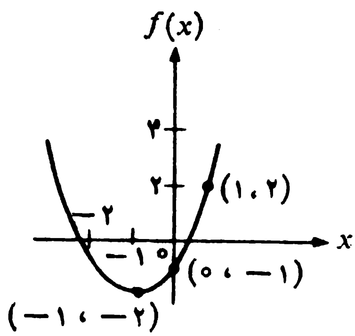
۹. (b) $(x+3)(x+2)$

(d) $(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)$ ، که درآن $i=\sqrt{-1}$ است.

۱۰. (b) شیب برابر ۱/۲ و عرض از مبدأ برابر ۲— است.



۱۱. (c) $x^۲+۲x-۱=x^۲+۲x+۱-۲=(x+۱)^۲-۲$



۱۲. (e) $۱۲۵۱=(۱)(۱۰)^۳+(۲)(۱۰)^۲+(۵)(۱۰)+۱$

۱۳. (c)

$۳۲,۰۰۰/۱۲=(۳)(۱۰)^۴+(۲)(۱۰)^۳+(۱)(۱۰)^{-۱}+(۲)(۱۰)^{-۲}$

۱۴. (b)

$۲۴۱۲_{(۶)}=(۲)(۶)^۳+(۴)(۶)^۲+(۱)(۶)+۲$

$=(۲)(۲۱۶)+(۴)(۳۶)+۶+۲=۵۸۴$

۱۵. (c)

$\log ۳۲/۱ = ۱/۵۰۶۵$

$\log ۲۱/۳ = ۱/۳۲۸۴$

$\log ۱۵/۲ = ۱/۱۸۱۸$

$\therefore \log$ جواب $= ۱/۵۰۶۵ + ۱/۳۲۸۴ - ۱/۱۸۱۸ = ۱/۶۵۳۱$

بنابراین، جواب مساوی ۴۵/۰ است.

(e)

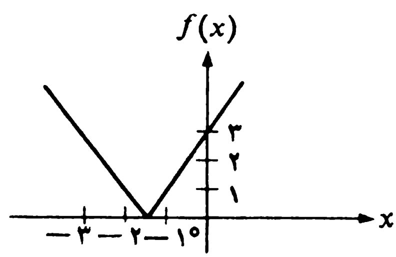
$A = ۱۰^{۱/۱۰}$

$\log A = \frac{۱}{۱۰} \log ۱۰ = ۰/۱۰۰۰۰$

$A = ۱/۲۶$

۱۶. (c) $۰/۰۰۳۲ = ۳/۲(۱۰)^{-۳}$

۱۷. (c)



۱۸. (c) $\sec ۳۰^\circ = \frac{۱}{\cos ۳۰^\circ} = \frac{۱}{۰/۸۶۶۰} = ۱/۱۵۴۷$

۲۰. (d) $-\frac{۱}{۲^۳} + \frac{۱}{۲^۴} - \frac{۱}{۲^۵} = \frac{۱}{۲^۳}\left(-۱ + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۴}\right) = \left(\frac{۱}{۸}\right)\left(-\frac{۳}{۴}\right) = -\frac{۳}{۳۲}$

۲۱. (c) $\sum_{i=۱}^{n} \frac{x^i}{i}$

(e) $\sum_{i=1}^{n} (2i)$

فصل ۵

۱. (a) فرض می‌کنیم n و m و r اعدادی‌صحیح باشند. دراین‌صورت $2n$ عددی‌زوج است، درحالیکه $2m+1$ عددی‌فردمی‌باشد. گزاره براین‌است که: $2n+(2m+1)$ را می‌توان به‌صورت $2r+1$ نوشت.

(c) فرض می‌کنیم N آن عدد باشد. دراین صورت: $N=10n+m$، که در آن n و m ارقامند. گذشته ازاین : $n=2m$.

(g) فرض می‌کنیم x آن عدد باشد. دراین صورت : $\sqrt[3]{x}=2x$.

(i) فرض می‌کنیم p آن عدد اول باشد. دراین صورت : $p^3>7p+5$.

۳. فرض مـــی‌کنیم n اولین عدد صحیح باشد. دراین صورت : $n(n+1)$ حاصلضرب دوعدد صحیح متوالی است. به‌این ترتیب دوحالت داریم:

(a) n زوج است. دراین صورت $n=2m$ ، کـــه درآن m عدد صحیحی است . بنابراین :

$$n(n+1)=2m(n+1)=2[m(n+1)]$$

لذا حاصلضرب زوج است.

(b) n فرد است. دراین صورت : $n=2m+1$ یا :

$$n(n+1)=(2m+1)(2m+2)=2[(2m+1)(m+1)]$$

بنابراین حاصلضرب، عددی زوج است. وبه این ترتیب نتیجه ثابت می‌شود.

۶. سه عدد صحیح متوالی : n ، $n+1$ ، $n+2$ ، که درآن‌ها n زوج است، رادرنظر می گیریم. دراین‌صورت ازآنجاکه «هرعدد سومی بر۳ بخش پذیراست»،حاصلضرب این سه بر۳ بخش پذیراست. ازاین گذشته، ازآنجاکه عدد وسط فرد است، هم n هم $n+2$ زوجند. نیز هرعدد زوج دومی برچهار قابل قسمت است. به‌این ترتیب عوامل : $24=(4)(2)(3)$ اند. بنابه‌این دلیل‌حاصلضرب مذکور بر۲۴ بخش‌پذیر می‌باشد.

۸. فرض می‌کنیم m اولین عدد صحیح و N مجموع چهارعـدد صحیح متوالی باشد. دراین صورت :

$$N=m+(m+1)+(m+2)+(m+3)=4m+6=2(2m+3)$$

از آنجاکه N دوبرابر عدد صحیحی است، زوج است.

۱۰. ازآنجاکه n بر p بخش‌پذیراست، داریم $n=pr$، که در آن r عددصحیحی‌است. بنابراین: $n^2=p^2r^2$. از آنجا که r^2 عدد صحیحی است، n^2 بر p^2 بخش پذیر است.

۱۲. $a\leqslant b$ مستلزم اینست‌که : عدد نامنفی d چنان موجود است‌که $a+d=b$ میباشد. از آنجاکه $x\geqslant 1$ ، فرض می‌کنیم : $x=1+c$ ، که در آن $c\geqslant 0$ است. دراین صورت :

$$a+d+bc=b+bc \quad \text{،} \quad \text{یا} \quad a+(d+bc)=b(1+c)=bx$$

ازآنجاکه : $d\geqslant 0$ ، $b\geqslant 0$ ، $c\geqslant 0$ ، داریم : $d+bc\geqslant 0$. بنابراین، $a\leqslant bx$. واین، نامساوی را اثبات می‌کند.

۱۵. ازآنجاکه $a\leqslant b$ ، عدد نامنفی d چنان موجود است‌که : $a+d=b$. از $b=c$، داریم : $a+d=b=c$ یا $a+d=c$. بنابراین : $a\leqslant c$.

۱۸. $\log_a^b=x$ معادل $a^x=b$ است. دراین حالت، $b=a$ است. به‌این‌ترتیب: $a^x=a$. بنابراین، $x=1$ و نتیجه اثبات می‌شود.

فصل ۶

۱.
$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i=\frac{1+(-1)^n}{2}$$

اثبات: چون $n=0$ باشد، داریم :
$$\sum_{i=0}^{0}(-1)^i=(-1)^0=1$$

نیز:

$$\frac{۱+(-۱)^۰}{۲}=\frac{۱+۱}{۲}=۱$$

اکنون فرض می‌کنیم که تساوی به ازاء $n=k$ راست است. دراین صورت به ازاء $n=k+۱$، داریم :

$$\sum_{i=۰}^{k+۱}(-۱)^i=(-۱)^۰+(-۱)^۱+\cdots+(-۱)^k+(-۱)^{k+۱}$$

$$=\sum_{i=۰}^{k}(-۱)^i+(-۱)^{k+۱}=\frac{۱+(-۱)^k}{۲}+(-۱)^{k+۱}$$

$$=\frac{۱+(-۱)^k+۲(-۱)^{k+۱}}{۲}=\frac{۱+(-۱)^k[۱+۲(-۱)]}{۲}$$

$$=\frac{۱+(-۱)^k(-۱)}{۲}=\frac{۱+(-۱)^{k+۱}}{۲}$$

و این، اثبات تساوی را تکمیل می‌کند.

۳. $$\sum_{i=۱}^{n} i(i+۱)=\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$$

اثبات : به ازاء $n=۱$،

$$\sum_{i=۱}^{۱} i(i+۱)=(۱)(۲)=۲$$

و

$$\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}=\frac{(۱)(۲)(۳)}{۳}=۲$$

اکنون فرض می‌کنیم تساوی به ازاء $n=k$ راست است. دراین صورت به ازاء $k+۱$، داریم :

$$\sum_{i=۱}^{k+۱} i(i+۱)=\sum_{i=۱}^{k} i(i+۱)+(k+۱)(k+۲)$$

$$=\frac{k(k+۱)(k+۲)}{۳}+(k+۱)(k+۲)$$

$$=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

واین، معادله را اثبات می‌کند.

.۶ $$\sum_{i=0}^{n}(-3)^i=\frac{(-1)^n 3^{n+1}+1}{4}$$

اثبات : به ازاء $n=0$ ،

$$\sum_{i=0}^{0}(-3)^i=(-3)^0=1 \quad \text{و} \quad \frac{(-1)^0 3^{0+1}+1}{4}=\frac{3+1}{4}=1$$

اکنون فرض می‌کنیم تساوی به ازاء k راست است، دراین صورت به‌ازاء $k+1$:

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-3)^i=\sum_{i=0}^{k}(-3)^i+(-3)^{k+1}=\frac{(-1)^k 3^{k+1}+1}{4}+(-3)^{k+1}$$

$$=\frac{(-1)^k 3^{k+1}+1+4(-3)^{k+1}}{4}$$

$$=\frac{1+3^{k+1}[(-1)^k+4(-1)^{k+1}]}{4}$$

$$=\frac{3^{k+1}(-1)^{k+1}[(-1)+4]+1}{4}$$

$$=\frac{(3)(3)^{k+1}(-1)^{k+1}+1}{4}=\frac{(-1)^{k+1}(3)^{(k+1)+1}+1}{4}$$

و این، تساوی را ثابت می‌کند.

.۱۰ $$\sum_{i=1}^{n} i2^{-i}=\frac{2^{n+1}-n-2}{2^n}$$

اثبات : به ازاء $n=1$ ،

$$\sum_{i=1}^{1} i2^{-i}=1\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \frac{2^{1+1}-1-2}{2^1}=\frac{4-3}{2}=\frac{1}{2}$$

اکنون فرض‌می‌کنیم تساوی به ازاء k راست است، دراین صورت به ازاء $k+۱$:

$$\sum_{i=۱}^{k+۱} i۲^{-i} = \sum_{i=۱}^{k} i۲^{-i} + (k+۱)۲^{-(k+۱)} = \frac{۲^{k+۱}-k-۲}{۲^k} + \frac{k+۱}{۲^{k+۱}}$$

$$= \frac{۲[۲^{k+۱}-k-۲]+k+۱}{۲^{k+۱}} = \frac{۲^{k+۲}-۲k-۴+k+۱}{۲^{k+۱}}$$

$$= \frac{۲^{k+۲}-(k+۱)-۲}{۲^{k+۱}}$$

و این، تساوی را اثبات می‌کند.

۱۴. $$\sum_{i=۱}^{n}\left[\frac{۱}{i(i+۱)}\right] = \frac{n}{n+۱}$$

به ازاء $n=۱$:

$$\sum_{i=۱}^{۱} \frac{۱}{i(i+۱)} = \frac{۱}{(۱)(۲)} = \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۱+۱} = \frac{۱}{۲}$$

اکنون فرض می‌کنیم تساوی بـه ازاء $n=k$ راست است، در این صورت به ازاء $k+۱$:

$$\sum_{i=۱}^{k+۱}\left(\frac{۱}{i(i+۱)}\right) = \sum_{i=۱}^{k} \frac{۱}{i(i+۱)} + \frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}$$

$$= \frac{k}{k+۱} + \frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}$$

$$= \frac{k(k+۲)}{(k+۱)(k+۲)} + \frac{۱}{(k+۱)(k+۲)}$$

$$= \frac{k^۲+۲k+۱}{(k+۱)(k+۲)} = \frac{(k+۱)^۲}{(k+۱)(k+۲)} = \frac{k+۱}{k+۲}$$

و این، تساوی را اثبات می‌کند.

۱۵. $$\sum_{i=۱}^{n} \frac{۱}{(a+i-۱)(a+i)} = \frac{n}{a(a+n)} \quad ، \ a>۰$$

اثبات: به ازاء $n=1$،

$$\frac{1}{(a+1-1)(a+1)}=\frac{1}{a(a+1)}\ \text{و}\ \frac{n}{a(a+n)}=\frac{1}{a(a+1)}$$

اکنون فرض میکنیم به ازاء $n=k$ راست است، در این صورت به ازاء $k+1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1}{(a+i-1)(a+i)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(a+i-1)(a+i)}$$

$$+\frac{1}{(a+k+1-1)(a+k+1)}$$

$$=\frac{k}{a(a+k)}+\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{k(a+k+1)+a}{a(a+k)(a+k+1)}$$

$$=\frac{(a+k)(k+1)}{a(a+k)(a+k+1)}=\frac{k+1}{a(a+k+1)}$$

و این، تساوی را اثبات میکند.

۱۸. $$\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]\cdots\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]=\frac{n+1}{2n}$$

به ازاء $n=2$، داریم: $1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$ و $\frac{2+1}{(2)(2)}=\frac{3}{4}$

اکنون فرض میکنیم به‌ازاء $n=k$ راست‌است، در این صورت به ازاء $n=k+1$:

$$\left[\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)\cdots\left(1-\left(\frac{1}{k}\right)^2\right)\right]\left(1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^2\right)$$

$$=\left(\frac{k+1}{2k}\right)\left(1-\left(\frac{1}{k+1}\right)^2\right)=\left(\frac{k+1}{2k}\right)\left(\frac{(k+1)^2-1}{(k+1)^2}\right)$$

$$\frac{[(k+1)-1][(k+1)+1]}{2k(k+1)}=\frac{k(k+2)}{2k(k+1)}=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)}$$

واین، تساوی را ثابت میکند.

۲۱. به ازاء $n=1$:

$$(8)10^2+6(10)+9=800+60+9=869=(11)(79)$$

فرض میکنیم به ازاء $n=k$ راست است، در این صورت به ازاء $k+1$، داریم:

$$(8)10^{2(k+1)}+6(10)^{2(k+1)-1}+9=(800)10^{2k}+(600)10^{2k-1}+9$$

$$=100[(8)10^{2k}+(6)10^{2k-1}+9]-891$$

ازآنجا که فرض براین است‌که: $9+10^{2k-1}(6)+10^{2k}(8)$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است و $(81)\ (11)=891$، گزاره را ثابت کرده‌ایم.

۲۴. به ازاء $n=0$، $a_0=\sum_{i=0}^{0} a_i 10^i$. بنابراین، اگر a_0 بر ۳ بخش پذیر باشد، در این صورت: $\sum_{i=0}^{0} a_i 10^i$ نیز هست. اکنون فرض میکنیم به‌ازاء k راست است، در این صورت به ازاء $k+1$ داریم:

$$\sum_{i=0}^{k+1} a_i 10^i=\left[\sum_{i=0}^{k} a_i 10^i+a_{k+1}\right]+10^{k+1}a_{k+1}-a_{k+1}$$
$$=[(a_0+a_{k+1})+a_1 10+a_2 10^2+\ldots+a_k 10^k]+a_{k+1}(10^{k+1}-1)$$

اما عبارت اول از درجهٔ k است و مجموع ضرایب آن:

$$(a_0+a_{k+1})+a_1+a_2+\ldots+a_k=\sum_{i=0}^{k+1} a_i$$

که بنا به فرض بر ۳ بخش‌پذیر میباشد. بنابراین:

$$[(a_0+a_{k+1})+a_1 10+a_2 10^2+\ldots+a_k 10^k]$$

بر ۳ قابل قسمت میباشد. نیز:

$$a_{k+1}(10^{k+1}-1)=a_{k+1}(99999\ldots9)$$

که واضحاً بر ۳ بخش‌پذیر است. بنابراین: $\sum_{i=0}^{k+1} a_i 10^i$ بر ۳ قابل قسمت است. و بدین ترتیب نتیجه، اثبات میشود. توجه داشته باشیدکه هرچند این نتیجه از نتیجهٔ مثال ۶.۵ کلی‌تر است، اثباتش آسان‌تر میباشد. این وضعیت در ریاضیات بسیار زیاد رخ میدهد.

۲۶. در نظر میگیریم:

$$\frac{(-1)^1}{1}+\frac{(-1)^2}{2}=-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$$

واضح است‌که نامساوی به ازاء $n=3$ راست است زیرا در این صورت:

$$\frac{(-1)}{1}+\frac{(-1)^2}{2}+\frac{(-1)^3}{3}=-\frac{1}{2}+\left(\frac{-1}{3}\right)<-\frac{1}{2}$$

به این ترتیب لازم است که: راستی نامساوی را به ازاء مقادیر زوج n اثبات کنیم. فرض میکنیم به ازاء $n=2k$ راست است، در این صورت به ازاء $2k+2$ داریم:

$$\sum_{i=1}^{2k+2}\frac{(-1)^i}{i}=\sum_{i=1}^{2k}\frac{(-1)^i}{i}+\left[\frac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}+\frac{(-1)^{2k+2}}{2k+2}\right]$$

$$=\sum_{i=1}^{2k}\frac{(-1)^i}{i}+\left(-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}\right)$$

از آنجاکه، $2k+1<2k+2$:

$$-\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}<0$$

دراین صورت، بنابه فرض: $\sum_{i=1}^{2k}\frac{(-1)^i}{i}<0$ نتیجه حاصل میشود.

۳۵. به ازاء $N=1$، داریم $1+(1/2)>1$. اکنون اثبات را با استفاده از استقراء انجام میدهیم. فرض میکنیم گزاره به ازاء مقدار N_0ی راست باشد. نشان میدهیم که به ازاء N_0+1 نیز راست است. اما اگر به ازاء N_0 راست باشد در این صورت مقدار n_0ی چنان وجود دارد که:

$$1+(1/2)+(1/3)+\cdots+(1/n_0)>N_0$$

در این صورت:

$$\frac{1}{n_0+1}+\frac{1}{n_0+2}+\cdots+\frac{1}{2n_0}>\frac{1}{2n_0}+\frac{1}{2n_0}$$
$$+\cdots+\frac{1}{2n_0}=\frac{n_0}{2n_0}=\frac{1}{2}$$

هم چنین:

$$\frac{1}{2n_0+1}+\frac{1}{2n_0+2}+\frac{1}{2n_0+3}+\cdots+\frac{1}{4n_0}>\frac{1}{4n_0}+\frac{1}{4n_0}$$
$$+\cdots+\frac{1}{4n_0}=\frac{2n_0}{4n_0}=\frac{1}{2}$$

بنا براین:

$$\sum_{i=1}^{4n_0} \frac{1}{i} > N_0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=N_0+1$$

و به این ترتیب گزاره محقق میشود.

فصل ۷

۱.
$$\sum_{i=1}^{n} 2^{-i}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

فرض میکنیم:

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$

در این صورت:

$$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right]$$
$$+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}=A+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}$$

به این ترتیب:

$$\frac{1}{2}A=A+\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{2}$$

یا

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}=A-\frac{1}{2}A$$

یا

$$\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$$

یا

$$A=1-\frac{2}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^n}$$

و به این ترتیب، اثبات تساوی تکمیل میشود.

۵. ازآنجاکه $x+y=1$، $y=1-x$. در این صورت:

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{1-x}\right)$$
$$=\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{1-x-1}{1-x}\right)$$
$$=\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{-x}{1-x}\right)$$
$$=\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x}{x-1}\right)=1$$

۸. فرض می‌کنیم x یکی از اعداد صحیح باشد. در این صورت $75-x$ عدد صحیح دیگر است. بنابراین:

$$x-(75-x)=13 \quad \text{یا} \quad 2x-75=13 \quad \text{یا} \quad 2x=88 \quad \text{یا} \quad x=44$$

در این صورت عدد دیگر: $75-44=31$

۱۰. فرض می‌کنیم x و y دو عدد صحیح مورد بحث باشند. در این صورت:

$$(x+y)=4(x-y) \quad \text{یا} \quad 3x=5y \quad \text{یا} \quad x=\frac{5}{3}y$$

از آنجاکه هم x هم y باید صحیح باشند و هر دو باید بر ۵ بخش‌پذیر باشند، میتوانیم: $y=\pm(3)(5)m$ را، که درآن m عددی طبیعی است، انتخاب کنیم. بنابراین، بعضی از جوابها عبارتند از:

$$y=15 ، x=25 ؛ y=30 ، x=50 ؛ \ldots$$

۱۴.
$$(n^5-n)=n(n^4-1)=n(n^2-1)(n^2+1)$$
$$=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$$

اما: $(n-1)n(n+1)$ حاصلضرب سه عدد صحیح متوالی است. بنابراین، حداقل یکی ازاین سه باید قابل قسمت بر ۳ وحداقل یکی ازآنها باید زوج باشد. بنابراین:

n^5-n بر ۶ قابل قسمت است.

۱۶. برای نشان دادن اینکه: n^5-n بر ۵ بخش‌پذیر است: به‌ازاء $n=1$، $n^5-n=0$، که بر ۵ بخش پذیر است. به ازاء $n=2$، $n^5-n=32-2=30$، که بازهم بر ۵ بخش‌پذیر است. با انتخاب هر عدد طبیعی $n\geqslant 2$، داریم:

$$\begin{aligned}n^5-n&=n(n^2-1)(n^2+1)=(n-1)(n)(n+1)(n^2+1)\\&=(n-1)(n)(n+1)(n^2-4+5)\\&=(n-1)(n)(n+1)(n^2-4)+5(n-1)(n)(n+1)\end{aligned}$$

$(n-2)(n-1)(n)(n+1)(n+2)$ حاصلضرب پنج‌عدد طبیعی‌متوالی و بنابراین بخش پذیر بر ۵ است. از آنجاکه: $5(n-1)(n)(n+1)$ نیز بر ۵ بخش پذیر است، قضیه محقق است .

۱۸.
$$\frac{p_0q_1}{p_1q_0}=\left(\frac{p_0}{p_1}\right)\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)$$

از آنجاکه: $p_0<p_1$، $(p_0/p_1)<1$. نیز از آنجا که:

$$p_0<p_1 \text{ ، } 1-p_0>1-p_1 \text{ . یا } \frac{1-p_1}{1-p_0}<1$$

بنابراین:

$$\left(\frac{p_0}{p_1}\right)\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)<(1)(1)=1$$

۲۱.
$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=$$

$$a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2+c-\frac{b^2}{4a}$$

در نتیجه فرض میکنیم: $y=x+(b/2a)$ ، $A=a$ ، $B=c-(b^2/4a)$

۲۵. برای این منظور میتوانیم ازنتیجهٔ مسألهٔ ۲۴ استفاده‌کنیم. فرض میکنیم $b=(1/a)$. در این صورت:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\geqslant ab$$

یا

$$\left(\frac{a+(۱/a)}{۲}\right)^۲ \geqslant a\left(\frac{۱}{a}\right)=۱$$

بنابراین:

$$\left(\frac{a+(۱/a)}{۲}\right)\geqslant ۱$$

۲۸. در نظر میگیریم:

$$(x-r_۱)(x-r_۲)(x-r_۳)=x^۳+(-r_۱-r_۲-r_۳)x^۲$$
$$+(r_۱r_۲+r_۱r_۳+r_۲r_۳)x-r_۱r_۲r_۳$$

از مقایسهٔ آن با : $x^۳+a_۲x^۲+a_۱x+a_۰$، متوجه میشویم که:

$a_۲=(-r_۱-r_۲-r_۳)$، یا $-a_۲=r_۱+r_۲+r_۳$ و $-a_۰=r_۱r_۲r_۳$

به این ترتیب گزاره محقق میشود.

۳۲. فرض میکنیم: $x=pA+(۱-p)B$. اما:

$$pA+(۱-p)B=pA+B-pB=B-p(B-A)$$

بنابراین: $x=pA+(۱-p)B$ مستلزم اینست که:

$$B-p(B-A)=x \quad \text{یا} \quad B-x=p(B-A) \quad \text{یا} \quad \frac{B-x}{B-A}=p$$

از آنجاکه $A\leqslant x\leqslant B$، نتیجه محقق میشود.

فصل ۸

۱. (a) $۳x-۲\leqslant ۴x+۷$ یا $-۲\leqslant ۴x-۳x+۷=x+۷$

$-۲-۷\leqslant x$ یا $-۹\leqslant x$

۲. (a) میخواهیم نشان دهیم اگر $a<b$ و $b<c$، در این صورت $a<c$.

اثبات: اگر $a<b$ و $b<c$، دراین صورت دو عدد مثبت d و e چنان‌موجودند که: $a+d=b$ و $b+e=c$. بنابراین:

$$c=b+e=a+(d+e)$$

از آنجاکه $d>0$ ، $e>0$ ؛ در این صورت: $d+e>0$. بنابراین، $c>a$.

۳. $a\leqslant b$ و $b\leqslant a$ مستلزم این است که دو عدد نامنفی d و h چنان موجودند که: $a+d=b$ و $b+h=a$ باشد. بنابراین، $b=a+d=b+h+d$. به این ترتیب، $h+d=0$. اما از آنجاکه اینها هر دو نامنفی‌اند، هر دو باید مساوی صفر باشند، واین، نتیجه را اثبات میکند.

۶. با معلوم بودن اینکه $a>0$ ، $b>0$، می‌دانیم که : $1/a>0$ ، $1/b>0$. به این ترتیب $1/ab>0$. اما $a\leqslant b$ مستلزم اینست که: $(1/ab)(a)\leqslant(1/ab)(b)$ یا $1/b\leqslant 1/a$، واین، نامساوی را محقق می کند.

۱۰. (a) $a/b<1$ و $b>0$ مستلزم اینست که $(a/b)(b)<(1)(b)$ یا $a<b$.

۱۳. مسألهٔ ۸مقرر می کند که:

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3=n^2(2n^2-1)$$

اما:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)^3&=\sum_{i=1}^{n}(8i^3-12i^2+6i-1)\\&=8\sum_{i=1}^{n}i^3-12\sum_{i=1}^{n}i^2+6\sum_{i=1}^{n}i-n\\&=\frac{8n^2(n+1)^2}{4}-\frac{12(n)(n+1)(2n+1)}{6}\\&\quad+\frac{6(n)(n+1)}{2}-n\end{aligned}$$

$$=2n^2(n+1)^2-2n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)-n$$

$$=2n^4+4n^3+2n^2-4n^3-6n^2-2n+3n^2+3n-n$$

$$=2n^4-n^2=n^2(2n^2-1)$$

۱۵. (b) $$\sum_{i=1}^{5}(2x_i-4)=2\sum_{i=1}^{5}x_i-(4)(5)$$

$$\sum_{i=۱}^{۵} x_i = ۰+۱+(-۱)+۵+۳=۸$$

بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{۵}(۲x_i-۴)=(۲)(۸)-۲۰=-۴$$

.۱۹
$$\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})=\sum_{i=۱}^{n}(X_iY_i-\overline{X}Y_i-\overline{Y}X_i+\overline{X}\overline{Y})$$
$$=\sum_{i=۱}^{n}X_iY_i-\overline{X}\sum_{i=۱}^{n}Y_i-\overline{Y}\sum_{i=۱}^{n}X_i+n\overline{X}\overline{Y}$$

اما:

$$\overline{X}\sum_{i=۱}^{n}Y_i=(\overline{X})(n)\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{Y_i}{n}\right)=n\overline{X}\overline{Y}$$

نیز:

$$\overline{Y}\sum_{i=۱}^{n}X_i=(\overline{Y})(n)\left(\sum_{i=۱}^{n}\frac{X_i}{n}\right)=n\overline{Y}\overline{X}$$

بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})=\sum_{i=۱}^{n}X_iY_i-n\overline{X}\overline{Y}$$

.۲۳ (a) $\log_a^{۳۶}=۲$ مستلزم اینست که: $a^۲=۳۶$ یا $a=\sqrt{۶}$.
(b) $\log_a^{۱۲۹۶}=x$. در این صورت: $a^x=۱۲۹۶$ ؛ $(\sqrt{۶})^x=۱۲۹۶$؛ $x=۸$.
(c) $(\sqrt{۶})^{۱/۳}=d$ ؛ $d=۶^{۱/۶}$.

.۲۵ (c) به ازاء $a\neq ۰$ $\quad |a|+\frac{۱}{|a|}\geqslant ۲$

.۲۸ ابتدا، توجه کنید که $b-a\geqslant ۰$. بنابراین:

$$\frac{(a+b)+|b-a|}{۲}=\frac{(a+b)+(b-a)}{۲}=\frac{۲b}{۲}=b$$

$$\frac{(a+b)-|b-a|}{۲}=\frac{a+b-(b-a)}{۲}=\frac{۲a}{۲}=a$$

۳۰. از آنجا که a بر b بخش پذیر است، عدد صحیح rی چنان موجود است که: $a=rb$. در این صورت: $ca=r(cb)$. بنابراین، ca بر cb بخش‌پذیر است.

۳۳. $\Delta(aw_i+b)=(aw_{i+۱}+b)-(aw_i+b)=a(w_{i+۱}-w_i)=a(\Delta w_i)$

۳۴. (b) $i(i+۱)(i+۲)=u_i$

در نظر می گیریم:

$$\frac{(i-۱)(i)(i+۱)(i+۲)}{۴}$$

در این صورت:

$$\Delta\ \frac{(i-۱)(i)(i+۱)(i+۲)}{۴}$$

$$=\frac{i(i+۱)(i+۲)(i+۳)-(i-۱)(i)(i+۱)(i+۲)}{۴}$$

$$=\frac{i(i+۱)(i+۲)[(i+۳)-(i-۱)]}{۴}=i(i+۱)(i+۲)$$

بنابراین:

$$v_i=\frac{(i-۱)(i)(i+۱)(i+۲)}{۴}$$

و

$$\sum_{i=۱}^{n} i(i+۱)(i+۲)\ =\ \frac{n(n+۱)(n+۲)(n+۳)}{۴}$$

(e) $u_i=(-۱)^i$

در نظر میگیریم:

$$\Delta\ \frac{(-۱)^{i+۱}}{۲}=\frac{(-۱)^{i+۲}-(-۱)^{i+۱}}{۲}=\frac{(-۱)^{i+۱}[-۱-۱]}{۲}=(-۱)^i$$

بنابراین فرض میکنیم:

$$v_i=\frac{(-۱)^{i+۱}}{۲}$$

دراین صورت:

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^i=\frac{(-1)^{n+2}-(-1)^2}{2}=\frac{(-1)^n-1}{2}$$

۳۷. (a) $f(1)=f[(-1)(-1)]=f(-1)f(-1)=(-1)(-1)=1$

(b) $f(0)=f[(0)(-1)]=f(-1)f(0)=-f(0)$

بنابراین $f(0)=0$

(d) $1=f(1)=f\left[(a)\left(\frac{1}{a}\right)\right]=f(a)f\left(\frac{1}{a}\right)$

بنابراین، هم $f(a)$ هم $f(1/a)$ مساوی صفر نمی‌شوند.

فصل ۹

۱. فرض می‌کنیم به ازاء مقداری n^2 ، n فرد باشد. در این صورت n^2 فرد خواهد بود، مثال ۵.۳ را ملاحظه کنید.

۶. فرض می‌کنیم چنین نباشد. دراین صورت nی چنان موجود است که n^2 بر r^2 قابل قسمت نیست. از آنجاکه n بر r بخش‌پذیر است، $n/r=k$ ، که درآن k عددی صحیح است. بنابراین ، $\frac{n^2}{r^2}=k^2$. به‌این ترتیب، n^2 بر r^2 بخش پذیراست. این تناقض، گزاره را اثبات می‌کند.

۸. (a) فرض می‌کنیم nی ، مثلاً n_0 ، موجود است که به ازاء آن نامساوی راست نیست. دراین صورت:

$$\frac{n_0}{n_0+a}>\frac{n_0+a}{n_0+2a}$$

یا

$$\frac{n_0}{n_0+a}-\frac{n_0+a}{n_0+2a}>0$$

یا

$$\frac{n_0(n_0+2a)-(n_0+a)^2}{(n_0+a)(n_0+2a)}>0$$

یا

$$\frac{n_0^2+2an_0-n_0^2-2an_0-a^2}{(n_0+a)(n_0+2a)}>0$$

یا

$$\frac{-a^2}{(n_0+a)(n_0+2a)}>0$$

از آنجا که : $-a^2<0$ ، $n_0+a>0$ ، $n_0+2a>0$ ، داریم :

$$-a^2:(n_0+a)(n_0+2a)<0$$

این تناقض، گزاره را اثبات می‌کند.

(d) فرض می‌کنیم نامساوی راست نباشد. دراین صورت a و bئی موجوداست که به ازاء آنها :

$$\sqrt{ab}>\frac{1}{2}(a+b)$$

یا

$$2\sqrt{ab}>(a+b)$$

یا

$$4ab>(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

یا

$$0>a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

واین ازآنجاکه : $(a-b)^2\geqslant 0$ است واضحاً غیرممکن می‌باشد. این تناقض بــه این نتیجه مینجامدکه :

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}(a+b)$$

۹. (c) فرض می‌کنیم که $\sqrt{p}$ عددی گویاست. دراین صورت $\sqrt{p}=n_1/n_2$ (کــه در آن n_1 و n_2 دو عدد طبیعی بــدون عامل مشترکند) یا : $p=n_1^2:n_2^2$. در این صورت : $p:n_1^2=n_2^2$. بدین ترتیب، بنابه نتیجهٔ مسألهٔ تکلیفی ۵ دراین‌فصل،

n_1 بر p قابل قسمت است. بنابراین، به‌ازاء عدد صحیح k ئـی ، $n_1 = pk$ ، $\sqrt{p} = pk/n_2$ یا $p = p^2k^2/n_2^2$ یا $n_2^2 = pk^2$. به‌این ترتیب n_2^2 بر p بخش پذیراست. و بنا به‌این دلیل، به ازاء k_1 ئی ، $n_2 = p_1k_1$. بنابراین، n_1 و n_2 هردوعامل p دارند. این تناقض ثابت می‌کندکه $\sqrt{p}$ اصم است.

(g) و (h) سه حالت درنظرمی‌گیریم:

(i) هر دو اعدادی گویا هستند.
(ii) دقیقاً یکی ازآنها گویاست.
(iii) هردو اعدادی اصمند.

(i) را درنظر مـی‌گیریم. دراین صورت : $(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})+(\sqrt{p_1}-\sqrt{p_2})$ یـا $2\sqrt{p_1}$ گویا می‌شود. اما ازآنجاکـه $\sqrt{p_1}$ اصم است (مسألهٔ (c) ۵.۹ را ملاحظه کنید) ، $2\sqrt{p_1}$ اصم است.

اکنون حالت (ii) رافرض می‌کنیم. دراین صورت حاصلضرب اصم می‌شود. اما:

$$(\sqrt{p_1}+\sqrt{p_2})(\sqrt{p_1}-\sqrt{p_2}) = p_1 - p_2$$

که عددی گویاست.

به این ترتیب حالت سوم باید راست باشد.

(j) فرض می‌کنیم $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ عددی گویاست. دراین صورت:

$$\sqrt{2}+\sqrt[3]{2} = \frac{n_1}{n_2}$$

یا

$$\sqrt[3]{2} = \frac{n_1}{n_2} - \sqrt{2}$$

یا

$$2 = \left(\frac{n_1}{n_2} - 2^{1/2}\right)^3 = \frac{n_1^3}{n_2^3} - 3\left(\frac{n_1^2}{n_2^2}\right)(2)^{1/2} + (3)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)(2) - 2^{3/2}$$

یا

$$۲^{۳/۲}+۳\left(\frac{n_۱^۲}{n_۲^۲}\right)(۲)^{۱/۲}=\frac{n_۱^۳}{n_۲^۳}+۶\left(\frac{n_۱}{n_۲}\right)-۲$$

یا

$$۲^{۱/۲}\left[۲+(۳)\left(\frac{n_۱^۲}{n_۲^۲}\right)\right]=\frac{n_۱^۳}{n_۲^۳}+(۶)\left(\frac{n_۱}{n_۲}\right)-۲$$

یا

$$۲^{۱/۲}=\frac{\left[\frac{n_۱^۳}{n_۲^۳}+(۶)\left(\frac{n_۱}{n_۲}\right)-۲\right]}{\left[۲+(۳)\left(\frac{n_۱^۲}{n_۲^۲}\right)\right]}=R$$

از آنجا که R گویاست، $۲^{۱/۲}$ باید گویا باشد. این تناقض، ثابت می‌کند که $۲+\sqrt[۳]{۲}$ عددی اصم است.

۱۳. فرض می‌کنیم $a<b$ ، اما : $a+c>b+c$. در این صورت عدد مثبت d چنان موجود است که :

$$a+c=b+c+d \quad \text{یا} \quad a=b+d$$

به این ترتیب $a>b$. و این با فرضمان که $a<b$ است متناقض می‌باشد. بنابراین اثبات کامل است.

۱۸. فرض می‌کنیم این روش اثبات، درست نیست. دراین صورت حالتی وجود دارد که این طریق می‌تواند درموردآن به‌کاررود، اما نتیجه نادرست است. اما از آنجا که این‌گزاره به‌ازاء : $n_۰$ ، $n_۰+۱$ ، . . . راست است، باید اولین مقدار Nی که به ازاء آن، گزاره نادرست است موجود باشد. یعنی، به‌ازاء $n_۰$ ، $n_۰+۱$ ، . . . ، $N-۱$ راست باشد، اما به ازاء N راست نباشد. ولی، ملاك استقراء مذکوربراین است که اگر گزاره به ازاء $n_۰$ ، $n_۰+۱$ ، . . . ، $N-۱$ راست باشد، دراین صورت به‌ازاء $N=۱+(N-۱)$ نیزراست است. این تناقض، درستی این‌روش اثبات را ثابت می‌کند.

۲۰. همه درظرف ۳اند. زیرا اگرمهره‌یی موجود باشدکه درظرف ۳ نباشد،بایددارای

شماره‌یی، مثلاً N ، باشد. این شمارهٔ N ممکن است بسیار بـزرگ باشد. دراین صورت شخص باید جریان را به خاطراینکه N مهره درظرف ۳ باشد N مرتبه (با برداشتن N ۱۰ مهره از ظرف ۱) تکرارکند، واین با این گزاره‌کـه مهرهٔ N در ظرف ۳ نیست متناقض است.

فصل ۱۰

۱. (a)

$$f(x)=x^۳+۳x^۲-۲x-۱$$

$$f(۰)=-۱$$

$$f(۱)=۱+۳-۲-۱=۱$$

از آنجاکه تغییرعلامت موجود است، بین $x=۰$ و $x=۱$ جوابی وجود دارد.

۲. (a) انتخاب می‌کنیم :

$$x_۱=x_۲=x_۳=\cdots=x_n=۱$$

دراین صورت :

$$\sum_{i=۱}^{n} x_i^۲=n \quad و \quad \sum_{i=۱}^{n} x_i=n$$

(d) فرض می‌کنیم n زوج باشد، یعنی، $n=۲m$. دراین صورت فرض‌می‌کنیم:

$$x_۱=x_۲=\cdots=x_m=-۱$$

و

$$x_{m+۱}=x_{m+۲}=\cdots=x_{۲m}=۱$$

نیز فرض می‌کنیم :

$$y_۱=y_۲=y_۳=\cdots=y_n=۱$$

دراین صورت :

$$\Big(\sum_{i=۱}^{n} x_i\Big)\Big(\sum_{i=۱}^{n} y_i\Big)=(۰)(n)=۰$$

و

$$\sum_{i=۱}^{n} x_iy_i=-m+m=۰$$

اکنون فرض می‌کنیم n فرد است. دراین صورت $n=2m+1$. فرض می‌کنیم:

$$x_1=x_2=x_3=\cdots=x_{m-1}=-1$$

$$x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots=x_{2m}=1\text{ ، }x_m=-\frac{3}{2}\text{ ، }x_{2m+1}=\frac{1}{2}$$

نیز فرض می‌کنیم:

$$y_1=y_2=\cdots=y_n=1$$

دراین صورت :

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=0 \quad \text{و} \quad \sum_{i=1}^{n}x_iy_i=-(m-1)-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+m=0$$

۳. (a) $x=1/2$. دراین صورت: $x^2=1/4$ و $1/4\leqslant 1/2$.
(d) فرض می‌کنیم: $a=1/2$ و $x=1$ ، دراین صورت: $(1/2)^1\leqslant 1$.

۶. دوعدد حقیقی a و b با $b>a$ را درنظر می‌گیریم. $b-a$ را به‌صورت اعشاری:

$$c_0/c_1c_2c_3\cdots$$

بسط می‌دهیم، و به اولین $c_i\neq 0$ ، مثلاً c_m توجه می‌کنیم. نیز، $a_0/a_1a_2a_3\cdots$ را بسط می‌دهیم. اکنون عدد گویای:

$$a_0/a_1a_2a_3\cdots a_m+c_0/c_1c_2c_3\cdots c_m$$

را درنظرمی‌گیریم. واضح است‌که این‌عدد بین a و b قرار می‌گیرد. و به‌این‌ترتیب گزاره ثابت می‌شود.

۱۰. فرض می‌کنیم تنها دو رقم موجود باشد، و فرض می‌کنیم x یکی از این ارقام و y دیگری باشد. دراین صورت:

$$x+y=10 \quad \text{و} \quad xy=24$$

بنابراین : $y=10-x$ و :

$$(10-x)(x)=24$$

$$10x-x^2=24 \quad \text{یا} \quad x^2-10x+24=0$$

$$(x-6)(x-4)=0$$

$x=6$ ؛ $x=4$

فرض می‌کنیم $x=4$ و $y=6$ باشد، در این صورت عدد مطلوب ۴۶ است.

۱۳. فرض می‌کنیم به ازاء هر مقدار x واقع در فواصل $i-1/2<x\leqslant i+1/2$ و $-i-1/2<x\leqslant -i+1/2$، $f(x)=i$ باشد. در این مورد i عدد طبیعی‌یی است که مساوی ۱ نیست. اکنون هنگامی‌که $-1/2<x\leqslant 1/2$ باشد فرض می‌کنیم $f(x)=1$. این تابع شرایط را برقرار می‌کند.

۱۸. $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^{3/2}$. دراین صورت:

$$f(x)g(x)=x^2 \quad \text{و} \quad f^{-1}(x)=x^2$$

۲۲. $f(x)$ را مساوی x انتخاب می‌کنیم. دراین صورت:

$$f^{-1}(x)=x$$

۲۴. در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\right]f(x_3)+\left[\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\right]f(x_1)$$
$$+\left[\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\right]f(x_2)$$

که واضحاً چند جمله‌یی درجه دومی است که ازاین سه نقطه می‌گذرد.

۲۷. در نظر می‌گیریم:

$$|(c_1f(x)+c_2)-(c_1b+c_2)|=|c_1f(x)+c_2-c_1b-c_2|$$
$$=|c_1f(x)-c_1b|=|(c_1)f(x)-b)|$$
$$=|c_1||f(x)-b|$$

از آنجاکه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ است، نتیجه می‌شود که به ازاء هر $\varepsilon'>0$، $\delta>0$ ی چنان موجود است که $|f(x)-b_1|<\varepsilon'$ هر گاه که $|x-a|<\delta$ باشد. اکنون، به ازاء هر $\varepsilon>0$، $\varepsilon'=\varepsilon/|c_1|$ را انتخاب می‌کنیم. دراین صورت به ازاء تمام مقادیر x صادق در $|x-a|<\delta$، داریم:

$$|(c_1 f(x)+c_2)-(c_1 b+c_2)|<|c_1|\varepsilon'=\varepsilon$$

و به این ترتیب خاصیت حدیِ گفته شده اثبات می‌شود.

۳۰. از آنجا که $f(x)$ در a متصل است، $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ است. به‌همین ترتیب، از آنجا که $g(x)$ در a متصل است، $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$. در مسألهٔ تکلیفی ۲۹ این فصل، بیان شده که ، اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ موجود باشد، دراین صورت :

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=[\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} g(x)]$$

بنابراین :

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=[\lim_{x\to a} f(x)][\lim_{x\to a} g(x)]=f(a)g(a)$$

و این، اتصال $[f(x)g(x)]$ در a را ثابت می‌کند.

فصل ۱۱

۱. (a) دروغ. $n=۲$ را درنظر می‌گیریم:

$$\sum_{i=۱}^{۲}\frac{i^{۲}}{i+۱}=\frac{۱}{۲}+\frac{۴}{۳}=\frac{۱۱}{۶}$$

اما :

$$\frac{n(n+۱)(n+۲)}{۶(n^{۲}+۱)}=\frac{(۲)(۳)(۴)}{(۶)(۵)}=\frac{۴}{۵}$$

(d) دروغ. $n=۲$ ، $x=۲$ را درنظر می‌گیریم. دراین صورت:

$$\sum_{i=۱}^{۲}\frac{x^{۲i-۱}}{۱-x^{۲i}}=\frac{x}{۱-x^{۲}}+\frac{x^{۲}}{۱-x^{۴}}=\frac{۲}{۱-۴}+\frac{۴}{۱-۱۶}$$

$$=-\frac{۲}{۳}+\frac{۴}{-۱۵}=\frac{-۱۰}{۱۵}-\frac{۴}{۱۵}=\frac{-۱۴}{۱۵}$$

اما :

$$\frac{۱}{۱-x}-\frac{۱}{۱-x^{۳}}=\frac{۱}{۱-۲}-\frac{۱}{۱-۸}=-۱+\frac{۱}{۷}=-\frac{۶}{۷}$$

۲. (a) $x=۱/۲$ ، دراین صورت : $x^{۲}=۱/۴۴$ و $۱/۴۴>۱/۲$.

(d) $x=۱$ ، $y=-۱/۲$. دراین صورت:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{y}=۱-۱:\left(\frac{۱}{۲}\right)=-۱$$

درحالیکه :

$$\frac{۱}{x+y}=۱:\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)=۲$$

(f) $x=۱$ ، $y=-۱$ را انتخاب می‌کنیم. دراین صورت:

$$|x+y|=|۱-۱|=۰ \quad \text{و} \quad |x|+|y|=|۱|+|-۱|=۲$$

(l) $x=-۱$ ، $y=-۱$ را انتخاب می‌کنیم. دراین‌صورت:

$$\sqrt{(-۱)(-۱)}=\sqrt{۱}=۱$$

و

$$\frac{-۱+(-۱)}{۲}=-۱$$

(p) $x=-۱$ ، $y=۱$ را انتخاب می‌کنیم دراین صورت: $x\leqslant y$، درحالیکه $\frac{۱}{x}=-۱$ و $\frac{۱}{y}=۱$.

(t) فرض می‌کنیم : $f(x)=x+۱$. دراین صورت : $f^{-۱}(y)=y-۱$ ، که مساوی : $۱/(y+۱)$ نیست.

۶. $p=۲$ را در نظر می‌گیریم، در این صورت: $p^{۲}+۱=۴+۱=۵$ ؛ که باز هم اول است.

۷. $f(n)=۱$ را به ازاء تمام اعداد طبیعی درنظر می‌گیریم. در این صورت $f^{-۱}(x)$ مستلزم اینست که $x=۱$، و $f^{-۱}(۱)$ تنها می‌تواند یك عدد باشد.

۱۱. $n=۴$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت: $n^{۲}+۱=۱۷$ میشود که بر ۵ بخش‌پذیر نیست.

۱۴. فرض میکنیم: $f(x)=x$ و $g(y)=y^{۲}$. در این صورت: $f(۱)=۱$ و $g(-۱)=۱$، اگرچه $۱\neq -۱$ است.

۱۸. تابع: $f(x)=\sqrt{x}$ را در نظر می گیریم. در این صورت به ازاء جمیع مقادیر $x\geqslant ۰$، $f(x^{۲})=x$ و $\sqrt{x}\neq ۱$.

۲۰. (a) $x_i=i$ و $y_i=۱/i$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت $\Delta x_i y_i=\Delta ۱=۰$، درحالیکه:

$$\Delta x_i=(i+۱)-i=۱$$

و

$$\Delta\,\frac{۱}{i}=\frac{۱}{i+۱}-\frac{۱}{i}=\frac{i-(i+۱)}{i(i+۱)}=\frac{-۱}{i(i+۱)}$$

بنا بر این:

$$\Delta x_i\Delta y_i=\frac{-۱}{i(i+۱)}\neq ۰$$

(b) $x_i=i$ را انتخاب می‌کنیم، در این صورت $\Delta x_i=۱$ و:

$$\Delta\,\frac{۱}{x_i}=\frac{-۱}{i(i+۱)}$$

فصل ۱۲

۱. (a)

$$A=ha+\frac{۱}{۲}h(b-a)=h\left[a+\frac{۱}{۲}b-\frac{۱}{۲}a\right]$$
$$=h\left[\frac{۱}{۲}a+\frac{۱}{۲}b\right]=\frac{۱}{۲}h(a+b)$$

۲.

$$ACDE \text{ مساحت } =\frac{۱}{۲}(a+b)(a+b)$$

$$ABD \text{ مساحت } =\frac{۱}{۲}ab$$

$$BCE \text{ مساحت } =\frac{۱}{۲}ab$$

$$BDE \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲} c^{۲}$$

بنابراین :

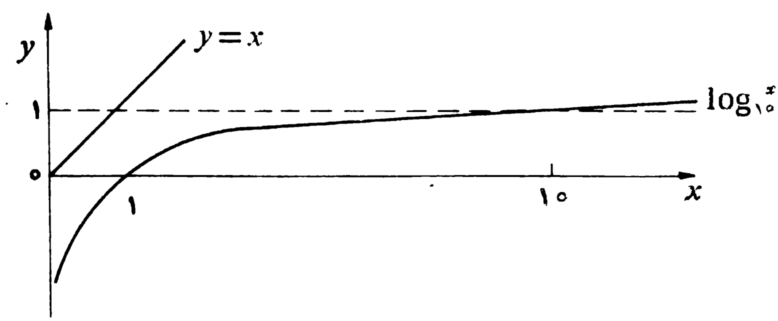
$$\frac{۱}{۲}(a+b)^{۲} = \frac{۱}{۲}ab + \frac{۱}{۲}ab + \frac{۱}{۲} c^{۲}$$

یا $(a+b)^{۲} = ۲ab + c^{۲}$

یا $a^{۲} + ۲ab + b^{۲} = ۲ab + c^{۲}$

یا $a^{۲} + b^{۲} = c^{۲}$

۵. نمودار زیر را درنظرمی‌گیریم:



خط $y=x$ واضحاً بالای منحنی $\log_{۱۰}^{x}$ واقع است.

۹. (a) $ABEF \text{ مساحت } = (\sqrt{a})(\sqrt{b}) = \sqrt{ab}$

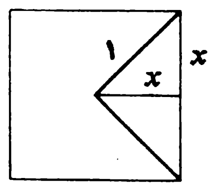
(b) $ABC \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲}(\sqrt{a})(\sqrt{a}) = \frac{۱}{۲}a$

$BDF \text{ مساحت } = \frac{۱}{۲}(\sqrt{b})(\sqrt{b}) = \frac{۱}{۲}b$

از آنجا که : $ABEF \text{ مساحت } \leqslant ABC \text{ مساحت } + BDF \text{ مساحت }$

است ، داریم : $\sqrt{ab} \leqslant \frac{۱}{۲}a+\frac{۱}{۲}b=\frac{۱}{۲}(a+b)$

۱۲. سعی می‌کنیم کره را دریك جعبهٔ مکعب شکل قراردهیم. دراین صورت ازآنجاکه قطر کره برابر ۲ است، طول هرضلع مکعب باید حداقل برابر ۲ باشد. به این‌ترتیب حجم جعبه: $۸=(۲)(۲)(۲)$ می‌شود. واضح است‌که این مقدارازحجم کره‌بزرگتر است. به‌همین ترتیب می‌توانیم مکعبی را داخل کره محاط‌کنیم. ابتدا طول یکی از اضلاع چنین مکعبی را به‌دست می‌آوریم. برای‌این کارشکل زیررا در نظرمیگیریم:



دراین شکل $x^۲+x^۲=۱$ یا $۲x^۲=۱$ است. به‌این ترتیب $x^۲=۱/۲$ می‌شود و این، مستلزم اینست که طول یکی از اضلاع $۲/\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$ و حجم مکعب محاطی[1] $۲^{۳/۲}$ است. بنابراین V حجم کره مقداری در فاصلهٔ : $۸>V>۲^{۳/۲}$ دارد . این نامساوی ۰/۷۵۷ ، $۴/۳\pi$ ، ۱، ۳ / ۴ ،که‌کمتر از $۲^{۳/۲}$ اند، راکنار می گذارد. نیز $۸<۳\pi$ را خارج مـی‌کند. دراین صورت ۴/۱۹ به‌عنوان پاسخ ممکن باقـی می‌ماند.

۱۵. $(A \wedge A) \Longleftrightarrow A$ ، $(A \vee A) \Longleftrightarrow A$

ازطرف دیگر، $a+a\neq a$ درحالت‌کلی‌است. به‌همین ترتیب: $(a)(a)\neq a$ به‌ازاء جمیع مقادیر a است.

۱۸. (a) تابع لگاریتمی. زیرا $\log_a^{xy}=\log_a^x+\log_a^y$
(b) (i) $\log_a^۱=۰$. اکنون $x=۱$ ، $y=۱$ را انتخاب می‌کنیم:

$$f(۱)=f[(۱)(۱)]=f(۱)+f(۱) \quad \text{یا} \quad f(۱)=۲f(۱)$$

واین تنها وقتی می‌تواند رخ دهدکه $f(۱)=۰$ باشد.

1. inscribed cube

(ii) $\log_a^{(۱/x)} = -\log_a^x$

اما :

$$f(۱/x) = -f(x) \quad \text{یا} \quad ۰ = f(۱) = f[(x)(۱/x)] = f(x) + f(۱/x)$$

(iii) $\log ۰$ تعریف نشده است. نیز به ازاء هر x :

$$f(x) = ۰ \quad \text{یا} \quad f(۰) = f[(۰)x] = f(۰) + f(x)$$

به این ترتیب اگر $f(۰)$ تعریف شده باشد، دراین صورت به‌ازاء جمیع مقادیر x ، $f(x) = ۰$ است.

(iv) $\log_a(x/y) = \log_a^x - \log_a^y$

نیز : $f(x/y) = f(x) + f(۱/y) = f(x) - f(y)$

(v) $\log_a^{x^n} = n \log_a^x$

اگر n عددی طبیعی باشد ، دراین صورت $f(x^n) = nf(x)$.

این مطلب را می‌توان با استقراء نشان‌داد. به‌ازاء $n = ۱$ ، داریم: $f(x) = f(x)$، که واضحاً راست است. فرض می‌کنیم به ازاء $n = k$ راست باشد، دراین صورت به ازاء $k+۱$ ، داریم:

$$\begin{aligned} f(x^{k+۱}) &= f[(x^k)(x)] = f(x^k) + f(x) = kf(x) + f(x) \\ &= (k+۱)f(x) \end{aligned}$$

و به این ترتیب، خاصیت مورد نظرمحقق می‌شود.

(c) (i) $\log_a(-۱)$ تعریف نشده است. در حالیکه:

$$۰ = f(۱) = f[(-۱)(-۱)] = f(-۱) + f(-۱)$$

$$f(-۱) = ۰ \quad \text{یا} \quad ۰ = ۲f(-۱) \quad \text{یا}$$

(ii) اگر $x \leqslant ۰$ ، دراین صورت $\log_a^x$ تعریف نشده است، درحالیکه:

$$f(x) = f[(-x)(-۱)] = f(-x) + f(-۱) = f(-x)$$

۲۵. (a) تابع ساده‌یی ازاین نوع، $f(x) = x^۲$ است، زیرا :

$$f(ax) = (ax)^۲ = a^۲x^۲ = a^۲f(x)$$

چون $x=1$ باشد، داریم $f(a)=a^2f(1)$، واین‌کلی‌ترین صورت این تساوی است. یعنی، $f(y)=y^2f(1)$. به عنوان مثال، چون: $f(1)=1$ ، $f(x)=x^2$. اگر: $f(1)=-1$ ، دراین صورت : $f(x)=-x^2$، و غیره.

۲۳. (a) مثال اول: مجموعهٔ اعداد صحیحی،که درآن $+$ به جای $\oplus$ و ضرب $(\times)$ به جای $\odot$ قرار گرفته باشد، را درنظرمی‌گیریم. دراین‌صورت‌گـزاره را به‌ازاء هر سه عدد صحیح a ، b ، c اثبات می‌کنیم. داریم :

(i) $a+b$ عددی صحیح است.

(ii) $(a+b)+c=a+(b+c)$

(iii) $e=0$

(iv) $(-a)=-a$

(v) $a+b=b+a$

(vi) $(a)(b)$ عددی صحیح است.

(vii) $[(a)(b)](c)=(a)[(b)(c)]$

(viii) $(a)(b+c)=(a)(b)+(a)(c)$

(ix) $(b+c)a=(b)(a)+(c)(a)$

مثال دوم : اعداد حقیقی با $+$ به‌جای $\oplus$ و ضرب $(\times)$ به‌جای $\odot$.

مثال سوم : مجموعهٔ I شامل اعداد به‌صورت $a+\sqrt{2}b$ ، که درآن a و b اعدادی صحیح‌اند، می‌باشد. بازهم دراین مورد $+$ به‌جای $\oplus$ وضرب $(\times)$ بـه جای $\odot$ قرار گرفته است. گزاره را به‌ازاء هرسه عدد:

$$a_1+\sqrt{2}b_1 \text{ ، } a_2+\sqrt{2}b_2 \text{ ، } a_3+\sqrt{2}b_3$$

از مجموعه‌مان اثبات مـی‌کنیم. دراین اعداد : a_1 ، a_2 ، a_3 ، b_1 ، b_2 ، b_3 اعداد صحیح‌اند.

(i)
$$(a_1+\sqrt{2}b_1)+(a_2+\sqrt{2}b_2)=(a_1+a_2)+\sqrt{2}(b_1+b_2)$$

از آنجاکه : a_1+a_2 و b_1+b_2 اعداد صحیحند :

$$(a_1+a_2)+\sqrt{2}(b_1+b_2)\in I$$

(ii)

$$[(a_1+\sqrt{2}\,b_1)+(a_2+\sqrt{2}\,b_2)]+(a_3+\sqrt{2}\,b_3)=(a_1+\sqrt{2}\,b_1)$$
$$+[(a_2+\sqrt{2}\,b_2)+(a_3+\sqrt{2}\,b_3)]$$

(iii) $e = ۰ = [۰ + (\sqrt{۲})۰]$

(iv) $[-(a_۱+\sqrt{۲}b_۱)] = -a_۱ - b_۱\sqrt{۲}$

(v) $(a_۱+\sqrt{۲}b_۱)+(a_۲+\sqrt{۲}b_۲) = (a_۲+\sqrt{۲}b_۲)+(a_۱+\sqrt{۲}b_۱)$

(vi)

$$(a_۱+\sqrt{۲}b_۱)(a_۲+\sqrt{۲}b_۲) = a_۱a_۲+\sqrt{۲}(b_۱a_۲+b_۲a_۱)+۲b_۱b_۲$$
$$= (a_۱a_۲+۲b_۱b_۲)+\sqrt{۲}(b_۱a_۲+a_۱b_۲) \in I$$

(vii)

$$[(a_۱+\sqrt{۲}b_۱)(a_۲+\sqrt{۲}b_۲)](a_۳+\sqrt{۲}b_۳) =$$
$$(a_۱+\sqrt{۲}b_۱)[(a_۲+\sqrt{۲}b_۲)(a_۳+\sqrt{۲}b_۳)]$$

(viii)

$$(a_۱+\sqrt{۲}b_۱)[(a_۲+\sqrt{۲}b_۲)+(a_۳+\sqrt{۲}b_۳)]$$
$$= (a_۱+\sqrt{۲}b_۱)(a_۲+\sqrt{۲}b_۲)+(a_۱+\sqrt{۲}b_۱)(a_۳+\sqrt{۲}b_۳)$$

(ix) مشابه فوق.

(b)

$$e = e\oplus e = [a\oplus(-a)]\oplus((-b)\oplus b)$$
$$= a\oplus[(-a)\oplus((-b)\oplus(b))] = a\oplus\{[(-a)\oplus(-b)]\oplus b\}$$
$$= a\oplus\{b\oplus[(-a)\oplus(-b)]\} = (a\oplus b)\oplus[(-a)\oplus(-b)]$$

یا $(-a)\oplus(-b) = [-(a\oplus b)]$

(c) ابتدا توجه می‌کنیم که : $e\oplus e = e$. اما :

$$a\odot e = a\odot(e\oplus e) = (a\odot e)\oplus(a\odot e)$$

بنابراین :

$$(a\odot e)\oplus[-(a\odot e)] = [(a\odot e)\oplus(a\odot e)]\oplus[-(a\odot e)]$$

یا $e = (a\odot e)\oplus[(a\odot e)\oplus[-(a\odot e)]] = (a\odot e)\oplus e = a\odot e$

(d) ابتدا توجه می‌کنیم که : $[-(-a)] = a$. زیرا :

$$(-a)\oplus[-(-a)] = e$$

و $(-a)\oplus a = e$ و تحت $\oplus$ ، دستگاه مزبور گروه است. اما :

$$e = e\odot b = [a\oplus(-a)]\odot b = (a\odot b)\oplus[(-a)\odot b]$$

یا : $-(a\odot b)=[(-a)\odot b]$

به همین ترتیب :

$$e=a\odot e=a\odot[b\oplus(-b)]=(a\odot b)\oplus[a\odot(-b)]$$

به این ترتیب : $[-(a\odot b)]=[a\odot(-b)]$. بنابراین:

$$[(-a)\odot(-b)]=\{-[a\odot(-b)]\}=\{-[-(a\odot b)]\}=a\odot b$$

فصل ۱۳

۱. قبلاً نشان دادیم که بین هردوعدد گویا، مثل a و b ، یك عدد اصم وجود دارد (مثال ۱۰.۳). اکنون فرض می‌کنیم که تعدادی متناهی از این اعداد، مثلاً

$$X_۱<X_۲<\cdots<X_n$$

موجودند. دراین صورت :

$$a<X_۱<X_۲<\cdots<X_n<b$$

از آنجاکه a عددی گویاست و $X_۱$ عددی اصم می‌باشد، عدد اصم Yی در فاصلهٔ $a<Y<X_۱$ موجود است (مسألهٔ ۱۰.۵). این با این فرض، که n عدد اصم بین a و b موجود است، متناقض است. بنابراین ، باید تعدادی نامتناهی عدد اصم بین a وbموجود باشد.

۵. (a) $ab=۱$ مستلزم اینست که $b=۱/a$. اما $a+(۱/a)\geqslant ۲$ قبلاً اثبات شده‌است (مسألهٔ ۷.۲۵).

(b) اگر تمام $x_i=۱$ها باشد، در این صورت : $۱+۱+\cdots+۱=n$

دراین صورت حالتی را درنظر می‌گیریم که درآن، بعضی از x_iها برابر ۱ نباشند. وفرض می‌کنیم که گزاره به‌ازاء $n=k$ راست است. دراین صورت به‌ازاء $k+۱$ داریم :

$$(x_۱)(x_۲)\cdots(x_{k+۱})=۱$$

اما از آنجاکه بنابه‌فرض، تمام x_iها برابر ۱ نیستند دو x_i ، که به خاطر سهولت کارآنها را $x_۱$ و $x_۲$ می‌نامیم، موجودند به‌طوریکه $x_۱<۱$ و $x_۲>۱$ باشد.فرض می‌کنیم $y=(x_۱)(x_۲)$. دراین صورت:

$$(x_1)(x_2)\cdots(x_{k+1})=y(x_3)\cdots(x_{k+1})=1$$

بنابراین، ازآنجاکه نامساوی را برای حالت k راست فرض‌کرده‌ایم:

$$y+x_3+x_4+\cdots+x_{k+1}\geqslant k$$

اکنون درنظر می‌گیریم:

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}=y+x_3+x_4+\cdots$$
$$+x_{k+1}-y+x_1+x_2\geqslant k+x_1+x_2-y=k+x_1+x_2-x_1x_2$$

اکنون: $x_1+x_2-x_1x_2=x_1+x_2(1-x_1)$

را درنظر می‌گیریم. از آنجاکه: $1>x_1$ ، $0<x_1-1$. نیز: $1<x_2$ ،

$$x_2(1-x_1)>1-x_1$$

به این ترتیب:

$$x_1+x_2-x_1x_2>x_1+1-x_1=1$$

بنابراین نشان داده‌ایم که:

$$x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}\geqslant k+1$$

و این، اثبات نامساوی مورد بحث را تکمیل می‌کند.

(c) با فرض $y_i=x_i : R^{1/n}$ ، داریم:

$$(y_1)(y_2)\cdots(y_n)=\left(\frac{x_1}{R^{1/n}}\right)\left(\frac{x_2}{R^{1/n}}\right)\cdots\left(\frac{x_n}{R^{1/n}}\right)=\frac{R}{(R^{1/n})^n}=1$$

به این ترتیب:

$$y_1+y_2+\cdots+y_n\geqslant n$$

یا:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n):R^{1/n}\geqslant n$$

یا:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n):n\geqslant R^{1/n}=\sqrt[n]{(x_1)(x_2)(x_3)\cdots(x_n)}$$

۷. $\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{(1)(2)(3)\cdots(n)}\leqslant(1+2+3+\cdots+n):n$
$$=n(n+1):2n=(n+1):2$$

به این ترتیب :

$$n!\leqslant[(n+1):2]^n$$

۹. فرض می‌کنیم :

$$a=\frac{X_i}{(X_1^p+X_2^p+\cdots+X_n^p)^{1/p}}$$

$$b=\frac{Y_i}{(Y_1^q+Y_2^q+\cdots+Y_n^q)^{1/q}}$$

با استفاده از نتیجهٔ مسألهٔ ۸، به‌دست می‌آوریم :

$$\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\geqslant ab$$

یا :

$$\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{X_i^p}{X_1^p+X_2^p+\cdots+X_n^p}\right)+\left(\frac{1}{q}\right)\left(\frac{Y_i^q}{Y_1^q+Y_2^q+\cdots+Y_n^q}\right)$$
$$\geqslant\frac{X_iY_i}{(X_1^p+X_2^p+\cdots+X_n^p)^{1/p}(X_1^q+X_2^q+\cdots+X_n^q)^{1/q}}$$

با جمع این نامساویها به ازاء تمام iها ، به‌دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p}\left(\frac{X_i^p}{X_1^p+X_2^p+\cdots+X_n^p}\right)+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{q}\left(\frac{Y_i^q}{Y_1^q+Y_2^q+\cdots+Y_n^q}\right)$$
$$\geqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i}{(X_1^p+X_2^p+\cdots+X_n^p)^{1/p}(Y_1^q+Y_2^q+\cdots+Y_n^q)^{1/q}}$$

یا :

$$\frac{1}{p}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i^p}{\sum_{i=1}^{n}X_i^p}\right)+\frac{1}{q}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}Y_i^q}{\sum_{i=1}^{n}Y_i^q}\right)\geqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i}{\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i^q\right)^{1/q}}$$

یا :

$$۱ \geqslant \frac{\sum_{i=۱}^{n} X_i Y_i}{\left[\left(\sum_{i=۱}^{n} X_i^p\right)^{۱/p}\right]\left[\left(\sum_{i=۱}^{n} Y_i^q\right)^{۱/q}\right]}$$

سرانجام، به‌دست می‌آوریم :

$$\left[\left(\sum_{i=۱}^{n} X_i^p\right)^{۱/p}\right]\left[\left(\sum_{i=۱}^{n} Y_i^q\right)^{۱/q}\right] \geqslant \sum_{i=۱}^{n} X_i Y_i$$

۱۲. در مثال ۱۳۰۷ داده شد که: $\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i} = ۲^n$. مسألهٔ ۱۱ مقرر می‌کند که:

$$\sum_{i=۰}^{n} (-۱)^i \binom{n}{i} = ۰$$

با ترکیب این دو گزاره، به دست می‌آوریم:

$$\sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i} + \sum_{i=۰}^{n} (-۱)^i \binom{n}{i} = ۲^n$$

یا:

$$۲^n = \sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}\left[۱+(-۱)^i\right] = ۲\left[\binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+\binom{n}{۶}+\cdots\right]$$

یا:

$$۲^{n-۱} = \binom{n}{۰}+\binom{n}{۲}+\binom{n}{۴}+\cdots$$

۱۴.

$$(۱+t)^{۲n} = (۱+t)^n(۱+t)^n$$

یا:

$$\sum_{j=۰}^{۲n}\binom{۲n}{j}t^j = \sum_{i=۰}^{n}\binom{n}{i}t^i \sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}t^k$$

با مقایسهٔ توانهای مشابه t، به دست می‌آوریم:

$$\binom{۲n}{j}t^j = \left[\binom{n}{۰}\binom{n}{j}+\binom{n}{۱}\binom{n}{j-۱}+\binom{n}{۲}\binom{n}{j-۲} + \cdots + \binom{n}{j}\binom{n}{۰}\right]t^j$$

با قرار دادن $j=n$، داریم:

$$\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$$

اما:

$$\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i} \qquad \text{(مثال ۱۳.۵)}$$

بنابراین:

$$\binom{2n}{n}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

۱۶. یك مثال مجموعهٔ زوجهای مرتب اعداد حقیقی با $\oplus$ تعریف شده به صورت:
$(a ، b)\oplus(c ، d)=(ac ، bc+d)$

است. در این جا $a\neq 0$ می‌باشد.

نشان میدهیم که مورد فوق یك گروه است.

(i) $(a ، b)\oplus(c ، d)=(ac ، bc+d)$

فرض می‌کنیم: $ac=a'$ ، $bc+d=b'$، در این صورت: $(a' ، b')\epsilon G$ (G گروه است).

(ii) $[(a_1 ، b_1)\oplus(a_2 ، b_2)]\oplus(a_3 ، b_3)=[(a_1a_2 ، b_1a_2+b_2)]\oplus(a_3 ، b_3)$

$=[a_1a_2a_3 ، (b_1a_2+b_2)a_3+b_3]=(a_1a_2a_3 ، b_1a_2a_3+b_2a_3+b_3)$

اما: $(a_1 ، b_1)\oplus[(a_2 ، b_2)\oplus(a_3 ، b_3)]=$

$(a_1 ، b_1)\oplus(a_2a_3 ، b_2a_3+b_3)=(a_1a_2a_3 ، b_1a_2a_3+b_2a_3+b_3)$

بنابراین، شرکت‌پذیری برقرار می‌باشد.

(iii) $e=(1 ، 0)$، زیرا:

$(1 ، 0)\oplus(a ، b)=[(1)a ، (0)(a)+b]=(a ، b)$

نیز: $(a ، b)\oplus(1 ، 0)=(a ، b)$

(iv) در مورد هرعضو $(a ، b)$ لازم است که عضومعکوس: $[-(a ، b)]$ راچنان بیابیم که:

$$[-(a ، b)]\oplus(a ، b)=(a ، b)\oplus[-(a ، b)]=(1 ، 0)$$

اگر $(c ، d)$، چنین عضوی باشد، در این صورت:

$$(۱ ، ۰)=(c ، d)\oplus(a ، b)=(ca ، da+b)$$

$$(۱ ، ۰)=(a ، b)\oplus(c ، d)=(ac ، bc+d)$$

بنابراین: $ac=۱$ یا $c=۱/a$. $da+b=۰$ یا $d=-b/a$. در معادلهٔ دوم:

$$bc+d=۰ \quad \text{یا} \quad \frac{b}{a}+d=۰ \quad \text{یا} \quad d=-\frac{b}{a}$$

بنابراین:

$$[-(a ، b)]=\left(\frac{۱}{a} ، -\frac{b}{a}\right)$$

۱۸. نشان دهید که در مورد حلقهٔ تقسیمی، اگر $a\neq e$ ، $b\neq e$ باشد، در این صورت: $a\odot b\neq e$. اثبات با تناقض انجام میگیرد. $a\neq e$ ، $b\neq e$ انتخاب وفرض کنید که: $a\odot b=e$. در این صورت:

$$a^{-۱}\odot(a\odot b)=a^{-۱}\odot e=e$$

(مسألهٔ ۲۳c از فصل ۱۲ را ملاحظه کنید). اما:

$$a^{-۱}\odot(a\odot b)=(a^{-۱}\odot a)\odot b=u\odot b=b$$

بنابراین: $b=e$، که تناقض است.

۲۱. (a) در مسألهٔ تکلیفی ۲۹ درفصل ۱۰، نشان داده شد که اگر:

$$\lim_{x\to a} g(x)=d \text{ و } \lim_{x\to a} f(x)=b$$

در این صورت: $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=db$. نیز در مسألهٔ: ۱۰.۲۶b نشان دادیم که: $\lim_{x\to ۲} x^۲=۴$. ازآنجا که: $\lim_{x\to ۲} x=۲$ است، داریم:

$$\lim_{x\to ۲} x^۳=\lim_{x\to ۲}(x^۲)(x)=\lim_{x\to ۲} x^۲\lim_{x\to ۲} x=(۴)(۲)=۸$$

۲۴. (a)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۱)}{(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)}{(x-۱)}(x+۱)$$

ازآنجا که: $\lim_{x\to ۱}[(x-۱)/(x-۱)]=۱$ و $\lim_{x\to ۱}(x+۱)=۲$، داریم:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x-1}\right)(x+1)=(1)(2)=2$$

۲۶. (a) این گزاره را میتوانیم با استفاده از استقراء اثبات کنیم. به ازاء $n=1$، نشان دادیم (مسألهٔ a ۱۰.۲۶) که $f(x)=x$ متصل است. اکنون فرض می‌کنیم به ازاء $n=k$ راست است، در این صورت به ازاء $k+1$، داریم:

$$\lim_{x\to a} x^{k+1}=\lim_{x\to a} x^k(x)$$

از آنجاکه: $\lim_{x\to a} x=a$ ، و $\lim_{x\to a} x^k=a^k$ بنا به فرض راست است، داریم:

$$\lim_{x\to a} x^{k+1}=a^k a=a^{k+1}$$

این ثابت می‌کندکه $f(x)=x^n$ به ازاء جمیع مقادیر حقیقی a متصل است.

۲۸.
$$\Delta\left(\frac{1}{i}\right)=\frac{1}{i+1}-\frac{1}{i}=\frac{-1}{i(i+1)}$$

و

$$\Delta\left(\frac{1}{i+1}\right)=\frac{1}{i+2}-\frac{1}{i+1}=\frac{-1}{(i+1)(i+2)}$$

به این ترتیب:

$$\Delta\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i+1}\right)\right]=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{i+2}{i(i+1)(i+2)}+\frac{i}{i(i+1)(i+2)}\right)$$

$$=\frac{2(i+1)}{2(i)(i+1)(i+2)}=\frac{1}{i(i+2)}$$

بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+2)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳(n+۱)(n+۲)-۲(n+۲)-۲(n+۱)}{۲(n+۱)(n+۲)}\right)$$

$$=\frac{۳n^{۲}+۹n+۶-۲n-۴-۲n-۲}{۴(n+۱)(n+۲)}=\frac{۳n^{۲}+۵n}{۴(n+۱)(n+۲)}$$

۳۱. ابتدا مثال: $۱/۲+۱/۳+۱/۴$ را در نظر می گیریم.
۴ را میتوان به‌صورت $۲^{۲}$ نوشت. دراین صورت با مخرج مشترك گرفتن، به دست می‌آوریم:

$$\frac{(۲)(۳)+۲^{۲}+۳}{(۲^{۲})(۳)}$$

توجه داشته باشیدکه دو جملهٔ اول صورت، زوجند، درحالیکه جملهٔ آخر فرداست. به این ترتیب، صورت، فرد می‌باشد. از طرف دیگر، مخرج به طـور واضح زوج است. اکنون به‌حالت کلی برمیگردیم. به ازاء هر مقدار n، تمام جملات به‌صورت ۲^{k} را بیرون می‌آوریم. در مجموع: $۱/۲+۱/۳+۱/۴+\dots+۱/n$ جمله‌یی را،که بیشترین‌مقدارچنین kئی را دارد، پیدا می کنیم. دقیقاً یك چنین جمله‌یی موجود است. زیرا، اگر فرض کنیم دو جمله مثلاً n و $n+m$ وجود دارد، در این‌صورت $n=۲^{k}l$ ، $n+m=۲^{k}r$، که در آنها هم l هم r فـرد است. در ایـن صورت $n+m-n=۲^{k}(r-l)$. از آنجا که هم r هم l فرد است، $r-l$ زوج میشود. چون $m\neq ۰$ ، $r-l=۲p$،که در آن p عدد صحیح است. بنابراین $m=۲^{k+۱}p$. و این با این فرض،که k بیشتریـن چنین مقداری است، تناقض دارد. اکنون بـه اثبات باز می گردیم.جملات را با به‌دست آوردن کوچکترین مخرج مشترك[1] ترکیب می‌کنیم. این مخرج دارای ۲^{k}، به عنوان یکی از عوامل، اسـ. صورت جمله‌یی که ۲^{k} را به‌عنوان عامل دارد فرد می‌شود، در حالیکه تمام صورتهای دیگر ۲^{r} ، $r\geqslant ۱$، را به عنوان عامل دارند. به این ترتیب، صورت‌کسر حاصل، مجموع $n-۲$ عدد زوج و یك عدد فرد می‌شود، و بنابراین فرد است. مخرج‌کسر، با داشتن عامل ۲^{k}، زوج است. به این ترتیب، نسبت مورد بحث نمی‌تواند عدد صحیح باشد.

1. least common denominator

فهرست مراجع

Bibliography

کتب ریاضی مقدماتی بسیاری موجودند که دارای مطالب جالبند و به خوبی می‌توانند به عنوان منابع تکمیلی معرفی شوند. در این مورد فهرستی از چندکتاب جالب توجه، که برای اضافه‌کردن معلومات خواننده درنظر گرفته شده‌اند، انتخاب کرده‌ایم.

ابتدا به ذکر یکی از کتاب‌های مقدماتی عالی در مورد استدلال ریاضی، که‌شامل مباحث سادهٔ مفهوم اثبات‌ریاضی و اینکه خواننده چگونه اقدام به اثبات قضایای ریاضی کند می‌باشد، می‌پردازیم. این‌کتاب عبارتست از:

1. Polya, G., How to Solve It, second edition (New York: Doubleday Anchor Books, 1957).

کتابی که روش آکسیوماتیک «axiomatic approach» را توضیح میدهد عبارتست از:

2. Landau, E., Foundations of Analysis, second edition(New York: Chelsey Publishing Company, 1960).

دراین‌کتاب، خواص اعداد، با شروع ازآکسیومهای پئانو مطرح میشود، وکتاب با بحثی در مورد اعداد مختلط ختم می‌شود.

منبع برجسته‌یی درمورد مسائل‌اضافی‌که بسیاری ازآنها بسیارجالبند، باحل‌آنها که درپایان‌کتاب آمده، عبارتست از:

3. Shoklarsky, D. O., Chentzov, N. N., Yarglom, I. M., The U.S.S.R. Olympiad Problems Book, third Russian edition(in English) (New York: Freeman and Company, 1962).

بحث از گروهها و حلقه‌ها، در فصل ۱۲، تنها معرفی مختصری از زمینه‌یی از ریاضیات موسوم به «جبر مجرد» «Abstract Algebra» بوده است. یکی از کتابهای جالب، در این زمینه عبارتست از:

4. Birkoff, G. and Maclane, S. , A Survey of Modern Algebra, third edition (New York: The Macmillan Company, 1965).

کتاب مرجعی درمورد بسیاری از معادلات مجموعی، به خصوص موارد فصل ۶، عبارتست از:

5. Jolley, L. B. W., Summation of Series, second revised edition (New York: Dover Publication, Inc., 1961).

بعضی ازموضوعات اختصاصی درکتابهای مقدماتی خوش نوشت «well-written» زیر مورد بحث قرارگرفته‌اند:

6. Bechenback, E., and Bellman, R., An Introduction to Inequalities (New York: Random House, 1961).
7. Jeffrey, R. C., Formal Logic, Its Scope and Limits (New York: Mc Graw–Hill Book Company, 1967).
8. Richardson, C. H., An Introduction to the Calculus of Finite Differences (New York: D. Van Nostrand and Company, 1954).
9. Vorogyov, N. N., The Fibonacci Numbers (Boston: D. C. Heath and Company, 1964).

Index — فهرست لغات فنی

انتشارات مدرسه
تهران: ایرانشهر شمالی، ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش، پلاک ۲۶۸
تلفن ۸۲۶۰۰۷

۹۰۰ ریال