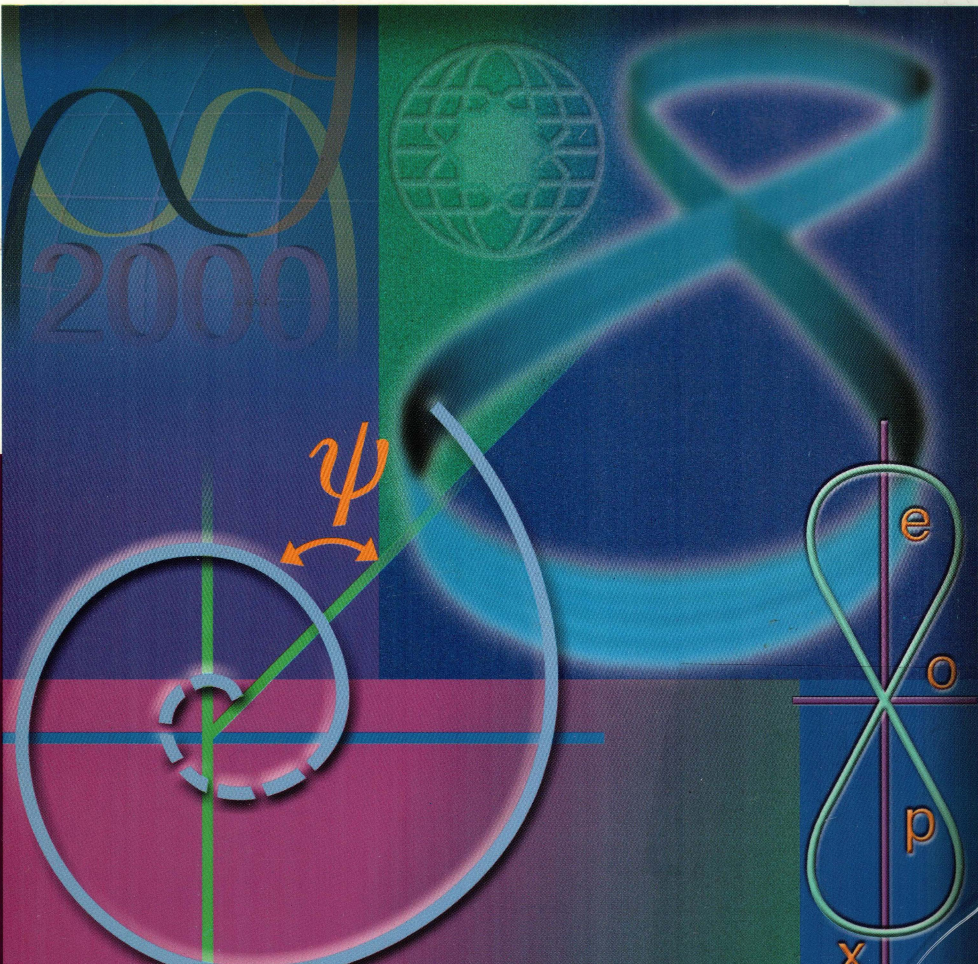
شرکت انتشارات فنی ایران

جوهر، روش و کارایی ریاضیات ۲

(به مناسبت سال جهانی ریاضیات)



تألیف: گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلووای شوروی
ترجمه: پرویز شهریاری

جوهر، روش و کارایی ریاضیات ۲

تألیف: گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلووای شوروی

ترجمه: پرویز شهریاری

ویرایش: دکتر شهریار شهریاری

شرکت انتشارات فنی ایران

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

جوهر، روش و کارایی ریاضیات / تألیف گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلووای شوروی ؛ ترجمه پرویز شهریاری ؛ ویرایش شهریار شهریاری . ـ تهران: شرکت انتشارات فنی ایران ، ۱۳۸۰ .

۳ج.

ISBN 964-6232-59-0 (ج . ۱) ـ ISBN 964-6232-58-2 (دوره) . ـ

ISBN: 964-6232-61-2 (ج . ۳) ـ ISBN 964-6232-60-4 (ج . ۲)

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

۱. ریاضیات. الف. انستیتوی ریاضی استکلووا Matematicheskii institut im . V. A . Steklova ب . شهریاری ، پرویز ، ۱۳۰۵ ـ ، مترجم . ج . عنوان .

۹ج /۳۷/۲/ QA ۵۱۰

۱۳۷۹

کتابخانه ملی ایران ۱۴۶۵۱-۷۸ م

شرکت انتشارات فنی ایران

جوهر، روش و کارایی ریاضیات ۲

تألیف : گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلووای شوروی

ترجمه : پرویز شهریاری

ویرایش : دکتر شهریار شهریاری

ناشر : شرکت انتشارات فنی ایران ؛ تلفن : ۶۴۹۰۱۴۶ ، ۶۴۶۲۲۱۸ ، ۸۷۵۰۴۴۷

نوبت چاپ : اول ۱۳۸۰

تیراژ : ۳۰۰۰ نسخه

امور فنی : محمدعلی رزاقی

حروفچینی : عبدی ، شهیر

لیتوگرافی : کورش

چاپ : سعید نو

شابک (دورهٔ ۳ جلدی) : ۹۶۴-۶۲۳۲-۵۸-۲ ISBN: 964-6232-58-2 (3 Vol. Set)

شابک (جلد دوم) : ۹۶۴-۶۲۳۲-۶۰-۴ ISBN: 964-6232-60-4 (Vol. 2)

علم چندانکه بیشتر خوانی　　چون عمل در تو نیست نادانی

نه محقق بود نه دانشمند　　چارپائی بر او کتابی چند

آن تهی مغز را چه علم و خبر　　که بر او هیزمست یا دفتر

سعدی

پیش‌گفتار

این کتاب مجموعه‌ای است از آگاهی‌های ریاضی، که آشنایی با آن‌ها، برای هر درس‌خوانده‌ای لازم است. با این که کتاب در سال‌های پنجاه سدهٔ بیستم تنظیم شده و به‌طور طبیعی شامل پیشرفت‌هایی که در دهه‌های بعد پدید آمده، نیست، ارزش خود را در زمان ما هم حفظ کرده است.

از ویژگی‌های کتاب، جامع بودن و انسانی بودن آن است؛ نویسندگان کتاب، همه جا به تاریخ ریاضیات، فلسفهٔ ریاضیات و کاربردهای ریاضیات توجه داشته‌اند و «ریاضیات» را به‌عنوان مجموعه‌ای یکپارچه و یگانه، و تا آن‌جا که ممکن بوده است با زبانی ساده و غیرتخصصی، بررسی کرده‌اند. همان‌طور که در پیش‌گفتار هیأت تحریریه آمده، کتاب در انستیتوی ریاضیات اتحاد شوروی و با شرکت و بحث دسته‌جمعی بزرگترین ریاضی‌دانان آن زمان شوروی تنظیم شده است و، به‌این ترتیب، از غربال نقد ریاضی‌دانانِ با صلاحیت گذشته است.

تنها دربارهٔ فصل چهاردهم (جلد دوم)، با توجه به پیشرفت‌های حیرت‌آوری که در دهه‌های اخیر در ساختمان رایانه‌ها به‌وجودآمده، باید گفت، تنها ارزش تاریخی دارد و می‌تواند خواننده را با موقعیت کار رایانه‌ها در آغاز پیدایش خود آشنا کند که، به نوبهٔ خود، برای هر کسی جالب است. دیگر فصل‌ها به‌طور کامل قابل استفاده است و اگر لازم به یادآوری نکته یا نکته‌هایی بوده، ویراستار محترم ترجمهٔ فارسی، به آن‌ها اشاره کرده است.

کتاب بعد از انتشار، بلافاصله به بیشتر زبان‌های زندهٔ دنیا برگردانده شد و به‌عنوان یکی از کتاب‌های مرجع در اختیار دانش‌پژوهان قرار گرفت. در ایران، برای نخستین‌بار، فصل‌های

اول و دوم جلد اول در سال‌های اول دههٔ چهل خورشیدی و سپس ترجمهٔ جلدهای اول و دوم کتاب در سال ۱۳۵۶ منتشر شد و اینک به همت شرکت انتشارات فنی ایران، هر سه جلد در اختیار خوانندهٔ علاقه‌مند قرار می‌گیرد.

از پسرم شهریار که با دقت وسواس‌گونه‌ای تمامی ترجمه را، ضمن تطبیق آن با اصل کتاب، خوانده‌اند و هرجا لازم بوده است، یادداشتی در پاورقی افزوده‌اند، بسیار سپاس دارم؛ بی‌تردید بدون همراهی او، خواننده نمی‌توانست کتابی به این صورت در اختیار داشته باشد.

پرویز شهریاری

فهرست

عنوان	صفحه
بخش هفتم ـ منحنی‌ها و سطح‌ها (خم‌ها و رویه‌ها)	۱۲۳
۱. موضوع و روش نظریهٔ (خم‌ها و رویه‌ها) منحنی‌ها و سطح‌ها	۱۲۵
۲. نظریهٔ منحنی‌ها (خم‌ها)	۱۳۰
۳. مفهوم‌های اصلی نظریهٔ سطح‌ها	۱۴۷
۴. هندسهٔ درونی و خمش سطح	۱۶۴
۵. دیدگاه‌های تازه در نظریهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها	۱۸۴
بخش هشتم ـ حساب وردش‌ها	۱۹۵
۱. ورود به مطلب	۱۹۷
۲. معادله‌های دیفرانسیلی حساب وردش‌ها	۲۰۳
۳. روش‌های حل تقریبی مسأله‌های حساب وردش‌ها	۲۱۷
بخش نهم ـ تابع‌های با متغیر مختلط	۲۲۱
۱. عددهای مختلط و تابع‌های با متغیر مختلط	۲۲۳
۲. بستگی تابعِ با متغیر مختلط با مسأله‌های فیزیک ریاضی	۲۴۰
۳. بستگی تابعِ‌های با متغیر مختلط با هندسه	۲۵۲
۴. انتگرال خمیدهٔ خطی. رابطهٔ کوشی و نتیجه‌های آن	۲۶۵
۵. ویژگی منحصر به فرد بودن و ادامهٔ تحلیلی	۲۸۱
۶. نتیجه	۲۸۹
بخش دهم ـ عددهای اول	۲۹۱
۱. چگونگی مطالعهٔ عددهای اول	۲۹۳
۲. مسأله‌های مربوط به عددهای اول را چگونه بررسی می‌کردند؟	۲۹۹
۳. دربارهٔ روش چبیشف	۳۰۸
۴. روش وینوگرادوف	۳۱۵
۵. تبدیل عددهای درست به مجموع دو مربع. عددهای درست مختلط	۳۲۴
بخش یازدهم ـ نظریهٔ احتمال	۳۳۱
۱. قانون‌مندی‌های احتمالی	۳۳۳

عنوان	صفحه

پیش‌گفتار

ریاضیات، در دوران باستان در بستگی با نیازهای زندگی پدید آمد، و به تدریج به دستگاهی از دانش‌های گوناگون تبدیل شد. ریاضیات نیز، همچون سایر دانش‌ها بازتابی از قانون‌های طبیعت است و به عنوان سلاح نیرومندی برای شناخت طبیعت و پیروزی بر آن به‌کار می‌رود. ولی از آن‌جا که ریاضیات بیش از اندازه انتزاعی و ذهنی است، رشته‌های جدید آن برای کسانی که ویژه کار نیستند تا اندازهٔ زیادی قابل دسترس نیست. همین ویژگی انتزاعی بودن ریاضیات، از روزگاران باستان، پندارهای ذهن‌گرایانه دربارهٔ بی‌ارتباطی آن با طبیعت به وجود آورد.

هدف نویسندگان کتاب حاضر این بوده است که گروه گسترده‌ای از روشنفکران را با جوهر و روش بخشهای ریاضیات و پایه‌های عملی و شیوه‌های پیشرفت آن آشنا سازند.

کمترین آگاهی‌های ریاضی که برای خوانندهٔ این کتاب فرض‌شده، ریاضیات دورهٔ دبیرستانی است. با وجود این، نوشته‌های این کتاب یک‌دست نیست. کسانی که می‌خواهند به مقدمه‌های ریاضیات عالی آشنا شوند، می‌توانند از چند بخش اول کتاب استفاده کنند، ولی برای فهم دقیق بخش‌های بعد، باید با کتابهای درسی مربوط آشنا باشند. مجموعهٔ کتاب برای خوانندگانی قابل استفاده است که به‌کاربرد روش‌های آنالیز ریاضی (محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی) آشنا باشند. برای کسانی که با دانش‌های طبیعی سر و کار دارند (مهندسان رشته‌های مختلف و معلمان ریاضی) بخش‌های ویژه‌ای وجود دارد که آنان را با رشته‌های جدیدتر ریاضی آشنا می‌کند.

طبیعی است در چارچوب یک کتاب نمی‌توان حتی همهٔ روش‌های مختلف ریاضی را بررسی کرد و بنابراین برای گزینش مطلب‌های کتاب، نوعی آزادی عمل لازم بوده است. ولی در خط‌های کلی‌تر، این کتاب روی‌هم اندیشهٔ درستی دربارهٔ وضع کنونی ریاضی،

پیدایش و پیشرفت آن به دست می‌دهد. کتاب تا اندازه‌ای برای کسانی هم در نظر گرفته شده است که به موضوع‌های اساسی کتاب آشنایی کامل داشته باشند. همچنین کتاب باید بتواند بعضی از تنگ‌نظری‌هایی را هم که گاهی بعضی از ریاضی‌دان‌های جوان ما از خود نشان می‌دهند، برطرف کند.

بخش‌های جداگانهٔ کتاب به وسیلهٔ نویسندگان مختلف نوشته شده است. با وجود این مجموعهٔ کتاب نتیجهٔ کوشش دسته‌جمعی است. طرح کلی و گزینش موضوع‌های بخش‌های گوناگون آن در معرض دید و داوری دسته‌جمعی قرار گرفته و براساس تبادل زندهٔ اندیشه‌ها تکمیل شده است. ریاضی‌دان‌های بسیاری از شهرهای اتحاد شوروی، در بحثی که به وسیلهٔ انستیتوی ریاضی ترتیب داده شده بود شرکت کردند و دربارهٔ متن مقدماتی آن یادآوری‌های پر ارزشی کردند و البته این یادآوری‌ها و پیشنهادها، از طرف نویسندگان در نظر گرفته شده است.

همچنین برخی از نویسندگان در تهیهٔ متن آخر بخش‌هایی که به وسیلهٔ نویسندگان دیگر نوشته شده است به طور مستقیم شرکت کردند. بخش اساسی مقدمهٔ بخش دوم را **ب. ن. دِلون** (*B. N. Delon*) نوشته و **د. ک. فادیف** (*D.K. Fadeev*) در تهیهٔ بخش‌های چهارم و بیستم کوشش فراوان کرده است.

همچنین عده‌ای از کسانی که بخش جداگانه‌ای تهیه نکرده‌اند، در کار تهیهٔ کتاب مشارکت داشته‌اند: **ل. ب. کانتارویچ** (*L. B. Kontorovitch*) بند چهارم از بخش چهاردهم و **ا. آ. لادیژنسکایا** (*O. A. Ladigenskaia*) بند ششم از بخش ششم و **آ. گ. پاستنیکوف** (*A. G. Postnikov*) بند پنجم از بخش دهم را نوشته‌اند، و **ا. آ. اُله نیک** (*O. A. Oleinik*) در تهیهٔ متن بخش پنجم و **یو. و. پروخوروف** (*U. V. Prokhorov*) در آخرین بررسی متن بخش یازدهم شرکت داشته‌اند.

و. آ. زالگالر (*V. A. Zalgaler*) بعضی از بخش‌های اول و دوم و هفتم و هفدهم را نوشته است و آخرین بررسی متن کتاب به وسیلهٔ **زالگالر** و **ویدنسکی** (*Videnski*) و با شرکت **ت. و. راگازکینا** (*T. V. Rogozkina*) و **آ. پ. لئونوا** (*A. P. Leonova*) انجام گرفته است. بخش اساسی تصویرها به وسیلهٔ **ا. پ. سنکینی** (*A. P. Senkini*) رسم شده است.

هیأت تحریریه

بخش پنجم

معادله‌های دیفرانسیلی عادی

ای. گ. پتروسکی

۱. ورود به مطلب

نمونه‌هایی از معادلهٔ دیفرانسیلی. معادله‌هایی که تا این جا به آن‌ها برخورده‌ایم، بیشتر برای جست‌وجوی مقدارهای عددی کمیت‌ها به‌کار می‌رفتند. مثلاً برای پیداکردن ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع، ضمن حل معادله، نقطه‌هایی را پیدا می‌کردیم که در آن‌ها، سرعت تغییر تابع به سمت صفر میل می‌کرد؛ در بخش چهارم (جلد اول) موضوع پیداکردن ریشه‌های یک چندجمله‌ای را بررسی کردیم و غیره. در هر کدام از این حالت‌ها، در جست‌وجوی عددهای مشخصی بودیم که در معادله صدق کند. ولی، در کاربرد ریاضیات، اغلب به مسأله‌هایی برخورد می‌کنیم که کیفیت تازه‌ای دارند و در آن‌ها، خود تابع، خود قانون بستگی متغیرهایی به متغیرهای دیگر، مجهول است. برای نمونه، وقتی روند سردشدن جسمی را مطالعه می‌کنیم، باید بتوانیم معلوم کنیم درجهٔ حرارت آن در جریان زمان چگونه تغییر می‌کند؛ یا وقتی حرکت سیاره‌ها و یا ستارگان را بررسی می‌کنیم، باید بستگی بین مختصات آن‌ها و زمان را معین کنیم و غیره.

بسیار پیش می‌آید که برای پیداکردن تابع‌های مجهول، می‌توانیم معادله‌ای بسازیم؛ چنین معادله‌ای را، معادلهٔ تابعی گویند. طبیعت و نوع این گونه معادله‌ها، بسیار گوناگون است (حتی می‌توان گفت، تا کنون هم وقتی تابع‌های ضمنی را بررسی می‌کردیم، با ساده‌ترین و ابتدایی‌ترین نوع معادله‌های تابعی سروکار داشتیم).

به موضوع مربوط به جست‌وجوی تابع‌های مجهول در بخش‌های پنجم، ششم و هشتم پرداخته‌ایم. در این بخش و بخش بعدی به بررسی معادله‌های دیفرانسیلی می‌پردازیم که شاید، مهم‌ترین نوع معادله‌هایی باشند که برای جست‌وجوی تابع‌ها به‌کار می‌روند. منظور از معادله‌های دیفرانسیلی، در آن‌ها به‌جز خود تابع مجهول، مشتق و یا مشتق‌های متوالی هم

وجود دارد.

این برابری‌ها می‌توانند نمونه‌هایی از معادله‌های دیفرانسیلی باشند:

$$\frac{dx}{dt}+P(t)x=Q(t)\ ,\ \frac{d^{2}x}{dt^{2}}+m^{2}x=A\sin\omega t\ ,\ \frac{d^{2}x}{dt^{2}}=tx\ ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\ ,\ \frac{\partial^{2}u}{\partial t^{2}}=\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}\ ,\ \frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}=0 \qquad (1)$$

در سه معادلهٔ اول، تابع مجهول با حرف x و متغیر مجهول با حرف t نشان داده شده است؛ در سه معادلهٔ آخر، تابع مجهول با حرف u نشان داده شده است و این تابع به دو آوند x و t یا x و y بستگی دارد.

اهمیت معادله‌های دیفرانسیلی در ریاضیات، به‌ویژه به خاطر کاربرد آن‌هاست. زیرا بررسی بسیاری از مسأله‌های فیزیک و دشواری‌های صنعت، منجر به حل چنین معادله‌هایی می‌شود.

محاسبه‌های مربوط دستگاه‌های رادیوتکنیک، محاسبهٔ خط سیر گلوله‌ها، بررسی مقاومت هواپیما ضمن پرواز یا جریان عکس‌العمل شیمیایی ـ همهٔ این‌ها به یاری حل معادله‌های دیفرانسیلی به دست می‌آید.

بسیار پیش می‌آید که قانون‌های فیزیکی که حاکم بر پدیده‌هایی هستند، به صورت معادله‌های دیفرانسیلی نوشته می‌شوند و خود معادله‌های دیفرانسیلی هم، وسیله‌ای برای بیان دقیق کمّی (عددی) این قانون‌ها هستند. خواننده در بخش بعد خواهد دید، چگونه می‌توان از جمله قانون‌های بقای جرم و انرژی حرارتی را به صورت معادلهٔ دیفرانسیلی نوشت. قانون‌های مکانیک، که به وسیلهٔ **نیوتن** کشف شده‌اند، امکان بررسی حرکت هر دستگاه مکانیکی را به یاری معادله‌های دیفرانسیلی به وجود می‌آورد.

این موضوع را با مثال ساده‌ای روشن می‌کنیم. فرض کنید بخواهیم به بررسی ذرهٔ مادی به جرم m، که روی محور Ox حرکت می‌کند، بپردازیم. مختص آن را، در لحظهٔ زمانی t برابر x می‌گیریم. با حرکت ذره، مختص x آن در جریان زمان تغییر می‌کند و برای آگاهی از تمامی حرکت ذره، باید به بستگی تابعی x نسبت به زمان t آگاه بود. فرض کنیم، حرکت تحت تأثیر نیروی F انجام شود و مقدار F، به جای ذره (که به وسیلهٔ مختص x معین می‌شود)، سرعت حرکت $v=\frac{dx}{dt}$ و زمان t بستگی داشته باشد، یعنی $F=F\left(x\ ,\ \frac{dx}{dt}\ ,\ t\right)$. بنابر قانون مکانیک، عمل نیروی F بر ذره باید موجب شتاب $\omega=\frac{d^{2}x}{dt^{2}}$ بشود که تأثیر آن بر جرم m ذره، درست

برابر با مقدار نیروی عمل‌کننده باشد، بنابراین، در هر لحظه‌ای از حرکت، باید این برابری برقرار باشد

$$m\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} = F\left(x\ ,\ \frac{dx}{dt}\ ,\ t\right) \qquad (۲)$$

این، همان معادلهٔ دیفرانسیلی است که باید تابع $x(t)$ در آن صدق کند، تابعی که سرگذشت حرکت ذره را شرح می‌دهد. این معادلهٔ دیفرانسیلی، در واقع، ثبت همان قانون یادشدهٔ مکانیک است و اهمیت آن در این است که اجازه می‌دهد مسألهٔ مکانیکی تعیین حرکت ذره را، به مسألهٔ ریاضی حل معادلهٔ دیفرانسیلی تبدیل کنیم.

در همین بند، نمونه‌های دیگری را خواهید دید که نشان می‌دهد چگونه ممکن است مطالعهٔ روندهای مختلف فیزیکی، به بررسی معادله‌های دیفرانسیلی منجر شود.

پیشرفت نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی از پایان سدهٔ هفدهم، به تقریب هم‌زمان با به وجود آمدن محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی، آغاز شد. امروزه معادله‌های دیفرانسیلی به عنوان وسیلهٔ نیرومندی برای بررسی پدیده‌های طبیعت به‌کار می‌رود و به یاری آن در مکانیک، اخترشناسی، فیزیک و صنعت، به موفقیت‌های چشم‌گیری دست یافته‌اند. **نیوتن** با بررسی معادله‌های دیفرانسیلِ مربوط به حرکت جسم‌های آسمانی، قانون حرکت سیاره‌ها را، که **کپلر** به کمک تجربه پیداکرده بود، به دست آورد. **لِوِریه** در سال ۱۸۴۶ میلادی براساس تحلیل عددی همین معادله‌ها، وجود سیارهٔ نپتون را پیش‌گویی و جای آن را در آسمان تعیین کرد.

برای این‌که مسأله‌های نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی را، در خط‌های کلی خود، شرح دهیم، ابتدا یادآوری می‌کنیم که هر معادلهٔ دیفرانسیلی، در حالت کلی، نه یک جواب، بلکه بی‌نهایت جواب دارد: مجموعه‌ای نامتناهی از تابع‌ها وجود دارد که در یک معادلهٔ دیفرانسیلی صدق می‌کند. برای نمونه، معادله‌ای که در بالا برای حرکت ذرهٔ مادی آوردیم، باید برای هر حرکتی که تحت تأثیر عمل نیروی Fــ که به صورت تابع $F(x\ ,\ \frac{dx}{dt}\ ,\ t)$ مشخص می‌شود ــ قرار دارد برقرار باشد، بدون توجه به این که این حرکت از کدام نقطهٔ محور آغاز شده و سرعت نخستین آن چه بوده است. هر حرکت مشخص ذره، متناظر است با رابطه‌ای که x آن با زمان t دارد. وقتی با تأثیر نیروی F، بی‌نهایت حرکت می‌توان داشت، به طور طبیعی مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیلی (۲) هم باید مجموعه‌ای نامتناهی باشد.

هر معادلهٔ دیفرانسیلی، روی هم رفته کلاس کاملی از تابع‌ها را، که در آن صادق است، تعریف می‌کند و مسألهٔ اصلی نظریه عبارت است از مطالعهٔ تابع‌هایی که در معادلهٔ دیفرانسیلی صدق می‌کنند. نظریهٔ معادله‌ها باید بتواند تصور کاملی دربارهٔ ویژگی‌های همهٔ تابع‌هایی که در معادله صدق می‌کنند به دست بدهد و این، به‌ویژه در کاربردهایی که معادله در دانش‌های طبیعی دارد، بسیار مهم است. به‌جز این، نظریهٔ معادله‌ها باید امکان پیداکردن مقدارهای عددی تابع را، در حالتی که برای محاسبه لازم است، تامین کند. و ما کمی بعد در این‌باره گفت‌وگو خواهیم کرد.

اگر تابع مجهول، تنها به یک آوند بستگی داشته باشد، معادلهٔ دیفرانسیلی را، ***معادلهٔ دیفرانسیلی عادی*** گویند و در حالتی که تابع مجهول به چند آوند بستگی داشته باشد و در معادله، مشتق‌های آن نسبت به چند آوند وارد شده باشد، معادلهٔ دیفرانسیلی را ***معادلهٔ با مشتق‌های جزئی*** گویند. سه معادلهٔ اول (۱)، عادی و سه معادلهٔ آخر، با مشتق‌های جزئی هستند.

نظریهٔ معادله‌های با مشتق‌های جزئی، دارای چنان ویژگی‌هایی است که آن‌ها را به طور اساسی از نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی عادی جدا می‌کند. به همین مناسبت، اندیشه‌های اساسی مربوط به معادله‌های با مشتق‌های جزئی را برای بخش بعدی گذاشته‌ایم و در این بخش تنها به معادله‌های دیفرانسیلی عادی می‌پردازیم.

چند مثال را بررسی می‌کنیم.

مثال ۱. قانون تلاشی رادیُم بر این اساس است که: سرعت تلاشی با مقدار موجود رادیُم متناسب است. فرض کنید بدانیم که در لحظهٔ زمانی $t=t_0$ به اندازهٔ R_0 گرم رادیم داشته باشیم. می‌خواهیم مقدار رادیُم را در هر لحظهٔ زمانی t پیدا کنیم.

$R(t)$ را مقدار موجود (متلاشی نشدهٔ) رادیُم در لحظهٔ t می‌گیریم. سرعت تلاشی با مقدار $-\frac{dR}{dt}$، اندازه گرفته می‌شود و چون این مقدار با R متناسب است، به دست می‌آید:

$$-\frac{dR}{dt}=kR \qquad (۳)$$

که در آن، k مقداری است ثابت.

برای این‌که مسألهٔ خود را حل کنیم، باید تابع‌های مربوط به معادلهٔ دیفرانسیلی (۳) را پیدا کنیم. برای این منظور توجه می‌کنیم که تابع معکوس $R(t)$، در معادلهٔ

$$-\frac{dt}{dR} = \frac{1}{kR} \qquad (4)$$

صدق می‌کند، زیرا $\frac{dt}{dR} = \frac{1}{\frac{dR}{dt}}$. با محاسبهٔ انتگرالی معلوم می‌شود که معادلهٔ (۴)، در هر تابع به‌صورت

$$t = -\frac{1}{k}\ln R + C$$

صدق می‌کند که در آن C مقدار ثابت دل‌خواهی است. از این تابع می‌توان مقدار R را به عنوان تابعی از t به دست آورد:

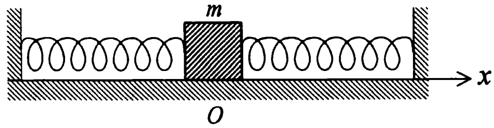
$$R = e^{-kt+kc} = C_1 e^{-kt} \qquad (5)$$

بین همهٔ جواب‌های (۵) معادلهٔ (۳)، باید جوابی را جدا کنیم که به ازای $t = t_0$، R مقدار R_0 را قبول کند و این جواب وقتی به دست می‌آید که $C_1 = R_0 e^{kt_0}$ قرار دهیم.

از دیدگاه ریاضیات، معادلهٔ (۳) قانون بسیار ساده‌ای از تغییر تابع R را نشان می‌دهد و در این‌باره صحبت می‌کند که سرعت نزول تابع $-\frac{dR}{dt}$ با مقدار خود تابع R متناسب است. این قانون تغییر تابع، نه تنها دربارهٔ پدیدهٔ تلاشی رادیوآکتیو، بلکه دربارهٔ بسیاری از پدیده‌های دیگر فیزیکی هم صدق می‌کند.

برای مثال، ضمن مطالعهٔ سردکردن جسم، ضمن کاهش مقدار حرارت در جسم با اختلاف بین درجهٔ حرارت جسم و درجهٔ حرارت محیطی که آن را در بر گرفته است، و یا بسیاری از دیگر روندهای فیزیکی، به همین نوع قانون تغییر تابع برخورد می‌کنیم. به این ترتیب، میدان کاربرد معادلهٔ (۳) خیلی گسترده‌تر از آن است که ما تنها دربارهٔ حالت خاص تلاشی رادیُم، به‌کار بردیم.

مثال ۲. فرض کنیم نقطهٔ مادی به جرم m در طول محور افقی Ox در محیطی مقاوم، در مثل در مایع یا گاز، حرکت می‌کند؛ این نقطه تحت تاثیر نیروی کشسانی (ارتجاع‌پذیری) دو فنر و مطابق قانون **هوک** عمل می‌کند (شکل ۱). قانون **هوک** حاکی از آن است که نیروی کشسانی در جهت حالت تعادل عمل می‌کند و با انحراف از حالت تعادلی، متناسب است. فرض می‌کنیم حالت تعادل متناظر با نقطهٔ $x = 0$ باشد. در این صورت نیروی کشسانی برابر با $-bx$ می‌شود $(b > 0)$.



شکل ۱

نیروی مقاومت محیط را متناسب با سرعت حرکت می‌گیریم، یعنی برابر $-a\dfrac{dx}{dt}$، که در آن $a>0$ و علامت منفی نشان می‌دهد که مقاومت محیط در جهت مخالف سرعت حرکت است. این فرض دربارهٔ مقاومت محیط، خیلی خوب با آزمایش‌هایی که با سرعت‌های کم انجام می‌شود، تطبیق می‌کند.

بنابر قانون **نیوتُن**، حاصل‌ضرب جرم نقطهٔ مادی در شتاب آن، برابر است با مجموع نیروهایی که روی آن عمل می‌کنند، یعنی

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -bx - a\frac{dx}{dt} \tag{۶}$$

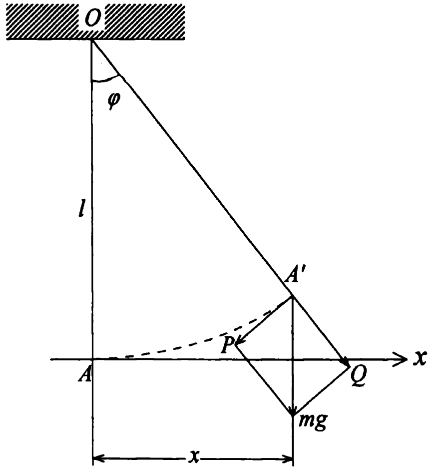
به این ترتیب، تابع $x(t)$ که موضع نقطه را در هر لحظهٔ زمانی t بیان می‌کند باید در معادلهٔ دیفرانسیلی (۶) صدق کند و ما حل این معادله را در یکی از بندهای بعد، بررسی می‌کنیم.

اگر، به‌جز نیروهایی که نام بردیم، نیروی F هم، که نسبت به دستگاه، بیرونی است، بر نقطهٔ مادی اثر کند، معادلهٔ حرکت (۶) تغییر می‌کند و به این صورت درمی‌آید:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -bx - a\frac{dx}{dt} + F \tag{۶'}$$

مثال ۳. آونگ ریاضی به نقطهٔ مادی به جرم m گفته می‌شود که به نخی آویزان باشد و ما طول نخ را l می‌گیریم (شکل ۲). فرض می‌کنیم آونگ همیشه در یک صفحه باقی بماند: در صفحهٔ شکل. نیرویی که کوشش می‌کند آونگ را به حالت تعادل OA برگرداند، نیروی ثقل mg است که روی نقطهٔ مادی عمل می‌کند. موقعیت آونگ در هر لحظهٔ زمانی t به وسیلهٔ زاویهٔ φ معین می‌شود که انحراف آن را از قائم OA نشان می‌دهد. جهت مثبت را برای φ، جهت عکس حرکت عقربه‌های ساعت می‌گیریم. کمان $AA' = l\varphi$ مسیری است که نقطهٔ مادی از حالت تعادل A طی کرده است. سرعت حرکت، یعنی v، در امتداد مماس بر دایره و مقدار عددی آن چنین است:

$$v = l\frac{d\varphi}{dt}$$



شکل ۲

برای تشکیل معادلهٔ حرکت، نیروی ثقل mg را به دو مؤلفهٔ Q و P تجزیه می‌کنیم که اولی در جهت شعاع OA' و دومی در جهت مماس بر دایره است. مؤلفهٔ Q نمی‌تواند مقدار عددی سرعت v را تغییر بدهد، زیرا عمل آن، مقاومت تعلیق OA' را از بین می‌برد. تنها مؤلفهٔ P می‌تواند مقدار سرعت v را تغییر دهد. این مؤلفه، همیشه در جهت حالت تعادل A عمل می‌کند، یعنی در جهت کاهش قدر مطلق زاویهٔ φ (در حالتی که زاویهٔ φ مثبت باشد، کم می‌شود و در حالتی که منفی باشد، بزرگ می‌شود). مقدار عددی P برابر است با $-mg\sin\varphi$ و بنابراین، معادلهٔ حرکت آونگ چنین است:

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\varphi$$

و یا

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi \qquad (7)$$

لازم است یادآوری کنیم، جواب این معادله را نمی‌توان برحسب تعداد محدودی تابع‌های مقدماتی نشان داد. زرادخانهٔ تابع‌های مقدماتی، فقیرتر از آن است که به‌کمک آن بتوان حتی توضیح دقیقی دربارهٔ روند ساده‌ای چون نوسان آونگ ریاضی پیدا کرد. کمی بعد خواهیم دید آن دسته از معادله‌های دیفرانسیلی که جواب‌هایی به صورت تابع‌های مقدماتی داشته باشند خیلی زیاد نیستند و بسیار پیش می‌آید که ضمن بررسی معادله‌های دیفرانسیلی

که حل آن‌ها را در فیزیک یا مکانیک نیاز داریم، ناچار می‌شویم گروه‌های تازه‌ای از تابع‌ها را بپذیریم و به بررسی آن‌ها بپردازیم و در نتیجه زرادخانهٔ تابع‌هایی را که ضمن حل مسأله‌های عملی به‌کار می‌روند، گسترش دهیم.

حالا خودمان را به بررسی نوسان‌های کوچک آونگ محدود می‌کنیم و حالتی را در نظر می‌گیریم که بتوان با اشتباه کمی به جای کمان AA'، تصویر x آن را بر محور افقی Ox و به جای $\sin\varphi$، خود φ را در نظر گرفت. در این صورت $\varphi \approx \sin\varphi = \frac{x}{l}$ و معادلهٔ حرکت آونگ به این صورت سادهٔ در می‌آید:

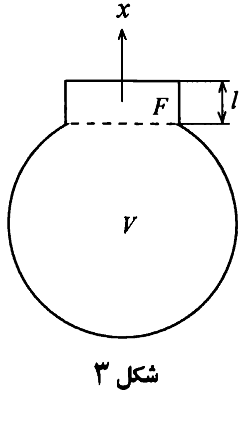
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x \qquad (8)$$

اندکی بعد خواهیم دید این معادله به صورت تابع‌های مثلثاتی حل می‌شود و به‌کمک آن‌ها این امکان را به دست می‌آوریم که «نوسان‌های کوچک» آونگ را با دقت کافی شرح دهیم.

مثال ۴. تقویت‌کنندهٔ صوتی ***هلمهولتز*** (شکل ۳)، از یک ظرف V که پر از هواست و حجمی برابر v دارد و گردن استوانه‌ای F درست شده است. هوایی را که در گردن ظرف قرار گرفته است، می‌توان به تقریب به عنوان سرپوشی با جرم

$$m = \rho s l \qquad (9)$$

به حساب آورد که در آن ρ عبارت است از چگالی هوا، s سطح مقطع گردن و l طول آن.



شکل ۳

اگر فرض کنیم این جرم هوا از حالت تعادل به مقدار x تغییر کند، در این صورت فشار هوا در ظرف به حجم v تغییر می‌کند و فشار اولیهٔ p به مقداری که ما آن را Δp می‌نامیم، تغییر می‌کند.

فرض کنیم، فشار p و حجم v به وسیلهٔ قانون آدیاباتیک (بدون دخالت گرما)، یعنی $pv^k = C$ به هم بستگی داشته باشند. در این صورت اگر از مقدارهای کوچک مرتبه‌های بالاتر صرف‌نظر کنیم، به دست می‌آید:

$$\Delta p \cdot v^k + pkv^{k-1} \cdot \Delta v = 0$$

و

$$\Delta p = -kp\,\frac{\Delta v}{v} = -\,\frac{kps}{v}\,x \qquad (10)$$

(در حالت این مسأله $\Delta v = sx$). معادلهٔ حرکت جرم هوای گردن را می‌توان به این ترتیب نوشت:

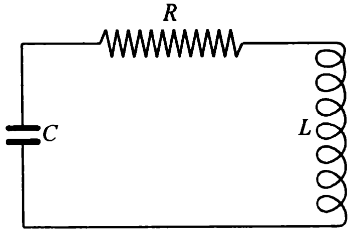
$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \Delta p \cdot s \qquad (11)$$

در این‌جا $\Delta p . s$ عبارت است از نیروی فشار گازی که در داخل ظرف قرار گرفته است بر سرپوش هوایی که در گردن واقع است. براساس رابطه‌های (۱۰) و (۱۱) به دست می‌آید:

$$\rho l\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,\frac{kps}{v}x \qquad (12)$$

که در آن ρ، p، v، l، k و s مقدارهای ثابتی هستند.

مثال ۵. بررسی نوسان‌های الکتریکی در مدار نوسانی ساده هم، منجر به معادله‌ای به صورت (۶) می‌شود. طرح این مدار در شکل ۴ داده شده است. در سمت چپ شکل، خازن به ظرفیت C نشان داده شده است که جوشن‌های آن از راه خودالقایی L و مقاومت R، بسته شده است. فرض کنید در یک لحظهٔ زمانی، اختلاف پتانسیل به وسیلهٔ جوشن خازن برقرار و سپس منبع آن قطع شود. اگر در سیمی که جوشن‌های خازن را به هم وصل می‌کند خودالقایی وجود نداشته باشد، تا زمانی که پتانسیل جوشن‌ها به حالت تعادل نرسیده باشند جریان ادامه خواهد یافت. ولی، اگر خودالقایی وجود داشته باشد روند کار به نحو دیگری است. در مدار، نوسان‌های الکتریکی به وجود می‌آید. برای این‌که این نوسان‌ها را به دست



شکل ۴

آوریم، اختلاف پتانسیل را در جوشن‌های خازن در لحظهٔ t به $v(t)$ و یا به طور ساده به v، شدت جریان را در لحظهٔ t به $I(t)$ و مقاومت را به R نشان می‌دهیم. بنابر قانون معروف فیزیک، می‌دانیم $R \cdot I(t)$ در هر لحظهٔ زمانی، برابر است با تمام نیروی محرکهٔ الکتریکی، و این مقدار اخیر از مجموع نیروی محرکهٔ الکتریکی $-v(t)$، که از اختلاف پتانسیل در جوشن‌های خازن به دست می‌آید و نیروی محرکهٔ الکتریکی خودالقایی $-L\dfrac{dI}{dt}$ نتیجه می‌شود، به این ترتیب:

$$IR = -v - L\frac{dI}{dt} \qquad (۱۳)$$

بار خازن را در لحظهٔ t، $Q(t)$ نشان می‌دهیم. در این صورت شدت جریان در مدار در هر لحظه برابر است با $\dfrac{dQ}{dt}$ و اختلاف پتانسیل $v(t)$ برابر $\dfrac{Q(t)}{c}$ است. به این ترتیب: $I = \dfrac{dQ}{dt} = C\dfrac{dv}{dt}$ و برابری (۱۳) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + RC\frac{dv}{dt} + v = 0 \qquad (۱۴)$$

مثال ۶. طرح مولد لامپی نوسان‌های الکترومغناطیسی، در شکل ۵ داده شده است. مدار نوسانی که از ظرفیت C، مقاومت R و خودالقایی L تشکیل شده است، دستگاه اصلی نوسانی را تشکیل می‌دهد. پیچک L' و لامپ الکتریکی که طرح آن در وسط شکل داده شده است، به اصطلاح بستگی معکوس (پس‌خوراند) را تشکیل می‌دهند. آن‌ها انرژی مبداء ــ باتری Bــ را به مدار L، R، C وصل می‌کنند؛ K کاتد، A آند و S شبکه است. در این طرح در مدار L، R، C، «نوسان‌های خودبه‌خود» به وجود می‌آید. در همهٔ دستگاه‌های حقیقی، همراه با روند نوسانی، انرژی به صورت حرارت و یا به صورت دیگری

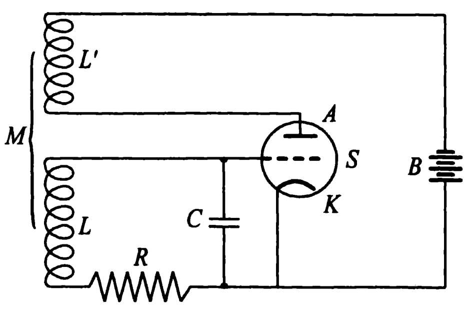
به جسم‌مجاور منتقل می‌شود. بنابراین برای تقویت حالت سکون نوسان و برای حفظ دامنهٔ نوسان‌های هر دستگاه نوسانی حقیقی، باید انرژی را از خارج کسب کرد. تفاوت نوسان‌های خودبه‌خود با دیگر روندهای نوسانی در این است که برای تقویت حالت نوسانی ساکن در این‌گونه دستگاه‌ها، لازم نیست، تأثیر خارجی، متناوب باشد. ساختمان و سازوکار دستگاه‌های نوسانی خودکار طوری است که در آن‌ها منبع ثابت انرژی، در مثال ما باتری B، حالت نوسانی ساکن را تقویت می‌کند. از جمله ساعت، زنگ برقی، سیم و مضرابی که به وسیلهٔ دست موسیقی‌دان به حرکت درمی‌آید، صدای انسان و غیر آن، دستگاه‌های نوسانی خودکار هستند.

شدت جریان $I(t)$ در مدار نوسانی L، R، C، در معادلهٔ

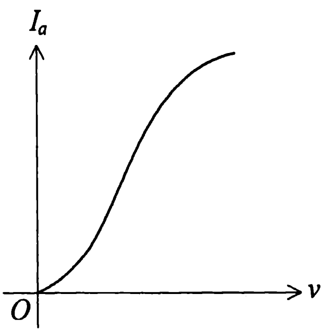
$$L\frac{dI}{dt}+RI+v=M\frac{dI_a}{dt} \qquad (۱۵)$$

صدق می‌کند. در این‌جا $v=v(t)$ — اختلاف پتانسیل در جوشن‌های خازن در لحظهٔ t؛ $I_a(t)$ — شدت جریان آندی از پیچک L'؛ و M — ضریب ثابتی است که به پیچک‌های L و L' بستگی دارد. معادلهٔ (۱۵) در مقایسه با معادلهٔ (۱۳) شامل جملهٔ اضافی $M\frac{dI_a}{dt}$ است.

جریان $I_a(t)$ را تنها به حساب اختلاف پتانسیل در شبکهٔ S و کاتد لامپ می‌گذاریم، یعنی از عکس‌العمل آند صرف‌نظر می‌کنیم؛ با این فرض، این اختلاف پتانسیل برابر است با اختلاف پتانسیل $v(t)$ در جوشن‌های خازن C. خصلت بستگی تابعی I_a به v را در شکل ۶ نشان داده‌ایم. این منحنی به طور معمول به صورت تقریبی یک سهمی درجهٔ سوم درمی‌آید



شکل ۵



شکل ۶

و معادلهٔ تقریبی آن چنین است:

$$I_a = a_1 v + a_2 v^2 + a_3 v^3$$

اگر این مقدار را در معادلهٔ (۱۵) قرار دهیم و به این مطلب توجه کنیم که

$$\frac{dv}{dt} = I$$

برای v، به این معادلهٔ می‌رسیم:

$$L\frac{d^2 v}{dt^2} + [R - M(a_1 + 2a_2 v + 3a_3 v^2)]\frac{dv}{dt} + v = 0 \qquad (16)$$

در این مثال‌ها، جست‌وجوی بعضی کمیت‌های فیزیکی، منجر به جست‌وجوی جواب‌های معادله‌های دیفرانسیلی عادی شد.

مسأله‌های مربوط به نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی. اکنون، به تعریف‌های دقیق می‌پردازیم. معادلهٔ دیفرانسیلی عادی مرتبهٔ n با یک تابع مجهول y، به رابطه‌ای به صورت

$$F\big(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)\big) = 0 \qquad (17)$$

گفته می‌شود، که رابطه‌ای است بین متغیر مستقل x و مقدارهای

$$y(x), y'(x) = \frac{dy}{dx}, y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیلی به بالاترین مرتبهٔ مشتق از تابع مجهول گفته می‌شود که در معادلهٔ دیفرانسیلی وارد شده است. به این ترتیب معادلهٔ دیفرانسیلی که در مثال ۱ به دست آوردیم از مرتبهٔ اول و معادله‌های دیفرانسیلی که در مثال‌های ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به دست آوردیم از مرتبهٔ دوم بود.

تابع $\varphi(x)$ را جواب معادلهٔ دیفرانسیلی (۱۷) گویند، به شرطی که بعد از قراردادن $\varphi(x)$ به جای y، $\varphi'(x)$ به جای y'، ...، $\varphi^{(n)}(x)$ به‌جای $y^{(n)}$، معادلهٔ (۱۷) به یک اتحاد تبدیل شود.

گاهی پرسش‌های مربوط به فیزیک و صنعت، منجر به دستگاهی از معادله‌های دیفرانسیلی می‌شود که در آن‌ها چند تابع مجهول که به یک متغیر بستگی دارند و مشتق‌های آن‌ها نسبت به همین متغیر، وارد شده است.

برای این‌که بحث ما وضع روشن‌تری داشته باشد، به طور کلی دربارهٔ یک معادلهٔ دیفرانسیلی عادی که از درجهٔ دوم تجاوز نکند و تنها یک تابع مجهول داشته باشد گفت‌وگو خواهیم کرد. روی همین نمونه، ویژگیهای اساسی همهٔ معادله‌های دیفرانسیلی عادی و دستگاه این معادله‌ها را، که در آن‌ها تعداد معادله‌ها برابر با تعداد تابع‌های مجهول باشد، روشن می‌کنیم.

پیش از این هم گفتیم، مجموعهٔ جواب‌ها در هر معادلهٔ دیفرانسیلی، یک مجموعهٔ نامتناهی است. حالا، دوباره به همین موضوع برمی‌گردیم و بر پایهٔ مثال‌های ۲ تا ۶، که پیش از این آورده‌ایم، به طور عینی به روشن‌کردن آن می‌پردازیم. در هر کدام از آن‌ها، معادلهٔ دیفرانسیلی، متناظر با یک دستگاه فیزیکی است که تنها با درنظرگرفتن ساختمان و سازوکار این دستگاه، مشخص می‌شود. ولی در هر کدام از آن‌ها، دستگاه فیزیکی می‌توانست روندهای مختلفی داشته باشد. برای نمونه روشن است، آونگ که حرکت آن از معادلهٔ (۸) پیروی می‌کند، می‌تواند نوسان‌های گوناگونی داشته باشد. هر نوسان مشخص آونگ را می‌توان به عنوان جوابی از معادلهٔ (۸) دانست و تعداد چنین جواب‌هایی هم باید بی‌نهایت باشد. می‌توان ثابت کرد هر تابع به صورت

$$x = C_1 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + C_2 \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t \qquad (۱۸)$$

در معادلهٔ (۸) صدق می‌کند، که در آن C_1 و C_2 مقدارهای ثابت دل‌خواهی هستند.

این هم از دیدگاه فیزیکی روشن است که حرکت آونگ تنها وقتی به طور کامل مشخص می‌شود که در یک لحظهٔ زمانی t_0، مقدار (اولیهٔ) x را برابر x_0 بدانیم (یعنی انحراف اولیهٔ نقطهٔ مادی را از حالت تعادل)، همچنین سرعت اولیهٔ حرکت، یعنی $x'_0 = \frac{dx}{dt}\big|_{t=t_0}$ هم، معلوم باشد. ولی اگر این شرط‌های نخستین را در دست داشته باشیم دیگر مقدارهای ثابت C_1 و C_2 هم در معادلهٔ (۱۸) مشخص می‌شود.

به همین ترتیب است که معادله‌های دیفرانسیلی که در مثال‌های دیگر هم به دست آوردیم دارای بی‌نهایت جواب هستند.

به طور کلی می‌توان ثابت کرد که معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ n (۱۷)، که یک تابع مجهول دارد، دارای بی‌نهایت جواب است. دقیق‌تر: اگر برای یک «مقدار اولیهٔ» آوند، «مقدارهای

اولیه» را برای تابع مجهول و همهٔ مشتق‌های متوالی آن را تا مرتبهٔ $(n-1)$ام در دست داشته باشیم، در این صورت برای معادلهٔ (۱۷) جوابی پیدا می‌شود که با همان «فرض‌های اولیه‌ای» که در نظر گرفته‌ایم سازگار است. همچنین می‌توان ثابت کرد که با چنین شرط‌های اولیه‌ای، جواب به صورتی کامل معین می‌شود؛ تنها یک جواب وجود دارد که با چنین فرض‌های اولیه‌ای سازگار است. کمی بعد در این‌باره بیشتر بحث خواهیم کرد. اکنون برای هدفی که داریم تاکید می‌کنیم مقدارهای اولیهٔ تابع و $(n-1)$ مشتق اول آن می‌تواند دل‌خواه باشد. حق داریم n مقدار را، به عنوان «حالت اولیهٔ» معین، برای جست‌وجوی جواب انتخاب کنیم.

اگر می‌خواهیم دستوری بسازیم که در صورت امکان، شامل همهٔ جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ n باشد، در این صورت چنین دستوری باید شامل درست n مقدار ثابت مجهول باشد، که برای انتخاب آن‌ها می‌توانیم از n شرط اولیه استفاده کنیم. چنین جواب‌هایی از معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ n را، که شامل n مقدار ثابت مجهول و دل‌خواه است، به طور معمول ***جواب‌های کلی معادله*** گویند. از جمله، جواب کلی معادلهٔ (۸) به وسیلهٔ دستور (۱۸) داده شده است که همراه با دو مقدار ثابت دل‌خواه است؛ و یا جواب کلی معادلهٔ (۳) به وسیلهٔ دستور (۵) معین شده است.

اکنون کوشش می‌کنیم چنان مسأله‌هایی را که در برابر نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی قرار دارد، در خط کلی خود، شرح دهیم. این مسأله‌ها، هم زیاد و هم مختلف‌اند و ما به مهم‌ترین آن‌ها می‌پردازیم.

اگر فرض‌های اولیه را به معادلهٔ دیفرانسیلی اضافه کنیم در این صورت جواب معادلهٔ دیفرانسیلی به طور کامل معین می‌شود. ساختن دستوری که تصور روشنی از جواب‌ها را به دست بدهد یکی از نخستین مسأله‌های نظریه است. چنین دستورهایی را تنها در حالت‌های ساده‌ای می‌توان پیدا کرد. ولی اگر به دست آیند، می‌توانند کمک بزرگی، هم به محاسبه و هم به بررسی جواب‌ها بکنند.

نظریه باید این امکان را بدهد که تصور روشنی دربارهٔ خصلت رفتارهای جواب داشته باشیم: آیا یکنوا (مونوتون) است یا نوسان‌پذیر، متناوب است یا به سمت متناوب‌بودن میل می‌کند و غیره.

فرض می‌کنیم مقدارهای اولیه را برای تابع مجهول و مشتق‌های آن تغییر دهیم (حالت اولیهٔ دستگاه مورد بررسی را تغییر دهیم)، در این صورت، خود جواب هم تغییر می‌کند

(دستگاه، روند دیگری خواهد داشت). نظریه باید این امکان را به وجود آورد که بتوانیم دربارهٔ نوع این تغییر داوری کنیم. به‌ویژه، آیا با تغییرهای کوچک داده‌های اولیه، خود جواب هم، تغییر کوچکی می‌کند و در نتیجه نوعی پایداری و ثبات در این بستگی وجود دارد، یا تغییرهای کوچک داده‌های اولیه، موجب تغییرهای تند و شدیدی در جواب می‌شود و در نتیجه ناپایدار و بی‌ثبات است؟

همچنین، باید بتوانیم طرح کیفی و، هرجا که ممکن باشد، طرح کمّی رفتار را، نه تنها دربارهٔ جواب‌های جداگانهٔ معادله، بلکه دربارهٔ همهٔ جواب‌ها، وقتی با هم در نظر گرفته می‌شوند رسم کنیم.

ضمن هر طرحی، اغلب این پرسش پیش می‌آید: انتخاب کدام پارامتر مربوط به ویژگی ابزار یا ماشین، می‌تواند کار بهتر آن را تأمین کند. پارامترهای ابزار، به صورت مقدارهایی در معادلهٔ دیفرانسیلی (که کار آن را برای ما توضیح می‌دهد) داخل می‌شود. نظریه باید به ما در روشن‌کردن این مطلب کمک کند که اگر خود معادلهٔ دیفرانسیلی را تغییر دهیم (پارامترهای ابزار را که در آن داخل شده است تغییر دهیم)، چه بر سر جواب می‌آید (کار ابزار چگونه می‌شود).

سرانجام، وقتی به محاسبه نیاز داریم و باید جواب معادله را به صورت عددی پیدا کنیم، نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی باید روش‌های ساده و سریعی برای محاسبهٔ جواب، در اختیار مهندس و فیزیک‌دان بگذارد.

۲. معادلهٔ دیفرانسیلی خطی با ضریب‌های ثابت

گروه‌های مهمی از معادله‌های دیفرانسیلی عادی وجود دارد که جواب‌های کلی آن‌ها را می‌توان به صورت تابع‌های ساده‌ای که به خوبی قابل بررسی‌اند بیان کرد. یکی از این گروه‌ها عبارت است از رابطهٔ خطی تابع مجهول با مشتق‌های آن و یا به طور خلاصه، معادله‌های دیفرانسیلی خطی با ضریب‌های ثابت. از جمله معادله‌های دیفرانسیلی (۳)، (۶)، (۸) و (۱۴) از این قبیل‌اند. معادلهٔ *خطی را متجانس* یا همگن گویند وقتی در آن جمله‌ای که شامل تابع مجهول نباشد وجود نداشته باشد و در حالتی که چنین جمله‌ای وجود داشته باشد، آن را *غیرمتجانس* یا ناهمگن گویند.

معادلهٔ خطی همگن مرتبهٔ دوم با ضریب‌های ثابت. این معادله به این صورت است:

$$m\frac{d^{2}x}{dt^{2}}+a\frac{dx}{dt}+bx=0 \qquad (6)$$

که در آن m، a و b مقدارهای ثابتی هستند. m را مثبت به حساب می‌آوریم. این فرض به هیچ‌وجه کلی‌بودن معادله را محدود نمی‌کند، زیرا اگر $m \neq 0$ (که ما هم آن را قبول می‌کنیم)، به فرض منفی‌بودن m می‌توان همهٔ ضریب‌های معادله را تغییر علامت داد بدون این که تغییری در آن حاصل شود.

جواب این معادله را به صورت تابع نمایی $e^{\lambda t}$ جست‌وجو و کوشش می‌کنیم مقدار ثابت λ را طوری انتخاب کنیم که تابع $x=e^{\lambda t}$ در معادله صدق کند. مقدارهای $x=e^{\lambda t}$، $\frac{dx}{dt}=\lambda e^{\lambda t}$ و $\frac{d^{2}x}{dt^{2}}=\lambda^{2}e^{\lambda t}$ را در سمت چپ معادلهٔ (۶) قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$e^{\lambda t}(m\lambda^{2}+a\lambda+b)$$

بنابراین، برای آن که $x(t)=e^{\lambda t}$ جواب معادلهٔ (۶) باشد، لازم و کافی است داشته باشیم:

$$m\lambda^{2}+a\lambda+b=0 \qquad (19)$$

اگر λ_1 و λ_2، دو جواب حقیقی معادلهٔ (۱۹) باشد، جواب معادلهٔ (۶) هم، هر تابعی به صورت

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t} \qquad (20)$$

خواهد بود که در آن C_1 و C_1 مقدارهای ثابت دل‌خواهی هستند.

ثابت می‌کنیم دستور (۲۰) در حالتی که معادلهٔ (۱۹) دو جواب حقیقی متمایز داشته باشد، همهٔ جواب‌های معادلهٔ (۶) را می‌دهد.

به ویژگی‌های مهم جواب‌های معادلهٔ (۶) توجه کنیم:

۱. مجموع دو جواب معادلهٔ (۶)، خود جوابی از این معادله است.

۲. اگر جواب معادلهٔ (۶) را در مقدار ثابتی ضرب کنیم، باز هم جوابی از این معادله به دست می‌آید.

در حالتی که λ_1 ریشهٔ مضاعف معادلهٔ (۱۹) باشد، یعنی داشته باشیم[1]:

---

۱. مجموع λ_1 و λ_2 ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (۶) چنین است: $\lambda_1+\lambda_2=-\frac{a}{m}$، و اگر ریشه‌ها برابر باشند $(\lambda_1=\lambda_2)$ به‌سادگی می‌توان برابری $2m\lambda_1+a=0$ را نتیجه گرفت.

$$m\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b = 0 \ , \ 2m\lambda_1 + a = 0$$

در این صورت، تابع $te^{\lambda_1 t}$ هم جواب معادلهٔ (۶) است، زیرا اگر این تابع و مشتق‌های آن را در سمت چپ معادلهٔ (۶) قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$te^{\lambda_1 t}(m\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) + e^{\lambda_1 t}(2m\lambda_1 + a)$$

و این عبارت هم با توجه به برابری‌هایی که آوردیم، متحد صفر است.

در این حالت، جواب کلی معادلهٔ (۶) به این صورت است:

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t} \tag{۲۱}$$

اکنون فرض کنید، معادلهٔ (۱۹) ریشه‌های مختلط داشته باشد. چون ضریب‌های m، a و b عددهایی حقیقی هستند، این دو ریشهٔ مختلط، مزدوج یکدیگرند. فرض کنید $\lambda = \alpha \pm i\beta$. معادلهٔ

$$m(\alpha + i\beta)^2 + a(\alpha + i\beta) + b = 0$$

با دو معادلهٔ زیر هم ارز است:

$$m\alpha^2 - m\beta^2 + a\alpha + b = 0 \ , \ 2m\alpha\beta + \alpha\beta = 0 \tag{۲۲}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که در این حالت، تابع‌های $x = e^{\alpha t}\cos\beta t$ و $x = e^{\alpha t}\sin\beta t$ ریشه‌های معادلهٔ (۶) هستند. اگر تابع $x(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$ و مشتق‌های آن را، در سمت چپ معادلهٔ (۶) قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$e^{\alpha t}\cos\beta t\,(m\alpha^2 - m\beta^2 + a\alpha + b) - e^{\alpha t}\sin\beta t\,(2m\alpha\beta + \alpha\beta)$$

که با توجه به برابری‌های (۲۲)، این عبارت متحد با صفر است.

وقتی معادلهٔ (۱۹)، ریشه‌های مختلط داشته باشد، جواب کلی معادلهٔ (۶) به این صورت در می‌آید:

$$x = C_1 e^{\alpha t}\sin\beta t + C_2 e^{\alpha t}\cos\beta t \tag{۲۳}$$

که در آن C_1 و C_2 مقدارهای ثابت دل‌خواهی هستند.

به این ترتیب با در دست داشتن ریشه‌های معادلهٔ (۱۹)، که ***معادلهٔ مفسر*** نامیده می‌شود، می‌توانیم جواب کلی معادلهٔ (۶) را بنویسیم.

یادآوری می‌کنیم که جواب کلی معادلهٔ همگن خطی مرتبهٔ n با ضریب‌های ثابت، یعنی معادلهٔ

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dx}{dt} + a_0 x = 0$$

را هم می‌توان به طریق مشابهی به صورت یک چندجمله‌ای از تابع‌های نمایی و مثلثاتی نوشت، به شرطی که ریشه‌های معادلهٔ جبری

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

که معادلهٔ مفسر نامیده می‌شود، معلوم باشد. به این ترتیب مسألهٔ انتگرال‌گیری معادلهٔ خطی همگن با ضریب‌های ثابت، منجر به یک مسألهٔ جبری می‌شود.

حالا ثابت می‌کنیم دستورهای (۲۰)، (۲۱) و (۲۳)، در واقع، همهٔ جواب‌های معادلهٔ (۶) را می‌دهند. یادآوری می‌کنیم که C_1 و C_2 را در این دستورها، همیشه می‌توان طوری انتخاب کرد که تابع $x(t)$ با هر شرط اولیه‌ای سازگار باشد: $x(t_0) = x_0$، $x'(t_0) = x'_0$. برای این منظور باید C_1 و C_2 را در حالت دستور (۲۰) از دستگاه معادله‌های

$$x_0 = C_1 e^{\lambda_1 t_0} + C_2 e^{\lambda_2 t_0}$$

$$x'_0 = \lambda_1 C_1 e^{\lambda_1 t_0} + \lambda_2 C_2 e^{\lambda_2 t_0}$$

به دست آورد، و یا از دو معادلهٔ شبیه آن در حالت دستورهای (۲۱) و (۲۳). بنابراین، اگر جوابی از معادلهٔ (۶) وجود داشته باشد، که بین جواب‌های ما نباشد، به این معناست که باید دو جواب مختلف معادلهٔ (۶)، در یک شرط اولیه صدق کند. تفاوت این دو جواب، $x_1(t)$، که نمی‌تواند متحد با صفر باشد، باید با شرط اولیه صفر سازگار باشد: $x_1(t_0) = 0$ ، $x'_1(t_0) = 0$. ثابت می‌کنیم جوابی از معادلهٔ (۶)، که در شرط اولیهٔ صفر صدق می‌کند، تنها $x_1(t) \equiv 0$ است. این حکم را ابتدا در حالت $m > 0$ ، $a > 0$ ، $b > 0$ ثابت می‌کنیم. دو طرف برابری

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} + a\frac{dx_1}{dt} + bx_1 = 0 \qquad (۲۴)$$

را در $\frac{dx_1}{dt}$ ۲ ضرب می‌کنیم. از آنجا که داریم:

$$۲\frac{dx_۱}{dt}\cdot\frac{d^۲x_۱}{dt^۲}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_۱}{dt}\right)^۲,\ \ ۲x_۱(t)\frac{dx_۱}{dt}=\frac{d}{dt}(x_۱^۲)$$

برابری (۲۴) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\frac{d}{dt}\left[m\left(\frac{dx_۱}{dt}\right)^۲\right]+۲a\left(\frac{dx_۱}{dt}\right)^۲+b\frac{d}{dt}(x_۱^۲)=۰$$

که اگر از آن در فاصلهٔ از $t_۰$ تا t انتگرال بگیریم، به دست می‌آید:

$$m\left(\frac{dx_۱}{dt}\right)^۲+۲a\int_{t_۰}^{t}\left(\frac{dx_۱}{dt}\right)^۲dt+bx_۱^۲(t)=۰$$

و این برابری تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم: $x_۱(t)\equiv ۰$. زیرا، در غیر این صورت اگر $t>t_۰$، آن وقت در سمت چپ برابری مقدار مثبت داریم که نمی‌تواند برابر صفر باشد و به همین ترتیب در حالت $t<t_۰$ هم برابری ناممکن می‌شود.

برای این‌که حکم را در حالتی که ضریبهای m، a و b مقدارهای دل‌خواهی هستند، ثابت کنیم، تابع $y_۱(t)=x_۱(t)e^{-\alpha t}$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی می‌توان تحقیق کرد، این تابع هم، شرط اولیه را صفر می‌کند. اگر مقدار $\alpha>۰$ را به اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم، تابع $y_۱(t)$، در معادله‌ای از نوع (۶) به ازای $a>۰$، $b>۰$ و $m>۰$ صدق می‌کند. این معادله را می‌توان به سادگی از این راه به دست آورد که تابع $x_۱(t)=y_۱(t)e^{-\alpha t}$ و مشتق‌های آن را در معادلهٔ (۶) قرار دهیم. بنابراین، بنابرآنچه قبل از این ثابت کردیم، نتیجه می‌گیریم که $y_۱(t)\equiv ۰$، یعنی

$$x_۱(t)=y_۱(t)e^{\alpha t}\equiv ۰$$

به این ترتیب، ثابت کردیم دستورهای (۲۰)، (۲۱) و (۲۳) همهٔ جواب‌های معادلهٔ (۶) را می‌دهند.

حالا ببینیم که این دستورها دربارهٔ رفتار جواب‌های معادلهٔ (۶) چه آگاهیهایی به ما می‌دهند؟ برای این منظور، دستور

$$\lambda_{۱,۲}=-\frac{a}{۲m}\pm\sqrt{\frac{a^۲}{۴m^۲}-\frac{b}{m}} \qquad (۲۵)$$

را برای ریشه‌های معادلهٔ (۱۹) می‌نویسیم. با توجه به مثال فیزیکی که ما را به معادلهٔ (۶) هدایت کرده است، $m > 0$، $a \geq 0$ و $b > 0$ به حساب می‌آوریم.

حالت اول $a^2 > 4bm$ دو ریشهٔ معادلهٔ مفسر (۱۹)، حقیقی، منفی و متمایزند. در این حالت، تابع $x(t)$، که با دستور (۲۰) داده شده است، جواب کلی معادلهٔ (۶) را می‌دهد. همهٔ تابع‌هایی که از این دستور به دست می‌آید و مشتق‌های اولیهٔ آن، وقتی $t \to +\infty$، به سمت صفر میل می‌کنند و حداکثر به ازای یک مقدار t، برابر صفر می‌شوند. بنابراین، تابع $x(t)$، بیش از یک ماکزیمم یا می‌نیمم ندارد. از دیدگاه فیزیکی، این نتیجه به معنای آن است که مقاومت محیط چنان زیاد است که نوسان انجام نمی‌گیرد. نقطهٔ متحرک نمی‌تواند بیش از یک‌بار از وضع تعادل $x = 0$ خارج شود. بعد از آنکه به حداکثر فاصلهٔ خود از نقطهٔ $x=0$ رسید، به آرامی به این نقطه نزدیک می‌شود و دیگر هرگز از آن دور نمی‌شود.

حالت دوم $a^2 = 4bm$ دو ریشهٔ معادلهٔ (۱۹) با هم برابرند و جواب کلی معادلهٔ (۶) با دستور (۲۱) داده می‌شود. در این حالت هم، وقتی $t \to +\infty$، همهٔ جواب‌های $x(t)$ و مشتق‌های اول آن به سمت صفر میل می‌کند. در ضمن $x(t)$ و $x'(t)$، بیش از یکبار نمی‌توانند برابر صفر شوند. رفتار حرکت نقطهٔ مادی به طول $x(t)$ به همان ترتیبی است که در حالت اول بود.

حالت سوم $a^2 < 4bm$ بخش موهومی ریشه‌های معادلهٔ مفسر (۱۹)، مخالف صفر است. جواب کلی معادلهٔ (۶) با دستور (۲۳) داده می‌شود. در این‌صورت، x روی محور xها نوسان‌هایی با تناوب ثابت $\frac{2\pi}{\beta}$، که برای همهٔ جواب‌های معادلهٔ (۶) یکی است، و دامنهٔ $Ce^{\alpha t}$ انجام می‌دهد $\left(\alpha = -\frac{a}{2m}\right)$.

نوسان‌های یک دستگاه فیزیکی را، که بدون عمل نیروی خارجی انجام گیرد، نوسان‌های اختصاصی این دستگاه گویند. از آنچه گفته‌ایم نتیجه می‌شود که دورهٔ تناوب اینگونه نوسان‌ها برای دستگاه‌هایی که دربارهٔ آن‌ها در مثال‌های متفاوت ۲، ۳، ۴ و ۵ گفت‌وگو کرده‌ایم، تنها به سازوکار و ساختمان این دستگاه‌ها بستگی دارد. این دورهٔ تناوب برای همهٔ نوسان‌هایی که بتواند در این دستگاه‌ها به وجود آید، یکی است. این دوره در مثال ۲ برابر است با $2\pi : \sqrt{\frac{kps}{v\rho l}}$ و در مثال ۴ برابر است با $2\pi : \sqrt{\frac{b}{m} - \frac{a^2}{4m^2}}$، و در مثال ۵ برابراست با $2\pi : \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$.

اگر $a = ۰$، یعنی محیط مقاومتی در برابر حرکت نداشته باشد، دامنهٔ نوسان ثابت می‌ماند: در این‌صورت دارای نوسان‌های همساز (هارمونیک) هستیم. ولی اگر $a > ۰$، یعنی محیط در برابر حرکت مقاومت کند ولو این‌که این مقاومت کوچک باشد ($a^۲ < ۴bm$)، دامنهٔ نوسان به سمت صفر میل می‌کند و نوسان خاموش می‌شود.

سرانجام، جواب $x(t) \equiv ۰$ از معادلهٔ (۶)، درهر حالتی وضع آرامش نقطهٔ xرا توضیح می‌دهد که همیشه در وضع $x = ۰$ پیدا می‌شود و ما آن را نقطهٔ تعادل می‌نامیم.

اگر بخش‌های حقیقی هر دو ریشهٔ معادله (۱۹) منفی باشند، در آن‌صورت همهٔ جواب‌های معادلهٔ (۶)، همان‌طور که از دستورهای (۲۰)، (۲۱) و (۲۳) دیده می‌شود، همهٔ ریشه‌های این معادله را می‌دهند به ازای $t \to +\infty$، همراه با مشتق‌های آن‌ها به سمت صفر میل می‌کنند، یعنی نوسان در جریان زمان خاموش می‌شود.

ولی اگر دست کم بخش حقیقی یکی از ریشه‌های معادلهٔ (۱۹) مثبت باشد، در معادلهٔ (۶) جواب‌هایی وجود دارد که به ازای $t \to +\infty$، به سمت صفر میل نمی‌کنند و در این‌صورت بعضی از ریشه‌های معادلهٔ (۶) به ازای $t \to +\infty$، حتی محدود هم نمی‌شود. چنین حالتی تنها وقتی پیش می‌آید که bمنفی باشد و یا در حالت $m > ۰$ ، a منفی باشد. از نظر فیزیکی این وضع متناظر با حالتی است که نیروی کششی، نقطهٔ xرا به طرف وضع تعادل نمی‌کشد، بلکه آن را از وضع تعادل دور می‌کند و یا متناظر با حالتی است که مقاومت محیط منفی است. چنین حالت‌هایی در مثال‌هایی که درآغاز این بخش آوردیم تحقق پیدا نمی‌کند، ولی می‌توان امکان وجود آن‌ها را در مدلهای فیزیکی دیگری پیدا کرد.

اگر بخش حقیقی ریشه‌های $\lambda_۱$و $\lambda_۲$از معادلهٔ (۱۹) برابر صفر باشد (و تنها وقتی ممکن است که ضریب aدر معادلهٔ (۱۹) برابر صفر باشد)، در این‌صورت نقطهٔ $x(t)$، همان‌طور که در دستور (۲۳) دیده می‌شود، به ازای $x = ۰$ نوسان‌های همساز با دامنه‌ای محدود و سرعتی محدود انجام می‌دهد.

معادلهٔ خطی نامتجانس (یا ناهمگن) با ضریبهای ثابت. این معادله را به تفصیل بررسی می‌کنیم:

$$m\frac{d^۲x}{dt^۲} + a\frac{dx}{dt} + bx = A\cos \omega t \qquad (۲۶)$$

و این، معادلهٔ نوسان‌های خطی نقطهٔ مادی است که زیر تأثیر نیروی کششی، نیروی مقاومت محیط و نیروی متناوب خارجی $A\cos \omega t$قرار داشته باشد [معادلهٔ ('۶) را در بند ۱ ببینید].

معادلهٔ (۲۶)، معادلهٔ خطی ناهمگن است. معادلهٔ (۶)، معادلهٔ همگن متناظر آن است.

حالا به جست‌وجوی جواب کلی معادلهٔ (۲۶) می‌پردازیم.

توجه کنیم که مجموع جواب معادلهٔ ناهمگن با جواب معادلهٔ همگن متناظر با آن، خود جوابی از معادلهٔ خطی ناهمگن است. بنابراین برای پیدا کردن جواب کلی معادلهٔ (۲۶)، کافی است یکی از جواب‌های خاص این معادله را بدانیم. جواب کلی معادلهٔ (۲۶)، به صورت مجموع این جواب خاص و جواب کلی معادلهٔ همگن متناظر با آن در خواهد آمد.

طبیعی است انتظار داشته باشیم که حرکت زیر تاثیر نیروی خارجی متناوب، همان آهنگ را داشته باشد و در نتیجه، جواب خاص معادلهٔ (۲۶) را به صورت $x=B\cos(\omega t+\delta)$ جست‌وجو کنیم که در آن B و δ عددهایی نامعلوم هستند. کوشش می‌کنیم B و δ را طوری پیدا کنیم که تابع

$$x=B\cos(\omega t+\delta)$$

در معادلهٔ (۲۶) صدق کند. مشتق‌های مربوطه را پیدا می‌کنیم.

$$\frac{dx}{dt}=-B\omega\sin(\omega t+\delta)\ ,\ \frac{d^۲x}{dt^۲}=-B\omega^۲\cos(\omega t+\delta)$$

و آن‌ها را در معادلهٔ (۲۶) قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$m(-B\omega^۲\cos(\omega t+\delta))+a(-B\omega\sin(\omega t+\delta))+bB\cos(\omega t+\delta)=A\cos\omega t$$

که با استفاده از دستورهای معروف، خواهیم داشت:

$$B[(b-m\omega^۲)\cos(\omega t+\delta)-a\omega\sin(\omega t+\delta)]=B\sqrt{(b-m\omega^۲)^۲+a^۲\omega^۲}\cos(\omega t+\delta')=A\cos\omega t$$

که در آن $\delta'=\delta+\gamma$ و $\gamma=\text{arctg}\dfrac{a\omega}{b-m\omega^۲}$. روشن است، اگر فرض کنیم:

$$\delta=-\text{arc}tg\frac{a\omega}{b-m\omega^۲}\quad ,\quad B=\frac{A}{\sqrt{(b-m\omega^۲)^۲+a^۲\omega^۲}}$$

در آن‌صورت تابع $x=B\cos(\omega t+\delta)$ در معادلهٔ (۲۶) صدق می‌کند.

اگر داشته باشیم: $(b-m\omega^۲)^۲+a^۲\omega^۲\neq ۰$، آن گاه جواب به صورت $B\cos(\omega t+\delta)$

همیشه وجود دارد. در حالت $(b-m\omega^{2})^{2}+a^{2}\omega^{2}=0$ یعنی $a=0$ و $b=m\omega^{2}$، معادلهٔ (۲۶) به این صورت در می‌آید:

$$m\frac{d^{2}x}{dt^{2}}+m\omega^{2}x=A\cos\omega t$$

و در این حالت، جواب خاص، به صورت تابع $x=\frac{At}{2\sqrt{mb}}\sin\omega t$ در می‌آید.

جواب‌های معادلهٔ ناهمگن (۲۶) را نوسان‌های الزامی می‌نامیم. ضریب $\varphi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{(b-m\omega^{2})^{2}+a^{2}\omega^{2}}}$، وضع دامنهٔ B از نوسان الزامی پیدا شده را، نسبت به دامنهٔ A از نیروی تغییردهنده، توصیف می‌کند. نمودار تابع $\varphi(\omega)$ را، منحنی تشدید (رزونانس) گویند. بسامد (فرکانس) ω را، که به ازای آن $\varphi(\omega)$ به مقدار حداکثر خود می‌رسد، بسامد تشدید (فرکانس رزونانس) گویند. آن را پیدا می‌کنیم. اگر حداکثر مقدار تابع $\varphi(\omega)$ به ازای $\omega_{1}\neq 0$ به دست آید، در این‌صورت مشتق $\varphi'(\omega)$ به ازای این مقدار ω تبدیل به صفر می‌شود، یعنی $-4(b-m\omega_{1}^{2})m\omega_{1}+2a^{2}\omega_{1}=0$ و بنابراین $\omega_{1}=\sqrt{\frac{b}{m}-\frac{a^{2}}{2m^{2}}}$. به ازای همین مقدار ω_{1}

$$\varphi(\omega_{1})=\frac{1}{a\sqrt{\frac{b}{m}-\frac{a^{2}}{4m^{2}}}}$$

از این‌جا دیده می‌شود، هرچه a کوچکتر باشد دامنهٔ نوسان الزامی به ازای $\omega=\omega_{1}$ بزرگتر می‌شود. برای مقدارهای کوچک a، بسامد ω_{1} به‌سمت مقدار $\sqrt{\frac{b}{m}}$، یعنی بسامد نوسان‌های آزاد، نزدیک می‌شود. و همان‌طور که می‌بینیم به ازای $a=0$ و $b=m\omega^{2}$، نوسان الزامی به‌صورت

$$x=\frac{At}{2\sqrt{mb}}\sin\omega t$$

در می‌آید، یعنی دامنهٔ این نوسان‌ها، وقتی $t\to\infty$، به طورنامحدود بزرگ می‌شود. و این پدیده را در ریاضیات، **تشدید** (رزونانس) گویند. تشدید وقتی پیش می‌آید که دورهٔ تناوب نیروی خارجی بر دورهٔ تناوب نوسان‌های اختصاصی دستگاه منطبق شود. در واقع در حالت‌هایی که دورهٔ تناوب نیروی خارجی به دورهٔ تناوب نوسان‌های اختصاصی نزدیک

شود، دامنهٔ نوسان‌های دستگاه می‌تواند به اندازهٔ کافی بزرگ شود.

امکان ایجاد نوسان‌های بزرگ در دستگاه، اغلب برای ساختن گونه‌های مختلف تقویت‌کننده‌ها و از جمله در صنعت رادیو، استفاده می‌شود. ولی نوسان‌های بزرگ ممکن است منجر به خرابی ساختمان‌ها، مثل پل‌ها و پوشش بناها بشود. بنابراین پیش‌بینی امکان به وجود آمدن تشدید و یا نوسان‌های نزدیک به آن اهمیت زیادی دارد.

بنابر آنچه گفتیم، هر جواب معادلهٔ (۲۶) به صورت مجموعی از نوسان الزامی پیدا شده، و یکی از جواب‌های معادلهٔ همگن، که به صورت دستورهای (۲۰)، (۲۱) و (۲۳) می‌باشد، در می‌آید. به ازای $a > 0$ و $b > 0$، وقتی $t \to \infty$، جواب معادلهٔ همگن به سمت صفر میل می‌کند، یعنی هر حرکتی در جریان زمان به نوسان الزامی که پیدا شده است نزدیک می‌شود. به ازای $a = 0$ و $b > 0$، نوسان الزامی به نوسان‌های بی‌استهلاک اختصاصی دستگاه اضافه می‌شود و به ازای $b = m\omega^2$ و $a = 0$، تشدید پیش می‌آید.

اگر یک نیروی متناوب خارجی $f(t)$ بر دستگاه تأثیر کند، نوسان‌های الزامی دستگاه را می‌توان به این ترتیب به دست آورد. $f(t)$ را با دقت کافی به صورت فاصله‌ای از رشتهٔ مثلثاتی می‌نویسیم[1]:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \qquad (27)$$

و نوسان‌های الزامی متناظر با هر یک از جمله‌های این مجموع را پیدا می‌کنیم. نوسان الزامی متناظر با نیروی $f(t)$ از روی وضع نوسان‌هایی که متناظر با جملهٔ مشخصی از مجموع (۲۷) است به دست می‌آید. اگر یکی از بسامدهای ω_k یا بسامد نوسان اختصاصی دستگاه تطبیق کند، تشدید پیش می‌آید.

۳. بعضی یادآوری‌های کلی دربارهٔ حل و تشکیل معادله‌های دیفرانسیل

معادله‌های دیفرانسیلی که بتوان همهٔ جواب‌های آن‌ها را برحسب تابع‌های ساده به روشنی بیان‌کرد ــ آن‌طور که دربارهٔ معادله‌های دیفرانسیلی خطی با ضریب‌های ثابت دیدیم ــ خیلی

۱. بخش دوازدهم، بند ۷ را ببینید.

زیاد نیستند. می‌توان نمونه‌های ساده‌ای از معادله‌های دیفرانسیلی آورد که نتوان جواب کلی آن‌ها را به کمک تعداد محدودی انتگرال بیان کرد، یعنی به اصطلاح «قابل تربیع» نیستند. حتی در سال ۱۸۴۱، ***لیوویل*** ثابت کرد که جواب معادلهٔ ***ریکاتی*** به صورت $\frac{dy}{dx}+ay^2=x^2$ را به ازای $a>0$، نمی‌توان به یاری تعداد محدودی انتگرال از تابع‌های مقدماتی، بیان کرد. به همین مناسبت روش‌های حل تقریبی معادله‌های دیفرانسیلی، که دربارهٔ گروه وسیعی از آن‌ها به کار می‌رود، اهمیت جدی پیدا می‌کند.

بنابراین، این موقعیت که ما نتوانیم جواب‌های دقیق معادله را پیدا کنیم و ناچار باشیم به جواب‌های تقریبی آن اکتفا کنیم، نباید ما را پریشان کند. زیرا این جواب‌های تقریبی را می‌توان، دست کم به صورت اصولی، با هر دقتی که لازم باشد به دست آورد. به‌جز آن باید به خصوص روی این مطلب تاکید کرد که در بسیاری حالت‌ها، خود معادله‌های دیفرانسیلی، که این و یا آن روند فیزیکی را شرح می‌دهد، خیلی دقیق نیست. و این مطلب، دربارهٔ همهٔ مثال‌هایی که در بند ۱ آوردیم صدق می‌کند.

به‌ویژه معادلهٔ (۱۲) را، که مربوط به تقویت‌کنندهٔ صوتی است، می‌توان به عنوان نمونه ذکر کرد. ما ضمن به دست آوردن این معادله، از قابلیت تراکم هوا در گلوی ظرف و حرکت هوا در ظرف صرف‌نظر کردیم. در واقع وقتی هوا در گلوی ظرف حرکت می‌کند، تودهٔ هوا در خود ظرف هم حرکت می‌کند، ولی سرعت و جابه‌جایی این حرکت‌ها متفاوت است. در گلوی ظرف، جابه‌جایی خیلی بیشتری از ذره‌های هوا انجام می‌گیرد تا در خود ظرف. به همین مناسبت هم ما از حرکت هوا در ظرف صرف‌نظر کردیم و تنها انرژی سینتیک حرکت آن را درنظر گرفتیم.

ضمن به دست آوردن معادلهٔ دیفرانسیلی آونگ فیزیکی، از وزن نخی که آونگ به آن آویزان شده است صرف‌نظر کردیم. ضمن پیدا کردن معادلهٔ (۱۴) مربوط به نوسان‌های الکتریکی در مدار، از خودالقایی سیم صرف‌نظر کردیم. به طور کلی، هر جا که بخواهیم معادلهٔ دیفرانسیلی یک روند فیزیکی را به‌دست آوریم، همیشه از چیزی صرف‌نظر می‌کنیم. به همین مناسبت، ***آ.آ. آندرونوف*** به‌ویژه به این موضوع توجه می‌کند که برای بررسیهای فیزیکی، چنان معادله‌های دیفرانسیلی جالب است که اگر به دلیلی، تغییرکوچکی در این معادله‌ها پیدا شود، در جواب‌های آن‌ها هم تغییر کوچکی پیدا شود. ***آندرونوف*** چنین معادله‌های دیفرانسیلی را «تخمینی» می‌نامد. و به‌ویژه، به این معادله‌ها باید در آموزش توجه شود.

باید گفت در بررسی‌های فیزیکی، نه تنها خود معادله‌های دیفرانسیلی، که قانونهای تغییر کمیت‌های فیزیکی را شرح می‌دهند و جریان مطالعهٔ روندها را معین می‌کنند، با عدم دقت به دست می‌آید، بلکه حتی تعداد خود این کمیت‌ها هم، تقریبی است. اگر بخواهیم دقیق باشیم، برای نمونه، جسم صلب مطلق وجود ندارد. بنابراین برای مطالعهٔ نوسان‌های آونگ، باید نخی راکه آونگ به آن آویزان است به صورت تغییر شکل یافته در نظر بگیریم. همچنین خود جسم صلبی راکه به‌طور تقریبی به عنوان نقطهٔ مادی قبول کرده بودیم، به صورت تغییر شکل یافته‌ای به حساب آوریم. درست به همین ترتیب، برای مطالعهٔ نوسان‌های وزنه‌ای که به فنر محکم شده است، باید وزن هر حلقهٔ فنر را در نظر بگیریم. ولی در این مثال‌ها به سادگی ثابت می‌شود که رفتار حرکت در بخش‌های جداگانه‌ای که آونگ یا وزنه و فنر از آن‌ها ساخته شده است، در رفتار نوسان‌ها تاثیر کمی دارد. و اگر بخواهیم این تأثیر را به حساب آوریم، مسأله چنان دشوار و پیچیده می‌شود که نخواهیم توانست آن را با تقریب لازم حل کنیم. جوابی که در عمل از این راه بدست می‌آید، در مقایسه با واقعیت فیزیکی به هیچ‌وجه بهتر از جوابی نیست که در بند ۱، بدون به حساب آوردن این عامل‌ها، به‌دست آوردیم. از طرف دیگر، آنچه برای ما مهم است کمال مطلوب است نه کمال مطلق. برای توضیح یک روند، باید عاملهای اساسی روند را به حساب آورد و به هیچ‌وجه ضرورتی ندارد به همهٔ عاملها، بدون استثنا، توجه داشته باشیم؛ زیرا چنین گرایشی نه تنها مسأله را بی‌اندازه پیچیده می‌کند، بلکه در بسیاری حالت‌ها حل آن را ناممکن می‌سازد. مسألهٔ اصلی در فیزیک و صنعت عبارت از این است که در بررسی یک روند بتوانیم با حداقل کمیت‌ها، حداکثر دقت را در روند مورد بررسی در هر لحظهٔ زمانی به‌دست آوریم؛ بتوانیم با ساده‌ترین نوع ممکن معادله‌های دیفرانسیلی، قانون‌های تغییر این کمیت‌ها را به خوبی توضیح دهیم. و رسیدن به این هدف، اغلب، مسألهٔ ساده‌ای نیست. چه عامل‌هایی برای بررسی یک مسألهٔ فیزیکی اساسی است و چه چیزهایی را باید به حساب آورد و از چه چیزهایی صرف‌نظر کرد، موضوعی است که در تحلیل نهایی تنها با تجربهٔ طولانی به دست می‌آید. تنها از راه آزمایش و مشاهده است که می‌توانیم دربارهٔ کامل بودن و عملی بودن یک قانون فیزیکی داوری کنیم.

مسألهٔ ریاضی مربوط به امکان کم کردن تعداد کمیت‌های معلوم در یکی از حالت‌های ساده و اساسی آن، به این ترتیب تنظیم می‌شود.

فرض کنیم ابتدا وضع دستگاه فیزیکی مورد بررسی را در لحظهٔ t با دو کمیت $x_1(t)$ و

$x_2(t)$ مشخص کرده باشیم. و فرض کنیم معادله‌های دیفرانسیلی که قانون تغییرهای آن را معین می‌کند به این صورت باشد:

$$\frac{dx_1}{dt}=f_1(t , x_1 , x_2) ,$$

(۲۸)

$$\varepsilon \frac{dx_2}{dt}=f_2(t , x_1 , x_2)$$

در معادلهٔ دوم، ضریب مشتق عبارت است از پارامتر ثابت کوچک ε. اگر فرض کنیم $\varepsilon = 0$، در آن صورت، معادلهٔ دوم از معادله‌های (۲۸) از صورت معادلهٔ دیفرانسیلی بیرون می‌آید و چنین می‌شود:

$$f_2(t , x_1 , x_2)=0$$

از این‌جا، می‌توان x_2 را، به عنوان تابعی از t و x_1 به دست آورد و آن را در معادلهٔ نخست (۲۸) قرار داد. به‌این‌ترتیب، تنها برای یک کمیت x_1، معادلهٔ دیفرانسیلی به دست می‌آوریم:

$$\frac{dx_1}{dt}=F(t, x_1)$$

و بنابراین از تعداد پارامترهایی که در بررسی ما وارد شده بود، یکی کم می‌شود. این پرسش پیش می‌آید: با چه شرط‌هایی، اشتباهی که به خاطر صفر گرفتن ε حاصل می‌شود، کوچک است؟ چه بسا به ازای $\varepsilon \to 0$، مقدار $\frac{dx_2}{dt}$ به سمت بی‌نهایت بزرگ برود و در نتیجه، سمت راست معادلهٔ دوم (۲۸) به ازای $\varepsilon \to 0$، به سمت صفر میل نکند. ریاضی‌دانان شوروی به این پرسش و پرسش‌های بسیار دیگر مشابه آن پاسخ کافی داده‌اند.

۴. تعبیر هندسی مسألهٔ انتگرال‌گیری معادله‌های دیفرانسیلی. تعمیم مسأله

برای سادگی کار، ابتدا تنها یک معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ اول با یک تابع مجهول را بررسی می‌کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (۲۹)$$

که در آن، تابع $f(x,y)$ در حوزه‌ای مانند G روی صفحهٔ (x,y) تعریف شده است. این معادله در هر نقطه از حوزهٔ تعریف خود، ضریب زاویهٔ مماس بر منحنی جواب معادلهٔ (۲۸) را، که از همین نقطه رسم شده است، به ما می‌دهد. اگر در هر نقطهٔ (x , y) از حوزهٔ G، به کمک پاره‌خط راستی، جهت مماسی را که به وسیلهٔ مقدار $f(x , y)$ معین شده است انتخاب کنیم (انتخاب هر کدام از دو جهت روی این پاره‌خط راست تفاوتی ندارد)، آنگاه میدان جهت‌ها را به دست می‌آوریم. در این صورت، مسألهٔ جست‌وجوی جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیلی (۲۹) را، با شرط اولیهٔ $y(x_0)=y_0$ می‌توان این‌طور تنظیم کرد: باید منحنی $y=\varphi(x)$ را در حوزهٔ G چنان پیدا کرد که از نقطهٔ $M_0(x_0 , y_0)$ بگذرد و در هر نقطهٔ آن مماسی با ضریب زاویه‌ای که به وسیلهٔ معادلهٔ (۲۹) مشخص شده است داشته باشد؛ یا به طور کوتاه شده، منحنی که در هر نقطهٔ خود، جهت مفروض را داشته باشد.

از دیدگاه هندسی، در چنین وضعی به موقعیت‌های غیرطبیعی زیر برخورد می‌کنند.

۱. چون ضریب زاویهٔ مماس در هر نقطهٔ (x , y) از حوزهٔ G برابر است با $f(x , y)$، جهتی را که موازی Oy باشد استثنا می‌کنیم. زیرا همه جا به طور کلی، تنها با مقدارهای محدود سروکار داریم به‌ویژه فرض می‌شود تابع $f(x , y)$ در سمت راست معادلهٔ (۲۹)، در همه جا تنها مقداری محدود را قبول می‌کند.

۲. چون تنها منحنی‌هایی را بررسی می‌کنیم که تابعی از x هستند، منحنی‌هایی را که با خط‌های راست عمود بر محور Ox بیش از یکبار برخورد دارند کنار می‌گذاریم. زیرا همه جا تنها تابع‌های یک ارزشی را بررسی می‌کنیم و به‌ویژه، هر جوابی از معادلهٔ دیفرانسیلی، تابعی یک ارزشی نسبت به x است.

به‌این مناسبت، مسألهٔ مربوط به حل معادلهٔ دیفرانسیلی (۲۹) را تا حدی تعمیم می‌دهیم. قبل از همه فرض می‌کنیم که میدان جهت‌ها در بعضی از نقطه‌ها، موازی محور Oy باشد. در نقطه‌هایی که ضریب زاویه، نسبت به محور Ox معنا نداشته باشد، از ضریب زاویه نسبت به محور Oy استفاده می‌کنیم. به همین مناسبت، در کنار معادلهٔ دیفرانسیلی (۲۹)، معادلهٔ

$$\frac{dx}{dy} = f_1(x,y) \qquad (۲۹')$$

را هم در بررسی خود قرار می‌دهیم، که در آن $f_1(x , y)=\frac{1}{f(x , y)}$، به شرطی که $f(x, y) \neq 0$. هر جا معادلهٔ اول معنا نداشته باشد، معادلهٔ دوم معنا دارد. مسألهٔ مربوط به

انتگرال‌گیری معادله‌های (۲۹) و ('۲۹) را به این ترتیب طرح می‌کنیم: در حوزهٔ G، همه منحنی‌هایی را پیدا می‌کنیم که در هر نقطهٔ آن‌ها، دارای جهتی باشد که به وسیلهٔ این معادله‌ها داده شده است. این منحنی‌ها را ***منحنی‌های انتگرالی*** معادله‌های (۲۹) و ('۲۹) یا میدان جهت‌هایی که به وسیلهٔ این معادله‌ها داده شده است می‌نامند. به جای صیغهٔ جمع «معادله‌های (۲۹) و ('۲۹)»، اغلب از حالت مفرد «معادلهٔ (۲۹) و ('۲۹)» استفاده می‌کنند. روشن است که نمایش تغییر هر جوابی از معادلهٔ (۲۹)، یکی از منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۲۹)، ('۲۹) خواهد بود. ولی، هر منحنی انتگرالی معادلهٔ (۲۹) ، ('۲۹)، نمایش تغییر جوابی از (۲۹) نیست. این وضع، از جمله در حالتی پیش می‌آید که عمودی بر Ox، این منحنی را در بیش از یک نقطه قطع کند.

از این به‌بعد به‌شرطی که به وضوح داشته باشیم:

$$f(x,y)=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

آنگاه فقط معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

را می‌نویسیم، و از تکرار معادلهٔ همراه آن خودداری می‌کنیم:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{N(x,y)}{M(x,y)}$$

گاهی به جای این معادله‌ها، با وارد کردن پارامتر t، دستگاه معادله‌های

$$\frac{dx}{dt}=N(x,y)\ ,\ \frac{dy}{dt}=M(x,y)$$

را می‌نویسند که در آن، xو yبه عنوان تابعی از tدر نظر گرفته شده است.

مثال ۱. معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \tag{۳۰}$$

به‌جز در مبداء مختصات، در همه جا میدان جهت‌ها را می‌دهد. شمای این میدان در شکل ۷

داده شده است. همهٔ جهت‌هایی که به وسیلهٔ معادلهٔ (۳۰) معین شده است از مبداء مختصات می‌گذرند. روشن است به ازای هر مقدار k، تابع

$$y = kx \tag{۳۱}$$

جوابی از معادلهٔ (۳۰) است و مجموعهٔ همهٔ منحنی‌های انتگرالی این معادله با رابطهٔ

$$ax + by = 0 \tag{۳۲}$$

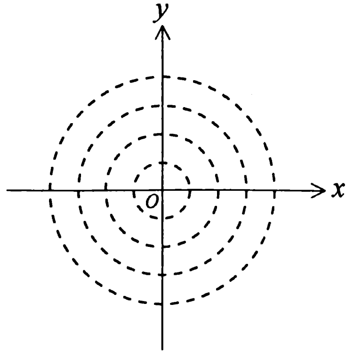
داده می‌شود که در آن a و b، مقدارهای ثابت دل‌خواهی هستند، به نحوی که با هم نمی‌توانند برابر صفر شوند. محور Oy، منحنی انتگرالی معادلهٔ (۳۰) است، ولی نمایش تغییرات جواب آن نیست.

چون معادلهٔ (۳۰) میدان جهت‌ها را در مبداء مختصات معین نمی‌کند، خط‌های (۳۱) و (۳۲) منحنی‌های انتگرالی همه جا را مشخص می‌کنند، به‌جز مبداء مختصات. بنابراین، اگر بخواهیم بیان درستی داشته باشیم باید گفت که منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۳۰)، خط‌های راستی نیستند که از مبداء مختصات گذشته‌اند، بلکه نیم‌خط‌های راستی هستند که از مبداء مختصات آغاز می‌شوند.

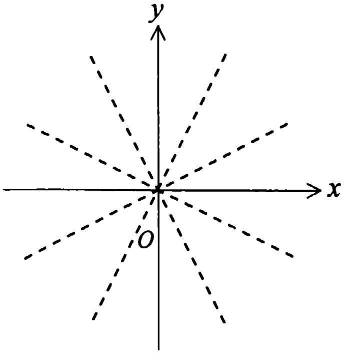
مثال ۲. معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{۳۳}$$

میدان جهت‌ها را در همه جا، به‌جز مبداء مختصات می‌دهد. شمای این میدان، در شکل ۸



شکل ۸



شکل ۷

داده شده است. جهت‌هایی که در نقطهٔ $(x\ ,\ y)$ به وسیلهٔ معادله‌های (۳۰) و (۳۳) به دست می‌آید، بر هم عمودند. روشن است که همهٔ دایره‌های به مرکز مبداء مختصات، منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۳۳) هستند. جواب‌های این معادله، به صورت این تابع‌ها در می‌آیند:

$$y=+\sqrt{R^{2}-x^{2}}\ ,\ \ y=-\sqrt{R^{2}-x^{2}}\ \ ,\ -R\leq x\leq R$$

از این به بعد، برای سادگی کار، به جای این‌که بگوییم «نمایش تغییر جوابی که از نقطهٔ (x,y) می‌گذرد» (که بیان دقیقتر مطلب است)، می‌گوییم «جوابی که از نقطهٔ (x,y) گذشته است».

۵. وجود جواب معادلهٔ دیفرانسیلی و منحصر به فرد بودن آن. جواب تقریبی معادله

وجود جواب در معادلهٔ دیفرانسیلی و منحصر به فرد بودن این جواب. به معادلهٔ دیفرانسیلی (۱۷) که از مرتبهٔ دل‌خواه n است برمی‌گردیم. این معادله در حالت کلی دارای بی‌نهایت جواب است و برای این‌که از میان همهٔ جواب‌های ممکن، یک جواب معین را جدا کنیم، باید شرط‌های اضافی به معادله ملحق کنیم که تعداد آن‌ها برابر با مرتبهٔ n معادله باشد. این شرط‌ها را می‌توان با خصلت‌های گوناگونی انتخاب کرد و نوع آن‌ها، به مفهوم فیزیکی، صنعتی و یا هر چیز دیگری که جواب مسأله مربوط به آن است، بستگی دارد. از جمله اگر بخواهیم حرکت یک دستگاه مکانیکی را بررسی کنیم، شرط‌ها به‌مقدارهای معلومی، که مستقل از متغیر هستند شرط‌های اولیهٔ مسأله نامیده می‌شوند، مربوط می‌شود. و اگر بخواهیم منحنی طناب نگهدارندهٔ پل معلق و یا انحنای تیری راکه روی تکیه‌گاه‌های خود قرار دارد و باری را تحمل می‌کند، پیدا کنیم، به شرط های اضافی برخورد می‌کنیم که به مقدارهای مختلفی که مستقل از متغیرند (انتهای طناب یا نقطهٔ اتکای تیر در مثال‌های ما)، بستگی پیدا می‌کند. می‌توان مثال‌های بسیار دیگری را آورد که گوناگونی شرط‌های اضافی را که می‌توان به معادلهٔ دیفرانسیلی ملحق کرد، نشان دهد.

فرض کنیم، شرط‌های اضافی معلوم باشد و بخواهیم جوابی از معادلهٔ (۱۷) را، که با این شرط‌ها می‌سازد، پیدا کنیم. نخستین پرسشی که باید مطرح شود، پرسش مربوط به وجود

جواب است. کم نیست حالت‌هایی که از قبل نمی‌توانیم دربارهٔ وجود چنین جوابی، مطمئن شویم. از جمله، فرض کنید معادلهٔ (۱۷) معرف قانون کار یک دستگاه فیزیکی باشد و فرض کنید بخواهیم معلوم کنیم آیا در این دستگاه می‌تواند روند تناوبی وجود داشته باشد. در این‌صورت، شرط‌های اضافی، مربوط به شرط‌های تناوب تکرار حالت اولیهٔ روند در دستگاه می‌شود و نمی‌توانیم از قبل بگوییم آیا جوابی که با آن سازگار باشد، وجود دارد یا نه!

در هر حالتی که بررسی مسألهٔ مربوط به وجود و منحصر به فرد بودن جواب مطرح است، این امکان را داریم که روشن کنیم کدام شرط‌های اضافی برای معادلهٔ ما قابل اجرا است و کدامیک از آن‌ها منجر به جواب منحصر به فرد می‌شود. معلوم کردن این شرط‌ها و اثبات وجود و منحصر به فرد بودن جواب معادله‌ای که یک پدیدهٔ فیزیکی را شرح می‌دهد، برای خود نظریهٔ فیزیکی هم، اهمیت زیادی دارد. چنین بحثی می‌تواند سازگاری متقابل بررسی‌هایی را که در ریاضیات از پدیده‌های مختلف انجام می‌دهیم، و درجهٔ کامل بودن این بررسی‌ها را نشان دهد.

روش‌های بررسی مسألهٔ وجود جواب، گوناگون است، ولی از میان آن‌ها، به خصوص روش‌های به اصطلاح مستقیم، اهمیتی جدی دارد. وجود جواب لازم، از راه به دست آوردن جواب‌های تقریبی، که به سمت جواب دقیق میل می‌کنند، ثابت می‌شود. این روش‌ها، در عین این‌که امکان وجود جواب دقیق را ثابت می‌کنند، در ضمن این امکان را، دست کم به طور اصولی، به وجود می‌آورند که با هر دقتی بخواهیم، به جواب دقیق مسأله نزدیک شویم.

در این بند، مسأله‌ای را با داده‌های اولیه در نظر می‌گیریم و روی آن روش *اولر* و روش ***تقریب‌های*** متوالی را، روشن می‌کنیم.

روش خط‌های شکستهٔ اولر. فرض کنید در حوزه‌ای مانند G از صفحهٔ $(x\ ,\ y)$، معادلهٔ دیفرانسیلی

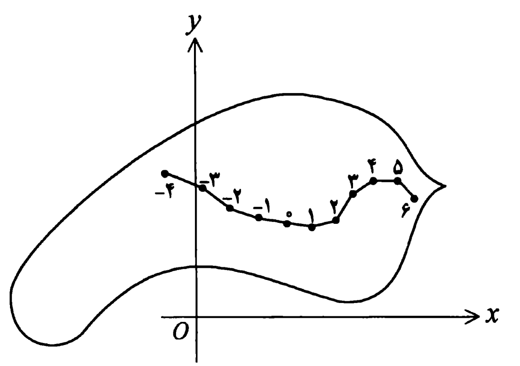
$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{۳۴}$$

داده شده باشد. همان‌طور که پیش از این گفته‌ایم، معادلهٔ (۳۴)، میدان جهت‌ها را در حوزهٔ G، معین می‌کند. نقطه‌ای مثل $(x_0\ ,\ y_0)$ را روی G انتخاب می‌کنیم. این نقطه متناظر با خط راست L_0 با ضریب زاویهٔ $f(x_0\ ,\ y_0)$ است که از این نقطه می‌گذرد و بر منحنی انتگرالی که از همین نقطه عبور می‌کند، مماس است. روی خط راست L_0، نقطهٔ $(x_1\ ,\ y_1)$ را، به اندازهٔ کافی

نزدیک به $(x_0\,,\,y_0)$، انتخاب می‌کنیم (روی شکل ۹، این نقطه را با عدد ۱، نشان داده‌ایم). از نقطهٔ $(x_1\,,\,y_1)$، خط راست L_1 را با ضریب زاویهٔ $f(x_1\,,\,y_1)$ رسم می‌کنیم و روی آن نقطهٔ $(x_2\,,\,y_2)$ را نشان می‌گذاریم (روی شکل این نقطه را با عدد ۲، نشان داده‌ایم). سپس روی خط L_2 که متناظر با نقطهٔ $(x_2\,,\,y_2)$ است، به همین ترتیب نقطهٔ $(x_3\,,\,y_3)$ را نشان می‌کنیم و غیره. در ضمن فرض می‌کنیم ... $x_0 < x_1 < x_2 < x_3$. البته فرض براین است، همهٔ نقطه‌های $(x_0\,,y_0)$ ، $(x_1\,,y_1)$ ، $(x_2\,,y_2)$، ... به حوزه G تعلق دارند. خط شکسته‌ای که این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کند، خط **شکستهٔ *اولر*** نامیده می‌شود. می‌شد خط شکستهٔ اولر را در جهت نزولی x هم رسم کرد (که نقطه‌های متناظر آن‌ها را در شکل، با عددهای ۱ − ، ۲ − ، ۳ − ، ... نشان داده‌ایم).

طبیعی است انتظار داشته باشیم، هر خط **شکستهٔ *اولر*** که از نقطهٔ $(x_0\,,\,y_0)$ می‌گذرد، به شرطی که پاره‌خط‌هایی به اندازهٔ کافی کوچک داشته باشد، تصوری دربارهٔ منحنی انتگرالی l، که از نقطهٔ $(x_0\,,y_0)$ می‌گذرد، به دست دهد، و ضمن کوچک کردن طول پاره‌خط‌ها، وقتی که طول بزرگترین پاره‌خط به سمت صفر میل کند، خط‌های **شکستهٔ *اولر*** به سمت این منحنی انتگرالی میل می‌کند.

البته، در این ضمن، فرض می‌شود که چنین منحنی انتگرالی، وجود دارد. در واقع، اثبات این مطلب دشوار نیست که، اگر تابع $f(x\,,\,y)$ در حوزه G پیوسته باشد، می‌توان دنبالهٔ نامتناهی از خط‌های **شکستهٔ *اولر*** را به نحوی انتخاب کرد که طول بزرگترین پاره‌خط آن به سمت صفر میل کند و در ضمن خود این دنباله به یک منحنی انتگرالی l نزدیک شود. با همهٔ اینها، ممکن است در حالت کلی، این دنباله منحصر به فرد نباشد: ممکن است



شکل ۹

دنباله‌های متفاوتی از خط‌های **شکستهٔ *اولر*** وجود داشته باشد، که به منحنی‌های انتگرالی مختلفی که از همان یک نقطهٔ (x_0, y_0) می‌گذرند، نزدیک شوند. *م.آ.* **لاورنتیف**، نمونه‌ای از معادلهٔ دیفرانسیلی نوع (۲۹) از تابع پیوستهٔ $f(x,y)$ساخته است که در هر حومهٔ هر نقطه P حوزه G آن، از نقطهٔ P، دست کم دو منحنی انتگرالی می‌گذرد. برای این‌که از هر نقطهٔ حوزهٔ G تنها یک منحنی انتگرالی عبور کند، باید تابع $f(x,y)$، ویژگی‌هایی بیشتر از پیوسته بودن داشته باشد. از جمله، کافی است فرض کرد که تابع $f(x,y)$ پیوسته باشد و در ضمن نسبت به yدر حوزه G، مشتق محدودی داشته باشد. در چنین حالتی، می‌توان ثابت کرد که از هر نقطهٔ حوزهٔ G یک و تنها یک منحنی انتگرالی می‌گذرد و هر دنباله‌ای از خط‌های **شکستهٔ *اولر***، که از نقطهٔ (x_0, y_0) عبور کند، به شرطی که طول بزرگترین پاره‌خط شکسته به سمت صفر میل کند، به طور یکنوا به سمت یک منحنی انتگرالی منحصر به فرد میل می‌کند. به این ترتیب، به ازای پاره‌خط‌های به اندازهٔ کافی کوچک خط **شکستهٔ *اولر***، می‌توان به تقریب، آن را به جای منحنی انتگرالی معادلهٔ (۳۴) در نظر گرفت.

از آنچه گفته شد، دیده می‌شود که خط‌های **شکستهٔ *اولر*** چنان ساخته شده‌اند که به جای قطعه‌های کوچک از منحنی انتگرالی، پاره‌خط‌های راست مماس بر این منحنی انتگرالی، در نظر گرفته می‌شود. در عمل، اغلب تقریب‌های مربوط به منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ دیفرانسیلی (۳۴)، به جای پاره‌خط‌های راستی که مماس بر منحنی‌های انتگرالی هستند، در قطعه‌های سهمی‌هایی که بر منحنی‌های انتگرالی مماس‌اند، ولی مماس از درجهٔ بالاتر، تشکیل می‌شود. به این ترتیب، می‌توان تقریب جواب با همان دقت، ولی با تعداد گام‌های کمتری (تعداد کمتری از قطعه‌هایی که منحنی تقریب را تشکیل داده‌اند) به دست آورد. ضریب‌های معادلهٔ سهمی

$$y = a_0 + a_1(x - x_k) + a_2(x - x_k)^2 + \cdots + a_n(x - x_k)^n \qquad (۳۵)$$

را، که در نقطهٔ (x_k, y_k) بر منحنی انتگرالی معادلهٔ (۳۴) در همین نقطه مماس مرتبه nام است، با این دستورها به دست می‌آورند:

$$a_0 = y_k , \qquad (۳۶)$$

$$a_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_k} = f(x_k, y_k) \qquad (۳۶')$$

$$2a_2=\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=x_k}=\left[\frac{df(x,y)}{dx}\right]_{x=x_k}=f'_x(x_k,y_k)+f'_y(x_k,y_k)\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_k}=$$

$$=f'_x(x_k,y_k)+f'_y(x_k,y_k)f(x_k,y_k), \qquad (36'')$$

$$6a_3=\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=x_k}=\left\{\frac{d}{dx}\left[f'_x(x,y(x))+f'_y(x,y(x))f(x,y(x))\right]\right\}_{x=x_k}=$$

$$=f''_{xx}(x_k,y_k)+2f''_{xy}(x_k,y_k)f(x_k,y_k)+f''_{yy}(x_k,y_k)f^2(x_k,y_k)+f'^2_y(x_k,y_k)f(x_k,y_k)+$$
$$+f'_y(x_k,y_k)f'_x(x_k,y_k) \qquad (36''')$$

و غیره. چند جمله‌ای (۳۵) را تنها به این خاطر لازم داریم که مقدار آن را به ازای $x=x_{k+1}$ محاسبه می‌کنیم، و مقدارهای خود ضریب‌های a_0، a_1، a_2، ...، a_n را لازم نداریم. روش‌های زیادی برای محاسبهٔ مقدار چند جمله‌ای (۳۵) به ازای $x=x_{k+1}$ با ضریبهایی که به وسیلهٔ تابع (۳۶) معین شده است، وجود دارد که به محاسبهٔ خود ضریب‌های a_0، a_1، a_2، ...، a_n نیازی پیدا نمی‌شود.

روش‌های تقریبی دیگری هم برای جست‌وجوی جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیلی (۳۴) وجود دارد که برمبنای فکری دیگری قرار دارند که یکی از راحت‌ترین آن‌ها را، *آ.ن. کریلوف* (۱۸۶۳-۱۹۴۵)، عضو آکادمی شوروی، طرح ریخته است.

روش تقریبهای متوالی. حالا به روش تقریب‌های متوالی می‌پردازیم که به همان اندازهٔ روش خط‌های شکسته *اولر*، کاربرد گسترده‌ای دارد. دوباره فرض می‌کنیم بخواهیم جواب $y(x)$ از معادلهٔ دیفرانسیلی (۳۴) را، که با شرط اولیهٔ

$$y(x_0)=y_0$$

سازگار است، پیدا کنیم. به عنوان تقریب آغازی جواب $y(x)$، تابع دل‌خواه $y_0(x)$ را در نظر می‌گیریم. گرچه لزومی ندارد، ولی برای سادگی کار فرض می‌کنیم شرط اولیه در این تابع هم صدق کند. این تابع را در سمت راست معادله به جای تابع مجهول y قرار می‌دهیم و نخستین تقریب y_1 را با این شرط می‌سازیم که داشته باشیم:

$$\frac{dy_1}{dx}=f(x,y_0(x)),y_1(x_0)=y_0$$

چون در سمت راست برابری اول، تابع معلومی وجود دارد، بنابراین $y_1(x)$ را می‌توان به کمک انتگرال‌گیری به دست آورد:

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_0(t))\,dt$$

می‌توان انتظار داشت که $y_1(x)$کمتر از $y_0(x)$ با $y(x)$ اختلاف داشته‌باشد، زیرا برای به‌دست آوردن $y_1(x)$از معادلهٔ دیفرانسیلی استفاده کردیم و این عمل، به احتمالی، باید خطای تقریب آغازی را تصحیح کرده باشد. می‌توان فکر کرد که اگر با همین روش، تقریب نخستین $y_1(x)$ را هم بهبود بخشیم، دومین تقریب

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_1(t))dt$$

باز هم به جواب ما نزدیکتر است.

فرض کنیم، این روند بهبود بخشیدن را تا بی‌نهایت ادامه دهیم و دنبالهٔ تقریبها را بسازیم:

$$y_0(x),y_1(x),\ldots,y_n(x),\ldots$$

آیا این دنباله، به سمت جواب $y(x)$ میل می‌کند؟

با بررسی‌های مفصل‌تر ثابت می‌شود، اگر تابع $f(x,y)$ پیوسته، و f'_y در حوزهٔ G محدود باشد، تابع $y_n(x)$، دست‌کم برای مقدارهایی از x که نسبت به x_0 انحراف کمی داشته باشد، در واقع به سمت جواب دقیق $y(x)$ میل می‌کند. اگر محاسبه را در مرحلهٔ به اندازهٔ کافی دوری قطع کنیم، می‌توانیم جواب $y(x)$ را با هر دقتی که لازم داشته باشیم به دست آوریم.

درست به همین ترتیبی که منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۳۴) را به تقریب پیدا کردیم، می‌توانیم منحنی‌های انتگرالی دستگاه‌هایی را که از دو یا بیشتر معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ اول تشکیل شده‌اند، پیدا کنیم. تنها شرطی که برای انجام این کار لازم داریم، عبارت است از شرط امکان حل این معادله‌ها، نسبت به مشتق‌های همهٔ تابع‌های مجهول. فرض کنید این دستگاه داده شده باشد:

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x,y,z),\frac{dz}{dx}=f_2(x,y,z) \qquad (۳۷)$$

فرض براین است که سمت راست این معادله‌ها، پیوسته و دارای مشتق‌های محدودی نسبت به y و z در یک حوزه فضایی G باشند. با این شرط‌ها، می‌توان ثابت کرد که از هر نقطهٔ $(x_۰, y_۰, z_۰)$ حوزهٔ G، یک و تنها یک منحنی انتگرالی

$$y=\varphi(x)\,,\ z=\Psi(x)$$

از دستگاه (۳۷) می‌گذرد. تابع‌های $f_۱(x, y, z)$ و $f_۲(x, y, z)$ عبارت‌اند از ضریب زاویه‌های مماس در نقطهٔ (x, y, z) بر منحنی انتگرالی که از همین نقطه عبور می‌کند. برای پیدا کردن تقریبی تابع‌های $\varphi(x)$ و $\Psi(x)$، می‌توان از روش خط‌های **شکستهٔ *اولر*** و یا دیگر روش‌ها، شبیه آن‌چه دربارهٔ معادلهٔ (۳۴) انجام دادیم، استفاده کرد.

محاسبهٔ تقریبی جواب معادلهٔ دیفرانسیلی عادی را، با توجه به شرط اولیهٔ آن، می‌توان به کمک رایانه‌ها انجام داد. رایانه‌هایی با چنان سرعتی در کار، وجود دارد که در مثل، اگر برنامهٔ محاسبه تنظیم شده باشد و خود ماشین هم آمادهٔ محاسبه باشد، می‌تواند مسیر گلولهٔ توپ را، خیلی سریع‌تر از زمانی که گلوله برای رسیدن به هدف لازم دارد، انجام دهد (بخش چهاردهم را ببینید).

بستگی بین معادله‌های دیفرانسیلی از مرتبه‌های مختلف با دستگاه معادله‌های مرتبهٔ اول. دستگاه معادله‌های غیردیفرانسیلی عادی را، که نسبت به مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر همه تابع‌های مجهول حل شده است، در حالت کلی می‌توان، به یاری وارد کردن تابع‌های مجهول تازه‌ای، به دستگاه معادله‌های مرتبهٔ اول، که نسبت به مشتق‌های آن‌ها حل شده‌اند، تبدیل کرد. از جمله فرض کنید، معادلهٔ دیفرانسیلی

$$\frac{d^۲y}{dx^۲}=f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (۳۸)$$

داده شده باشد. فرض می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=z \qquad (۳۹)$$

در این‌صورت، معادلهٔ (۳۸) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\frac{dz}{dx}=f(x, y, z) \qquad (۴۰)$$

به این ترتیب، هر جواب معادلهٔ (۳۸)، متناظر است با جوابی از دستگاه معادله‌های (۳۹) و (۴۰). همچنین به سادگی معلوم می‌شود، هر جوابی از دستگاه معادله‌های (۳۹) و (۴۰)، متناظر با جوابی از معادلهٔ (۳۸) است.

معادله‌هایی که به طور صریح شامل متغیر مستقل نیستند. مسأله‌های مربوط به آونگ، یا تقویت‌کنندهٔ صوتی *هلمهولتز*، یا ساده‌ترین مدار الکتریکی و یا تقویت‌کنندهٔ لامپی، که در بند ۱ بررسی کردیم، به نوعی معادلهٔ دیفرانسیلی منجر می‌شود که در آن متغیر مستقل (زمان)، به‌طور صریح وجود ندارد. ما از این جهت دربارهٔ این نوع معادله‌ها گفت‌وگو می‌کنیم که بررسی معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم متناظر با آن‌ها را می‌توان به بررسی معادله‌های دیفرانسیلی مرتبه اول منجر کرد و آن‌طور که در بخش قبل گفتیم، لزومی ندارد آن‌ها را به دستگاه معادله‌ها تبدیل کنیم. واین مطلب، کار بررسی را خیلی ساده‌تر می‌کند.

فرض می‌کنیم، این معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم، که شامل آوند t به طور صریح نیست، داده شده باشد:

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^{۲}x}{dt^{۲}}\right) = \cdot \qquad (۴۱)$$

فرض می‌کنیم

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad (۴۲)$$

y را به عنوان تابعی از x در نظر می‌گیریم، در این‌صورت

$$\frac{d^{۲}x}{dt^{۲}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = y\frac{dy}{dx}$$

به این ترتیب، معادلهٔ (۴۱) به این صورت در می‌آید:

$$F\left(x, y, y\frac{dy}{dx}\right) = \cdot \qquad (۴۳)$$

بنابراین، هرجواب معادلهٔ (۴۱)، متناظر با تنها یک جواب از معادلهٔ (۴۳) می‌شود؛ ولی هر جواب $y = \varphi(x)$ از معادلهٔ (۴۳) با مجموعهٔ نامتناهی از جواب‌های معادلهٔ (۴۱) متناظر است. این جواب‌ها را با انتگرال‌گیری از معادلهٔ

$$\frac{dx}{dt}=\varphi(x) \qquad (۴۴)$$

می‌توان به دست آورد که در آن x به عنوان تابعی از t در نظرگرفته می‌شود.

روشن است، اگر تابعی مثل $x = x(t)$ در این معادله صدق کند، تابع $x(t+t_\circ)$ هم در همین معادله صدق خواهد کرد که در آن $t_\circ$ مقدار ثابت دل‌خواهی است.

ممکن است پیش آید که همهٔ منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۴۳)، نمایش تغییر تابعی از x نباشد. در مثل، اگر منحنی انتگرالی بسته باشد، چنین وضعی پیش می‌آید. در این‌صورت، باید این منحنی انتگرالی معادلهٔ (۴۳) را به چند قطعه تقسیم کرد که هر کدام از آن‌ها نمایش تغییر تابعی از x خواهد بود. برای هر کدام از این قطعه‌ها، باید معادلهٔ (۴۴) مربوط به خودش را انتگرال گرفت.

مقدارهای x و $\frac{dx}{dt}$، که در هر لحظه حالت دستگاه فیزیکی را مشخص می‌کنند، ***مرحله‌ها*** (یا فازهای) معادلهٔ (۴۱) نامیده می‌شوند. متناظر با آن، صفحهٔ (x,y) را ***صفحهٔ مرحله‌ای*** برای معادلهٔ (۴۱) می‌نامند. هر جواب $x = x(t)$ این معادله، با منحنی

$$x = x(t)\ ,\ y = x'(t)$$

در روی صفحه (x,y) متناظر است؛ در این‌جا، t به عنوان یک پارامتر در نظر گرفته می‌شود. برعکس: هر منحنی انتگرالی $y = \varphi(x)$ برای معادلهٔ (۴۳) در صفحهٔ (x,y) متناظر با بی‌نهایت جواب به صورت $x = x(t+t_\circ)$ برای معادلهٔ (۴۱) است؛ در این‌جا $t_\circ$ مقدار ثابت دل‌خواهی است. با در دست داشتن تمامی نقشهٔ رفتار منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۴۳) در صفحه، به سادگی می‌توان خصلت جواب‌های ممکن معادلهٔ (۴۱) را، پیش خود مجسم کرد. از جمله، هر منحنی انتگرالی بسته‌ای از معادلهٔ (۴۳)، پاسخ‌گوی جواب متناوبی از معادلهٔ (۴۱) است.

اگر معادلهٔ (۶) را با توجه به معادلهٔ (۴۲) بنویسیم، به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-ay-bx}{my} \qquad (۴۵)$$

اگر در معادلهٔ (۱۶)، $v = x$ و $\frac{dv}{dt}=y$ قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$L\,\frac{dy}{dx}=\frac{-[R-M(a_1+2a_2x+3a_3x^2)]\,y-x}{y} \qquad (۴۶)$$

همان‌طور که در هر لحظهٔ زمانی، حالتی از دستگاه فیزیکی که متناظر با معادلهٔ مرتبهٔ دوم (۴۱) است، با دو مقدار[1] (مرحلهٔ) x و $y=\frac{dx}{dt}$ مشخص می‌شود، حالت‌هایی از دستگاه‌های فیزیکی که به وسیلهٔ معادله‌های از مرتبهٔ بالاتر و یا دستگاه‌های معادله‌های دیفرانسیلی شرح داده می‌شود، با تعداد بیشتر از مقدارها (مرحله‌ها) مشخص می‌شوند. در این‌صورت، به جای صفحهٔ مرحله‌ای، باید از ***فضای مرحله‌ای*** گفت‌وگو کرد.

۶. نقطه‌های خاص

فرض کنیم، نقطهٔ $P(x\ ,\ y)$ در داخل حوزهٔ G، حوزهٔ تعریف این معادلهٔ دیفرانسیلی، واقع باشد:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \qquad (۴۷)$$

اگر بتوان حومهٔ R از نقطهٔ P را چنان مشخص کرد که از هر نقطهٔ آن، یک و تنها یک منحنی انتگرالی معادلهٔ (۴۷) عبور کند، در این‌صورت، نقطهٔ P را نقطهٔ عادی معادلهٔ (۴۷) نامند. ولی، اگر چنین حومه‌ای را نتوان مشخص کرد، در آن صورت نقطهٔ P را ***نقطهٔ خاص*** (یا نقطهٔ تکین) این معادله گویند. بررسی نقطه‌های خاص، برای نظریهٔ کیفی معادله‌های دیفرانسیلی اهمیت زیادی دارد و ما هم در این بند به آن می‌پردازیم.

به‌ویژه، اصطلاح ***نقطه‌های خاص منفرد***، یعنی نقطه‌هایی که در حومه‌ای از آن‌ها هیچ نقطهٔ خاص دیگری پیدا نمی‌شود، اهمیت زیادی دارند. ضمن بررسی معادله‌های به صورت (۴۷)، اغلب به چنین نقطه‌هایی برخورد می‌کنیم: در معادلهٔ (۴۷)، $M(x,y)$ و $N(x,y)$ تابع‌هایی‌اند که نسبت به x و y، مشتق‌های پیوسته‌ای از مرتبه‌های بالا دارند. برای این گونه معادله‌ها، همهٔ نقطه‌های داخلی حوزهٔ تعریف، به شرطی که $M(x,y)\neq ۰$ یا $N(x,y)\neq ۰$ باشد، نقطه‌های عادی هستند. حالا، نقطه‌ای مانند $(x_۰, y_۰)$ از داخل حوزهٔ تعریف را در نظر می‌گیریم که برای آن داشته باشیم: $M(x\ ,\ y)\ =\ N(x\ ,\ y) = ۰$. برای سادگی کار $x_۰ = ۰$ و

---

۱. مقدارهای $\frac{dx}{dt}$، $\frac{d^۲x}{dt^۲}$، $\frac{d^۳x}{dt^۳}$، ... در همان لحظه، از روی مقدارهای x و $\frac{dx}{dt}$ در معادلهٔ (۴۱) و معادله‌هایی که با دیفرانسیل‌گیری از آن به دست می‌آید، معین می‌شوند [با دستور (۳۶) مقایسه کنید].

$y_0 = 0$ می‌گیریم. و این فرض همیشه ممکن است، زیرا می‌توان در هر حال، مبداء مختصات را به نقطهٔ (x_0, y_0) منتقل کرد. $M(x,y)$ و $N(x,y)$ را بنابر دستور **تیلور**، برحسب توان‌های x و y بسط می‌دهیم؛ در ضمن آن را به جمله‌های درجهٔ اول محدود می‌کنیم. در حومهٔ نقطهٔ $(0, 0)$ به دست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M'_x(0, 0)\,x + M'_y(0, 0)\,y + \varphi_1(x, y)}{N'_x(0, 0)\,x + N'_y(0, 0)\,y + \varphi_2(x, y)} \tag{۴۸}$$

که در آن $\varphi_1(x, y)$ و $\varphi_2(x, y)$ تابع‌هایی از x و y هستند، به‌نحوی که

$$\underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\text{حد}} \frac{\varphi_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

و

$$\underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\text{حد}} \frac{\varphi_2(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

معادله‌های (۴۵) و (۴۶) از همین نوع‌اند. در معادلهٔ (۴۵)، به ازای $x = 0$ و $y = 0$، نه $\frac{dy}{dx}$ و نه $\frac{dx}{dy}$ معین نیست. اگر دترمینان

$$\begin{vmatrix} M'_x(0, 0) & M'_y(0, 0) \\ N'_x(0, 0) & N'_y(0, 0) \end{vmatrix} \neq 0$$

در این‌صورت، ولو این‌که هر مقداری را برای $\frac{dy}{dx}$ در مبداء مختصات انتخاب کنیم، مبداء مختصات برای مقدارهای $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{dx}{dy}$، نقطهٔ ناپیوستگی است. زیرا، بسته به این‌که از چه مسیری به مبداء نزدیک شویم آن‌ها به سمت حدهای متفاوتی میل می‌کنند. مبداء مختصات برای معادلهٔ دیفرانسیلی ما، نقطه خاص است.

ثابت می‌شود تابع‌های $\varphi_1(x, y)$ و $\varphi_2(x, y)$ که در صورت و مخرج قرار گرفته‌اند، تنها به شرطی در خصلت رفتار منحنی‌های انتگرالی در کنار نقطهٔ خاص منفرد (دراین‌جا مبداء مختصات)، هیچ‌گونه تأثیری ندارند که بخش‌های حقیقی هر دو ریشهٔ معادلهٔ

$$\begin{vmatrix} \lambda - M'_y(0, 0) & -M'_x(0, 0) \\ -N'_y(0, 0) & \lambda - N'_x(0, 0) \end{vmatrix} = 0 \tag{۴۹}$$

مخالف صفر باشند. بنابراین، برای این‌که تصوری دربارهٔ این رفتار پیدا کنیم، منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy} \tag{۵۰}$$

را در کنار مبداء مختصات، بررسی می‌کنیم به شرطی که داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$$

یادآوری می‌کنیم، خصلت قرار گرفتن منحنی‌های انتگرالی در حوالی نقطهٔ خاص معادلهٔ دیفرانسیلی، برای بسیاری از مسأله‌های مکانیک، و از جمله برای مسیر حرکت در نزدیکهای وضع تعادل، اهمیت زیادی دارد.

ثابت می‌شود، همیشه می‌توان مختصات ξ و η را که با معادله‌های

$$\begin{aligned} x&=k_{11}\xi+k_{12}\eta \\ y&=k_{21}\xi+k_{22}\eta \end{aligned} \tag{۵۱}$$

به x و y مربوط‌اند (k_{ij}، عددی حقیقی است)، طوری انتخاب کرد که معادلهٔ (۵۰) به یکی از سه نوع معادلهٔ زیر تبدیل شود:

۱)
$$\frac{d\eta}{d\xi}=k\frac{\eta}{\xi} \quad \left(k=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \tag{۵۲}$$

۲)
$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta}{\xi} \tag{۵۳}$$

۳)
$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\beta\xi+\alpha\eta}{\alpha\xi-\beta\eta} \tag{۵۴}$$

در این‌جا λ_1 و λ_2 ریشه‌های این معادله‌اند:

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{۵۵}$$

اگر این ریشه‌ها، حقیقی و متمایز باشند، معادلهٔ (۵۰) به صورت (۵۲) در می‌آید. اگر این ریشه‌ها برابر باشند، معادلهٔ (۵۰) بسته به این‌که $a^2+d^2=0$ یا $a^2+d^2\neq 0$ باشد، به

معادلهٔ (۵۲) و یا معادلهٔ (۵۳) تبدیل می‌شود. و اگر ریشه‌های معادلهٔ (۵۵)، مختلط، و به صورت $\lambda = \alpha \pm \beta i$ باشند، معادلهٔ (۵۱) به معادله به صورت (۵۴) تبدیل می‌شود.

اکنون به بررسی معادله‌های (۵۲)، (۵۳) و (۵۴) می‌پردازیم.

اگر محورهای Ox و Oy عمود بر هم باشند، دیگر محورهای $O\xi$ و $O\eta$، در حالت کلی بر هم عمود نخواهند بود؛ ولی ما برای این‌که با شکل ساده‌تری سروکار داشته باشیم، آن‌ها را عمود بر هم به حساب می‌آوریم. به‌جز آن، ضمن تشکیل (۵۱)، ممکن است واحد روی محورهای $O\xi$ و $O\eta$ هم تغییر کند: این واحدها، ممکن است همان‌هایی نباشند که در ابتدا برای محورهای Ox و Oy انتخاب کرده‌ایم. ولی، ما باز هم برای ساده‌تر بودن شکل، فرض را بر این می‌گذاریم که واحدها تغییر نکرده‌اند. به همین مناسبت، در مثل، به جای دایره‌های هم‌مرکزی که در شکل ۸ داشتیم، ممکن است خانوادهٔ بیضی‌های متشابهی، که مرکز همهٔ آن‌ها در مبداء مختصات است، به دست آوریم.

همه منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۵۲)، با رابطه‌ای به صورت

$$a\eta + b|\xi|^k = ۰$$

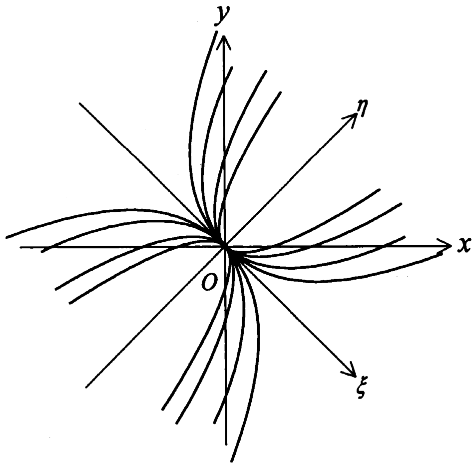
داده می‌شود که در آن a و b مقدارهای ثابت دل‌خواهی هستند.

شمای منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۵۲) در شکل ۱۰ داده شده است؛ در ضمن $k>۱$ فرض کرده‌ایم. در این حالت، همه منحنی‌های انتگرالی، به‌جز یکی ــ محور $O\eta$ ــ در مبداء مختصات بر محور $O\xi$ مماس می‌شوند. حالت $۰<k<۱$، به همان حالت $k>۱$ منجر می‌شود با این شرط که ξ را به η و η را به ξ تبدیل کنیم، یعنی باید نقش محورهای ξ و η را باهم عوض کنیم. به ازای $k=۱$، معادلهٔ (۵۲) به معادلهٔ (۳۰) تبدیل می‌شود که شمای رفتار منحنی‌های انتگرالی آن را در شکل ۷ نشان داده‌ایم.

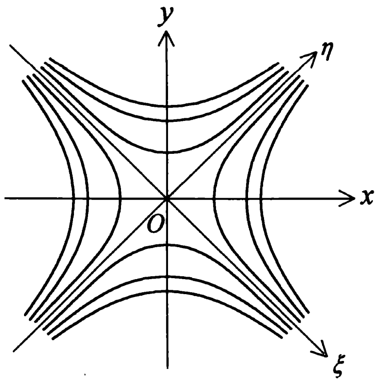
شمای رفتار منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۵۲)، به ازای $k<۰$، در شکل ۱۱ داده شده است. در این حالت، تنها دو منحنی انتگرالی وجود دارد که از نقطهٔ O می‌گذرند: این دو منحنی، همان محورهای $O\xi$ و $O\eta$ هستند. همهٔ دیگر منحنی‌های انتگرالی، ضمن این‌که تا حداقلی از فاصله به O نزدیک می‌شوند. از این نقطه فاصله می‌گیرند. در این حالت، می‌گویند در نقطهٔ O، زین وجود دارد، زیرا منحنی‌های انتگرالی، شبیه وضعی است که منحنی مقطع قلهٔ کوه در نقشه دارد (شبیه زین اسب).

همهٔ منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۵۳)، به وسیلهٔ معادلهٔ

$$b\eta = \xi\,(a + b\ln|\xi|)$$



شکل ۱۰



شکل ۱۱

داده می‌شود که در آن a و b مقدارهای ثابت دل‌خواهی هستند. شمای این منحنی‌ها در شکل ۱۲ داده شده است و همهٔ آن‌ها در مبداء مختصات بر محور $O\eta$ مماس‌اند.

اگر هر منحنی انتگرالی، که در حومه‌ای از نقطهٔ خاص O افتاده است، از این نقطه بگذرد و در ضمن جهت معینی داشته باشد، یعنی در نقطهٔ صفر مماس معینی داشته باشد، آن‌طور که در شکل‌های ۱۰ و ۱۲ نشان داده شده است، گویند در نقطهٔ O، گره وجود دارد.

معادلهٔ (۵۴) را به شرطی که به مختصات قطبی ρ و φ ببریم با سادگی بیشتری می‌توان انتگره کرد. فرض می‌کنیم.

$$\xi = \rho \cos \varphi, \qquad \eta = \rho \sin \varphi$$

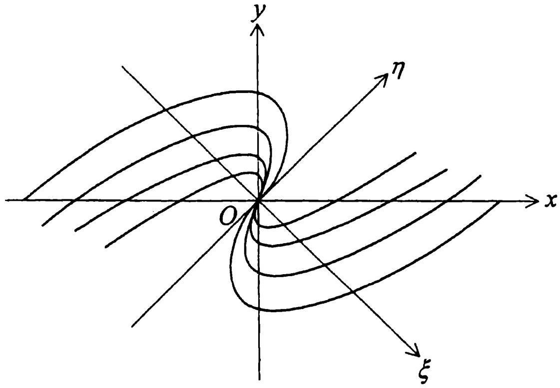
در این‌صورت، معادلهٔ (۵۴) به معادلهٔ

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = k\rho \qquad \left(k = \frac{\alpha}{\beta}\right)$$

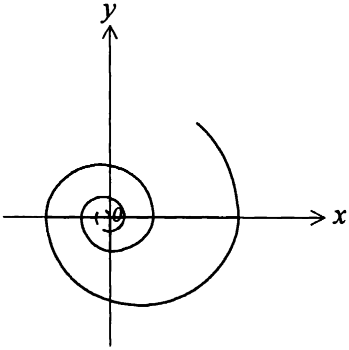
تبدیل می‌شود، که از آنجا

$$\rho = Ce^{k\varphi} \tag{۵۶}$$

اگر $k > 0$ باشد، آن وقت به شرط $\varphi \to -\infty$، همهٔ منحنی‌های انتگرالی به نقطهٔ O میل می‌کنند (شکل ۱۳). اگر $k < 0$ باشد، آن وقت همین وضع با شرط $\varphi \to +\infty$ به دست می‌آید.



شکل ۱۲



شکل ۱۳

در چنین حالت‌هایی نقطهٔ O راکانون نامیم. اگر $k = 0$، خانوادهٔ منحنی‌های انتگرالی (۵۶) از دایره‌هایی به مرکز O تشکیل می‌شود. به طور کلی، اگر حومه‌ای از نقطهٔ O به وسیلهٔ منحنی‌های انتگرالی بسته‌ای پر شود، به نحوی که شامل خود نقطهٔ O هم بشود، چنین نقطه‌ای را مرکز گویند.

مرکز می‌تواند به سادگی به کانون تبدیل شود، به شرطی که در صورت و مخرج سمت راست معادلهٔ (۵۴)، جمله‌های از درجهٔ بالاتر را هم اضافه کنیم: بنابراین، در این حالت، رفتار منحنی‌های انتگرالی در نزدیکی نقطهٔ خاص، به وسیلهٔ جمله‌های درجهٔ اول، معین نمی‌شوند.

معادلهٔ (۵۵)، متناظر معادلهٔ (۴۵)، بر معادلهٔ مفسر (۱۹) منطبق می‌شود. به این ترتیب، شکلهای ۱۰ و ۱۲ شمای رفتار منحنی

$$x = x(t) \quad , \quad y = x'(t)$$

را در صفحهٔ مرحله‌ای، متناظر با جواب معادلهٔ (۶) به ازای مقدارهای حقیقی و هم علامت λ_1 و λ_2 می‌دهد؛ شکل ۱۱، متناظر با مقدارهای حقیقی و با علامت‌های مختلف λ_1 و λ_2 است و شکل‌های ۱۳ و ۸ (حالت مرکز)، متناظر با مقدارهای مختلط λ_1 و λ_2 است. اگر بخش‌های حقیقی λ_1 و λ_2 منفی باشند، نقطهٔ $x(t)$ و $y(t)$ به ازای $t \to \infty$، به O نزدیک می‌شود؛ در این حالت، نقطهٔ $x = 0$ و $y = 0$، متناظر با پایداری تعادل است. و اگر یکی از بخش‌های حقیقی عددهای λ_1 و λ_2 مثبت باشد، در نقطهٔ $x = 0$ و $y = 0$، تعادل پایدار وجود ندارد.

۷. نظریهٔ کیفی معادله‌های دیفرانسیلی عادی

در نظریهٔ عمومی معادله‌های دیفرانسیلی عادی، نظریهٔ کیفی معادله‌های دیفرانسیلی، جای مهمی دارد. این نظریه در پایان سدهٔ گذشته و به خاطر نیازهای مکانیک و اخترشناسی به‌وجود آمد.

بسیار پیش می‌آید که لازم می‌شود خصلت جواب معادلهٔ دیفرانسیلی را که روند فیزیکی مشخصی را شرح می‌دهد، معین کنیم؛ لازم می‌شود ویژگیهای این جواب را در حالتی که متغیر مستقل در فاصلهٔ محدود یا نامحدودی تغییر می‌کند، مشخص کنیم. از جمله، در مکانیک آسمانی که حرکت جسم‌های آسمانی را مطالعه می‌کند آگاهی دربارهٔ رفتار جواب‌های معادله‌های دیفرانسیلی (که حرکت سیاره‌ها یا دیگر جسم‌های آسمانی را شرح می‌دهد)، وقتی که زمان به‌طور نامحدود جلو برود، اهمیت زیادی دارد.

همان‌طور که پیش از این هم گفته‌ایم، تعداد معادله‌هایی که بتوان جواب کلی آن‌ها را به کمک انتگرال‌های تابع‌های معلومی بیان کرد، خیلی زیاد نیستند. به این مناسبت این مسأله مطرح می‌شود که ویژگی‌های جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیلی را از روی خود معادله مطالعه کنیم. از آنجا که جواب معادلهٔ دیفرانسیلی به صورت منحنی در روی صفحه و یا در فضاست، مسألهٔ مربوط به بررسی ویژگی‌های منحنی‌های انتگرالی، وضع قرارگرفتن آن‌ها، و رفتار آن‌ها در دور و بر نقطه‌های خاص، در برابر ما قرار می‌گیرد. در مثل، آیا این منحنی‌ها، در بخش محدودی از صفحه قرار دارند، یا دارای شاخه‌هایی هستند که به بی‌نهایت می‌رود؛ آیا در میان آن‌ها، منحنی‌های بسته پیدا می‌شود و غیره؟ و نظریهٔ کیفی معادله‌های دیفرانسیلی هم، یعنی بررسی همین پرسش‌ها.

پایه‌های اصلی نظریهٔ کیفی معادله‌های دیفرانسیلی را *آ.م. لیاپونوف* ریاضی‌دان روسی و *آ. پوانکاره*، ریاضی‌دان فرانسوی، بنیان گذاشته‌اند.

نقش دانش شوروی در نظریهٔ کیفی معادله‌های دیفرانسیلی، نه تنها مربوط به این است که دانشمندان شوروی مسأله‌های نظری مهمی را حل کرده‌اند، بلکه در این هم هست که در شوروی، برای نخستین بار، از نتیجه‌گیری‌های عمیق نظریهٔ کیفی برای حل مسأله‌های فیزیک و مکانیک استفاده کرده‌اند.

در بند قبل، یکی از مسأله‌های مهم نظریهٔ کیفی را به تفصیل بررسی کردیم: مسألهٔ مربوط به ویژگی‌های استقرار منحنی‌های انتگرالی در حوالی نقطهٔ خاص. حالا، بعضی دیگر از

مسأله‌های اساسی نظریهٔ کیفی را بررسی می‌کنیم.

پایداری. در مثال‌هایی که در ابتدای بخش بررسی کردیم، مسألهٔ مربوط به پایداری یا ناپایداری تعادل دستگاه را خیلی ساده، براساس ملاحظه‌های فیزیکی و بدون بررسی خود معادلهٔ دیفرانسیلی، حل کردیم. از جمله در مثال ۳ روشن است اگر آونگی را، که در حالت تعادل OA قرار دارد، به یاری یک نیروی خارجی به وضع OA'، که به وضع تعادل نزدیک است، منتقل کنیم، یعنی شرط‌های اولیه را کمی تغییر دهیم، حرکت بعدی آونگ نمی‌تواند آن را از حالت تعادل خیلی دور کند؛ هر چه انحراف اولیهٔ OA' کوچکتر باشد، انحراف بعدی نسبت به وضع تعادل هم کوچکتر می‌شود، یعنی در این حالت، تعادل موقعیتی پایدار دارد.

در حالت‌های پیچیده‌تر، مسألهٔ مربوط به پایداری حالت تعادل، خیلی بغرنج‌تر می‌شود، در ضمن تنها به یاری بررسی معادله‌های دیفرانسیلی مربوطه، قابل حل است مسألهٔ مربوط به پایداری تعادل، بستگی جدی با مسألهٔ مربوط به پایداری حرکت دارد و *آ.م. لیاپونوف*، توانسته است در این زمینه به نتیجه‌های اساسی برسد.

فرض کنید، یک روند فیزیکی، با دستگاه معادله‌های

$$\frac{dx}{dt}=f_1(x,y,t),\quad \frac{dy}{dt}=f_2(x,y,t) \tag{۵۷}$$

بیان شده باشد. برای سادگی کار، ما تنها دستگاه دو معادلهٔ دیفرانسیلی را بررسی می‌کنیم، گرچه نتیجه‌هایی را که به دست خواهیم آورد، برای دستگاه‌هایی که شامل تعداد بیشتری معادله هم باشند، درست است. هر جواب خاصی از دستگاه (۵۷) را که از دو تابع $x(t)$ و $y(t)$ تشکیل شده باشد، در این بند، گاهی با دنباله روی از *لیاپونوف*، **حرکت** می‌نامیم. فرض می‌کنیم $f_1(x,\ y,\ t)$ و $f_2(x,\ y,\ t)$، دارای مشتق‌های جزئی پیوسته‌ای باشند. ثابت می‌کنیم که در این‌صورت، و به شرطی که در یک لحظهٔ زمانی مثل $t=t_0$ مقدار تابع‌های $x(t_0)=x_0$ و $y(t_0)=y_0$ داده شده باشد، جواب دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی (۵۷) به طور یک ارزشی معین می‌شود.

$x(t\ ,\ x_0\ ,\ y_0)$، $y(t\ ,\ x_0\ ,\ y_0)$ را جوابی از دستگاه معادله‌های (۵۷) می‌گیریم که در شرط اولیهٔ $x=x_0$ و $y=y_0$ به ازای $t=t_0$، صدق کند.

جواب $x(t\ ,\ x_0\ ,\ y_0)$، $y(t\ ,\ x_0\ ,\ y_0)$ را از نظر *لیاپونوف* ***پایدار*** گوییم، وقتی که برای هر

$t>t_0$، اگر مقدارهای اولیهٔ x_0 و y_0، تغییری به اندازهٔ کافی کوچک داشته باشند، تابع‌های $x(t, x_0, y_0)$، $y(t, x_0, y_0)$هم تغییری به دل‌خواه کوچک داشته باشند.

دقیق‌تر بگوییم: برای جوابی که از نظر **لیاپونوف** پایدار است، باید تفاضل‌های

$$\left| x(t, x_0 + \delta_1 , y_0 + \delta_2) - x(t, x_0 , y_0) \right| \qquad (58)$$
$$\left| y(t, x_0 + \delta_1 , y_0 + \delta_2) - y(t, x_0 , y_0) \right|$$

را بتوان از هر عدد دل‌خواه ε، که از قبل داده شده است، برای هر لحظهٔ $t>t_0$، کوچکتر گرفت، به شرطی که عددهای دل‌خواه δ_1 و δ_2 از لحاظ قدر مطلق، به اندازهٔ کافی کوچک باشند.

هر جوابی که از نظر **لیاپونوف** پایدار نباشد، **ناپایدار** نامیده می‌شود.

لیاپونوف، حرکت مورد بررسی $x(t, x_0, y_0)$ و $y(t, x_0, y_0)$ را حرکت بی‌تزلزل و حرکت $x(t, x_0+\delta_1, y_0+\delta_2)$ ، $y(t, x_0+\delta_1, y_0+\delta_2)$ با شرط‌های اولیهٔ نزدیک را، حرکت متزلزل می‌نامد. به این ترتیب از نظر **لیاپونوف**، حرکت پایدار بی‌تزلزل به این معناست که برای هر $t>t_0$، باید حرکت متزلزل، خیلی کم با حرکت بی‌تزلزل اختلاف داشته باشد.

پایداری تعادل، حالت خاصی از پایداری حرکت و متناظر با حالتی است که برای حرکت بی‌تزلزل داشته باشیم:

$$x(t, x_0, y_0) \equiv 0 \qquad , \qquad y(t, x_0, y_0) \equiv 0$$

برعکس: مسألهٔ مربوط به پایداری حرکتی مثل $x=\varphi_1(t)$ و $y=\varphi_2(t)$ از دستگاه (۵۷) را می‌توان به مسألهٔ مربوط به پایداری تعادل در یک دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی، منجر کرد. برای این منظور، به جای تابع‌های مجهول قبلی $x(t)$ و $y(t)$ در دستگاه (۵۷)، تابع‌های مجهول تازهٔ

$$\xi = x - \varphi_1(t) \qquad , \qquad \eta = y - \varphi_2(t) \qquad (59)$$

را قرار می‌دهیم. وقتی دستگاه (۵۷) به این ترتیب در آید، حرکت $x=\varphi_1(t)$ و $y=\varphi_2(t)$ متناظر با حرکت $\xi = 0$ و $\eta = 0$، یعنی حالت تعادل، می‌شود. از این به بعد، همیشه فرض را براین می‌گیریم که تبدیل (۵۹) انجام گرفته است و برای پایداری از نظر **لیاپونوف**، تنها جواب‌های $x=0$ و $y=0$ را در نظر می‌گیریم.

اکنون دیگر، شرط پایداری از نظر ***لیاپونوف***، به این معناست که مسیر حرکت متزلزل در صفحهٔ $(x\ ,\ y)$ ، برای هر $t>t_0$، از مربع به ضلع ۲ε، که مرکزش در مبداء مختصات و ضلع‌هایش موازی محورهای مختصات است، خارج نمی‌شود، به شرطی که δ_1 و δ_2 به اندازهٔ کافی کوچک باشند.

حالت‌هایی برای ما جالب است که نمی‌توانیم دستگاه (۵۷) را انتگره کنیم؛ آن وقت، دست کم می‌توانیم پایداری یا ناپایداری حرکت بی‌تزلزل را نتیجه بگیریم. مسأله مربوط به پایداری حرکتها، در عمل ارزش زیادی دارد: برای بررسی پایداری حرکت گلولهٔ توپ، پرواز هواپیما و هم در مکانیک آسمانی برای بررسی پایداری مدارهایی که سیاره‌ها و دیگر جسم‌های آسمانی روی آن‌ها حرکت می‌کنند، و بسیاری جاهای دیگر، به چنین بحثی نیاز پیدا می‌کنیم.

فرض می‌کنیم تابع‌های $f_1(x\ ,\ y\ ,\ t)$ و $f_2(x\ ,\ y\ ,\ t)$ را بتوان به صورت

$$f_1(x,y,t)=a_{11}x+a_{12}y+R_1(x,y,t) \tag{۶۰}$$
$$f_2(x,y,t)=a_{21}x+a_{22}y+R_2(x,y,t)$$

نشان داد، که در آن a_{ij} مقداری ثابت و $R_1(x\ ,\ y\ ,\ t)$ و $R_2(x\ ,\ y\ ,\ t)$ چنان تابع‌هایی از x، y و t باشند که داشته باشیم:

$$\left|R_1(x,y,t)\right|\le M(x^2+y^2) \quad \text{و} \quad \left|R_2(x,y,t)\right|\le M(x^2+y^2) \tag{۶۱}$$

که در آن M، مقداری ثابت و مثبت است.

اگر در دستگاه (۵۷) با استفاده از تبدیل (۶۰)، $R_1(x\ ,\ y\ ,\ t)$ و $R_2(x\ ,\ y\ ,\ t)$ را کنار بگذاریم، به دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی با ضریب‌های ثابت می‌رسیم:

$$\frac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y$$
$$\frac{dy}{dt}=a_{21}x+a_{22}y \tag{۶۲}$$

که دستگاه با ***تقریب اول برای دستگاه غیرخطی*** (۵۷) نامیده می‌شود.

تا قبل از ***لیاپونوف***، برای بررسی مسألهٔ پایداری به همین تقریب اول اکتفا می‌کردند، یعنی همان نتیجه‌ای را که دربارهٔ پایداری دستگاه (۶۲) به دست می‌آوردند، برای دستگاه اصلی

غیرخطی (۵۷) هم به حساب می‌آوردند. *آ.م. لیاپونوف* ثابت کرد که در حالت کلی، این نتیجه‌گیری درست نیست. از طرف دیگر، ردیف گسترده‌ای شرط پیدا کرد که با توجه به آن‌ها، مسألهٔ مربوط به پایداری در دستگاه‌های غیرخطی، به وسیلهٔ تقریب اول، تا آخرحل می‌شود. یکی از این شرط‌ها را شرح می‌دهیم. اگر بخش‌های حقیقی همهٔ ریشه‌های λ از معادلهٔ

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

منفی باشند و تابع‌های $R_1(x, y, t)$ و $R_2(x, y, t)$ با شرط‌های (۶۱) بسازد، در این صورت جواب $x(t) \equiv 0$ ، $y(t) \equiv 0$ از نظر *لیاپونوف* پایدار است. ولی اگر بخش حقیقی دست کم یکی از ریشه‌های λ مثبت باشد، با صادق بودن شرط‌های (۶۱)، جواب $x(t) \equiv 0$، $y(t) \equiv 0$ ناپایدار خواهد بود. *لیاپونوف*، یک رشته شرط‌های کافی دیگری هم، برای پایداری یا ناپایداری حرکت‌ها، داده است. ریاضی‌دانان شوروی توانسته‌اند با موفقیت،کارهای *لیاپونوف* را ادامه دهند.

اگر سمت راست معادله‌های (۵۷) به t بستگی نداشته باشد، معادلهٔ اول دستگاه (۵۷) را به معادلهٔ دوم تقسیم می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)} \qquad (۶۳)$$

برای این معادله،مبداء مختصات، نقطهٔ خاص است. در حالت پایداری تعادل، این نقطه می‌تواند کانون، گره یا مرکز باشد، ولی نمی‌تواند زین باشد.

به این ترتیب، از روی خصلت ویژگی نقطهٔ خاص، می‌توان دربارهٔ پایداری یا ناپایداری حالت تعادل داوری کرد.

رفتار منحنی‌های انتگرالی در مجموع خود. گاهی، بررسی رفتار منحنی‌های انتگرالی در تمامی حوزهٔ دستگاه مفروض معادله‌های دیفرانسیلی «در مجموع خود»، اهمیت پیدا می‌کند، بدون این‌که حفظ مقیاس لزومی داشته باشد. فضایی را در نظر می‌گیریم که این دستگاه، میدان جهت‌ها را، به عنوان فضای مرحله‌ای برای یک روند فیزیکی، در آن معین می‌کند. در این‌صورت، طرح منحنی‌های انتگرالی متناظر با دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی، تصوری

دربارهٔ خصلت همهٔ روندهایی (حرکت‌هایی) که ممکن است در این دستگاه به وجود آید، به‌ما می‌دهد. در شکل‌های ۱۰ تا ۱۳، چنین طرح‌هایی را برای رفتار منحنی‌های انتگرالی در حوالی نقطهٔ خاص منفرد، ساخته بودیم.

یکی از مسأله‌های اساسی نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی، عبارت است از مسألهٔ پیدا کردن روش ساختن تا حد امکان ساده‌تر شمای رفتار خانوادهٔ منحنی‌های انتگرالی دستگاه مفروض معادله‌های دیفرانسیلی در تمامی حوزهٔ تعریف آن؛ مطالعهٔ رفتار منحنی‌های انتگرالی این دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی «در مجموع خود». این مسأله، برای فضاهایی که تعداد بعدهای آن‌ها از دو تجاوز کند، کمتر بررسی شده است. ما هنوز، حتی از حل این مسأله دربارهٔ معادله‌ای به صورت

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \qquad (۶۴)$$

حتی در حالتی که $M(x, y)$ و $N(x, y)$ چند جمله‌ای باشند، خیلی فاصله داریم.

از این به بعد، فرض کرده‌ایم تابع‌های $M(x, y)$ و $N(x, y)$ دارای مشتق‌های جزیی مرتبهٔ اول پیوسته‌ای باشند.

اگر همهٔ نقطه‌های حوزهٔ G، که سمت راست معادلهٔ دیفرانسیلی (۶۴) در آن داده شده‌است، عادی باشند، درآن صورت می‌توان شمای خانوادهٔ منحنی‌های انتگرالی را به‌صورت خانوادهٔ پاره‌خط‌های راست متوازی نشان داد. زیرا در این حالت، از هر نقطهٔ حوزهٔ G، یک منحنی انتگرالی می‌گذرد و هیچ دو منحنی انتگرالی یکدیگر را قطع نمی‌کنند. ولی، در معادلهٔ (۶۴)، که ممکن‌است دارای نقطه‌های خاص باشد، ساختمان منحنی‌های انتگرالی می‌تواند بسیار پیچیده‌تر بشود. می‌توان از حالتی که معادلهٔ (۶۴) دارای بی‌نهایت نقطهٔ خاص است (یعنی چنان نقطه‌هایی که دربارهٔ آن‌ها، صورت و مخرج با هم به سمت صفر میل می‌کنند)، دست‌کم، موقعی که $M(x, y)$ و $N(x, y)$ چند جمله‌ای باشند، صرف‌نظر کرد. به این ترتیب، ما تنها به حالتی می‌پردازیم که معادلهٔ (۶۴) دارای تعداد محدودی نقطه‌های خاص منفرد است. رفتار منحنی‌های انتگرالی، در نزدیکی هر کدام از این نقطه‌های خاص، برای ساختن طرح رفتار همهٔ منحنی‌های انتگرالی این معادله، اهمیت بسیار دارد.

به اصطلاح ***دورهای حدی*** هم برای طرح رفتار همهٔ منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۶۴)

خیلی مهم و اساسی است. معادلهٔ

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho - ۱ \qquad (۶۵)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن ρ و φ عبارت‌اند از مختصات قطبی در صفحهٔ (x, y).

مجموعهٔ همهٔ منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۶۵) با دستور

$$\rho = ۱ + Ce^{\varphi} \qquad (۶۶)$$

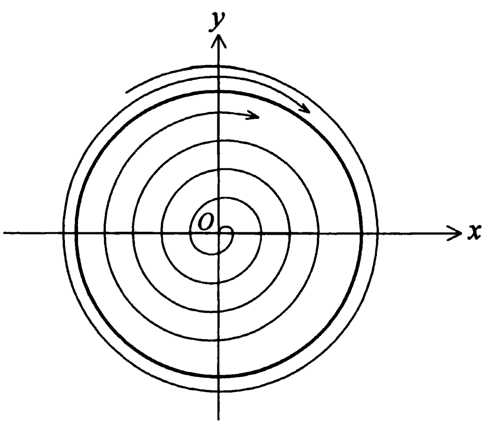
داده می‌شود؛ که در آن، C عبارت است از مقداری ثابت که برای منحنی‌های انتگرالی مختلف، متفاوت است. برای این‌که ρ غیرمنفی باشد، باید در حالت $C > ۰$، φ مقداری که از $-\ln|C|$ بزرگتر نیست، قبول کند. خانوادهٔ منحنی‌های انتگرالی تشکیل می‌شود از:

۱) دایرهٔ $\rho = ۱$ $(C = ۰)$؛

۲) مارپیچی که از مبداء مختصات خارج می‌شود و به ازای $\varphi \to -\infty$ $(C < ۰)$، از داخل به این دایره نزدیک می‌شود؛

۳) مارپیچی که به ازای $\varphi \to -\infty$ $(C > ۰)$، به دایرهٔ $\rho = ۱$ از بیرون نزدیک می‌شود (شکل ۱۴).

دایرهٔ $\rho = ۱$ را، **دور حدی** برای معادلهٔ (۶۵) گویند. به طور کلی، منحنی انتگرالی بستهٔ l را **دور حدی** گویند، به شرطی که بتوان آن را در چنان قرصی قرار داد که همهٔ نقطه‌های آن، برای معادلهٔ (۶۴) عادی باشند و به طور کامل به وسیلهٔ منحنی‌های بستهٔ انتگرالی پر شده باشند.



شکل ۱۴

از معادلهٔ (۶۵) دیده می‌شود که همهٔ نقطه‌های محیط دایره، نقطه‌های عادی آن هستند؛ یعنی قطعهٔ کوچکی از حلقهٔ حدی به هیچ‌وجه با قطعه‌ای از هر منحنی انتگرالی دیگر، اختلاف ندارد.

هر منحنی انتگرالی بسته‌ای، در صفحهٔ مرحله‌ای (x, y)، جواب متناوبی $[x(t), y(t)]$ از دستگاه

$$\frac{dx}{dt}=N(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=M(x, y) \tag{۶۷}$$

است که قانون تغییر یک دستگاه فیزیکی را شرح می‌دهد. آن منحنی‌های انتگرالی در صفحهٔ مرحله‌ای، که به ازای $t \to +\infty$ به سمت دور حدی میل می‌کنند، جواب حرکت را که به ازای $t \to +\infty$ به سمت تناوبی نزدیک می‌شود به ما می‌دهد.

فرض کنید برای هر نقطهٔ (x_0, y_0)، که به اندازهٔ کافی به دور حدی l نزدیک و به عنوان نقطهٔ اولیه به ازای $t=t_0$ برای جواب دستگاه (۶۷) انتخاب شده است، منحنی انتگرالی متناظری که نقطهٔ $(x(t), y(t))$ را به ازای $t \to +\infty$ شرح می‌دهد به دور حدی l در صفحهٔ (x, y) نزدیک شود (و این به معنای آن است که حرکت مورد بررسی به حالت تناوبی نزدیک می‌شود). دراین حالت، دور حدی مربوط را ***پایدار*** گویند. نوسان‌هایی که به‌این‌گونه دورهای حدی پاسخ می‌دهند، در فیزیک متناظر با نوسان‌های خودبه‌خودی هستند. ممکن است در بعضی از دستگاه‌های نوسان خودبه‌خودی، چند روند نوسانی ایستانه با دامنه‌های مختلف وجود داشته باشد، که در اثر شرط‌های اولیه، برقرار می‌شوند. اگر روندی که در این دستگاه‌ها جریان دارد به‌وسیلهٔ معادله به‌صورت (۶۷) شرح داده شود، این‌گونه دستگاه‌های نوسان‌های خودبه‌خودی، در صفحهٔ مرحله‌ای، متناظر با چند دور حدی می‌شوند.

تا امروز نتوانسته‌اند مسألهٔ پیدا کردن دورهای حدی را، حتی به‌صورت تقریبی، حل کنند. معمول‌ترین روش برای حل این مسأله عبارت است از روش ساختن «دورهای بدون تماس» که به وسیلهٔ **پوانکاره** طرح شده است. این روش براساس قضیهٔ زیر بنا شده است. فرض می‌کنیم در صفحهٔ (x, y) بتوانیم دو منحنی بستهٔ L_1 و L_2 (دور) را چنان پیدا کنیم که دارای این ویژگی‌ها باشند:

۱) منحنی L_2 در حوزهٔ محدود به L_1 واقع باشد.

۲) در حلقهٔ Ω، که بین L_1 و L_2 به دست می‌آید، حتی یک نقطهٔ خاص از معادلهٔ (۶۴) وجود نداشته باشد.

۳) L_1 و L_2 هم در همه جا مماس داشته باشند و در ضمن جهت این مماس‌ها در هیچ جا منطبق بر جهت میدان جهت‌ها برای معادلهٔ مفروض (۶۴) نباشد.

۴) برای همهٔ نقطه‌های L_1 و L_2، کسینوس زاویهٔ بین قائم داخلی بر محیط حوزهٔ Ω و بردار با مؤلفه‌های $[N(x , y), \; M(x , y)]$ علامت ثابتی داشته باشد.

در این‌صورت، بین L_1 و L_2، دست کم یک دور حدی از معادله (۶۴) وجود دارد.

پوانکاره، منحنی‌های L_1 و L_2 را، ***دورهای بی‌تماس*** می‌نامد.

اثبات این قضیه براساس این حکم روشن قرار دارد. فرض کنیم به‌ازای مقدارهای صعودی t (یا به ازای مقدارهای نزولی t)، همهٔ منحنی‌های انتگرالی

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t)$$

از معادله (۶۴) (یا هم ارز آن، معادلهٔ (۶۷)،که در آن t پارامتراست)، که L_1 و L_2 را قطع می‌کنند، در داخل حلقهٔ Ω بین L_1 و L_2 باشد. در این‌صورت، این منحنی‌های انتگرالی، به ناچار روی منحنی بسته‌ای مثل l، واقع در بین L_1 و L_2؛ به هم می‌رسند. زیرا هیچ‌کدام از منحنی‌های انتگرالی که در این حلقه افتاده‌اند، نمی‌تواند از آن خارج شود و در حلقه هم، نقطهٔ خاصی وجود ندارد.

خود جست‌وجوی دورهای بی‌تماس، مسأله‌ای به اندازهٔ کافی پیچیده است و هیچ روش کلی برای آن شناخته نشده است. برای حالت‌های خاص جداگانه‌ای، توانسته‌اند دورهای بی‌تماس را پیدا و از آن‌جا وجود دورهای حدی را ثابت کنند.

در رادیو تکنیک، جست‌وجوی دورهای حدی (روندهای نوسان خودبه‌خودی)، برای معادلهٔ (۱۶) مولد لامپی، اهمیت بسیار دارد. در میانه‌های سال‌های سی‌سدهٔ بیستم، ***ن.م. کریلوف*** و ***ن. ن. بوگولیوبوف***، روش‌های تقریبی برای محاسبهٔ دورهای حدی معادله‌هایی از نوع (۱۶) پیشنهاد کردند. در سال‌های پنجاه، ***ل. ای. ماندلشتام***، ***ن. د. پاپالکسی*** و ***آ. آ. آندرونوف***، فیزیک‌دانان شوروی، امکان استفادهٔ از روش به‌اصطلاح پارامتر کوچک را ثابت کردند. پیش ازاین هم در عمل از این روش استفاده می‌شد، ولی بنیان‌های دقیق قانون‌مندی به‌کار گرفتن این روش پیدا نشده بود. ***آ. آ. آندرنوف*** ضمن تجزیه و تحلیل معادلهٔ دستگاه‌های نوسان خودبه‌خودی، برای نخستین بار، روش‌هایی را که به وسیلهٔ ***آ.آ.لیاپونوف*** و ***آ.پوانکاره*** در نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی تکامل داده شده بود، به طور منظم به کار برد و از همین راه به نتیجه‌های مهمی رسید.

قبل از این هم گفته‌ایم که دستگاه‌های «تخمینی» نقش اساسی در فیزیک دارند (بند ۳ را ببینید). ***آ. آ. آندرونوف*** همراه با ***ل. س. پونتریاگین***، فهرست قطعه‌هایی را تشکیل داد که از روی آن‌ها می‌توان طرح کاملی از رفتار منحنی‌های انتگرالی راروی صفحهٔ $(x \ , \ y)$ برای معادلهٔ دیفرانسیلی تخمینی از نوع (۶۴) تنظیم کرد. از جمله، از مدت‌ها پیش، معلوم بوده است که مرکز در نزدیکی نقطهٔ خاص، به ازای تغییرهای کوچکی در معادلهٔ (۶۴)، خراب می‌شود.بنابراین، اگر با معادلهٔ تخمینی سروکار داریم، در تشکیل نقشهٔ رفتار منحنی‌های انتگرالی معادلهٔ (۶۴)، نمی‌توان مرکز، یعنی خانوادهٔ منحنی‌های انتگرالی بسته‌ای که نقطهٔ خاص را احاطه کرده‌اند، وارد کرد.

هنوز خیلی مانده است تا مسألهٔ مربوط به رفتار منحنی‌های انتگرالی در مجموع خود، به طور کامل حل شود. یادآوری می‌کنیم مسألهٔ بسیار ساده‌تری هم که بی‌شباهت به مسألهٔ ما نیست، هنوز به طور کامل حل نشده است. این مسأله این است که منحنی‌های جبری حقیقی، یعنی منحنی‌هایی که با معادلهٔ

$$P(x,y) = ۰$$

بیان می‌شوند و $P(x \ , \ y)$ یک چند جمله‌ای از درجهٔ n است، چه صورت‌هایی در صفحه می‌توانند داشته باشد. تنها دربارهٔ $n < ۶$ است که نوع این منحنی‌ها در صفحه، به‌طور کامل شناخته شده است.

جواب‌های دستگاه (۶۴)، حرکت بر صفحه را معین می‌کنند. اگر هر نقطهٔ $x_۰$ ، $y_۰$ از صفحه را، با نقطهٔ $[x(t \ , \ x_۰ \ , \ y_۰), \ \ y(t \ , \ x_۰ \ , \ y_۰)]$ متناظر کنیم، که درآن $x(t \ , \ x_۰ \ , \ y_۰)$، $y(t \ , x_۰ \ , y_۰)$ جواب دستگاه (۶۴) با شرط‌های اولیهٔ $x = x_۰$ و $y = y_۰$ به ازای $t = t_۰$ است، در آنصورت تبدیل نقطه‌های صفحه را، دربستگی با پارامتر t، به دست می‌آوریم. تبدیل‌های مشابهی را، در ارتباط با پارامتر، و حرکت‌هایی که از آن ناشی می‌شود، می‌توان روی کره، چنبره و بعضی شکل‌های دیگر بررسی کرد. ویژگی‌های این حرکت‌ها را در نظریهٔ دستگاه‌های دینامیکی مطالعه می‌کنند. در حوالی هر نقطه از این حرکت‌ها هم، حل دستگاهی از معادله‌های دیفرانسیلی مطرح می‌شود.

در این بخش، بررسی کوتاهی از وضع کنونی نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی عادی ارائه دادیم و کوشش کردیم مسأله‌هایی را که در این نظریه مطرح است، شرح دهیم. این بررسی، از هیچ جهتی نمی‌تواند ادعای کمال را داشته باشد. ما ناچار بودیم از بررسی بسیاری از

بخش‌های این نظریه صرف‌نظر کنیم، زیرا این بخش‌ها، یا به مسأله‌های اختصاصی‌تری مربوط می‌شد و یا برای درک آن‌ها، دانش ریاضی گسترده‌تری را لازم داشت و ما طرح آن‌ها را برای خوانندهٔ این کتاب ملال‌آور دانستیم. از جمله، ما به کلی به بخش بسیار مهمی که در آن از نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی با آوند مختلط گفت‌وگو می‌شود، نپرداختیم. ما نمی‌توانستیم به مسأله‌های به اصطلاح حدی و به خصوص به نظریهٔ تابع‌های اختصاصی، که اهمیت زیادی در عمل دارند، بپردازیم. دربارهٔ روش‌های محاسبهٔ تقریبی و همچنین حل تحلیلی معادله‌های دیفرانسیلی، خیلی کم توجه کردیم و غیره. کسانی که می‌خواهند با این مسأله‌ها آشنا شوند، باید به کتاب‌های اختصاصی که در این زمینه‌ها وجود دارد، مراجعه کنند.

بخش ششم

معادله‌های با مشتق‌های جزئی

س. ل. سوبولف

(بند آخر به وسیلهٔ اُ.آ. لادی ژنسکایا)

۱. مقدمه

در بررسی پدیده‌های طبیعی، برخورد ما با معادله‌های با مشتق‌های جزئی، کمتر از حالت‌هایی که با معادله‌های دیفرانسیلی عادی سروکار داریم، نیست. روشن است که این برخورد در حالت‌هایی پیش می‌آید که پدیدهٔ مورد بررسی به وسیلهٔ تابع‌هایی از چند متغیر، شرح داده می‌شود. ضمن بررسی طبیعت، دسته‌ای از معادله‌های با مشتق‌های جزئی به وجود آمده است که در زمان ما اهمیت زیادی پیدا کرده است و به احتمالی، در مجموعهٔ دانش انسانی، مهم‌ترین و جدی‌ترین مقام را داشته باشد. این دسته از معادله‌های با مشتق‌های جزئی، عبارت است از معادله‌های فیزیک ریاضی.

قبل از همه، به نوسان‌های یک محیط می‌پردازیم. ضمن این نوسان‌ها، هر نقطهٔ این محیط، که در وضع تعادل در موقعیت (x، y، z) قرار دارد، در لحظهٔ زمانی t در جهت بردار $u(x , y , z , t)$ جابه‌جا می‌شود. بردار $u(x , y , z , t)$ به وضع اولیهٔ نقطه، یعنی x، y، z و زمان t بستگی دارد. در این حالت، پدیده به وسیلهٔ میدان برداری شرح داده می‌شود. با وجود این، به سادگی دیده می‌شود که آگاهی بر این میدان برداری ــ میدان جابه‌جایی نقطه‌های محیط ــ برای بیان کامل نوسان‌ها، کافی نیست. از جمله، باید از میزان چگالی $\rho(x , y , z , t)$ در هر نقطهٔ محیط، درجهٔ حرارت $T(x , y , z , t)$ در هر نقطه و همچنین فشار داخلی، یعنی نیروهایی که بر هر حجم جزئی جسم از طرف بقیهٔ بخش‌ها وارد می‌شود، اطلاع داشته باشیم.

پدیده‌های فیزیک وروندهای فیزیکی که در فضا و در جریان زمان انجام می‌گیرد، همیشه نتیجه‌ای از تغییرهای بعضی کمیت‌های فیزیکی است که به نقطه‌ای از یک حوزهٔ فضایی و به‌جریان زمان، بستگی دارند. همان‌طور که در بخش دوم (جلد اول) دیده‌ایم، این کمیت‌ها

را می‌توان به یاری تابع‌هایی از چهار متغیر مستقل x، y، z و t بیان کرد که در آن x، y و z مختصات نقطهٔ فضایی و t زمان است.

همان‌طور که می‌دانیم، کمیت‌های فیزیکی می‌توانند طبیعت‌های گوناگونی داشته باشند. بعضی از آن‌ها را می‌توان با مقدارهای عددی مشخص کرد، مثل درجهٔ حرارت، چگالی و غیره؛ این کمیت‌ها را اسکالر گویند. بعضی دیگر دارای جهت هستند که به آن‌ها کمیت‌های بُرداری گویند، مثل سرعت، شتاب، شدت میدان الکتریکی و غیره. کمیت‌های بُرداری را، هم می‌توان به وسیلهٔ طول بردار و جهت آن بیان کرد و هم به یاری «مؤلفه‌های» این بُردار، که آن را به سه بردار دوبه‌دو عمود بر هم و برای نمونه، موازی با محورهای مختصات، تجزیه می‌کند.

در فیزیک ریاضی، کمیت اسکالر یا میدان اسکالر را به صورت تابعی از چهار متغیر مستقل، و کمیت بُرداری را به وسیلهٔ سه‌تابع از این متغیرها، نشان می‌دهند. چنین کمیتی را می‌توان به صورت

$$\mathbf{u}(x\,,y\,,z\,,t)$$

نوشت که در آن سیاه بودن حرف، نشان می‌دهد که $\mathbf{u}$ یک بردار است؛ و یا به صورت سه تابع

$$u_x(x\,,y\,,z\,,t)\quad,\quad u_y(x\,,y\,,z\,,t)\quad,\quad u_z(x\,,y\,,z\,,t)$$

که در آن u_x، u_y و u_z به معنای تصویرهای بردار بر محورهای مختصات است.

در فیزیک، در کنار کمیت‌های برداری و اسکالر به‌کمیت‌های پیچیده‌تری هم برخورد می‌کنیم که از آن جمله می‌توان از حالت کششی جسم در نقطهٔ مفروض نام برد. این‌گونه کمیت‌ها را، کمیت‌های «تانسوری» گویند و اگر یکبار برای همیشه، جهت محورهای مختصات را انتخاب کنیم، می‌توان هر کدام از آن‌ها را به یاری چند تابع از سه یا چهار متغیر مستقل مشخص کرد.

به این ترتیب، بیان همهٔ نوع‌های مختلف پدیده‌های فیزیکی را می‌توان به کمک تابع‌های چند متغیره به دست آورد و البته، برای چنین بیانی، در هیچ حدی، نمی‌توان مدعی دقت مطلق بود.

برای مثال، وقتی چگالی محیط را به کمک تابعی از چهار متغیر مستقل بیان می‌کنیم، در

واقع به این مطلب توجه نمی‌کنیم که هیچ نوع چگالی «در نقطهٔ مفروض» وجود ندارد. جسمی که بررسی می‌شود دارای ساختمان مولکولی است، ولی مولکول‌ها به طور کامل به هم متصل نیستند و در فاصلهٔ معینی از یکدیگر قرار گرفته‌اند. اغلب فاصلهٔ بین مولکول‌ها، خیلی بیشتر از اندازه‌های خود مولکول‌هاست. به این ترتیب، وقتی از چگالی یک جسم گفت‌وگو می‌کنیم، به رابطهٔ بین توده‌ای از ماده توجه داریم که نسبت به حجم کلی جسم، حجم کوچکی را (ولو این‌که خیلی کوچک نباشد) در برمی‌گیرد. و وقتی از چگالی در یک نقطه گفت‌وگو می‌کنیم، آن را به عنوان حد این رابطه‌ها ضمن کوچک کردن حجم، درنظر می‌گیریم. همچنین، وقتی دربارهٔ درجهٔ حرارت محیط صحبت می‌کنیم، با مفهوم انتزاعی‌تری سروکار داریم. گرمای جسم، مشروط به حرکت بی‌ترتیب مولکول‌های این جسم است. مولکول‌ها انرژی‌های متفاوتی دارند، ولی وقتی حجمی را در نظر بگیریم که شامل مولکول‌های زیادی باشد، انرژی میانگین حرکت بی‌ترتیب آن‌ها رفتاری معین پیدا می‌کند که ما آن را درجهٔ حرارت گوییم.

به همین ترتیب، وقتی دربارهٔ فشار گاز یا مایع به دیوارهٔ ظرف گفت‌وگو می‌کنیم، نباید گمان کنیم که در واقع، ذره‌های مایع یا گاز به دیوارهٔ ظرف فشار وارد می‌کنند. در واقع، این ذره‌ها به خاطر حرکت بی‌ترتیب خود به دیوارهٔ ظرف می‌خورند و از آن دفع می‌شوند. آنچه به عنوان فشار به دیواره بیان می‌کنیم، در واقع مقداری است که از مجموع تعداد بسیار زیادی ضربه در بخشی از ظرف به دست آمده است، بخشی که از دیدگاه ماکوچک، ولی در مقایسه با فاصله‌های بین مولکول‌های مایع یا گاز، بسیار بزرگ است. اگر بخواهیم، می‌توانیم ده‌تایی از این نمونه‌ها بیاوریم. اغلب کمیت‌هایی که در فیزیک مطالعه می‌کنیم، دارای چنین خصلت‌هایی هستند. فیزیک ریاضی با چنان کمیت‌های ایده‌آلی سروکار دارد که از یک رشته ویژگی‌های مشخص خود منتزع شده‌اند و تنها مقدارهای میانگین این کمیت ها را در نظر می‌گیرد.

در ابتدای امر، ممکن است ایده‌آل کردن کمیت‌ها، نادرست به نظر آید، ولی همان‌طور که خواهیم دید، روشی بسیار سودمند است و امکان بررسی پدیده‌های پیچیده را، با حفظ جنبه‌های اساسی آن‌ها و صرف‌نظرکردن از آن‌چه در حالت مورد بررسی در درجهٔ دوم قرار دارد، به وجود می‌آورد.

موضوع فیزیک ریاضی عبارت است از مطالعهٔ چنین بستگی‌هایی که بین این کمیت‌های ایده‌آلی وجود دارد و به یاری تابع‌هایی از چند متغیر مستقل بیان می‌شوند.

۲. ساده‌ترین معادله‌های فیزیک ریاضی

بستگی‌ها و رابطه‌های مقدماتی بین کمیت‌های فیزیکی به کمک قانون‌های مکانیک و فیزیک قابل بیان است. این بستگی‌ها، بسیار متنوع‌اند و از آن‌ها می‌توان بستگی‌های متنوع زیادتری هم به دست آورد که نتیجه‌گیری‌های ریاضی آن‌ها بسیار پیچیده‌تر باشد. قانون‌های مکانیک و فیزیک را می‌توان به زبان ریاضی به صورت معادله‌های با مشتق‌های جزئی و گاهی معادله‌های انتگرالی، که رابطهٔ بین تابع‌های مجهول را برقرار کرده‌اند، بیان کرد. برای این‌که مطلب را بهتر بفهمیم، چندنمونه از معادله‌های فیزیک ریاضی را می‌آوریم.

قانون‌های اساسی فیزیک را دربارهٔ حرکت نقطه‌های محیط، به صورت ریاضی می‌نویسیم.

معادله‌های بقای جرم و انرژی حرارتی. ۱. قبل از همه به‌قانون بقای ماده در هر حجم Ω، که به طور انتزاعی از فضای ما به طور کامل جدا شده است، می‌پردازیم. برای این منظور باید جرم ماده‌ای را، که در این حجم قرار دارد، برآورد کنیم. جرم $M_\Omega(t)$ با این انتگرال بیان می‌شود.

$$M_\Omega(t) = \iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z,t)dxdydz$$

بدیهی است که این جرم، مقدار ثابتی نیست و در جریان نوسان‌های تراکم در هر نقطه، تغییر می‌کند. زیرا ذره‌های ماده به خاطر نوسان‌هایی که دارند، گاهی به این حجم داخل و گاهی از آن خارج می‌شوند. سرعت تغییر جرم را می‌توان با مشتق‌گیری، نسبت به زمان، از انتگرالی که نوشتیم به دست آورد:

$$\frac{dM_\Omega}{dt} = \iiint\limits_\Omega \frac{\partial\rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

همین سرعت تغییر جرم را، که در نتیجهٔ انتزاع ذهنی حجم Ω به دست آمده است، می‌توان با روش دیگری هم محاسبه کرد. می‌توان مقدار ماده‌ای را که در هر ثانیه از سطح S (که هر حجم مفروض Ω را محدود کرده است) عبور می‌کند، نشان داد؛ در ضمن مقدار ماده‌ای که از Ω خارج می‌شود، باید با علامت منفی به حساب آید. برای این منظور، قطعهٔ کوچک ds از سطح S را در نظر می‌گیریم، آن قدر کوچک که بتوان آن را مسطح (قطعه‌ای از صفحه) و

جابه‌جایی نقطه‌های آن را یکنواخت به حساب آورد. در جریان فاصلهٔ زمانی از t تا $t+dt$ به نقطه‌های مادی که روی این قطعه قرار گرفته‌اند، توجه می‌کنیم. ابتدا به محاسبهٔ بُردار

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

یعنی سرعت هر ذره، می‌پردازیم. بعد از زمان dt، ذره‌های ds روی بردار $\mathbf{v}dt$ جابه‌جا می‌شوند و در وضع ds_1 قرار می‌گیرند؛ در عوض، ذره‌هایی که قبل از آن در وضع ds_2 بوده‌اند، به ds می‌آیند (شکل ۱). به این ترتیب، در این فاصلهٔ زمانی، ستون مادی ds_2ds، که قبل از آن در داخل Ω بود، از آن خارج می‌شود و در پایان این فاصلهٔ زمانی، به وضع $dsds_1$ در می‌آید. ارتفاع این ستون برابر است با $vdt.\cos(\mathbf{n}\ ,\ \mathbf{v})$، که در آن $\mathbf{n}$ عبارت است از قائم بیرونی بر سطح S؛ حجم ستون برابر است با

$$v\ \cos\ (\mathbf{n}\ ,\ \mathbf{v})\ dsdt$$

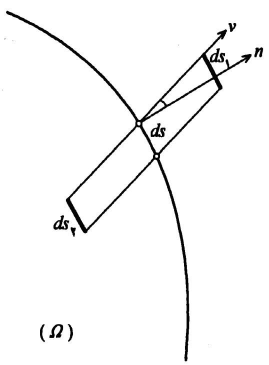
و جرم آن

$$\rho v\ \cos\ (\mathbf{n}\ ,\ \mathbf{v})\ dsdt$$

اگر همهٔ این ستون‌ها را با هم جمع کنیم، مقدار ماده‌ای که از حجم Ω در فاصلهٔ زمان dt خارج می‌شود، به دست می‌آید:

$$\int\!\!\int_S \rho v \cos(\mathbf{n}\ ,\ \mathbf{v})\ dsdt$$

در ضمن در نقطه‌هایی که سرعت در آن‌جا جهتی به داخل Ω دارد، علامت کسینوس منفی



شکل ۱

مـی‌شود، یـعنی، چـنین مـاده‌ای در ایـن انـتگرال بـا عـلامت مـنفی بـه حسـاب مـی‌آید. حاصل‌ضرب سرعت حرکت محیط در تراکم آن، **سیل** نامیده می‌شود. بُـردار سـیل جـرم: $\mathbf{q} = \rho \mathbf{v}$.

برای این‌که سرعت جریان را پیدا کنیم کافی است عبارت به دست آمده را بر dt تقسیم کنیم و در نتیجه، برای سرعت جریان خواهیم داشت:

$$\iint_s \rho v_n ds = \iint_s q_n ds$$

که در آن

$$v_n = v\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{v}) \quad , \quad q_n = q\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{q})$$

بُردار $\mathbf{v}$ را می‌توان برحسب مؤلفه‌های برداری $\mathbf{v}$ و $\mathbf{n}$ در طول محورهای مختصات، بیان کرد. از هندسهٔ تحلیلی می‌دانیم که

$$v_n = v\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{v}) \;\; , \;\; v_x = \cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{x}) + v_y\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{y}) + v_z\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{z})$$

بنابراین، عبارت مربوط به سرعت جریان را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\iint_s \rho\,(v_x\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{x}) + v_y\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{y}) + v_z\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{z}))ds$$

با توجه به قانون بقای ماده، باید هر دو روشی که برای محاسبهٔ تغییر مقدار ماده به کار بردیم، به یک نتیجه برسند. زیرا همهٔ تغییرهایی را که در جرم داخل Ω به وجـود مـی‌آید، می‌توان به حساب جریان‌هایی گذاشت که از طریق سطح S انجام می‌شود.

از این‌جا، با مقایسهٔ سرعت تغییر مقدار ماده‌ای، که در داخل حجم است، بـا سـرعت جریان معکوس آن، به دست می‌آید:

$$\iiint_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = -\iint_s (\rho v_x\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{x}) + \rho v_y\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{y}) + \rho v_z\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{z}))\,ds =$$

$$-\iint_s (q_x\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{x}) + q_y\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{y}) + q_z\cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{z}))\,ds$$

و همان‌طور که قبل از این هم گفتیم، این رابطهٔ انتگرالی برای هر حجم Ω درست است. به این رابطه، **معادلهٔ پیوستگی** گویند.

انتگرالی را که در سمت راست برابری اخیر قرار دارد، می‌توان به کمک دستور ***اوستروگرادسکی***، به انتگرال حجمی تبدیل کرد. از این دستور، که در بخش دوم (جلد اول) دربارهٔ آن گفت‌وگو شده است، به دست می‌آید:

$$\iint_s \left(\rho v_x \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}) + \rho v_y \cos(\mathbf{n}, \mathbf{y}) + \rho v_z \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z})\right) ds =$$

$$= \iiint_\Omega \left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right) d\Omega$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right) d\Omega = 0$$

این نتیجه به دست می‌آید که: انتگرال از تابع

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}$$

به ازای هر حجم Ω برابر است با صفر. حالت اخیر، تنها وقتی ممکن است که این تابع، متحد با صفر باشد. به این ترتیب، شکل دیگری، یعنی شکل دیفرانسیلی معادلهٔ پیوستگی به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱)، نمونهٔ مشخصی از تنظیم یک قانون فیزیکی به زبان معادله‌های دیفرانسیلی با مشتق‌های جزئی است.

۲. به مسألهٔ دیگری از این قبیل، یعنی مسألهٔ انتقال حرارت، می‌پردازیم.

در هر محیطی که ذره‌ها دارای حرکت حرارتی باشند، انتقال گرما از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر صورت می‌گیرد. این انتقال گرما از طریق هر قطعه‌ای از سطح، که در داخل محیط داده شده قرار دارد و به طور ذهنی از آن جدا شده است، انجام می‌گیرد که ما آن را ds می‌نامیم. می‌توان ثابت کرد که این پدیده را می‌شود با بیان عددی و به کمک کمیت برداری خاصی ــ «بردار جریان گرما» ــ شرح داد. ما این بردار را با τ نشان می‌دهیم. مقدار گرمایی که در هر ثانیه از سطح ds می‌گذرد، با $\tau_n ds$ بیان می‌شود، درست شبیه وقتی که برای به دست آوردن

معادلهٔ پیوستگی، مقدار مایعی که از سطح ds در هر ثانیه جریان پیدا می‌کرد، به صورت $q_n ds$ بیان کردیم. به جای سیل مایع $\mathbf{q}=\rho\mathbf{v}$، در این‌جا با τ، یعنی بردار سیل گرما سروکار داریم.

به همان روشی که معادلهٔ پیوستگی مربوط به حرکت مایع را به دست آوردیم، که معرف قانون بقای ماده بود، می‌توانیم معادلهٔ با مشتق‌های جزئی تازه‌ای را به دست آوریم که بیان‌کنندهٔ قانون بقای انرژی باشد.

تراکم حجمی Q انرژی حرارتی را در نقطهٔ داده شده، می‌توان با این دستور بیان کرد:

$$Q=CT$$

که در آن C معرف ظرفیت گرمای حجمی و T معرف درجهٔ حرارت است. به سادگی، این معادله به دست می‌آید:

$$C\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial \tau_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_z}{\partial z}=0 \tag{۲}$$

این معادله، درست همان معادلهٔ پیوستگی است، به شرطی که در آن «تراکم انرژی» را به جای «تراکم» و سیل گرما را به جای سیل جرم در نظر بگیریم. در ضمن فرض را بر این گرفته‌ایم که پدیدهٔ انتشار گرما در محیطی بررسی شده است که از هیچ جا انرژی حرارتی تولید نمی‌شود. ولی، اگر در محیط، امکان گرمازایی وجود داشته باشد، معادلهٔ (۲) مربوط به موازنهٔ انرژی حرارتی، باید تغییر داده شود. اگر q را «تراکم گرمازایی» بگیریم، یعنی مقدار انرژی حرارتی که در واحد زمان و در واحد حجم محیط تولید می‌شود، در آن‌صورت معادلهٔ بقای انرژی حرارتی به صورت پیچیده‌تر زیر، در می‌آید:

$$C\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial \tau_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_z}{\partial z}=q \tag{۳}$$

۳. اگر از معادلهٔ (۱) نسبت به زمان دیفرانسیل بگیریم، باز هم به معادله‌ای از نوع معادلهٔ پیوستگی می‌رسیم. این عمل را برای معادلهٔ نوسان‌های کوچک گاز در نزدیکی وضع تعادل انجام می‌دهیم. فرض را براین می‌گیریم که به ازای این نوسان‌ها، تغییر کمی در تراکم پیدا شود و کمیت‌های $\frac{\partial\rho}{\partial x}$، $\frac{\partial\rho}{\partial y}$، $\frac{\partial\rho}{\partial z}$ و $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ مقدارهای کوچکی باشند که بتوان از حاصل‌ضرب آن‌ها در v_x، v_y، v_z صرف‌نظر کرد. در این‌صورت

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=0$$

که اگر از این معادله، نسبت به زمان، دیفرانسیل بگیریم و از حاصل‌ضرب‌های $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ در $\frac{\partial v_x}{\partial x}$، $\frac{\partial v_y}{\partial y}$، $\frac{\partial v_z}{\partial z}$ صرف‌نظر کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^{2}\rho}{\partial t^{2}}+\rho\left(\frac{\partial(\frac{dv_x}{dt})}{\partial x}+\frac{\partial(\frac{dv_y}{dt})}{\partial y}+\frac{\partial(\frac{dv_z}{dt})}{\partial z}\right)=0 \qquad (۴)$$

معادله‌های حرکت. ۱. نمونهٔ خوب و در عین حال مهمی از بیان یک قانون فیزیکی، به وسیلهٔ معادلهٔ دیفرانسیلی، عبارت است از معادلهٔ تعادل یا معادلهٔ حرکت محیط. فرض کنید، محیط از ذره‌های مادی تشکیل شده باشد که با سرعت‌های خود در حرکت‌اند. همان‌طور که در مثال اول عمل کردیم، حجمی مثل Ω را، که محدود به سطح S و پر از ذره‌های مادی محیط است، به طور ذهنی از محیط جدا می‌کنیم و قانون سوم نیوتن را برای ذره‌هایی که در این حجم قرار گرفته‌اند، می‌نویسیم. قانون سوم نیوتن می‌گوید، به ازای هر حرکت محیط، سرعت تغییر حرکت همهٔ نقطه‌های یک دستگاه در مجموع، برابر است با مجموع حرکت‌های همهٔ نیروهایی که در این حجم وجود دارد. مقدار حرکت، همان‌طور که از مکانیک می‌دانیم، عبارت است از مقداری به صورت

$$\mathbf{P}=\iiint_{\Omega}\rho\,\mathbf{v}d\Omega$$

ذره‌هایی که با تراکم ρ حجم کوچک $d\Omega$ را پر کرده‌اند، بعد از زمان Δt، با تراکم جدید ρ' حجم جدید $d\Omega'$ را پر می‌کنند، در حالی که جرم کلی آن‌ها، مثل سابق باقی می‌ماند:

$$\rho' d\Omega' = \rho d\Omega$$

در همان مدت زمانی، تغییر سرعت $\mathbf{v}$ تا مقداری مثل $\mathbf{v}'$، یعنی به‌اندازهٔ $\Delta\mathbf{v}=\mathbf{v}'-\mathbf{v}$، موجب تغییر مقدار حرکت به اندازهٔ

$$\rho'\mathbf{v}'d\Omega' - \rho\mathbf{v}d\Omega = \rho\mathbf{v}'d\Omega - \rho\mathbf{v}d\Omega = \rho\Delta\mathbf{v}d\Omega$$

می‌شود و این تغییر در واحد زمان به این صورت در می‌آید:

$$\rho\,\frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t}\,d\Omega \approx \rho\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,d\Omega$$

که اگر آن را برای همهٔ ذره‌هایی که در حجم Ω قرار گرفته است، محاسبه و با هم جمع کنیم،

معلوم می‌شود سرعت تغییر مقدار حرکت برابر است با

$$\iiint_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega \quad \text{یا} \quad \iiint_{\Omega} \rho \frac{dv_x}{dt} d\Omega \ , \quad \iiint_{\Omega} \rho \frac{dv_y}{dt} d\Omega \ , \quad \iiint_{\Omega} \rho \frac{dv_z}{dt} d\Omega$$

(در این‌جا، مشتق‌های $\frac{dv_x}{dt}$، $\frac{dv_y}{dt}$، $\frac{dv_z}{dt}$ به معنای سرعت تغییر مؤلفه‌ای از $\mathbf{v}$، نه در نقطهٔ داده شده‌ای از فضا، بلکه برای ذرهٔ متحرک داده شده، می‌باشد. روی نوع نوشتن $\frac{d}{dt}$ بـه جـای $\frac{\partial}{\partial t}$ تاکید می‌کنیم و همان‌طور که می‌دانیم: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}$).

نیروهایی که به حجم وارد می‌شود، از دو نوع است: نیروهای حجمی که بر ذره واقع در داخل حجم عمل می‌کند، و نیروهای سطحی یا فشارهایی که به سطح S (که این حجم را محدود می‌کند) وارد می‌شود. نیروهای اول «با عمل دور» و نیروهای دوم «با عمل نزدیک» هستند.

برای این‌که این مطلب را روشن کنیم، فرض می‌کنیم محیطی که بررسی مـی‌کنیم مـایع باشد. نیروهای سطحی که بر عنصر سطح، یعنی ds، عمل می‌کنند، در این حالت، کمیت pds را خواهند داشت، که در آن، p عبارت است از فشار مایع و در جهت مخالف قائم خارجی قرار دارد.

اگر واحد بُرداری را که در جهت قائم بر سطح S است بـه وسـیلهٔ $\mathbf{n}$ نشـان دهـیم، در آن‌صورت نیروهایی که بر قطعهٔ ds عمل می‌کنند برابر است با

$$-p\mathbf{n}ds$$

به‌جز آن، $\mathbf{F}$ را بردار نیروهای درونی که بر واحد حجم عمل می‌کنند، می‌گیریم. به این ترتیب معادلهٔ ما به این صورت در می‌آید:

$$\iiint_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\Omega = -\iiint_{\Omega} \mathbf{F} d\Omega - \iint_{s} p\mathbf{n} ds$$

و این، همان ***معادلهٔ حرکت*** به صورت انتگرالی است. همان‌طور که معادلهٔ پیوستگی را بـه معادلهٔ دیفرانسیلی (۱) تبدیل کردیم، ایـن مـعادله را هـم مـی‌توان بـه مـعادلهٔ بـه صـورت دیفرانسیلی تبدیل کرد. در نتیجه، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\rho \frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = F_x \ , \quad \rho \frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} = F_y \ , \quad \rho \frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = F_z \qquad (۵)$$

این دستگاه، قانون سوم نیوتن را به صورت دیفرانسیلی بیان می‌کند.

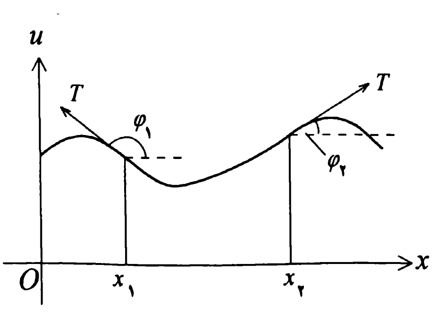
۲. مثال نمونه‌ایِ دیگری که از کاربرد قانون‌های مکانیک به صورت دیفرانسیلی می‌توان آورد، عبارت است از معادلهٔ نوسان‌های سیم. منظور از سیم، جسم نازک و درازی است که از مادهٔ قابل ارتجاعی ساخته شده است و به ظاهر کلفتی اندکی که دارد قابل خم شدن است. سیم، به طور معمول به صورت محکمی کشیده شده است. اگر به طور ذهنی در سیم مقطعی به وجود آوریم و آن را در نقطه‌ای مثل x به دو قسمت کنیم، در این صورت از طرف هر کدام از پاره‌های سیم، نیرویی به دیگری عمل می‌کند که برابر است با کشش سیم و در جهت مماس بر امتداد آن.

قطعه‌ای از سیم را در نظر می‌گیریم. انحراف نقطه‌های سیم را از حالت تعادل به $u(x,t)$ نشان می‌دهیم. فرض می‌شود که نوسان‌های سیم، در یک صفحه باشد و از تغییر مکان‌هایی عمود بر محور Ox تشکیل شده باشد. انحراف $u(x,t)$ را در لحظه‌ای از زمان، به صورت ترسیمی در نظر می‌گیریم (شکل ۲). روی شکل، پاره‌ای از سیم را که بین نقطه‌های x_1 و x_2 قرار گرفته است جدا می‌کنیم. در این نقطه‌ها دو نیرو عمل می‌کند که برابرند با کشش T و هر کدام از آن‌ها در جهت مماس بر $u(x,t)$ قرار گرفته‌اند.

اگر این پارهٔ سیم دارای انحنایی باشد، منتجهٔ این دو نیرو برابر صفر نخواهد بود. براساس قانون‌های مکانیک، این منتجه باید برابر باشد با سرعت تغییر مقدار حرکت پاره سیم.

فرض کنید، جرمی که در هر سانتیمتر طول سیم قرار دارد برابر ρ باشد. در این صورت، سرعت تغییر مقدار حرکت، چنین خواهد بود:

$$\rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2 u}{dt^2}\, dx$$



شکل ۲

اگر زاویه‌ای را که مماس بر سیم با محور Ox می‌سازد، φ بنامیم، خواهیم داشت:

$$T\sin\varphi_2 - T\sin\varphi_1 = \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\, dx$$

و این، همان معادلهٔ اصلی است که قانون سوم مکانیک را، به صورت انتگرالی، بیان می‌کند. این معادله را می‌توان به سادگی به صورت دیفرانسیلی بیان کرد. روشن است که داریم:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}(T\sin\varphi)$$

با توجه به قضیه‌های مشهور محاسبهٔ دیفرانسیلی، به سادگی می‌توان $T\sin\varphi$ را به تابع مجهول u مربوط کرد. به دست می‌آید:

$$\tan\varphi = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}$$

و اگر $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$ را کوچک به حساب آوریم، به تقریب داریم:

$$\sin\varphi \approx \frac{\partial u}{\partial x}$$

و در این‌صورت

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (6)$$

و این ***معادلهٔ نوسان‌های سیم*** به صورت دیفرانسیلی است.

صورت‌های اصلی معادله‌های فیزیک ریاضی. همان‌طور که پیش از این گفتیم، معادله‌های با مشتق‌های جزئی که پدیده‌های فیزیکی را شرح می‌دهند، اغلب به صورت دستگاهی از معادله‌ها با چند تابع مجهول هستند. با وجود این، در بیشتر حالت‌ها می‌توانیم این دستگاه را به یک معادله تبدیل کنیم؛ و این مطلب را می‌توان دربارهٔ ساده‌ترین مسأله‌ها نشان داد.

به معادله‌های حرکت، که در بند قبل بررسی کردیم، برمی‌گردیم. این معادله‌ها را باید با معادلهٔ پیوستگی، با هم و به صورت یک دستگاه، حل کرد و ما کمی بعد دربارهٔ راه حل آن، گفت‌وگو خواهیم کرد.

۱. از معادلهٔ جریان پایندهٔ مایع کامل، آغاز می‌کنیم.

همهٔ نوع‌های حرکت‌های مایع را به حرکت‌های توفانی و حرکت‌های غیرتوفانی یا به اصطلاح ***حرکت‌های پتانسیلی*** تقسیم می‌کنند. گرچه حرکت غیرتوفانی، تنها حالت خاصی از حرکت است و در حالت کلی، حرکت مایع یا گاز، همیشه تا اندازه‌ای چرخشی و توفانی است، باوجود این، دست کم تجربه نشان می‌دهد که این حرکت‌های غیرتوفانی در بسیاری حالت‌ها، بادقت تمام وجود دارند. علاوه آن با ملاحظه‌های نظری هم می‌توان ثابت کرد، اگر نارِوانی (ویسکوزیتهٔ) مایع برابر صفر باشد، به شرط نبودن توفان در آغاز حرکت، در لحظه‌های بعدی هم حرکت توفانی به وجود نمی‌آید.

برای حرکت پتانسیلی مایع، تابع اسکالر $U(x , y , z , t)$ به نام ***سرعت پتانسیلی*** وجود دارد، به نحوی که بردار و سرعت $\mathbf{v}$ به این ترتیب بیان می‌شود:

$$v_x = \frac{\partial U}{\partial x} \ , \ v_y = \frac{\partial U}{\partial y} \ , \ v_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

در همهٔ حالت‌هایی که تاکنون بررسی کرده‌ایم، سروکار ما با دستگاهی از چهار معادله با چهار تابع مجهول بوده است، به زبان دیگر، با معادله‌هایی که شامل یک تابع مجهول اسکالر و یک میدان بُرداری مجهول هستند. اغلب، این معادله‌ها را می‌توان به یک معادلهٔ مرتبهٔ دوم با یک تابع مجهول منجر کرد. این تبدیل را دربارهٔ ساده‌ترین حالت، انجام می‌دهیم.

برای حرکت پتانسیلی مایع تراکم‌ناپذیر، که در آن $\frac{\partial \rho}{\partial t}=۰$ دستگاهی شامل دو معادله داریم: معادلهٔ پیوستگی

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = ۰$$

و معادلهٔ حرکت پتانسیلی

$$v_x = \frac{\partial U}{\partial x} \ , \ v_y = \frac{\partial U}{\partial y} \ , \ v_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

که اگر مقدارهای سرعت‌ها را از معادلهٔ دوم محاسبه کنیم و در معادلهٔ اول قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ U}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ U}{\partial z^۲} = ۰ \qquad (۷)$$

۲. میدان برداری «جریان گرما» هم می‌تواند به کمک رابطه‌های دیفرانسیلی، به یک کمیت اسکالر ـ «درجهٔ حرارت» ـ مربوط باشد. روشن است حرارت در جهت از بخش گرم جسم به بخش سرد آن «جریان» پیدا می‌کند. بنابراین، بُردار جریان گرما باید در جهت عکس بردار درجه‌بندی حرارت به حساب آید. همچنین طبیعی است، مقدار این بردار را باید در تقریب نخست، با به اصطلاح درجه‌بندی حرارت، نسبت مستقیم دارد. این فرض، خیلی خوب با آزمایش تایید می‌شود.

مؤلفه‌های بردار درجه‌بندی حرارت چنین‌اند:

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

اگر ضریب نسبت‌ها را برابر k بگیریم، سه معادله به دست می‌آید:

$$\tau_x = -k\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \tau_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}, \quad \tau_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

این معادله‌ها را باید همراه با معادلهٔ توازن انرژی حرارتی (۳)، حل کرد:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} = q$$

که اگر به جای τ_x، τ_y و τ_z، مقدارشان را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$C\frac{\partial T}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + q \tag{۸}$$

۳. برای نوسان‌های کوچک محیط گازی، مثل نوسان‌های صوتی، از معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \rho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv_x}{dt}\right) + \rho\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dv_y}{dt}\right) + \rho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{dv_z}{dt}\right) = 0$$

و معادلهٔ (۵) مربوط به دینامیک

$$\rho\frac{dv_x}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = F_x, \quad \rho\frac{dv_y}{dt} + \frac{\partial p}{\partial y} = F_y, \quad \rho\frac{dv_z}{dt} + \frac{\partial p}{\partial z} = F_z$$

و با فرض نبودن نیروهای خارجی $(F_x = F_y = F_z = 0)$، به دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right) \tag{۹}$$

(برای این منظور، کافی است عبارت مربوط به شتاب را در معادلهٔ پیوستگی قرار دهیم و در آن، تراکم ρ را به کمک قانون *بویل ـ ماریوت:* $p=a^2\rho$، حذف کنیم).

معادله‌های (۷)، (۸) و (۹) برای بسیاری از مسأله‌های فیزیک ـ ریاضی، مسأله‌های نمونه‌ای هستند و مطالعهٔ مفصل آن‌ها، امکان بررسی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی را به دست می‌دهد.

۳. شرط‌های نخستین و شرط‌های مرزی. منحصر به فرد بودن جواب

در معادله‌های با مشتق‌های جزئی هم، مثل معادله‌های دیفرانسیلی عادی، هر معادله، به‌جز در حالت‌های نادر، دارای بی‌نهایت جواب خاص است. بنابراین، هربار که بخواهیم مسألهٔ فیزیکی مشخصی را حل کنیم، یعنی تابع مجهولی را که در معادلهٔ مفروضی صدق می‌کند به دست آوریم، باید بتوانیم جواب‌های لازم را از میان بی‌نهایت جواب مختلفی که وجود دارد، جدا کنیم. برای این منظور، اغلب لازم است به‌جز خود معادله، از چند شرط اضافی هم اطلاع داشته باشیم. همان‌طور که دیدیم، معادلهٔ با مشتق‌های جزئی، قانون‌های مقدماتی مکانیک یا فیزیک را دربارهٔ بخش کوچکی که در داخل محیط قرار گرفته است بیان می‌کند. با وجود این، تنها اطلاع از قانون‌های مکانیک برای پیش‌بینی یک پدیده کافی نیست. در مثل برای این‌که بتوانیم حرکت جسم‌های آسمانی را پیش‌بینی کنیم (کاری که در اخترشناسی انجام می‌دهند)، روشن است که با معلوم بودن جرم این جسم‌ها، به‌جز دستورهای کلی قانون‌های نیوتن باید وضعیت نخستین دستگاه، یعنی جا و سرعت آن‌ها را در یک لحظهٔ زمانی اولیه بدانیم، و چنین شرط‌های اضافی، همیشه، ضمن حل مسأله‌های فیزیک ـ ریاضی مطرح می‌شود.

به این ترتیب، موضوع فیزیک ـ ریاضی عبارت است از جست‌وجوی معادله‌های با مشتق‌های جزئی، به نحوی که این جواب‌ها در بعضی شرط‌های اضافی صدق کنند.

به همان اندازه که بین معادله‌های (۷)، (۸) و (۹)، که از آن‌ها یاد کرده‌ایم، تفاوت وجود

دارد، موضوع‌هایی که به مناسبت این معادله‌ها طرح و حل می‌شود، با هم فرق دارند.

معادله‌های لاپلاس و پواسون. تابع‌های همساز (هارمونیک) و منحصر به فرد بودن جواب مسألهٔ مقدار مرزی برای آن‌ها. به مسأله‌هایی که طرح کردیم، اندکی بیشتر بپردازیم. از معادله‌های ***لاپلاس و پواسون*** آغاز می‌کنیم. ***معادلهٔ پواسون*** به معادلهٔ[1]

$$\Delta u = -۴\pi\rho$$

گفته می‌شود که در آن ρ به معنای تراکم است. در حالت خاص، ممکن است ρ به صفر تبدیل شود. به ازای $\rho \equiv ۰$، از ***معادلهٔ لاپلاس*** به دست می‌آید:

$$\Delta u = ۰$$

به سادگی دیده می‌شود که دو جواب خاص $u_۱$ و $u_۲$ مربوط به معادله‌ای از ***پواسون***، همیشه روی تابعی که در معادلهٔ **لاپلاس** صدق می‌کند، با هم اختلاف دارند، به زبان دیگر، این اختلاف روی یک ***تابع همساز*** است. به این ترتیب، همهٔ جواب‌های متفاوت معادلهٔ ***پواسون*** منجر به تابع‌های همساز متفاوتی می‌شوند.

اگر به طریقی می‌توانستیم، دست کم یکی از جواب‌های خاص معادلهٔ ***پواسون*** را، مثل $u_۰$، بسازیم، با تغییر تابع مجهول به کمک رابطهٔ

$$u = u_۰ + w$$

برای w، تابع مجهول تازه، معادلهٔ **لاپلاس** را به دست می‌آوردیم. همچنین می‌توانستیم با تغییر متناظری در شرط‌های اضافی، تابع جدید را هم پیدا کنیم. به همین مناسبت، بررسی مسأله برای معادلهٔ **لاپلاس** اهمیت خاصی دارد.

همان‌طور که در مسأله‌های ریاضی هم پیش می‌آید، طرح درست پرسش مربوط به جست‌وجوی جواب‌های معادلهٔ فیزیک ـ ریاضی، به طور مستقیم و ضمن مراجعه به‌واقعیت عملی به دست می‌آید. شرط‌های اضافی که ضمن حل معادلهٔ **لاپلاس** پدید می‌آید، ناشی از خود مسألهٔ فیزیکی است که در بررسی ما قرار دارد.

---

۱. علامت Δu برای سادگی کار برای عبارت $\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial z^۲}$ گرفته شده است، که به‌طور معمول عامل (اوپراتور) **لاپلاس** تابع u نامیده می‌شود.

فرض کنیم بخواهیم، در مثل، برقراری حالت گرمایی را در محیط؛ یعنی، انتشار گرما را در محیطی که در آن، سرچشمهٔ گرما ثابت و در خارج یا داخل محیط قرار گرفته است، بررسی کنیم. بعد از گذشت مدتی، با این شرط‌ها، در هر نقطهٔ محیط، درجهٔ حرارتی، بدون ارتباط با زمان، برقرار می‌شود. برای این‌که درجهٔ حرارت T را در هر نقطه بدانیم، باید جوابی از معادلهٔ

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Delta T + q$$

را پیدا کنیم (q، تراکم است) که تراوش گرمای آن به t بستگی نداشته باشد، به دست می‌آید:

$$\Delta T + q = ۰$$

همان‌طور که دیده می‌شود، درجهٔ حرارت در محیط، در معادلهٔ ***پواسون*** صدق می‌کند. اگر تراکم تراوش گرمای q برابر صفر باشد، معادلهٔ ***پواسون*** به معادلهٔ ***لاپلاس*** تبدیل می‌شود.

برای این‌که درجهٔ حرارت داخل محیط را پیدا کنیم، همان‌طور که از ملاحظه‌های سادهٔ فیزیکی نتیجه می‌شود، باید بدانیم در مرز محیط چه می‌گذرد.

روشن است، همهٔ قانون‌های فیزیکی که برای نقطه‌های داخلی جسم درست بود، در نقطه‌های مرزی به وضع دیگری در می‌آیند.

در مسألهٔ مربوط به برقراری حالت گرمایی، می‌توان در مرز، از انتشار درجهٔ حرارت، یا مقدار جریان گرمایی که از واحد سطح عبور می‌کند، و یا قانون دیگری را که به درجهٔ حرارت جریان گرما بستگی دارد، استفاده کرد.

اگر درجهٔ حرارت را در حجم Ω که به سطح S محدود است در نظر بگیریم، می‌توانیم این شرط‌ها را به این ترتیب بنویسیم:

(۱۰) $$T|_S = \varphi(Q)$$ ۱)

(۱۰′) $$\frac{\partial T}{\partial n}|_S = \psi(Q)$$ ۲)

و یا سرانجام در حالت کل‌تر

(۱۰″) $$\alpha\frac{\partial T}{\partial n}|_S + \beta T|_S = \chi(Q)$$ ۳)

که در آن، Q به معنای نقطهٔ دل‌خواهی از سطح S است. شرط‌های از نوع (۱۰) را ***شرط‌های مرزی*** گویند. با در نظر گرفتن یکی از شرط‌های مرزی، می‌توان جواب لازم را در معادلهٔ

لاپلاس یا **پواسون**، به صورت یک ارزشی، پیدا کرد. در واقع، این شرط‌های مرزی هستند که هم انتخاب جوابی را که لازم است و هم منحصر بودن این جواب را تامین می‌کنند.

به این ترتیب، برای جست‌وجوی جواب در معادلهٔ **لاپلاس** یا **پواسون**، اغلب لازم و کافی است، تابع دل‌خواهی در مرز حوزه داده شده باشد[1]. دربارهٔ معادلهٔ **لاپلاس** کمی مفصل‌تر صحبت می‌کنیم. ثابت می‌کنیم تابع همساز u، یعنی تابعی که در معادلهٔ **لاپلاس** صدق می‌کند، به شرط معلوم بودن بعضی مقدارهایی که در مرز این حوزه قبول می‌کند، به طور کامل معین می‌شود.

قبل از هر چیز، روشن می‌کنیم تابع همساز نمی‌تواند در داخل حوزهٔ Ω، مقدارهایی را که از بزرگترین مقدار آن در مرز بیشتر است، قبول کند. به زبان دیگر، ثابت می‌کنیم، چه ماکزیمم مطلق و چه می‌نیمم مطلق در هر تابع همساز، روی مرز حوزه به دست می‌آید.

از این‌جا، بلافاصله به این نتیجه می‌رسیم، اگر تابع همساز، در مرز حوزهٔ Ω، مقدار ثابتی را قبول کند، در داخل این حوزه هم برابر همان مقدار ثابت خواهد شد. در واقع، اگر ماکزیمم و می‌نیمم تابع برابر با یک مقدار ثابت باشد، خود تابع هم در همه‌جا برابر این مقدار ثابت خواهد بود.

حالا ثابت می‌کنیم که ماکزیمم و می‌نیمم مطلق تابع همساز نمی‌تواند در داخل حوزه قرار گیرد. قبل از همه، توجه می‌کنیم، اگر عامل **لاپلاس**، Δu، از تابع $u(x\ ,\ y\ ,\ z)$، در تمامی حوزه، مثبت باشد، این تابع نمی‌تواند در داخل حوزه ماکزیمم داشته باشد؛ به همین ترتیب، اگر این عامل منفی باشد، تابع نمی‌تواند دارای می‌نیممی در داخل حوزه باشد. در واقع، وقتی تابع u در نقطه‌ای ماکزیمم باشد، باید به عنوان تابع هر کدام از متغیرها هم (وقتی که متغیرهای دیگر را ثابت بگیریم)، ماکزیمم داشته باشد. از این‌جا معلوم می‌شود که هر مشتق جزئی مرتبهٔ دوم آن، نسبت به هر کدام از متغیرها، باید غیرمثبت باشد. در نتیجه، مجموع این مشتق‌های جزئی هم غیر مثبت می‌شود و عامل **لاپلاس** هم نمی‌تواند مثبت بشود. به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد، اگر تابع در یک نقطهٔ داخلی می‌نیمم باشد، عامل **لاپلاس** آن در این نقطه، نمی‌تواند منفی باشد. این به معنای آن است که اگر عامل **لاپلاس**، همه جا در حوزه، منفی باشد، تابع نمی‌تواند در این حوزه، می‌نیمم‌هایی داشته باشد.

---

۱. چه در این‌جا و چه بعد از این، وقتی از «تابع دل‌خواه» صحبت می‌کنیم، به معنای آن است که هیچ شرط دیگری، به‌جز بعضی نیازهای مربوط به منظم کردن آن، به این تابع تحمیل نمی‌شود.

اگر تابع همسازباشد، همیشه می‌توان آن را بـه میزان کـوچک دل‌خـواهـی تـغییر داد به نحوی که عامل **لاپلاس**، مثبت یا منفی باشد. برای این منظور، کافی است مقدار

$$\pm\eta r^{2}=\pm\eta(x^{2}+y^{2}+z^{2})$$

را به آن اضافه کرد، که در آن η عبارت است از مقدار ثابتی که به دل‌خواه کوچک باشد.

اضافه کردن مقداری که به اندازهٔ کافی کوچک است، نمی‌تواند ویژگی‌های تابعی را که در داخل حوزه ماکزیمم یا می‌نیمم مطلق دارد، تـغییر دهـد. اگـر تـابع هـمساز، در داخـل حوزه ماکزیمم داشته باشد، با اضافه کردن $+\eta r^{2}$ به آن، می‌توانستیم تابعی با عامل مـثبت **لاپلاس** به دست آوریم که باز هم ماکزیممی در داخل داشته باشد؛ حکمی که ناممکن بودن آن را ثابت کرده‌ایم. بنابراین، تابع همساز نمی‌تواند در داخل حوزه به ماکزیمم مطلق برسد.

به همین ترتیب، ثابت می‌شود که تابع همساز، نمی‌تواند در داخل حوزه، می‌نیمم مطلق داشته باشد.

از قضیه‌ای که ثابت کردیم، نتیجهٔ مهمی به دست می‌آید. دوتابع همسازی که روی مرز حوزه، مقدارهای برابر قبول کنند، همه جا در داخل حوزه بر هم منطبق‌اند. در واقع، تفاضل این تابع‌ها (که خود یک تابع همساز است)، روی مرز حوزه به سمت صفر میل می‌کند و بنابراین، همه جا در داخل حوزه برابر صفر است.

همان‌طور که می‌بینیم، مقدارهای تابع همساز در مرز، به طور کامل ایـن تـابع را مـعین می‌کند. می‌توان ثابت کرد (ولی ما امکان بررسی تفصیلی آن را نداریم) کـه ایـن مـقدارهـا می‌توانند به دل‌خواه داده شده باشند، و همیشه می‌توان تابع همسازی که این مقدارهـا را قبول می‌کند، پیدا کرد.

اثبات این مطلب کمی دشوارتر است که توزیع درجهٔ حرارت برقرار شـده در جسـم را می‌توان به طور کامل معین کرد، به شرطی که جریان حرارت از هر عنصر سطح جسم، و یا قانونی که جریان گرما را با درجهٔ حرارت مربوط می‌کند، معلوم باشد. ما دوباره، و وقتی به بررسی روش‌های حل مسأله‌های فیزیک ـ ریاضی می‌پردازیم، به‌این موضوع برخواهیم گشت.

مسألهٔ مقدار مرزی برای معادلهٔ رسانایی گرما. مسألهٔ مربوط به پیدا کردن جواب معادلهٔ رسانایی گرما در حالت نامانا، از نوع دیگری است. از نظر فیزیکی روشن است که تنها مقدارهای درجهٔ حرارت در مرز یا تنها مقدارهای جریان حرارت در مرز، برای پیدا کردن جواب مسأله کافی

نیست. با وجود این، اگر در ضمن، توزیع درجهٔ حرارت در یک لحظهٔ نخستین معلوم باشد، مسأله قابل حل می‌شود. بنابراین، برای پیدا کردن جواب معادلهٔ انتقال حرارت (۸)، اغلب لازم و کافی است که تابع دل‌خواهی، مثل $T_{\circ}(x\ ,\ y\ ,\ z)$ ـ از توزیع نخستین درجهٔ حرارت ـ و همچنین تابع دل‌خواهی در مرز حوزه، داده شده باشد. و این، می‌تواند، مثل قبل، یا درجهٔ حرارت در سطح جسم، یا جریان حرارت از هر عنصر سطحی، و یا قانونی که مربوط به جریان حرارت است، باشد.

به این ترتیب، مسأله این‌طور مطرح می‌شود. جواب معادلهٔ (۸) را با شرط

$$T|_{t=\circ} = T_{\circ}(x\ ,\ y\ ,\ z) \qquad (۱۱)$$

و یکی از سه شرط

۱) $$T|_S = \varphi(Q) \qquad (۱۲)$$

۲) $$\frac{\partial T}{\partial n}|_S = \psi(Q) \qquad (۱۲')$$

۳) $$\alpha \frac{\partial T}{\partial n}|_S + \beta T|_S = \chi(Q) \qquad (۱۲'')$$

پیدا کنید (Q، نقطهٔ دل‌خواهی از سطح S است).

شرط (۱۱) را ***شرط اولیه*** و شرط‌های (۱۲) را ***شرط‌های مرزی*** یا ***حدی*** می‌نامند.

می‌توان ثابت کرد، هرمسأله‌ای از این قبیل، همیشه جواب معینی دارد. ولی ما، تنها به نخستین مسأله از این نوع توجه می‌کنیم و در ضمن حالتی را در نظر می‌گیریم که در داخل محیط، زایش گرما وجود نداشته باشد. ثابت می‌کنیم، معادلهٔ

$$\Delta T = \frac{۱}{a^{۲}} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$$

با شرط‌های

$$T|_{t=\circ} = T_{\circ}(x\ ,\ y\ ,\ z)$$
$$T|_S = \varphi(Q)$$

تنها یک جواب را می‌تواند قبول کند.

اثبات این حکم، خیلی نزدیک به اثباتی است که برای منحصر به فرد بودن جواب معادلهٔ **لاپلاس** آوردیم. قبل از همه ثابت می‌کنیم، اگر داشته باشیم:

$$\Delta T - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} < 0$$

در آن‌صورت تابع T، به عنوان تابعی از چهار متغیر x، y، z و t ($0 \le t \le t_0$)، یا در مرز حوزهٔ Ω مربوط به تغییر x، y و z و یا در داخل Ω می‌نیمم می‌شود. که در حالت اخیر، ناگزیر در لحظهٔ زمانی نخستین و به ازای $t=0$ خواهد بود.

در واقع، اگر جز این باشد، می‌نیمم T، در یک نقطهٔ داخلی، به‌دست می‌آید. دراین نقطه، همهٔ مشتق‌های اول، و از جمله $\frac{\partial T}{\partial t}$، برابر صفر می‌شود و اگر این می‌نیمم به ازای $t = t_0$ به دست آمده باشد، $\frac{\partial T}{\partial t}$، غیر منفی می‌شود. در همین نقطه، همهٔ مشتق‌های مرتبهٔ دوم نسبت به متغیرهای x، y و z غیرمنفی هستند. در نتیجه، $\Delta T - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial t}$ غیرمنفی می‌شود. به‌این ترتیب، به چنین مقدارهایی، نمی‌توان در حوزهٔ ما برخورد کرد.

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد، اگر داشته باشیم: $\Delta T - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} > 0$، در داخل Ω به ازای $0 < t \le t_0$، نمی‌تواند ماکزیمم تابع T وجود داشته باشد.

سرانجام در حالت $\Delta T - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ تابع T به ازای $0 < t \le t_0$ نمی‌تواند در داخل Ω، ماکزیمم یا می‌نیمم مطلق داشته باشد، زیرا اگر در مثل، تابع T دارای چنین می‌نیمم مطلقی باشد، در آن‌صورت، با اضافه کردن جملهٔ $\eta(t - t_0)$ و بررسی تابع $T_1 = T + \eta(t - t_0)$، وجود می‌نیمم مطلق، برای مقدارهای به اندازهٔ کافی کوچک η، از بین نمی‌رود، ولی در عین حال $\Delta T_1 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial t}$ منفی می‌ماند، و این ممکن نیست.

به همین ترتیب، نبودن ماکزیمم مطلق در حوزهٔ بررسی هم، ثابت می‌شود.

به این ترتیب، چه ماکزیمم و چه می‌نیمم مطلق درجهٔ حرارت، یا در لحظهٔ نخستین به‌ازای $t = 0$ به دست می‌آید و یا در مرز S از محیطی که بررسی می‌کنیم و اگر در لحظهٔ نخستین و در مرز داشته باشیم: $T = 0$، در این‌صورت اتحاد $T = 0$ را همه‌جا در داخل حوزه به‌ازای $t \le t_0$ خواهیم داشت. اگر مقدارهایی که برای دو توزیع درجهٔ حرارت T_1 و T_2 به‌ازای $t = 0$ و در مرز به دست می‌آید، یکی باشد، در این‌صورت تفاضل $T = T_1 - T_2$، در معادلهٔ رسانایی گرما صدق خواهد کرد و به ازای $t = 0$ و همچنین روی مرز، به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین، $T_1 - T_2$ همه جا برابر صفر می‌شود و هر دو توزیع درجهٔ حرارت T_1 و T_2، همه جا منطبق بر هم می‌شوند.

با بررسی روش اخیر حل معادلهٔ فیزیک ریاضی، متوجه می‌شویم که مقدارهای T به ازای $t = 0$ و طرف راست یکی از برابری‌های (۱۲) را می‌توان به دل‌خواه در نظر گرفت،

یعنی برای هر کدام از این‌گونه مسأله‌ها، جوابی وجود دارد.

انرژی نوسان و مسألهٔ نهائی برای معادلهٔ نوسان. حالا به بررسی شرط‌هایی می‌پردازیم که به ازای آن‌ها معادلهٔ سوم از معادله‌های اصلی فیزیک ریاضی، یعنی معادلهٔ (۹)، حل می‌شود.

برای سادگی کار، معادلهٔ نوسان سیم، یعنی $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ را در نظر می‌گیریم که به معادلهٔ (۹) نزدیک است و تنها در تعداد متغیرهای فضائی، با آن تفاوت دارد. در سمت چپ این معادله، مقدار $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ قرار دارد که شتاب نقطهٔ دل‌خواهی از سیم را بیان می‌کند. حرکت هر دستگاه مکانیکی، که در آن نیروی عمل کننده و بنابراین شتاب آن، برحسب مختصات جسمی که در آن حرکت وارد شده است بیان می‌شود، وقتی می‌تواند به طور کامل معین شود که وضع و سرعت اولیهٔ همهٔ نقطه‌های دستگاه معین باشد. به این ترتیب، طبیعی است که برای معادلهٔ نوسان سیم، وضع و سرعت همهٔ نقطه‌های دستگاه معین باشد. به این ترتیب، طبیعی است برای معادلهٔ نوسان سیم، وضع و سرعت همهٔ نقطه‌ها را در لحظهٔ نخستین داده باشند.

$$u|_{t=0} = u_0(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u_1(x)$$

به‌جز، همان‌طور که پیش از این هم گفتیم، عمل دستورهایی که قانون‌های مکانیک را برای نقطه‌های داخلی بیان می‌کنند، دربارهٔ دو انتهای سیم صدق نمی‌کند. بنابراین، برای هر دو انتها باید شرط‌های دیگری بدهیم. در مثل، اگر سیم در دو انتهای خود به طور ثابت، در حالت تعادل محکم شده باشد، خواهیم داشت:

$$u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$$

گاهی ممکن است این شرط‌ها به صورت دیگری که کلی‌ترند، در آیند؛ ولی، این یک تغییر اساسی نیست.

مسألهٔ پیدا کردن جواب‌های لازم معادلهٔ (۹) هم، به همین وضع است. برای این‌که چنین جوابی معین باشد، اغلب

$$p|_{t=0}=\varphi_0(x,y,z) \qquad (۱۳)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}|_{t=0}=\varphi_1(x,y,z) \qquad (۱۳')$$

و همچنین، یکی از «شرط‌های نهائی»

$$p|_S=\varphi(Q) \qquad (۱۴)$$

$$\frac{\partial p}{\partial n}|_S=\psi(Q) \qquad (۱۴')$$

$$\alpha\frac{\partial p}{\partial n}|_S+\beta p|_S=\chi(Q) \qquad (۱۴'')$$[1]

داده می‌شود.اختلافی که با حالت قبل دارد، در این است که به جای یک شرط اولیه، در معادلهٔ (۱۱)، دو معادلهٔ (۱۳) را داریم.

روشن است معادله‌های (۱۴)، بیانی از قانون‌های فیزیکی ذره‌هایی هستند که در مرز حجم مورد بررسی قرار دارند.

به اثبات این حکم نمی‌پردازیم که در حالت کلی، معادله (۱۳) همراه با هر کدام از معادله‌های (۱۴)، جواب منحصری از مسأله را معین می‌کنند. ثابت می‌کنیم، چنین جوابی می‌تواند برای یکی از شرط‌های (۱۴) منحصر باشد.

فرض می‌کنیم تابع u در معادلهٔ

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial t^2}$$

و شرط اولیهٔ

$$u|_{t=0}=0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0}=0$$

و شرط مرزی

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_S=0$$

صدق کند (به همین ترتیب، می‌توان حالت $u|_S=0$ را هم توضیح داد).

ثابت می‌کنیم، با این شرطها، تابع u هم متحد با صفر می‌شود.

---

۱. در حالتی که سمت راست شرط‌های (۱۳) و (۱۴) برابر صفر باشند، این شرط‌ها را «همگن» گویند.

برای اثبات این ویژگی، که دو مسألهٔ اول دارای جواب منحصرند، هنوز آمادگی نداریم. با وجود این، در این‌جا می‌توانیم از تعبیر فیزیکی موضوع یاری بطلبیم.

به کمک قانون دیگری از فیزیک ـ یعنی «قانون بقای انرژی» ـ هم نیاز داریم. برای سادگی کار، سیم در حال نوسانی را در نظر می‌گیریم که جابه‌جائی نقطه‌های $u(x\,,\,t)$ آن در معادلهٔ

$$T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

صدق کند. انرژی سینتیک هر جزء در حال نوسان سیم، از x تا $x+dx$، به این‌صورت بیان می‌شود:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\rho dx$$

سیم، در حالت انحرافی، به‌جز انرژی سینتیک، دارای انرژی پتانسیلی هم می‌باشد که موجب کشش آن نسبت به حالت مستقیم می‌شود. عنصری از سیم را بین نقطه‌های x و $x+dx$ در نظر می‌گیریم. این عنصر، نسبت به محور Ox، وضع منحرفی دارد که در ارتباط با آن، طولی به تقریب برابر $\sqrt{dx^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)^2}$ و افزایش طولی برابر

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\,dx - dx \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

دارد. با ضرب این ازدیاد طول در نیروی کشش T، انرژی پتانسیلی عنصر دراز شدهٔ سیم، به این صورت به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}\,T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

انرژی کل یک سیم به طول l، از راه جمع کردن انرژی سینتیک و انرژی پتانسیل در همهٔ نقطه‌های سیم به دست می‌آید. به این ترتیب، خواهیم داشت:

$$E=\frac{1}{2}\int_0^l\left[T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx$$

اگر نیروهایی که در دو انتهای سیم وجود دارد، وارد عمل نشوند، و از جمله در حالت خاصی که دو انتهای سیم محکم شده باشد، انرژی کل سیم باید ثابت باقی بماند.

به این ترتیب، این معادله به دست می‌آید:

$$E=C \qquad \text{(مقدار ثابت)}$$

قانون بقای انرژی، که به این ترتیب به دست آمد، یک نتیجه‌گیری ریاضی از معادله‌های اصلی مکانیک است و می‌تواند به عنوان استنباطی از این معادله‌ها تلقی شود. از آن‌جا که قانون‌های حرکت را به صورت معادلهٔ دیفرانسیلی نوسان‌های سیم و شرط‌هایی که مربوط به دوانتهای آن است، نوشته‌ایم، می‌توانیم اثبات ریاضی خود قانون بقای انرژی را در این حالت به دست آوریم. در واقع، اگر بنابر قانون‌های کلی، از E نسبت به زمان، دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{dE}{dt}=\int_{\circ}^{l}\left[T\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\partial t}+\rho\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}\right]dx$$

با استفاده از معادلهٔ موجی (۶) و تغییر $\rho\frac{\partial^{۲}u}{\partial t^{۲}}$ به $T\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}$، مقدار $\frac{dE}{dt}$ به این صورت در می‌آید:

$$\frac{dE}{dt}=\int_{\circ}^{l}T\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^{۲}u}{\partial x\partial t}\right)+\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial^{۲}u}{\partial x^{۲}}\right]dx=$$

$$=\int_{\circ}^{l}T\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\right)dx=T\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=l}-T\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{x=\circ}$$

اگر $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=\circ}$ یا $u\big|_{x=\circ}$ صفر باشد و به‌جز آن $\frac{\partial u}{\partial x}\big|_{x=l}$ یا $u\big|_{x=l}$ هم صفر باشد، به دست می‌آید:

$$\frac{dE}{dt}=\circ$$

که به معنای اثبات ثابت بودن مقدار E است.

دربارهٔ معادلهٔ موجی (۹) هم، درست به همین‌ترتیب، می‌توان قانون بقای انرژی را ثابت کرد. اگر p در معادلهٔ (۹) و شرط

$$p|_S=\circ \quad \text{یا} \quad \frac{\partial p}{\partial n}\Big|_S=\circ$$

صدق کند، در این‌صورت مقدار

$$E=\iiint\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^{۲}+\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^{۲}+\frac{۱}{a^{۲}}\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^{۲}\right]dxdydz$$

مستقل از t خواهد بود.

اگـر در لحظهٔ اولـیهٔ زمـان، انرژی کل نوسان برابر صفر باشد، این‌انرژی همیشه بـرابـر صفـر می‌ماند، و ایـن وضع هم تـنها در حالتی ممکن است که هیچ حرکتی اتـفاق نـیفتاده باشد. اگر مسألهٔ مربوط به انتگرال‌گیری معادلهٔ موجی با شـرط‌های مـرزی، مـنجر بـه دو جـواب p_1 و p_2 بشـود، در آن‌صـورت تفاضـل آن‌ها، یعنی $v=p_1-p_2$، جوابی از مـعادلهٔ موجی خواهد بود که در شرط‌ها، با سمت راست برابرصفر، یعنی شرط‌های همگن، صدق می‌کند.

ولـی در این‌صـورت، با تشکیل «انـرژی» ایـن نـوسان‌ها، کـه بـا تـابعی از v شـرح داده مـی‌شود، به ایـن نتیجه می‌رسـیم که ایـن انـرژی $E(v)$ در لحظهٔ اولیهٔ زمان برابر صفر است، و ایـن به معنـای آن اسـت که انـرژی همیشه برابر صفر است، یعنی تابع v متحـد با صـفر است و دو جواب p_1 و p_2 برهم منطبق‌اند. به این ترتیب، جواب معادله، مـنحصر بـه فـرد است.

بنابراین، معلوم می‌شود که برای هر سه معادله‌ای که بررسی می‌کنیم، مسأله را به درستی طرح کرده بودیم.

در ضمن توانستیم بعضی ویژگی‌های سادهٔ جواب‌های این معادله‌ها را هم مطالعه کنیم. جواب‌های معادلهٔ لاپلاس، که در دامنه بررسی ما قرار گرفت، دارای ویژگی ماکزیمم بودند: تابع‌هایی که در این معادله‌ها صدق می‌کند، در مرزهای حوزهٔ وجود خود، به مـقدارهـای حداکثر یا حداقل می‌رسند.

ویـژگی ماکـزیمم تابع‌هایی که تـوزیع گرمـا را در محیط شـرح مـی‌دهند بــه صـورت دیـگری است. همـهٔ ماکزیمـم یا می‌نیمم‌های درجـهٔ حـرارت در یـک نـقطـه، در جـریان زمـان پایین می‌آیـد و کم می‌شود. درجهٔ حرارت در یک نقطه، تنها وقتی می‌تواند بالا برود و یا پایین بیاید که درجهٔ حرارت نقطه‌های نزدیک به آن بالاتر یا پایین‌تر از درجــهٔ حــرارت نـقطهٔ مــورد بـررسی مـا بـاشد. نـقشهٔ حـرارتـی، بـا جـریان زمـان، سـازگاری دارد. هـمهٔ ناهمواری‌های آن، به خاطر جریان گرما از نقطه‌های گرم به طرف نقطه‌های سرد، هموار و متعادل می‌شود.

هیچ تعادلی، ضمن انتشار نوسان‌ها به وقوع نمی‌پیوندد که غیر از آن چـیزی بـاشد کـه دربارهٔ انتشار حرکت دیدیم. برعکس، نوسانی که وجود دارد، خودبه‌خود، قطع و تضعیف نمی‌شود، در ضمن، مجموع انرژی‌های سینتیک و پتانسیل نوسان، همیشه مقدار ثابتی باقی می‌ماند.

۴. انتشار موج

ویژگی‌های نوسان را می‌توان روی مثال‌های ساده‌ای روشن کرد. دو مثال نمونه‌ای را بررسی می‌کنیم.

به عنوان نخستین مثال از این نوع، معادلهٔ نوسان سیم را می‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (15)$$

می‌توان آزمایش کرد که این معادله، دو جواب خاص به صورت

$$u_1=\varphi_1(x-at) \quad , \quad u_2=\varphi_2(x+at)$$

دارد، که در آن، φ_1 و φ_2 عبارت‌اند از تابع‌های دل‌خواهی که دوبار قابل دیفرانسیل‌گیری هستند.

به کمک دیفرانسیل‌گیری مستقیم، به سادگی معلوم می‌شود که u_1 و u_2 در معادلهٔ (۱۵) صدق می‌کنند. می‌توان ثابت کرد که

$$u=u_1+u_2$$

جواب کلی این معادله است.

تصویر نوسان‌هایی که تابع‌های u_1 و u_2 را شرح می‌دهد، بسیار جالب است. برای این‌که بتوانیم این تصویر را ساده‌تر بررسی کنیم، این آزمایش ذهنی را انجام می‌دهیم. فرض می‌کنیم ناظری که نوسان سیم را مطالعه می‌کند بی‌حرکت نایستاده باشد، بلکه در جهت محور Ox و با سرعت a، حرکت کند. برای چنین ناظری، وضع نقطه‌های سیم در یک دستگاه مختصات متحرک (و نه دستگاه ساکن مختصات)، معین می‌شود. ξ را مختص x در این دستگاه، می‌گیریم. روشن است که نقطهٔ $\xi=0$ در هر لحظهٔ زمانی، با $x=at$ متناظر است. از این‌جا معلوم می‌شود که

$$\xi=x-at$$

تابع دل‌خواه $u(x\,,\,t)$ را می‌توان به صورت

$$u(x,t)=\varphi(\xi,t)$$

در نظر گرفت. برای جواب‌های u_1، داریم:

$$u_1(x,t)=\varphi_1(\xi)$$

و بنابراین، جواب $u_1(x\,,\,t)$، در این دستگاه مختصاتی، بستگی به زمان ندارد. به این ترتیب، برای ناظری که با سرعت a حرکت می‌کند، مثل این است که سیم، به صورت تغییر شکل یافتهٔ خود، در حالت بی‌حرکت منجمد شده است. برای نوسان بی‌حرکت هم، موج در طول سیم، با سرعت a و در جهت محور Ox، حرکت می‌کند.

به همین ترتیب، جواب $u_2(x\,,\,t)$ را هم می‌توان به عنوان موجی که با سرعت a و در جهت عکس حرکت می‌کند، در نظر گرفت.

اگر سیم را نامحدود در نظر بگیریم، هر دو موج به طور نامحدود دور می‌شوند و ضمن حرکت در جهت‌های مختلف، می‌توانند تصویرهای عجیب و جالبی به وجود آورند. وقتی دو موج از حالت ترکیبی جدا می‌شوند، گاهی افزایش می‌یابند و گاهی ناپدید می‌شوند.

اگر u_1 و u_2، که از جهت‌های مختلف به نقطه‌ای می‌رسند، یک علامت داشته باشند، انحراف تقویت می‌شود و اگر علامت‌های مختلف داشته باشند، انحراف کاهش می‌یابد. در شکل ۳، چند وضع متوالی سیم، برای دو حالت خاص اختلال، داده شده است. موجها در ابتدا به‌طور مستقل به‌طرف یکدیگر می‌روند و سپس عبور از یکدیگر آغاز می‌شود. در حالت دوم، لحظه‌ای وجود دارد که نوسان به کلی از بین می‌رود و بعد از آن دوباره پدیدار می‌شود. همهٔ این موجها به سادگی دیده می‌شود.

مثال دیگری که قابل بررسی کیفی است، عبارت است از انتشار موج در فضا.

معادلهٔ

$$\Delta u=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{۱۶}$$

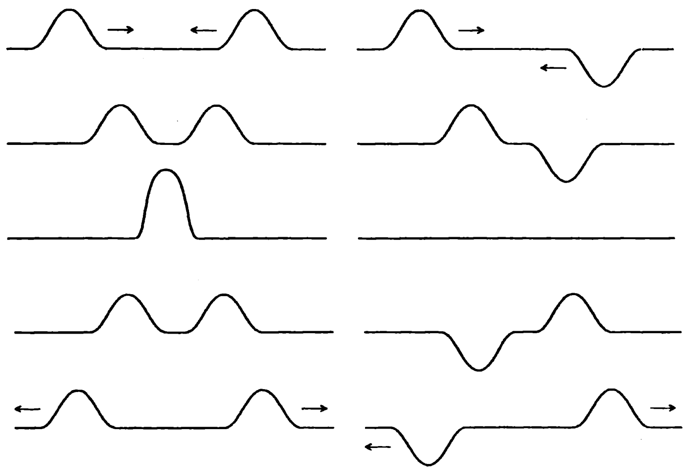
که پیش از این هم از آن صحبت کردیم، دارای دو جواب خاص به صورت

$$u_1=\frac{1}{r}\varphi_1(r-at)\quad,\quad u_2=\frac{1}{r}\varphi_2(r+at) \tag{۱۷}$$

است که در آن، r عبارت است از فاصلهٔ مبداء مختصات تا نقطهٔ مفروض $r^2=x^2+y^2+z^2$ و φ_1 و φ_2، تابع‌های دل‌خواهی که قابل دیفرانسیل‌گیری مرتبهٔ دوم هستند.

آزمایش این‌که u_1 و u_2 جواب هستند، وقت زیادی می‌گیرد و ما به آن نمی‌پردازیم.

تصور موج‌هایی که با این جواب‌ها شرح داده می‌شوند، به طور کلی همان چیزی است که دربارهٔ سیم وجود داشت. اگر به $\frac{1}{r}$ که در سمت راست قرار دارد توجهی نکنیم، جواب



شکل ۳

اول، موجی را تشکیل می‌دهد که در جهت r صعودی، حرکت می‌کند، این موج، تقارن کره‌ای دارد؛ درنقطه‌هایی که در آن‌ها، مقدار r یکی است، روند کار به‌یک شکل جریان دارد.

ضریب $\frac{1}{r}$ به‌این‌جا منجر می‌شود که دامنهٔ موج، به نسبت عکس فاصلهٔ تا مبداء مختصات، کم می‌شود. چنین نوسانی را، نوسان موج کروی واگرا گویند. بهترین تصوری را که در این باره می‌توان کرد، مربوط به موج‌های دایره‌ای شکلی است که با انداختن سنگ بر سطح آب ایجاد می‌شود. تنها اختلافی که در این‌جا موجود دارد این است که در این حالت، موج‌ها به‌جای کروی، دایره‌ای شکل هستند.

جواب دوم (۱۷) هم معنای بسیار جالبی دارد؛ در این‌جا موج به اصطلاح همگرا وجود دارد که به‌طرف مبداء مختصات حرکت می‌کند. دامنهٔ آن، در جریان زمان و نسبت به‌نزدیکی آن به مبداء تا بی‌نهایت بزرگ می‌شود. همان‌طور که می‌بینیم، چنین تمرکزی می‌تواند نوسان‌هایی را که در ابتدا کوچک هستند، در یک نقطه جمع و موجی بلند ایجاد کند.

۵. روش‌های به دست آوردن جواب‌ها

امکان تبدیل هر جواب به جواب‌های ساده‌تر. جواب‌های مسأله‌های فیزیک ریاضی را، که دربالا منظم کرده‌ایم، می‌توان از راه‌های مختلف به‌دست آورد. روش‌هایی که برای حل آن‌ها به کار

می‌رود، اختصاصی است. با وجود این، مبنای همهٔ این روشها، یک اندیشهٔ کلی است. همان طور که دیدیم، همهٔ معادله‌های فیزیک ریاضی، برای مقدارهای کوچک تابع مجهول، نسبت‌به‌تابع و مشتق‌های آن، خطی است. شرط‌های اولیه و شرط‌های نهایی هم، خطی هستند.

اگر اختلاف دو جواب دل‌خواه یک معادله را تشکیل دهیم، این اختلاف هم جوابی از همین معادله است، ولی با جملهٔ ثابتی برابر صفر. چنین معادله‌ای را، معادلهٔ همگن مربوط گویند (از جمله، برای معادلهٔ *پواسون* $\Delta u = -4\pi\rho$، معادلهٔ همگن مربوط، عبارت است از معادلهٔ **لاپلاس**، یعنی $\Delta u = 0$).

اگر دو جواب یک معادله، و با یک شرط مرزی، وجود داشته باشد، اختلاف آن‌ها هم در شرط همگن مربوط صدق می‌کند: برای آن، مقدار عبارت مربوط در مرز برابر با صفر است.

به این ترتیب، همهٔ جواب‌های مختلف چنین معادلهٔ با شرط‌های مرزی مفروض را، می‌توان از راه اضافه کردن همهٔ جواب‌های ممکن معادلهٔ همگن که در شرط مرزی همگن صدق می‌کند، به‌هر جواب خاصی که در معادلهٔ مفروض ناهمگن صدق می‌کند (ولی، در حالت کلی، در شرط اولیه صدق نمی‌کند)، به دست آورد.

جواب‌های معادله‌های همگن را، که در شرط همگنی صدق می‌کنند، می‌توان با مقدار ثابتی جمع و یا در مقدار ثابتی ضرب کرد و دوباره جواب‌های مشابهی به دست آورد.

اگر جواب معادلهٔ همگن با شرط‌های همگن، تابعی از یک پارامتر باشد، با انتگرال‌گیری نسبت به این پارامتر، دوباره به چنین جواب‌هایی می‌رسیم. براین اساس، مهمترین روش حل انواع مسأله‌های خطی برای معادله‌های فیزیک ریاضی، **روش ترکیب** است.

جواب مسئله را به صورت

$$u = u_0 + \sum_k u_k$$

می‌نویسند که در آن، u_0 عبارت است از جواب خاصی که در شرط مرزی صدق می‌کند، ولی در شرط اولیه صدق نمی‌کند، و u_k عبارت است از بعضی جواب‌های معادلهٔ همگن مربوط، که در شرط مرزی همگنی صدق می‌کنند. اگر از همان ابتدا، هم معادله و هم شرط مرزی، همگن باشند، جواب مسأله را می‌توان به این‌صورت نوشت:

$$u = \sum u_k$$

برای این‌که امکان تامین شرط اولیهٔ دل‌خواه را، به کمک انتخاب جواب‌های خاص معادلهٔ همگن u_k، داشته باشیم، باید به اندازهٔ کافی به سراغ تعداد زیادی از این‌گونه جواب‌ها برویم.

روش جداکردن متغیرها. برای ساختن گروهی که برای جواب‌های یاد شده نیاز داریم، روشی وجود دارد که ***روش جدا کردن متغیرها*** و یا ***روش فوریه*** نامیده می‌شود.

این روش را به تفصیل روی مثال حل مسألهٔ

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{18}$$

$$u|_S = 0 \quad , \quad u|_{t=0} = f_0(x, y, z) \quad , \quad u_t|_{t=0} = f_1(x, y, z)$$

تجزیه و تحلیل می‌کنیم.

ضمن جست‌وجوی جواب خاص معادله، قبل از همه فرض می‌کنیم تابع مجهول u در شرط نهایی $u|_S = 0$ صدق می‌کند و عبارت است از حاصل‌ضرب دو تابع، که یکی از آن‌ها تنها به زمان t و دیگری به متغیرهای فضایی بستگی دارد:

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z)T(t)$$

این جواب را در معادله قرار می‌دهیم، به دست می‌آید:

$$T(t)\Delta U = T''(t)U$$

دو طرف را به TU تقسیم می‌کنیم، به این برابری می‌رسیم:

$$\frac{T''}{T} = \frac{\Delta U}{U}$$

در سمت راست این برابری، تابعی وجود دارد که تنها به متغیرهای فضایی بستگی دارد، و در سمت چپ، مقداری که مستقل از مختصات فضایی است. از این‌جا نتیجه می‌شود، این برابری، تنها وقتی می‌تواند درست باشد که هم در سمت راست و هم در سمت چپ، مقدارهای ثابتی وجود داشته باشد. به این ترتیب، به دستگاهی از دو معادله می‌رسیم:

$$\frac{T''}{T} = -\lambda_k^2 \quad , \quad \frac{\Delta U}{U} = -\lambda_k^2$$

مقدار ثابتی را که در سمت راست قرار گرفته است، به‌این جهت به $-\lambda_k^2$ نشان داده‌ایم که بر منفی بودن آن تاکید کرده باشیم (و این مطلب را می‌توان با دقت ثابت کرد). نشانهٔ k را به این مناسبت وارد کرده‌ایم تا یادآور این باشد که مجموعه‌ای بی‌پایان از مقدارهای ممکن $-\lambda_k^2$ به دست می‌آید، در ضمن جواب‌های متناظر با آن، با مفهوم روشنی، دستگاه کامل تابع‌ها را تشکیل می‌دهد.

اگر مخرج را در هر دو معادله از بین ببریم، به دست می‌آید:

$$T'' + \lambda_k^2 T = 0 \ , \ \ \Delta U + \lambda_k^2 U = 0$$

معادلهٔ اول، همان‌طور که می‌دانیم، جواب ساده‌ای دارد.

$$T = A_k \cos \lambda_k t + B_k \sin \lambda_k t$$

که در آن A_k و B_k مقدارهای ثابت دل‌خواهی هستند. این جواب را به کمک وارد کردن زاویهٔ کمکی φ، می‌توان باز هم ساده‌تر کرد. فرض می‌کنیم

$$\frac{A_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}} = \sin \varphi_k \quad , \quad \frac{B_k}{\sqrt{A_k^2 + B_k^2}} = \cos \varphi_k \ , \ \ \sqrt{A_k^2 + B_k^2} = M_k$$

در این‌صورت خواهیم داشت:

$$T = \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \ \sin (\lambda_k t + \varphi_k) = M_k \sin (\lambda_k t + \varphi_k)$$

تابع T عبارت است از نوسان همسازی (هارمونیک) که با بسامد λ_k و فاز φ_k حرکت می‌کند.

مسألهٔ مربوط به جست‌وجوی جواب معادلهٔ

$$\Delta U + \lambda_k^2 U = 0 \qquad (19)$$

هم دشوارتر و هم جالب‌تر است که باید با شرط‌های مرزی همگن مفروضی و از جمله به‌ازای شرط

$$U|_S = 0$$

(که در آن، S عبارت است از مرز حجم مورد بررسی Ω)، یا به ازای شرط همگن دیگری، در نظر گرفته شود. جواب این مسأله را همیشه نمی‌توان به سادگی به صورت تابع‌های معلومی مشخص کرد. با وجود این، چنین جواب‌هایی همیشه وجود دارند و می‌توان آن‌ها را با هر

دقتی که بخواهیم، حساب کرد.

معادله $\Delta U + \lambda_k^2 U = 0$، با شرط $U|_S = 0$، قبل از همه، جواب روشن $U \equiv 0$ را قبول دارد. این جواب بی‌معنی است و برای هدفی که داریم، هیچ فایده‌ای ندارد. اگر λ_k را عدد تصادفی دل‌خواه بگیریم، در حالت کلی، جواب‌های دیگری برای این مسأله وجود ندارد. با وجود این، چنان مقدارهایی برای λ_k پیدا می‌شود که به ازای آن‌ها، معادلهٔ ما دارای جواب معقولی باشد.

همهٔ مقدارهای ثابتی که می‌توان برای λ_k^2 به‌دست آورد درست از همین نیاز معین می‌شود که باید به ازای هر کدام از آن‌ها، معادلهٔ (۱۹) جوابی معقول داشته باشد که متحد با صفر نباشد و در شرط $U|_S=0$ هم صدق کند (و از همین‌جا معلوم می‌شود این مقدارها که با $-\lambda_k^2$ نشان داده‌ایم باید منفی باشند).

به ازای هر یک از مقدارهای ممکن λ_k، دست‌کم یک تابع U_k از معادلهٔ (۱۹) به دست می‌آید، که اجازه می‌دهد جواب خاص معادلهٔ موجی (۱۸) را، به این‌صورت بسازیم:

$$u_k = M_k \sin\,(\lambda_k t + \varphi_k)\, U_k(x, y, z)$$

چنین جوابی را، ***نوسان اختصاصی*** حجم مورد بررسی گویند. مقدار ثابت λ_k، بسامد نوسان خاص، و تابع $U_k(x, y, z)$، شکل آن را به ما می‌دهد. این تابع را هم ***تابع اختصاصی*** گویند. در همهٔ لحظه‌های زمانی، تابع u_k، به عنوان تابعی از متغیرهای x، y و z با تابع $U_k(x, y, z)$ تنها از نظر مقیاس، اختلاف خواهد داشت.

برای ما این امکان وجود ندارد که در این‌جا به تفصیل، همهٔ خاصیت‌های مهم نوسان‌های اختصاصی و تابع‌های اختصاصی را ثابت کنیم و تنها به ذکر آن‌ها می‌پردازیم.

نخستین خاصیت نوسان‌های اختصاصی این است که برای هر حجم، مجموعه‌ای بی‌پایان از بسامدهای نوسان‌های اختصاصی (یا آن‌طور که می‌گویند: بسامدهای اختصاصی) وجود دارد. این بسامدها، با زیاد شدن شمارهٔ k، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند.

خاصیت دوم نوسان‌های اختصاصی را خاصیت تعامدی (اورتوگونالیته) آن می‌گویند و عبارت است از این‌که اگر در حوزهٔ Ω از حاصل‌ضرب تابع‌های اختصاصی، که مربوط به λ_kهای مختلف هستند، انتگرال بگیریم، برابر صفر می‌شود[1].

---

۱. اگر یکی از مقدارهای λ متناظر با چند تابع (خطی و مستقل) U باشد، در این‌صورت، این مقدار λ در گروه ←

$$\iiint_{\Omega} U_k(x,y,z)\ U_j(x,y,z)\,dxdydz = \circ \qquad (j \neq k)$$

به ازای $j=k$، همیشه فرض می‌کنیم که

$$\iiint_{\Omega} U_k(x,y,z)^{\text{۲}}\,dxdydz = \text{۱}$$

به این نتیجه همیشه می‌توان رسید، زیرا اگر تابع $U_k(x\,,\,y,\,z)$ را در مقدار ثابت انتخابی متناظر ضرب کنیم، باز هم در معادلهٔ (۱۹) و شرط $U|_S = \circ$ صدق می‌کند.

سرانجام، ویژگی سوم نوسان‌های اختصاصی در این است که اگر حتی از یک مقدار λ_k هم صرف‌نظر نکنیم، به کمک تابع‌های اختصاصی $U_k(x\,,\,y\,,\,z)$ می‌توانیم تابع اختیاری $f(x\,,\,y\,,\,z)$ را با دقت لازم مشخص کنیم. تنها شرطی که برای تابع $f(x\,,\,y\,,\,z)$ لازم است، این است که در شرط مرزی $f|_S = \circ$ صدق کند و مشتق‌های اول و دوم آن، ناپیوستگی نداشته باشد. هر تابع $f(x\,,\,y\,,\,z)$ از اینگونه را می‌توان با رشتهٔ متقاربی نشان داد:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=\text{۱}}^{\infty} C_k U_k(x,y,z) \qquad (\text{۲۰})$$

خاصیت سوم تابع‌های اختصاصی این امکان اصولی را به‌وجود می‌آورد که هر تابع $f(x,y,z)$ را به صورت رشته‌ای از تابع‌های اختصاصی مسأله، نشان دهیم و سپس به کمک ویژگی دوم بتوانیم همهٔ ضریب‌های این رشته را معین کنیم. در واقع، اگر دو طرف برابری (۲۰) را در $U_j(x,y,z)$ ضرب و نسبت به تمامی حوزهٔ Ω انتگره کنیم، به دست می‌آید:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\ U_j(x,y,z)dxdydz = \sum_{k=\text{۱}}^{\infty} C_k \iiint U_k(x,y,z)\,U_j\,(x,y,z)\,dxdydz$$

در مجموعی که در طرف راست قرار گرفته است، همهٔ جمله‌هایی که در آن‌ها $k \neq j$، بنابر خاصیت تعامد از بین می‌روند و ضریب به ازای C_j برابر واحد می‌شود. بنابراین به دست می‌آید:

$$C_j = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)U_j\,(x,y,z)dxdydz$$

→

λ_kها یکبار به حساب می‌آید. شرط تعامد تابع‌ها، که متناظر با λ_kهای برابر است، می‌تواند متناظر با این تابع‌ها باشد.

ویژگی‌هایی که برای نوسان‌های اختصاصی برشمردیم، به ما اجازه می‌دهند، مسألهٔ کلی مربوط به نوسان‌ها را به ازای هرگونه شرط‌های اولیه، حل کنیم.

برای این منظور، حل این مسأله را بررسی می‌کنیم:

$$u = \sum U_k(x,y,z)(A_k \cos \lambda_k t + B_k \sin \lambda_k t) \qquad (۲۱)$$

کوشش می‌کنیم ضریب‌های A_k و B_k را طوری پیدا کنیم که داشته باشیم:

$$[u]_{t=0} = f_0(x,y,z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_1(x,y,z)$$

اگر درسمت راست (۲۱) فرض کنیم $t = 0$، می‌بینیم که جمله‌های شامل سینوس از بین می‌روند و $\cos\lambda_k t$ برابر واحد می‌شود و در نتیجه به دست می‌آید:

$$f_0(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k U_k(x,y,z)$$

براساس ویژگی سوم نوسان‌های اختصاصی معلوم می‌شود که چنین تصوری ممکن است، و بنابر ویژگی دوم داریم:

$$A_k = \iiint_{\Omega} f_0(x,y,z)\, U_k(x,y,z)\, dxdydz$$

به همین ترتیب، از دستور (۲۱) نسبت به t دیفرانسیل می‌گیریم و فرض می‌کنیم $t = 0$، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_1(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (B_k \cos \lambda_k t - A_k \sin \lambda_k t)\big|_{t=0} U_k(x,y,z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k B_k U_k(x,y,z)$$

و از این جا، مثل قبل، مقدار B_k را به دست می‌آوریم:

$$B_k = \frac{1}{\lambda_k} \iiint_{\Omega} f_1(x,y,z)\, U_k(x,y,z)\, dxdydz$$

با در دست داشتن A_k و B_k، هم دامنه و هم فاز هرنوسان اختصاصی در دسترس ما خواهد بود.

به این ترتیب، ثابت کردیم که، با جمع کردن نوسان‌های اختصاصی، می‌توان کلی‌ترین جواب مسأله را با شرط‌های مرزی همگن، به دست آورد.

بنابراین، جواب از نوسان‌های اختصاصی تشکیل می‌شود، با در دست داشتن شرط‌های اولیه می‌توان دامنه و فاز هر کدام از آن‌ها را پیدا کرد.

به همین ترتیب می‌توان نوسان‌ها را، در حالت‌هایی که تعداد متغیرهای مستقل کمترند، مطالعه کرد. به عنوان مثال، نوسان‌های سیمی را بررسی می‌کنیم که در دو انتهای خود، محکم شده باشد. معادلهٔ نوسان‌های سیم، به این صورت است:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial t^۲}=a^۲\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}$$

فرض کنید در جست‌جوی جواب مسأله‌ای باشیم که در آن، سیمی به طول l در دو انتها محکم شده باشد.

$$u\,|_{x=۰}=u\,|_{x=l}=۰$$

دوباره گروه جواب‌های خاص را جست‌وجو می‌کنیم

$$u_k=T_k(t)\,U_k(x)$$

روشن است که با استدلالی شبیه قبل، به دست می‌آید:

$$T''_kU_k=a^۲\,U''_k\,T_k$$

و یا

$$\frac{T''_k}{T_k}=a^۲\frac{U''_k}{U_k}=-\lambda_k^۲$$

و از آن جا

$$T_k=A_k\cos\lambda_k t+B_k\sin\lambda_k t$$
$$U_k=M_k\cos\frac{\lambda_k}{a}x+N_k\sin\frac{\lambda_k}{a}x$$

از شرط‌های مرزی، برای پیداکردن مقدارهای λ_k، استفاده می‌کنیم. از شرط $U_k|_{x=۰}=۰$ به دست می‌آید: $M_k=۰$ یعنی $U_k=N_k\sin\frac{\lambda_k}{a}x$. اگر $x=l$ قرار دهیم، به دست می‌آید:

$\sin\frac{\lambda_k}{a}=0$. و این تنها وقتی ممکن است که داشته باشیم: $\frac{\lambda_k l}{a}=k\pi$، که در آن، k عددی است درست. یعنی

$$\lambda_k=\frac{ak\pi}{l}$$

شرط $\int_0^l U_k^2 dx=1$ می‌دهد:

$$N_k=\sqrt{\frac{2}{l}}$$

$$U_k(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}\ ,\ T_k=A_k\cos\frac{ak\pi t}{l}\ B_k\sin\frac{ak\pi t}{l}$$

به این ترتیب، نوسان‌های اختصاصی سیم، به‌شکل سینوسوئید هستند که تعداد نیم‌دورهای آن در تمامی سیم، عددی درست است. هر نوسان، بسامد خودش را دارد، در ضمن این بسامدها را می‌توان به ردیف صعودی، منظم کرد:

$$\frac{a\pi}{l}\ ,\ 2\frac{a\pi}{l}\ ,\ 3\frac{a\pi}{l}\ ,\ \ldots\ ,\ k\frac{a\pi}{l}\ ,\ \ldots$$

به خوبی روشن است که ما همین بسامدها را به ازای نوسان‌های سیم‌های صوتی می‌شنویم. بسامد $\frac{a\pi}{l}$ را ***بسامد تُنِ اصلی*** و همهٔ بسامدهای دیگر را ***تـن فـرعی*** گـویند. عـلامت تـابع اختصاصی $\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}$ در فاصلهٔ $0\leq x\leq l$، به اندازهٔ $(k-1)$ بار تغییر می‌کند. در واقع، در این ضمن، $\frac{k\pi x}{l}$ از مقدارهای 0 تا $k\pi$ می‌گذرد و بنابراین سینوس آن، می‌تواند $(k-1)$ بار تغییر علامت بدهد. نقطه‌هایی که در آن‌جا، تـابع اخـتصاصی U_k صـفر مـی‌شود، ***گـره‌های*** نوسان نامیده می‌شود.

اگر به ترتیبی سیم را واداریم که در نقطهٔ گرهی، و از جمله نخستین تُن فرعی، بی‌حرکت بماند، در آن‌صورت، تُن اصلی از بین می‌رود و تنها صدای نخستین تُن فرعی را، که اکتاو بیشتری دارد، می‌شنویم. از این روش در نواختن سازهای آرشه‌دار موسیقی، مثل ویولون و ویولون سِل استفاده می‌کنند.

ما روش جداسازی متغیرها را روی نمونه مسأله‌های مربوط به نوسان‌های اختصاصی، بررسی کردیم. با وجود این، این روش کاربرد بسیار گسترده‌تری دارد: از این روش می‌توان برای حل مسأله‌های مربوط به انتقال گرما و بسیاری از مسأله‌های گوناگون دیگر، استفاده کرد.

برای معادلهٔ انتقال گرما

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial t}$$

با شرط‌های

$$T|_S = ۰$$

درست مثل قبل، خواهیم داشت:

$$T = \sum F_k(t)\, U_k(x, y, z)$$

و در ضمن

$$\frac{F_k'(t)}{F_k(t)} = -\lambda_k^۲ \qquad , \qquad \Delta U_k + \lambda_k^۲ U_k = ۰$$

جواب، به این صورت به دست می‌آید:

$$T = \sum_{k=۱}^{\infty} e^{-\lambda_k^۲ t}\, U_k(x,y,z)$$

از همین روش می‌توان با موفقیت زیاد برای حل بعضی از معادله‌های دیگر هم، استفاده کرد. برای نمونه معادلهٔ لاپلاس را در نظر می‌گیریم:

$$\Delta u = ۰$$

در دایرهٔ

$$x^۲ + y^۲ \leq ۱$$

و فرض می‌کنیم که بخواهیم جوابی را پیدا کنیم که در شرط

$$u|_{r=۱} = f(\vartheta)$$

صدق می‌کند که در آن r و ϑ، مختصات قطبی نقطه‌ای از صفحه است.

معادلهٔ لاپلاس را، بدون هیچ زحمتی، می‌توان به مختصات قطبی برد. این معادله در مختصات قطبی چنین می‌شود:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial r^۲} + \frac{۱}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{۱}{r^۲} \cdot \frac{\partial^۲ u}{\partial \vartheta_۲} = ۰$$

دوباره، جواب این معادله را به صورت

$$u=\sum_{k=1}^{\infty} R_k(r)\theta_k(\vartheta)$$

جست‌وجو می‌کنیم. با توجه به این‌که هر جملهٔ رشته باید به طور جداگانه در معادله صدق کند، به دست می‌آوریم:

$$\left[R_k''(r)+\frac{1}{r}R_k'(r)\right]\theta_k(\vartheta)+\frac{1}{r^2}\theta_k''(\vartheta)R_k(r)=0$$

با تقسیم معادله به $\frac{R_k(r)\theta_k(\vartheta)}{r^2}$ به دست می‌آید:

$$\frac{r^2\left[R_k''(r)+\frac{1}{r}R_k'(r)\right]}{R_k(r)}=-\frac{\theta_k''(\vartheta)}{\theta_k(\vartheta)}$$

دوباره فرض می‌کنیم:

$$\frac{\theta_k''(\vartheta)}{\theta_k(\vartheta)}=-\lambda_k^2$$

در این‌صورت

$$r^2\left[R_k''+\frac{1}{r}R_k'\right]-\lambda_k^2R_k=0$$

به سادگی دیده می‌شود که تابع $\theta_k(\vartheta)$ باید تابع متناوبی از ϑ با دورهٔ تناوب 2π باشد. با انتگرال‌گیری از معادله $\theta_k''(\vartheta)+\lambda_k^2\theta_k(\vartheta)=0$، به دست می‌آید:

$$\theta_k=a_k\cos\lambda_k\vartheta+b_k\sin\lambda_k\vartheta$$

این تابع، تنها وقتی با دورهٔ تناوب لازم، متناوب است که λ_k ، عددی درست باشد. با فرض $\lambda_k=k$ خواهیم داشت

$$\theta_k=a_k\cos k\vartheta+b_k\sin k\vartheta$$

معادله، برای R_k، جواب کلی به این صورت دارد:

$$R_k=Ar^k+\frac{B}{r^k}$$

اگر تنها جمله‌ای را که به ازای $r\to 0$ کران‌دار است، نگه داریم، جواب کلی معادلهٔ لاپلاس به این صورت به دست می‌آید:

$$u = a_۰ + \sum_{k=۱}^{\infty} (a_k \cos k\vartheta + b_k \sin k\vartheta) r^k$$

اغلب از همین روش، برای پیدا کردن جواب‌های به‌دردبخوری از معادلهٔ $\Delta U_k + \lambda_k^۲ U_k = ۰$ هم که در شرط مرزی همگن صدق کنند، استفاده می‌کنند. در حالتی که با این روش بتوان مسأله را به حل معادله‌های دیفرانسیلی عادی منجر کرد، می‌گویند مسأله، جداسازی کامل متغیرها را اجازه داده است. ***و. و. سته‌پانوف***، ریاضی‌دان شوروی، ثابت کرده است تنها در بعضی از حالت‌های خاص می‌توان، جداسازی کامل متغیرها را با روش **فوریه** به‌دست آورد. روش جداسازی متغیرها، مدت‌هاست در مرکز توجه ریاضی‌دانان است و حتی ***اولر***، ***برنولی*** و ***دالامبر*** هم از آن استفاده می‌کرده‌اند. **فوریه**، از این روش برای حل مسأله‌های فیزیک ریاضی و به خصوص مسأله‌های مربوط به انتشار گرما به طور مرتب استفاده می‌کرد. با همهٔ این‌ها، همان‌طور که دیدیم، در بسیاری حالت‌ها، این روش را نمی‌توان به کار برد و به ناچار باید روش‌های دیگری پیدا کرد که ما هم اکنون درباره آن‌ها گفت‌وگو خواهیم کرد.

روش پتانسیل‌ها. این روش هم، مثل روش قبلی، براساس ترکیب جواب‌های خاص، برای جست‌وجوی جواب به‌صورت کلی، قرار دارد. در این‌جا، به عنوان جواب‌های خاص مقدماتی، از جواب‌هایی استفاده می‌شود که در نقطه‌ای از فضا، به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند. برای این‌که چگونگی کار روشن شود، این روش را دربارهٔ معادله‌های **لاپلاس** و ***پواسون*** به کار می‌بریم.

$M_۰$ را، نقطه‌ای از فضای خود در نظر می‌گیریم. فاصلهٔ نقطهٔ $M_۰$ را، تا نقطهٔ متغیر دیگری مثل M، به $r(M\,,\ M_۰)$ نشان می‌دهیم. تابع

$$\frac{۱}{r(M\,,\ M_۰)}$$

با ثابت بودن نقطهٔ $M_۰$، تابعی از نقطهٔ متغیر M خواهد بود. به سادگی معلوم می‌شود، این تابع، تابعی همساز (هارمونیک) از نقطهٔ M در تمامی فضاست[۱]، به‌جز درخود نقطهٔ $M_۰$، که در آن‌جا هم خود تابع و هم مشتق‌های آن بی‌نهایت می‌شوند. مجموع تابع‌هایی

۱. یعنی در معادلهٔ **لاپلاس** صدق می‌کند.

به‌این‌صورت هم

$$\sum_{i=1}^{N} A_i \frac{1}{r(M,M_i)}$$

که در آن M_1، M_2، ...، M_N نقطه‌هایی از فضا هستند، باز هم یک تابع همساز نقطهٔ M است. این تابع، در همهٔ نقطه‌های M_i ویژگی‌هایی دارد. اگر نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_N را، تا جایی که ممکن است، نزدیک به‌هم و در حجمی مثل Ω جابدهیم، و همراه‌با آن ضریب‌های A_i را کوچک کنیم، می‌توانیم به حد این عبارت برسیم و تابع جدیدی به دست آوریم:

$$U = \text{حد} \sum_{i=1}^{N} \frac{A_i}{r(M,M_i)} = \iiint_{\Omega} \frac{A(M')}{r(M,M')}\, d\Omega$$

که در آن، نقطهٔ M' از همهٔ حجم Ω می‌گذرد. انتگرالی که به این‌صورت باشد، ***پتانسیل نیوتنی*** نامیده می‌شود. می‌توان ثابت کرد، گرچه ما به آن نمی‌پردازیم، که این تابع U در معادلهٔ $\Delta U = -4\pi A$ صدق می‌کند.

پتانسیل نیوتنی، مفهوم فیزیکی ساده‌ای دارد. برای این‌که این مفهوم را درک کنیم، از بررسی تابع $\frac{A_i}{r(M\ ,\ M_i)}$ آغاز می‌کنیم.

مشتق‌های جزیی این تابع، نسبت به مختصات، چنین است:

$$A_i \frac{x_i - x}{r^3} = X \quad , \quad A_i \frac{y_i - y}{r^3} = Y \quad , \quad A_i \frac{z_i - z}{r^3} = Z$$

جرم A_i را در نقطهٔ M_i جا می‌دهیم، که تمامی جسم را با نیرویی در جهت نقطهٔ M_i و به نسبت معکوس مجذور فاصله، به طرف خود می‌کشد. این نیرو را به مؤلفه‌های خودش تجزیه می‌کنیم. اگر مقدار خود نیرویی که بر نقطهٔ مادی به جرم واحد اثر می‌کند برابر $\frac{A_i}{r^2}$ باشد، در این‌صورت، کسینوس زاویه‌هایی که جهت این نیرو با جهت مثبت محورهای مختصات تشکیل می‌دهد، برابر با $\frac{x_i-x}{r}$، $\frac{y_i-y}{r}$، $\frac{z_i-z}{r}$ خواهد شد. بنابراین، مؤلفه‌های نیرویی که بر جرم واحد در نقطه M، با جذب مرکز M_i اثر می‌کند برابر X، Y و Z، یعنی مشتق‌های جزیی تابع $\frac{A_i}{r}$ نسبت به مختصات خواهد بود اگر در بعضی از نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_N جرم‌هایی قرار دهیم، در آن‌صورت هر نقطهٔ مادی به جرم برابر واحد، که در نقطهٔ M گذاشته شده است، نیرویی را تحمل می‌کند که برابر است با برآیند همهٔ نیروهایی که از طرف نقطه‌های جداگانه M_i بر آن اثر می‌کند. به زبان دیگر

$$X = \frac{\partial}{\partial x}\sum\frac{A_i}{r(M,M_i)} \quad , \quad Y=\frac{\partial}{\partial y}\sum\frac{A_i}{r(M,M_i)} \quad , \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}\sum\frac{A_i}{r(M,M_i)}$$

که اگر به سمت مقدارهای حدی برویم و مجموع را به انتگرال تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$\overline{X} = \frac{\partial U}{\partial x} \ , \ \overline{Y} = \frac{\partial U}{\partial y} \ , \ \overline{Z} = \frac{\partial U}{\partial z} \ , \ (U = \iiint_{\Omega}\frac{A}{r}d\Omega)$$

تابع U، که مشتق‌های جزیی آن برابر با مولفه‌های نیرویی است که بر نقطه‌ای اثر مـی‌کند، **پتانسیل** این نیرو نامیده می‌شود. به همین مناسبت، تابع $\frac{A_i}{r(M\ ,\ M_i)}$ عبارت است از پتانسیل نیروی جاذبهٔ نقطهٔ M_i، تابع $\Sigma\frac{A_i}{r(M\ ,\ M_i)}$، پتانسیل جاذبهٔ گروه نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_N و تابع $U = \iiint_{\Omega}\frac{A}{r}\,d\Omega$ ، پتانسیل جاذبهٔ جرمی که به طور پیوسته در حجم Ω پراکنده است.

به جای این‌که جرم را در حجمی بپراکنیم، می‌توانیم نقطه‌های M_1 ، M_2 ،...،M_N را در سطحی مثل S جا بدهیم. با زیاد کردن تعداد این نقطه‌ها، درحد، این انتگرال به‌دست می‌آید:

$$V = \iint_{S}\frac{A(Q)}{r}ds \tag{۲۲}$$

که در آن، Q عبارت است از نقطه‌ای واقع بر سطح S.

به سادگی دیده می‌شود این تابع، همه جا در بیرون سطح S و همه جا در درون آن، تابعی همساز است. می‌توان ثابت کرد که این تابع در روی سطح S پیوسته است، ولی مشتق اول آن دچار ناپیوستگی می‌شود.

تـابع‌های $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_i}$ ، $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_i}$ ، $\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_i}$ هـم، بـه شـرط ثـابت نگـاه داشـتن M_i، تـابع‌های همسازی از نقطهٔ M هستند. از این تابعها هم، به نوبهٔ خود، می‌توان مجموعی تشکیل داد:

$$\sum A_i\ \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_i} + \sum B_i\ \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y_i} + \sum C_i\ \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z_i}$$

که همه جا، به‌جز به احتمالی در نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_N تابع‌هایی همسازند.

دوباره با زیاد کردن تعداد نقطه‌های M_1 ، M_2 ، ... ، M_N می‌توان حد این مـجموع را بـه دست آورد:

$$W = \iint_S \mu(Q)\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x'}\cos(\mathbf{n},\mathbf{x}) + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y'}\cos(\mathbf{n},\mathbf{y}) + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z'}\cos(\mathbf{n},\mathbf{z})\right) ds \tag{۲۳}$$
$$= \iint_S \mu(Q) K(Q,M)\, ds$$

که در آن x'، y' و z' مختصات نقطهٔ متغیر Q از سطح S؛ $\mathbf{n}$ جهت قائم بر سطح S در نقطهٔ Q؛ $\mathbf{x}$ ، $\mathbf{y}$ و $\mathbf{z}$ جهت‌های محورهای مختصات؛ r فاصلهٔ از Q تا نقطهٔ M (که در آن، مقدار تابع W معین می‌شود) می‌باشد.

انتگرال (۲۲)، ***پتانسیل قشر ساده*** و انتگرال (۲۳)، ***پتانسیل قشردوگانه*** نامیده می‌شود[1]. چه پتانسیل قشر دوگانه و چه پتانسیل قشر ساده، هم در خارج و هم در داخل سطح S، تابعی همساز است.

بسیاری از مسأله‌های نظریهٔ تابع‌های همساز را می‌توان به یاری پتانسیل‌ها حل کرد. به کمک پتانسیل قشر دوگانه، می‌توان مسألهٔ مربوط بـه سـاختن تـابع هـمساز u را در حـوزهٔ مفروض Ω، که مقدارهای مفروض $2\pi\varphi(Q)$ را در مرز S این حوزه قبول می‌کند، حل کرد. برای این‌که چنین تابعی را بسازیم، تنها باید به طریق مناسبی، تابع $\mu(Q)$ را انتخاب کنیم.

این مسأله، به خاطر طبیعت خود، تا حدی مسألهٔ مربوط به جست‌وجوی ضـریب‌های رشته

$$\varphi = \sum a_k U_k$$

را به یاد می‌آورد.

ویژگی مهم انتگرال W در این است که مقدار حدی آن، وقتی نقطهٔ M را به نقطهٔ $Q_\circ$ و از طرف داخل سطح نزدیک کنیم، به این‌صورت در می‌آید:

$$\lim_{M\to Q_\circ} W = 2\pi\mu(Q_\circ) + \iint_S K(Q, Q_\circ)\,\mu(Q)\, ds$$

---

۱. نام پتانسیل به‌خاطر حقیقت فیزیکی زیر انتخاب شده است. فرض کنیم بارهای الکتریکی را بر سطح S وارد کرده باشیم. این بارهای الکتریکی، در فضا، میدان الکتریکی ایجاد می‌کنند پتانسیل این میدان، همان انتگرال (۲۲) است و به همین مناسبت، نام پتانسیل قشر ساده را به خود گرفته است.

اکنون فرض کنیم سطح S، غشاء نازک عایقی باشد. در یکی از دو طرف آن، به طریقی، بارهای الکتریکی با یک علامت (مثل بارهای الکتریکی مثبت) وارد می‌کنیم. در طرف دیگر S هم، با همان روش، بارهای الکتریکی با علامت مخالف وارد می‌کنیم. در نتیجهٔ عمل این دو قشر الکتریکی هم، یک میدان الکتریکی در فضا به‌وجود می‌آید. به کمک محاسبه می‌توان ثابت کرد که این میدان همان انتگرال (۲۳) است.

با برابر قرار دادن این عبارت با تابع مفروض $۲\pi\varphi(Q_\circ)$، به معادلهٔ

$$\mu(Q_\circ)+\frac{۱}{۲\pi}\iint_S K(Q,\, Q_\circ)\mu(Q)\,ds=\varphi(Q_\circ)$$

می‌رسیم. این معادله را، ***معادلهٔ انتگرالی نوع دوم*** گویند. نظریهٔ تکامل یافته‌ای از این‌گونه معادله‌ها وجود دارد که دانشمندان زیادی روی آن‌ها کار کرده‌اند. با حل این معادله (با هر روشی که ممکن باشد)، می‌توانیم جواب مسألهٔ خود را پیدا کنیم.

درست به همین ترتیب، می‌توان جواب مسأله‌های دیگر نظریهٔ تابع‌های همساز را هم به دست آورد. اگر پتانسیل مناسبی را انتخاب کنیم، می‌توان مقدار تابعی را که در آن وارد شده است معین کرد، به نحوی که با همهٔ شرط‌های لازم سازگار باشد.

از نظر فیزیکی، این به معنای آن است که هر تابع همسازی را می‌توان به عنوان پتانسیل قشر الکتریکی دوگانه نشان داد، به شرطی که این قشر تراکم انتخابی را به وضع مناسبی در سطح S، تقسیم کرده باشد.

تعیین جواب تقریبی، روش گالرکین و روش شبکه‌ها. ۱. در بالا، دو روش حل معادله‌های فیزیک ریاضی را نشان دادیم: روش جداسازی متغیرها و روش نظریهٔ پتانسیل‌ها. این روش‌ها، در نوشته‌های دانشمندان سده‌های هیجدهم و نوزدهم دیده می‌شود (***فوریه***، ***پواسون***، ***اوستروگرادسکی***، ***لیاپونوف*** و دیگران). در سدهٔ بیستم، این روش‌ها، با یک رشته روش‌های دیگر، غنی شدند و ما تنها به دو نمونه از آن‌ها می‌پردازیم: روش ***گالرکین*** و ***روش تقاضل‌های محدود*** یا روش شبکه‌ها.

روش نخست را ***ب.گ.گالرکین***، برای حل معادله‌هایی به این صورت طرح کرد:

$$\sum\sum\sum\sum A_{ijkl}\frac{\partial^۴ U}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k\partial x_l}+\sum\sum\sum B_{ijk}\frac{\partial^۳ U}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}+\sum\sum C_{ij}\frac{\partial^۲ U}{\partial x_i\partial x_j}$$
$$+\sum D_i\frac{\partial U}{\partial x_i}+EU+\lambda U=\circ$$

که شامل پارامتر مجهول λ است (در این‌جا، i ، j ، k و l، بدون ارتباط با یکدیگر، مقدارهای ۱، ۲، ۳ را قبول می‌کنند). این معادله‌ها از معادله‌هایی که شامل متغیر مستقل t هستند، به‌کمک روش جداسازی متغیرها، به‌دست می‌آیند، به‌همان‌شکلی‌که از معادلهٔ کامل

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

معادلهٔ $\Delta U + \lambda^2 U = 0$ به دست می‌آمد. پرسش این است که معلوم کنیم به ازای چه مقدارهایی از λ، مسألهٔ مرزی همگن جواب غیرصفر دارد، و این جواب‌ها را به‌دست آوریم.

اساس روش **گالرکین** چنین است. تابع مجهول را به تقریب و به صورت

$$U \approx \sum_{m=1}^{N} a_m \omega_m(x_1, x_2, x_3)$$

جست‌وجو می‌کنیم، که در آن $\omega_m(x_1, x_2, x_3)$ عبارت تابع دل‌خواهی است که در شرط مرزی صدق می‌کند.

جواب فرضی را در سمت چپ معادله قرار می‌دهیم تا برابری تقریبی را به دست آوریم:

$$\sum_{m=1}^{N} a_m \Big\{ \sum\sum\sum\sum A_{ijkl} \frac{\partial^4 \omega_m}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k \partial x_l} + \sum\sum\sum B_{ijk} \frac{\partial^3 \omega_m}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$$
$$+ \sum\sum C_{ij} \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x_i \partial x_j} + \sum D_i \frac{\partial \omega_m}{\partial x_i} + E\omega_m \Big\} + \lambda \sum_{m=l}^{N} a_m \omega_m \approx 0$$

که اگر مقدار داخل آکلاد را، برای سادگی کار، به $L\omega_m$ نشان دهیم، این معادله به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\sum a_m L\omega_m + \lambda \sum a_m \omega_m \approx 0$$

حالا، دوطرف این برابری تقریبی را در ω_m ضرب می‌کنیم و نسبت به حوزهٔ Ω، که جواب را در آن جست‌وجو می‌کنیم، انتگرال می‌گیریم. به دست می‌آید:

$$\iiint_\Omega \sum a_m \omega_n L\omega_m \, d\Omega + \lambda \iiint_\Omega \sum a_m \omega_m \omega_n d\Omega \approx 0$$

این برابری را، به این صورت هم می‌توان نوشت:

$$\sum_{m=1}^{N} a_m \iiint_\Omega \omega_n L\omega_m \, d\Omega + \lambda \sum_{m=1}^{N} a_m \iiint_\Omega \omega_m \omega_n d\Omega \approx 0$$

اگر فرض را براین بگذاریم که این برابری به طور دقیق صدق می‌کند، دستگاهی از

معادله‌های جبری درجهٔ اول برای ضریب‌های مجهول a_m خواهیم داشت. تعداد معادله‌های این دستگاه، برابر تعداد مجهول‌ها می‌شود. برای این‌که این دستگاه جوابی غیر صفر داشته باشد، باید دترمینان آن برابر صفر شود. اگر این دترمینان را باز کنیم، معادله‌ای از درجهٔ N برای پیدا کردن عدد مجهول λ به دست می‌آید.

وقتی مقدارهای λ را پیدا کردیم، آن‌ها را در دستگاه قرار می‌دهیم و دستگاه را حل می‌کنیم تا مقدارهای تقریبی را برای تابع U معین کنیم.

روش ***گالرکین***، تنها برای معادله‌های درجهٔ چهارم به کار نمی‌رود؛ از این روش می‌توان برای معادله‌های از درجه‌های مختلف و نوع‌های مختلف، استفاده کرد.

۲. روش دومی که از آن گفت‌وگو خواهیم کرد، روش تفاضل‌های محدود و یا به اصطلاح، روش شبکه‌هاست.

مشتق تابع u نسبت به متغیر x عبارت است از حد نسبت

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

این نسبت را به نوبهٔ خود، می‌توان به این صورت نوشت:

$$\frac{۱}{\Delta x} \int_{x}^{x+\Delta x} \frac{\partial u}{\partial x_۱}\, dx_۱$$

و بنابر قضیهٔ معروف مقدارهای میانه (بخش دوم، بند ۸، جلد اول را ببینید)، داریم:

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=\xi}$$

که در آن، ξ عبارت است از نقطه‌ای واقع در فاصلهٔ

$$x < \xi < x + \Delta x$$

همهٔ مشتق‌های دوم u را هم، چه مشتق‌های مختلط و چه مشتق‌هایی که نسبت به یک متغیر به دست آمده است، می‌توان به همین ترتیب به تقریب و به صورت نسبت تفاضلها نشان داد. در واقع، نسبت تفاضلی

$$\frac{u(x + \Delta x) - ۲u(x) + u(x - \Delta x)}{(\Delta x)^۲}$$

به این صورت در می‌آید:

$$\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}-\frac{u(x)-u(x-\Delta x)}{\Delta x}\right\}=$$

$$\frac{1}{\Delta x}\left\{\left[\frac{u(x_1+\Delta x)-u(x_1)}{\Delta x}\right]\Bigg|_{x_1=x-\Delta x}^{x_1=x}\right\}$$

بنابر قضیهٔ میانه، می‌توان نسبت تفاضلی تابع

$$\varphi(x_1)=\frac{u(x_1+\Delta x)-u(x_1)}{\Delta x}$$

را با مقدار مشتق، عوض کرد. بنابراین

$$\frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_1-\Delta x)}{\Delta x}=\varphi'(\xi)$$

که در آن، ξ عبارت است از مقدار میانه‌ای در فاصلهٔ

$$x-\Delta x<\xi<x$$

به این ترتیب

$$\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2[u(x+\Delta x)-2u(x)+u(x-\Delta x)]=\frac{1}{\Delta x}[\varphi(x)-\varphi(x-\Delta x)]=\varphi'(\xi)$$

از طرف دیگر

$$\varphi(\xi)=\frac{u(\xi+\Delta x)-u(\xi)}{\Delta x}$$

و بنابراین

$$\varphi'(\xi)=\frac{u'(\xi+\Delta x)-u'(\xi)}{\Delta x}$$

که اگر یکبار دیگر از دستور نموهای محدود استفاده کنیم، می‌بینیم که

$$\varphi'(\xi)=u''(\eta)$$

که در آن داریم: $\xi<\eta<\xi+\Delta x$.

به این ترتیب

$$\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2[u(x+\Delta x)-2u(x)+u(x-\Delta x)]=u''(\eta)$$

که در آن داریم: $x-\Delta x<\eta<x+\Delta x$.

اگر مشتق $u''(x)$ پیوسته و مقدار Δx به اندازهٔ کافی کوچک باشد، آن وقت، اختلاف $u''(\eta)$ با $u''(x)$ به دل‌خواه کوچک می‌شود. بنابراین، مشتق دوم، به اندازهٔ کافی به نسبت تفاضلی لازم نزدیک می‌شود. به همین ترتیب، از جمله مشتق دوم مختلط

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x\,\partial y}$$

را می‌توان به تقریب، با این دستورنشان داد:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x\partial y}=\frac{۱}{\Delta x\Delta y}\left[u(x+\Delta x\,,y+\Delta y)-u(x+\Delta x\,,y)-u(x\,,y+\Delta y)+u(x\,,y)\right]$$

حالا به معادلهٔ خودمان، معادلهٔ با مشتق‌های جزیی، برمی‌گردیم.

برای این‌که با معادلهٔ مشخصی سروکار داشته باشیم، فرض می‌کنیم این معادله، همان معادله **لاپلاس** با دو متغیر مستقل باشد:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=۰$$

به‌جز این، فرض می‌کنیم، تابع مجهول u، روی مرز S از حوزهٔ Ω داده شده باشد.

به تقریب قبول می‌کنیم که

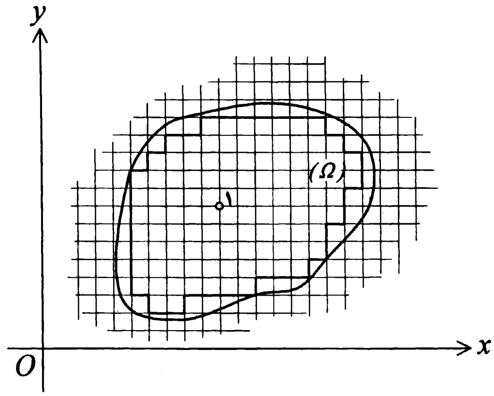
$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}=\frac{u(x+\Delta x\,,y)-۲u(x\,,y)+u(x-\Delta x\,,y)}{(\Delta x)^۲}$$

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=\frac{u(x\,,y+\Delta y)-۲u(x\,,y)+u(x\,,y-\Delta y)}{(\Delta y)^۲}$$

فرض می‌کنیم $\Delta x=\Delta y=h$، در این‌صورت

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=\frac{۱}{h^۲}\left[u(x+h\,,y)+u(x\,,y+h)+u(x-h\,,y)+u(x\,,y-h)-۴u(x\,,y)\right]$$

حوزهٔ Ω را با شبکهٔ مربعی، با راس‌هایی در نقطه‌های $x=kh$، $y=bh$، می‌پوشانیم (شکل ۴). به جای حوزهٔ Ω، چندضلعی را در نظر می‌گیریم که شامل مربع‌هایی از شبکهٔ ماست که در داخل Ω واقع شده‌اند، در ضمن مرز حوزه هم به صورت یک خط شکسته در می‌آید. مقدارهایی از تابع مجهول را، که روی مرز S داده شده است، به روی این خط



شکل ۴

شکسته، منتقل می‌کنیم. معادلهٔ **لاپلاس** را به‌تقریب برای همهٔ نقطه‌های درونی حوزه، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$u(x+h\,,y)+u(x\,,y+h)+u(x-h\,,y)+u(x\,,y-h)-۴u(x\,,y)=۰$$

این معادله را می‌توان به این صورت نوشت:

$$u(x\,,y)=\frac{۱}{۴}[u(x+h\,,y)+u(x\,,y+h)+u(x-h\,,y)+u(x\,,y-h)]$$

به این ترتیب، مقدار u، در نقطه‌ای از شبکه و از جمله در نقطهٔ ۱ روی شکل ۴، برابر با میانگین حسابی مقدارهای آن در چهار نقطهٔ مجاور خود می‌شود.

فرض می‌کنیم، در داخل چندضلعی، N نقطه از شبکهٔ ما وجود داشته باشد. در هر کدام از این نقطه‌ها، معادلهٔ خودش را به دست می‌آوریم. به‌این ترتیب، دستگاهی شامل N معادلهٔ جبری با N مجهول به دست می‌آید که با حل آن، مقدار تقریبی تابع u در حوزهٔ Ω پیدا می‌شود.

می‌توان ثابت کرد که برای معادلهٔ **لاپلاس**، می‌توان جواب را با هر دقتی که لازم باشد پیدا کرد.

روش تفاضل‌های محدود، حل مسألهٔ را منجر به حل دستگاهی از N معادله با N مجهول می‌کند. در ضمن، مجهول‌های ما، مقدارهایی از تابع مورد جست‌وجو هستند که در نقطه‌های گرهی یک شبکه قرار دارند.

روش تفاضل‌های محدود را برای مسأله‌های دیگری از فیزیک ریاضی هم می‌توان به کار برد: برای حل معادله‌های دیفرانسیلی و برای حل معادله‌های انتگرالی. ولی، این کاربرد در بسیاری حالت‌ها به یک رشته دشواریها برخورد می‌کند.

ممکن است وضعی پیش آید که یا راه‌حلی برای دستگاه N معادلهٔ N مجهولی، که با روش شبکه‌ها به دست می‌آید، وجود نداشته باشد، و یا جوابی را بدهد که از حقیقت، خیلی دور باشد. این وضع، از آن‌جا ناشی می‌شود که در جوابی که برای دستگاه به دست آورده‌ایم، اشتباه‌ها روی هم جمع شده‌اند. هر چه طول ضلع مربع‌های شبکه را کوچکتر بگیریم، به همان اندازه به تعداد معادله‌ها اضافه می‌شود و در نتیجه اشتباه‌های بیشتری، برای به دست آوردن جواب، روی هم جمع می‌شود.

در نمونه‌ای که از معادلهٔ **لاپلاس**، در بالا آوردیم، چنین وضعی پیش نمی‌آید. ضمن حل این دستگاه، اشتباه‌ها روی هم جمع نمی‌شود، بلکه برعکس، اگر این دستگاه را، برای نمونه، با روش تقریب‌های متوالی حل کنیم، مقدار اشتباه به تدریج کم می‌شود. دربارهٔ معادلهٔ انتقال گرما و درباره معادلهٔ موجی، برای انتخاب روش شبکه‌ای باید خیلی دقت کرد: دربارهٔ این معادله‌ها، به همان اندازه که ممکن است به جواب خوب برسیم، احتمال هم دارد که نتیجهٔ بدی به دست آوریم.

اگر تصمیم داشته باشیم، یکی از این‌گونه معادله‌ها را با روش شبکه‌ای حل کنیم، بعد از آن‌که شبکهٔ مقدارهای t را انتخاب کردیم، باید برای متغیرهای فضایی، به سراغ شبکه‌ای با مربع‌های خیلی‌کوچک نرویم. در غیراین‌صورت، برای‌مقدارهای تابع مجهول، جواب بسیار بدی از دستگاه معادله‌ها، نصیبمان می‌شود: جوابی که از این راه به دست می‌آید، به سرعت نوسانی و در ضمن با دامنه‌ای بزرگ است. و این نتیجه‌گیری، خیلی دور از حقیقت است.

به یک مثال عددی ساده می‌پردازیم. معادلهٔ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

را در نظر می‌گیریم، که عبارت است از معادلهٔ انتقال گرما، در حالتی که درجهٔ حرارت مستقل از y و z است. گام‌های شبکه را در طول مقدارهای t برابر k و در طول مقدارهای x برابر h می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(t+k\,,x) - u(t\,,x)}{k}\ ,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(t\,,x+h) - 2u(t\,,x) + u(t\,,x-h)}{h^2}$$

بنابراین، معادلهٔ مفروض را می‌توان به تقریب، به این صورت نوشت:

$$u(t+k\,,x) = \frac{k}{h^2}\,u(t\,,x+h) + \left(1-2\frac{k}{h^2}\right)u(t\,,x) + \frac{k}{h^2}\,u(t\,,x-h)$$

با دانستن مقدارهای u در یک لحظهٔ گرهی t در نقطه‌های $x-h$ ، x ، $x+h$، مقدارهای u در نقطهٔ x در لحظهٔ گرهی بعدی $t+k$، به سادگی پیدا می‌شود. فرض کنید مقدار ثابت k، یعنی مقدار گام شبکه در طول t، انتخاب شده باشد. برای انتخاب h، دو حالت در نظر می‌گیریم. در حالت اول $h^2=k$ و در حالت دوم $h^2=2k$ فرض می‌کنیم و مسألهٔ زیر را با روش شبکه‌ای حل می‌کنیم.

در لحظهٔ اولیه، برای همهٔ مقدارهای منفی x فرض می‌کنیم $u=0$ و برای همهٔ مقدارهای غیرمنفی x فرض می‌کنیم $u=1$. برای یک لحظهٔ زمانی معین، دو جدول خواهیم داشت که مقدارهای مجهول u را در یک سطر شرح داده است.

در جدول ۲، مقدارهایی که از یک نقطه به نقطهٔ دیگر برای هر لحظهٔ زمانی به‌دست می‌آید، تغییری هموار دارد. این جدول، تقریب خوبی برای معادلهٔ انتقال حرارت می‌دهد. برعکس، در جدول ۱، که به خاطر تقسیم‌های کوچکتر فاصلهٔ تغییرهای x، به نظر می‌رسد که باید دقت بیشتری داشته باشد، مقدارهای u خیلی به سرعت از مقدارهای مثبت به‌مقدارهای منفی نوسان می‌کند و در بیشتر حالت‌ها، از فرض‌های اولیه، به طور قابل ملاحظه‌ای تجاوز می‌کند. روشن است، در این جدول، مقدارهایی که به دست آمده، با جواب درست فاصلهٔ زیادی دارد.

با توجه به این مثال‌ها، معلوم می‌شود، اگر بخواهیم به یاری روش شبکه‌ای به نتیجهٔ

جدول ۱

t \ x	$-5h$	$-4h$	$-3h$	$-2h$	$-h$	۰	h	$2h$	$3h$	$4h$	$5h$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
k	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱	۱	۱
$2k$	۰	۰	۰	۱	−۱	۲	۰	۱	۱	۱	۱
$3k$	۰	۰	۱	−۲	۴	−۳	۳	۰	۱	۱	۱
$4k$	۰	۱	−۳	۷	−۹	۱۰	−۶	۴	۰	۱	۱
$5k$	۱	−۴	۱۱	−۱۹	۲۶	−۲۵	۲۰	−۱۰	۵	۰	۱

جدول ۲

$t \backslash x$	$-۵h$	$-۴h$	$-۳h$	$-۲h$	$-h$	۰	h	$۲h$	$۳h$	$۴h$	$۵h$
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
k	۰	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۱	۱	۱	۱
$۲k$	۰	۰	۰	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	۱	۱	۱	۱
$۳k$	۰	۰	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۷}{۸}$	$\frac{۷}{۸}$	۱	۱	۱
$۴k$	۰	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۵}{۱۶}$	$\frac{۵}{۱۶}$	$\frac{۱۱}{۱۶}$	$\frac{۱۱}{۱۶}$	$\frac{۱۵}{۱۶}$	$\frac{۱۵}{۱۶}$	۱	۱
$۵k$	$\frac{۱}{۳۲}$	$\frac{۱}{۳۲}$	$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۳}{۱۶}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱۳}{۱۶}$	$\frac{۱۳}{۱۶}$	$\frac{۳۱}{۳۲}$	$\frac{۳۱}{۳۲}$	۱

دقیق، نزدیک به حقیقت و مطمئنی برسیم، باید در انتخاب گام‌های شبکه به قدر کافی احتیاط و با بررسی‌های مقدماتی، کاربرد این روش را توجیه کنیم.

از آن‌جا که ضمن ساختن مدل یک پدیده، به یاری معادله‌های فیزیک ریاضی، همیشه ناچاریم خود را از بسیاری جنبه‌های این پدیده جدا کنیم، بسیاری از جنبه‌ها را به عنوان این‌که اهمیت درجهٔ اول ندارند کنار بگذاریم و آن‌چه را اساسی‌تر به نظر می‌آید، انتخاب کنیم، نتیجه‌هایی که به این ترتیب به دست می‌آید، نمی‌تواند به عنوان حقیقت مطلق، پذیرفته شود. این نتیجه‌ها را تنها برای طرح یا مُدلی که بررسی کرده‌ایم، می‌توان به طور مطلق درست دانست؛ ولی باید آن‌ها را با آزمایش تحقیق کرد تا مطمئن شویم مدل پدیدهٔ ما تا چه اندازه به خود پدیده نزدیک است و تا چه حد می‌تواند آن را تصویر کند.

به این ترتیب، معیار اصلی درستی نتیجه‌گیری‌ها را، تنها در آزمایش عملی می‌توان پیدا کرد. این درست است که تنها یک معیار برای درستی نتیجه‌گیری‌ها وجود دارد و آن تجربهٔ عملی است، ولی این را نباید فراموش کرد که همهٔ این‌ها در پرتو نظریه‌های عمیقی که طرح شده است، ممکن می‌شود.

با مشاهدهٔ سیم یک وسیلهٔ موسیقی، که در حال نوسان است، سرچشمهٔ همهٔ صداها را می‌فهمیم؛ این سرچشمه را تنها در قانون‌های ترکیب نوسان‌های خاص، می‌توان درک کرد. رابطهٔ بین بسامدها را با بررسی این مطلب می‌فهمیم که این بسامدها به وسیلهٔ چیزی که این

سیم را می‌کشد، معین می‌شوند، و در ضمن دو انتهای سیم، ثابت نگاه داشته شده است. در این باره نه تنها، نظریه، راهی برای محاسبهٔ بعضی مقدارهای عددی در برابر ما قرار می‌دهد، بلکه این مطلب را هم نشان می‌دهد که چه مقدارهایی اساسی‌ترند، روند فیزیکی چگونه اتفاق می‌افتد و چه چیزهایی را باید در این روند بررسی کرد.

به این ترتیب، همان‌طور که فیزیک ریاضی به خاطر نیازهای عملی رشته‌های مختلف دانش رشد می‌کند و پیش می‌رود، خود آن هم بر عمل اثر می‌گذارد و دورنمای حرکت آیندهٔ آن را پیش‌بینی می‌کند.

فیزیک ریاضی با دیگر شاخه‌های آنالیز ریاضی هم پیوند مستحکمی دارد، ولی ما به‌خاطر این‌که از هدف خود دور نشویم به آن نمی‌پردازیم.

۶. تعمیم جواب‌ها

ما دربارهٔ مسأله‌هایی گفت‌وگو کرده‌ایم که در آن‌ها می‌توان یک پدیده را به وسیلهٔ تابع‌های پیوسته‌ای، که قابل دیفرانسیل‌گیری هستند و در معادله‌های دیفرانسیلی صدق می‌کنند، شرح داد. ولی، می‌توان گروه این مسأله‌ها را، با در نظر گرفتن جواب‌های ناپیوستهٔ این معادله‌ها، به طور جدی گسترش داد.

گاهی از قبل معلوم است که مسأله مورد بررسی، نمی‌تواند جوابی که به طور پیوسته، دوبار قابل دیفرانسیل‌گیری باشد، داشته باشد. یعنی از دیدگاهی که در بندهای قبل شرح داده‌ایم، چنین مسأله‌ای جواب ندارد. با وجود این، روند فیزیکی مربوطه، پیش می‌آید، گرچه نتوانیم برای توضیح این روند، تابع مشتق‌داری را پیدا کنیم. چند نمونهٔ ساده می‌آوریم.

۱) اگر سیمی از دو قطعه، با چگالی‌های متفاوت، درست شده باشد، در معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (۲۴)$$

ضریب a، دربارهٔ قطعه‌های مختلف، برابر مقدارهای ثابت مختلفی است و بنابراین، معادلهٔ (۲۴)، در حالت کلی دارای جواب‌های عادی (که دوبار به طور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری باشند) نیست.

۲) فرض کنید ضریب a ثابت باشد، ولی سیم، در وضع نخستین خود، با معادلهٔ $u|_{t=0}=\varphi(x)$ شکستگی داشته باشد. روشن است، تابع $\varphi(x)$، در راس شکستگی خود، مشتق اول ندارد. می‌توان ثابت کرد که برای معادلهٔ (۲۴)، جواب عادی وجود ندارد که با شرط نخستین

$$u|_{t=0}=\varphi(x) \quad , \quad u_t|_{t=0}=0$$

بسازد (در این‌جا و بعد از این، u_t را به معنای $\frac{\partial u}{\partial t}$ گرفته‌ایم).

۳) اگر بر قطعهٔ کوچکی از سیم، به شدت بکوبیم، نوسانی که در اثر آن پدید می‌آید، با این معادله شرح داده می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)$$

که در آن $f(x\ ,\ t)$ متناظر است با عمل انجام شده و تابعی است که تنها در قطعهٔ کوچکی از سیم و در فاصلهٔ زمانی کوتاهی، مخالف صفر است. به سادگی دیده می‌شود، چنین معادله‌ای هم نمی‌تواند جواب‌های عادی داشته باشد.

این نمونه‌ها نشان می‌دهد که تاکید بر پیوستگی مشتق‌ها، در جواب‌ها، مسأله‌های قابل حل را، به سختی در دایرهٔ تنگی محدود کرده است. جست‌وجوی دایرهٔ گسترده‌تری از مسأله‌های قابل حل، قبل از همه در این راه بود که احتمال ناپیوستگی‌های نوع اول را در مشتق‌های تابع‌هایی که به عنوان جواب‌های مسأله قبول شده‌اند، بدهیم، در ضمن چنین تابع‌هایی در همه جا، به‌جز نقطه‌های ناپیوستگی، در معادله‌های داده شده صدق کنند. معلوم شد که جواب معادله‌هایی از نوع $\Delta u=0$ و $\frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u=0$ در داخل حوزهٔ تعریف خود، نمی‌توانند چنین ناپیوستگی‌هایی (که ناپیوستگی‌های ضعیف نامیده می‌شوند) داشته باشند. جواب‌های معادلهٔ موجی هم، در فضای متغیرهای x ، y ، z و t تنها می‌تواند در سطح‌های خاصی (که سطح‌های مفسر نامیده می‌شوند)، دارای ناپیوستگی‌ها، ضعیف باشد. اگر جواب $u(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t)$ از معادلهٔ موجی، به عنوان تابعی در نظر گرفته شود که به ازای $t=t_1$، میدان اسکالر در فضای x ، y ، z در لحظهٔ زمانی t_1، معین شده باشد، در آن‌صورت، سطح ناپیوستگی مشتق‌های دوم از $u(x\ ,\ y\ ,\ z\ ,\ t)$، و با سرعتی برابر ریشهٔ دوم ضریبی که برای عامل (اُپراتور) لاپلاس در معادلهٔ موجی وجود دارد، در فضای x ، y ، z جابه‌جا می‌شود.

ولی، مثال دوم مربوط به سیم، نشان می‌دهد که لازم است جواب‌هایی را هم که ممکن است در مشتق‌های اول، پیوسته باشند، و حتی در حالتی، و برای نمونه در موج‌های صوتی و نوری، که خود جواب‌ها دارای پیوستگی هستند، بررسی کنیم.

نخستین مسأله‌ای که با وارد کردن جواب‌های ناپیوسته، در برابر بررسی‌کننده قرار دارد، مربوط به این‌است که باید معلوم کند، از نظر فیزیکی، چه تابع‌های ناپیوسته‌ای را باید برای معادلهٔ مفروض و یا مسأله‌ای که در پشت این معادله قرارگرفته است، قبول کرد. برای نمونه، آیا می‌توان هر «قطعه تابع» ثابت را به عنوان «جواب واحد» معادلهٔ لاپلاس و یا معادلهٔ موجی به حساب آورد، زیرا چنین جوابی در خارج خط‌های ناپیوستگی در معادله صدق می‌کند.

ضمن روشن کردن این مسأله، قبل از هر چیز باید مواظب بود که در این کلاس گسترده‌تر تابع‌ها، که باید شامل همهٔ جواب‌های قابل قبول باشد، قضیهٔ منحصر بودن، به قوت خود باقی بماند. روشن است که اگر برای مثال، همهٔ تابع‌های تکه‌های هموار را قبول کنیم، این قضیه، نقض می‌شود.

نخستین اصلی که برای تفکیک جواب‌های قابل قبول در نظرگرفته شد، این بود که این تابع‌ها باید حد جواب‌های عادی از همان معادله باشد. از جمله در مثال ۲، که پیش از این آوردیم، جواب معادلهٔ (۲۴)، که تابع $\varphi(x)$ـ که در نقطهٔ شکستگی مشتق ندارد ـ پاسخ می‌دهد، می‌تواند به عنوان حد جواب‌های عادی $u_n(x\ ,\ t)$ همان معادله به دست آید که به شرط اولیهٔ $u_n|_{t=0} = \varphi_n(x)$ ، $u_n|_{t=0}=0$ پاسخ می‌دهد. $\varphi_n(x)$ تابعی است که به طور پیوسته، دوبار قابل دیفرانسیل‌گیری است و به ازای $n\to\infty$، به طور یکنواخت به سمت $\varphi(x)$ میل می‌کند.

بعدها، به جای این اصل، از اصل زیر استفاده کردند: جواب قابل قبول u، باید به جای معادلهٔ $Lu=f$، در یک اتحاد انتگرالی، که شامل تابع دلخواه Φ است، صدق کند.

این اتحاد به این ترتیب به دست می‌آید: دو طرف معادلهٔ $Lu=f$ را در تابع دلخواه Φ ضرب می‌کنیم. Φ، نسبت به همهٔ آوندهای خود، تا مرتبه‌ای برابر مرتبهٔ معادله، دارای مشتق است و در خارج حوزهٔ محدود D، که حوزه تعریف معادله است، صفر است. از برابری که به دست می‌آید، نسبت به D انتگرال می‌گیریم و سپس آن را به کمک انتگرال‌گیری جزئی، تبدیل می‌کنیم، به نحوی که در آن مشتق‌های u وارد نشده باشد. در نتیجه، اتحاد لازم به دست می‌آید. از جمله، برای معادله (۲۴)، به این‌صورت در می‌آید:

$$\int_D\int u\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\frac{\partial^2(a^2\Phi)}{\partial x^2}\right)dx\,dt=0$$

س. ل. سوبولوف ثابت کرده است که برای معادله‌های با ضریب‌های ثابت، این دو اصل انتخاب‌کردن جواب‌های قابل قبول، هم ارزند. ولی، برای معادله‌های با ضریب‌های متغیر، ممکن است از اصل اول نتوان استفاده کرد. چنین معادله‌هایی، ممکن است در حالت کلی، دارای جواب‌های عادی نباشند (مثال ۱ را ببینید). از اصل دوم هم، با فرض‌های زیادی دربارهٔ ویژگی‌های دیفرانسیلی ضریب‌های معادله، می‌توان برای انتخاب جواب‌های قابل قبول استفاده کرد. البته، این اصل در نظر اول بیش از حد صوری است و خصلتی ریاضی دارد و مستقیماً دستوری به دست نمی‌دهد که چگونه، شبیه مسأله‌های عادی، باید مسأله‌ها را طرح کرد.

این اثبات را به صورت دیگری می‌آوریم که از لحاظ فیزیکی، فایدهٔ بیشتری دارد، زیرا به طور مستقیم به قاعدهٔ مشهورهامیلتون مربوط می‌شود.

همان‌طور که می‌دانیم، تجزیه و تحلیل معادله‌های مختلف فیزیک ریاضی در نیمهٔ اول سدهٔ نوزدهم منجر به کشف قانون تازه‌ای شد که به قاعدهٔ*هامیلتون* مشهور است. معلوم شد، با تکیه بر این قاعده می‌توان همهٔ معادله‌های شناخته شدهٔ فیزیک ریاضی را به دست آورد. این مطلب را، روی مثالی که در بند ۳ بررسی کردیم، یعنی مسألهٔ مربوط به نوسان‌های سیمی که در دو انتهای خود محکم شده است، روشن می‌کنیم.

قبل از هر چیز، تابع به اصطلاح *لاگرانژ* $L(t)$ را برای سیم می‌سازیم، یعنی معادلهٔ اختلاف انرژی سینتیک و انرژی پتانسیل. از آن‌چه در بند ۳ گفتیم، نتیجه می‌شود:

$$L(t)=\int_0^l\left[\frac{1}{2}\rho u_t^2-\frac{T}{2}u_x^2\right]dx$$

بنابر قاعدهٔ*هامیلتون*، انتگرال

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(t)dt$$

کمترین مقدار را برای تابع $u(x\,,\,t)$، که متناظر با حرکت حقیقی سیم است، قبول می‌کند. این در مقایسه با همهٔ تابع‌های دیگر $v(x\,,\,t)$است، که به ازای $x=0$ و $x=l$برابر صفر، و به ازای $t=t_1$ و $t=t_2$ منطبق بر $u(x\,,\,t_1)$ و $u(x\,,\,t_2)$ هستند. در ضمن t_1 و t_2 به‌طور دل‌خواه معین می‌شوند و تابع v باید دارای انتگرال‌های محدود S باشد. در نتیجهٔ این قاعده، باید به

اصطلاح نخستین واریاسیون S (بخش هشتم را ببینید)، برابر صفر باشد، یعنی

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{0}^{l} [\rho u_t \Phi_t - T u_x \Phi_x] dx\, dt = 0 \qquad (۲۵)$$

که در آن $\Phi(x\ ,\ t)$، تابعی است دل‌خواه که نسبت به x و t قابل دیفرانسیل‌گیری و روی ضلع‌های مستطیل $0 \le x \le l$ ، $t_1 \le t \le t_2$، برابر صفر باشد.

برابری (۲۵)، همان شرطی است که باید همراه تابع مجهول $u(x\ ,\ t)$ باشد. اگر علاوه بر این، بدانیم، تابع $u(x\ ,\ t)$، دارای مشتق‌های مرتبهٔ دوم هم می‌باشد، می‌توان شرط (۲۵) را به صورت دیگری داد. اگر از (۲۵) انتگرال بگیریم و از پیش‌قضیه اصلی محاسبهٔ واریاسیونی استفاده کنیم، متوجه می‌شویم که $u(x\ ,\ t)$ باید در معادلهٔ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(T \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \qquad (۲۶)$$

صدق کند، که اگر ρ و T ثابت و $\frac{T}{\rho} = a^2$ باشد، همان (۲۴) است.

به سادگی دیده می‌شود هر جواب $u(x\ ,\ t)$ از معادلهٔ (۲۶) در اتحاد (۲۵)، برای همهٔ Φهای مذکور، صدق می‌کند. عکس این حکم درست نیست، زیرا $u(x\ ,\ t)$ در حالت کلی، ممکن است دارای مشتق‌های دوم نباشد. به این ترتیب، اگر معادلهٔ (۲۶) را با اتحاد (۲۵) عوض کنیم، دایرهٔ مسأله‌های قابل حل، گسترش پیدا می‌کند.

برای جدا کردن نوع مشخصی از نوسان سیم، باید به‌جز شرط‌های مرزی

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad (۲۷)$$

شرط‌های اولیهٔ زیر را هم در نظر گرفت:

$$u(x\ ,0) = \varphi_0(x) \qquad (۲۸)$$
$$u_t\ (x\ ,0) = \varphi_1(x)$$

اگر جواب، در گروه تابع‌هایی باشد که به طور پیوسته، یکبار قابل دیفرانسیل‌گیری باشد، می‌توان شرط‌های (۲۷) و (۲۸) را جدا از (۲۵)، و به عنوان شرط‌های اضافی، تشکیل داد ولی اگر جواب لازم «بدتر» باشد، این شرط‌ها، به صورتی که آورده‌ایم، معنای خود را از دست می‌دهند و باید آن‌ها را در جزء یا کل، در اتحاد انتگرالی (۲۵) وارد کرد.

برای نمونه، فرض کنید $u(x\ ,\ t)$ به ازای $0 \le x \le l$ و $0 \le t \le T$، پیوسته باشد، ولی

مشتق‌های اول آن ناپیوستگی داشته باشند. در این‌صورت، برابری دوم (۲۸)، به عنوان یک شرط حدی، معنای خود را از دست می‌دهد. در این حالت، مسأله را می‌توان این‌طور طرح کرد. تابع پیوستهٔ u را که با شرط (۲۷) و شرط اول (۲۸) بسازد، پیدا می‌کنیم، به نحوی که برابری

$$\int_0^T \int_0^l \left[\rho u_t \Phi_t - T u_x \Phi_x \right] dx\,dt + \int_0^l \varphi_1 \Phi(x, 0)\, dx = 0 \tag{۲۹}$$

برای همهٔ تابع‌های پیوستهٔ $\Phi(x\ ,\ t)$ (که به ازای $x=0$، $x=l$ و $t=T$ برابر صفرند)، به طور اتحادی برقرار باشد. در ضمن، هر دو تابع u و Φ باید دارای مشتق‌های اول باشند و توان دوم آن‌ها در مستطیل $0 \le x \le l$ ، $0 \le t \le T$ ، به مفهوم **لِه‌بگ**، قابل انتگرال‌گیری باشند. شرط اخیر برای u به این معناست که مقدار متوسط انرژی کل سیم، نسبت به زمان

$$\frac{1}{2T} \int_0^T \int_0^l \left[\rho u_t^2 + T u_x^2 \right] dx\,dt$$

باید محدود باشد. این محدودیت در تابع u، و بنابراین امکان‌های محدودی که در تغییر Φ وجود دارد، نتیجه‌ای طبیعی از قاعدهٔ ***هامیلتون*** است.

اتحاد (۲۹)، چیزی جز شرط برابر صفر بودن نخستین واریاسیون تابعی (فونکسیونل)

$$\bar{S} = \int_0^T \int_0^l \left[\frac{\rho}{2} u_t^2 - \frac{T}{2} u_x^2 \right] dx\,dt + \int_0^l \varphi_1 u \big|_{t=0}\, dx$$

نیست. بنابراین، مسألهٔ مربوط به نوسان‌های سیمی که در دو انتها محکم شده است، در حالت بررسی ما، به عنوان مسألهٔ جست‌وجوی می‌نیمم فونکسیونل $\bar{S}$ بین همهٔ تابع‌های $v(x\ ,\ t)$ مطرح می‌شود که پیوسته هستند، در شرط (۲۷) صدق می‌کنند و به ازای $t=T$ برابر $u(x\ ,\ T)$ می‌شوند. علاوه بر این، تابع مجهول باید در شرط اول (۲۸) هم صدق کند.

قاعدهٔ ***هامیلتون***، که در این‌جا صورت دیگری از آن را آوردیم، نه تنها گروه جواب‌های قابل قبول معادلهٔ (۲۴) را گسترش می‌دهد، بلکه در ضمن، مسألهٔ حدی مشخص آن‌ها را هم طرح می‌کند.

این‌که، جواب‌های قابل قبول یا بعضی از مشتق‌های آن‌ها، ممکن است برای تمام نقطه‌های فضا معین نشوند، تباینی با تجربه ندارد. ***ن. م. هونگر***، مکرر این مطلب را خاطر نشان می‌کند و با بررسی‌های خود، دیدگاه تازه‌ای برای حل معادله‌های فیزیک ریاضی

به‌وجود آورده است.

برای نمونه، اگر مسألهٔ تعیین جریان مایع را در یک کانال حل کنیم، باید به عنوان طرح رسمی، بُردار سرعت جریان مایع و مقدار فشار را در هر نقطهٔ آن محاسبه کنیم. ولی در عمل، اغلب به جای فشار در یک نقطه، به فشار جریان در یک سطح و به جای بردار سرعت در نقطهٔ مفروض، به مقدار مایعی که در واحد زمان از سطح مفروضی عبور می‌کند، نیاز داریم. تعیین جواب‌های قابل قبول هم در واقع محاسبهٔ همین مقدارها را در نظر می‌گیرد که معنای فیزیکی مستقیمی دارند.

برای این‌که تعداد بیشتری از مسأله‌ها قابل حل باشند، باید جواب‌ها را بین تابع‌هایی جست‌وجو کرد که درحد امکان متعلق به گروه گسترده‌تری از تابع‌ها باشند، ولی چنان گروهی که قضیه‌های مربوط به منحصر به‌فرد بودن، دربارهٔ آن صادق باشد.اغلب، چنین گروهی ماهیت فیزیکی مسأله را مشخص می‌کند. برای نمونه در مکانیک کوانتایی، نه تابع $\psi(x)$، که به عنوان جواب معادلهٔ **شره‌دینگر** معین می‌شود، بلکه انتگرال $a_\nu = \int_E \psi(x)\psi_\nu(x)dx$ که در آن ψ_ν تابعی است که برای آن $\int_E \psi_\nu^2 dx < \infty$ ، مفهوم واقعی دارد. بنابراین، جواب ψ را، نه بین تابع‌هایی که به طور پیوسته دوبار قابل دیفرانسیل‌گیری باشند، بلکه بین تابع‌هایی که توان دوم آنها قابل انتگرال‌گیری باشند، باید جست‌وجو کرد. در مسأله‌های مربوط به الکترودینامیک کوانتایی، به پرسش مربوط به این‌که جواب‌های معادله‌های مورد بررسی را در چه گروه‌هایی باید جست‌وجو کرد، هنوز تا امروز پاسخی داده نشده است.

پیشرفت فیزیک ریاضی در سی‌سالهٔ اخیر، از بسیاری جهت‌ها به این‌گونه طرح تازهٔ مسأله‌ها، و ساختن دستگاه ریاضی که برای حل آن‌ها لازم است، مربوط می‌شود. قضیه‌های ***س.ل. سوبولف***، برای چنین دستگاهی می‌تواند نقش اساسی داشته باشد.

به خصوص، روش‌های مناسب برای جست‌وجوی جواب‌های قابل قبول در یک گروه از تابعها، عبارت‌اند از: روش تفاضل‌های محدود، روش‌های مستقیم محاسبهٔ واریاسیونی (روش‌های ***ریتسا*** و ***ته‌رفتس***)، روش ***گالرکین*** و روش‌های تابعی ـ عاملی. مبنای روش‌های اخیر، عبارت است از مطالعهٔ ویژگی‌های تبدیل، در مسأله‌های مختلف. دربارهٔ روش تفاضل‌های محدود و روش ***گالرکین*** هم در بند ۵ صحبت کرده‌ایم. در این‌جا، اندیشهٔ اساسی روش‌های مستقیم محاسبهٔ واریاسیونی را روشن می‌کنیم.

مسألهٔ مربوط به تعیین حالت تعادل را در غشای قابل ارتجاع، که در کنارهٔ خود

محکم شده است، بررسی می‌کنیم. بنابر قاعدهٔ مربوط به می‌نیمم انرژی پتانسیلی در حالت تعادل پایدار، باید تابع $u(x\,,\,y)$، که وضع غشا را معین می‌کند، حداقل مقدار انتگرال

$$J(u) = \iint_D (u_x^۲ + u_y^۲)dx\,dy$$

را، در مقایسه با همهٔ تابع‌های دیگر پیوسته و قابل دیفرانسیل‌گیری $\nu(x\,,\,y)$، که مثل تابع u با همان شرط استحکام $\nu|_s=\varphi$ سازگار است، به ما بدهد. با بعضی محدودیت‌ها برای φ و مرز S، ثابت می‌شود چنین می‌نیممی وجود دارد و برای تابع همساز تحقق می‌پذیرد، به نحوی که تابع مجهول u جواب مسألهٔ **دیریکله** است: $\Delta u = ۰$ ، $u|_S=\varphi$. عکس این حکم هم درست است: جواب مسألهٔ **دیریکله**، می‌نیمم انتگرال J را، در مقایسه با همهٔ νهایی که با شرط استحکام می‌سازند، به دست می‌دهد.

اثبات وجود تابع u، که به کمک آن می‌نیمم J به دست می‌آید، و محاسبهٔ تقریبی آن با هر دقت دل‌خواه را می‌توان از جمله به این ترتیب داد (روش **ریتسا**). بی‌نهایت تابع $\{\nu_n(x\,,\,y)\}$, $n = ۰\,,۱\,,۲\,, ...$ را که به طور پیوسته دوبار قابل دیفرانسیل‌گیری باشند، انتخاب می‌کنیم، به نحوی که روی مرز برای $n>۰$ برابر صفر و برای $n=۰$ برابر φ باشند. J را به صورت تابع

$$\nu = \sum_{k=l}^{n} C_k\nu_k + \nu_۰$$

در نظر می‌گیریم، که در آن C_k نمایندهٔ عددهای دل‌خواهی است. در این صورت $J(\nu)$، چند جمله‌ای درجه دومی از n متغیر مستقل $C_۱$، $C_۲$، ...، C_n می‌شود. C_k را با این شرط که چند جمله‌ای به حداقل مقدار خود برسد، معین می‌کنیم. این مسأله، منجر به دستگاهی از n معادلهٔ جبری خطی با n مجهول می‌شود که دترمینان آن مخالف صفر است. بنابراین، تنها یک جواب برای C_k پیدا می‌شود. ν را که متناظر با این جواب است به $\nu_n(x\,,\,y)$ نشان می‌دهیم. معلوم می‌شود، اگر دستگاه $\{\nu_n\}$ در شرطی صدق کند، تابع ν_n به ازای $n \to \infty$ به سمت تابعی که همان جواب مجهول مسأله است، میل می‌کند.

در پایان یادآور می‌شویم که در این بخش، تنها به شرح ساده‌ترین مسأله‌های مکانیک پرداختیم و بسیاری مسأله‌های دیگر را که منجر به معادله‌های با مشتق‌های جزیی پیچیده‌تری می‌شود، کنار گذاشتیم.

بخش هفتم

منحنی‌ها و سطح‌ها (خم‌ها و رویه‌ها)

ا. د. آلکساندرف

۱. موضوع و روش نظریهٔ (خم‌ها و رویه‌ها) منحنی‌ها و سطح‌ها

در دورهٔ دبیرستانی هندسه، تنها ساده‌ترین منحنی‌ها بررسی می‌شود. خط راست، خط شکسته، دایره و کمان‌های آن؛ و از سطح‌ها، به‌جز صفحه، از سطح چندوجهی‌ها، کره، مخروط و استوانه، صحبت می‌شود. در دوره‌های اختصاصی‌تر، بعضی دیگر از منحنی‌ها، و قبل از همه، مقطع‌های مخروطی: بیضی، سهمی و هذلولی هم آموزش داده می‌شود. ولی بررسی منحنی با سطح *دل‌خواه*، به کلی خارج از هندسهٔ مقدماتی است. حتی در نظر اول روشن نیست، وقتی صحبت از هر منحنی یا سطح دل‌خواه است، چه ویژگی‌های کلی را می‌توان جدا و مطالعه کرد. ولی به‌هرحال، تلاش برای چنین مطالعه‌ای، هم طبیعی و هم ضروری است.

در همهٔ فعالیت‌های عملی و در تلاشی که برای شناخت طبیعت می‌کنیم، همه جا و همیشه، به منحنی‌ها و سطح‌هایی برخورد می‌کنیم که به کلی با هم تفاوت دارند: مسیری که سیاره‌ها در فضا، کشتی در دریا و گلولهٔ توپ در هوا، طی می‌کند، اثری که قلم حکاکی بر فلز، چرخ بر جاده و قلم بر صفحهٔ کاغذ می‌گذارد، دورهٔ مشت و دریچهٔ اطمینان موتور، دورهٔ نقشه‌های صنعتی، شکل کابل‌ها، شکل خاص فنرهای مارپیچی به هم کلاف شده و غیره، از این نمونه‌های منحنی‌های مختلف، تا هر جا که بخواهیم، می‌توان نام برد. سطح جسم‌های مختلف، پوسته‌های نازک مخزن‌ها، سطح خارجی هواپیماها، لفاف‌ها، ورقه‌های نازک مواد و غیره، گوناگونی بی‌اندازهٔ سطح‌ها را به ما نشان می‌دهند. طریقهٔ به عمل آوردن مصنوع‌ها، ویژگی‌های بصری، استحکام و قابلیت تغییر شکل در ورقه‌های نازک و بسیاری از ویژگی‌های دیگر، تا حد زیادی بستگی به شکل هندسی سطح‌ها دارد.

البته، آنچه که با قلم حکاکی روی فلز باقی می‌ماند، یک منحنی ریاضی نیست. مخزن

هم، هر قدر که دیوارهٔ نازکی داشته باشد، سطح ریاضی نیست. ولی، در تقریب اول، تا آن‌جا که برای بررسی بسیاری از مسأله‌ها کافی باشد، می‌توان چیزهای واقعی را به عنوان منحنی‌ها و سطح‌های ریاضی تصور کرد.

ما، بدون توجه به محدودیت‌هایی که امکان کم کردن ضخامت نخ واقعی را کم کند، پیش خود، منحنی را به عنوان نخ بسیار نازک، نخ بدون ضخامت، در نظر می‌گیریم و به این ترتیب، مفهوم منحنی ریاضی را قبول می‌کنیم. در این‌صورت، می‌توانیم ویژگی‌های کلی چیزها را، ضمن کم شدن ضخامت و عرض آن‌ها، نسبت به طولشان، در این مفهوم انتزاعی منعکس کنیم.

درست به همین ترتیب، صرف‌نظر از محدودیت امکان کم کردن ضخامت جسم‌ها و صرف‌نظر از محدودیت تعیین دقیق وضع مرزهای یک جسم، مفهوم سطح ریاضی را قبول می‌کنیم. ما به تعریف دقیق این مفهوم‌ها، که برای همه به خوبی روشن است، نمی‌پردازیم. تنها یادآوری می‌کنیم که تعریف ریاضی دقیق آن‌ها، آن‌قدرها هم ساده نیست و مربوط به شاخهٔ توپولوژی است.

سرانجام، باید گفت پیشرفت آنالیز ریاضی هم، محرکی برای مطالعهٔ منحنی‌ها و سطح‌های مختلف شده است. از جمله، کافی است این مطلب را به یاد آوریم که منحنی چیزی جز بیان هندسی تابع نیست؛ و تابع اساسی‌ترین مفهوم در آنالیز ریاضی است. البته، بدون توجه به نیازهای آنالیز ریاضی هم، هر کسی به منحنی‌های گوناگون برخورد می‌کند.

اگر در هندسهٔ مقدماتی، آن‌طور که حتی در یونان باستان هم شناخته بود، گفت‌وگو از هر منحنی و یا هر سطحی نیست، در عوض در هندسهٔ تحلیلی گفته می‌شود که «هر منحنی به وسیلهٔ یک معادله نشان داده می‌شود» و «هر معادله‌ای با دو متغیر x و y، یک منحنی را در صفحهٔ محورهای مختصات مشخص می‌کند». به همین ترتیب، هر سطحی را هم در دستگاه مختصات، می‌توان به وسیلهٔ معادله‌ای به صورت $z=f(x, y)$ یا $F(x, y, z)=0$ مشخص کرد. روش مختصاتی، که ارتباط دقیق بین هندسه و آنالیز را برقرار می‌کند، وسیله‌ای است که به کمک آن می‌توان منحنی‌ها و سطح‌های مختلف را به صورت معادله بیان کرد.

با وجود این، هندسهٔ تحلیلی هم محدود به امکان‌های جبری و هندسهٔ مقدماتی است و نمی‌تواند نوع‌های جداگانهٔ شکل‌ها را، به‌طور دقیق بررسی کند. مطالعهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها، خود شاخهٔ تازه‌ای را تشکیل می‌دهد که همان نظریهٔ منحنی‌ها و سطح‌هاست و هندسهٔ *دیفرانسیلی* نامیده می‌شود.

باید یادآوری کرد که هندسهٔ دیفرانسیلی هم، بررسی منحنی‌ها و سطح‌ها را، مقید به بعضی شرط‌های کلی می‌کند، که مربوط به امکان کاربرد روش‌های آنالیز در این بررسی است. با وجود این، گروه منحنی‌ها و سطح‌هایی که می‌توان بررسی کرد، بسیار زیاد و از گونه‌های مختلف‌اند، به‌نحوی که در تعداد بسیار زیادی از مسأله‌ها، می‌توان با دقت لازم، موضوع‌های حقیقی را مطالعه کرد. خود نام‌گذاری «هندسهٔ دیفرانسیلی» معرف روشی است که در این نظریه به کار می‌رود: این نظریه، در اساس، از محاسبهٔ دیفرانسیلی استفاده می‌کند و قبل از هر چیز، ویژگی‌های «دیفرانسیلی» منحنی‌ها و سطح‌ها، یعنی ویژگی‌های آن‌ها را «در نقطه»، دنبال می‌کند[1]. از جمله ، امتداد منحنی در یک نقطه، به وسیلهٔ مماس در آن نقطه و یا خمیدگی منحنی به وسیلهٔ محاسبهٔ انحنای آن (تعریف دقیق انحنا، کمی بعد داده خواهد شد)، داده می‌شود و غیره؛ هندسهٔ دیفرانسیلی، ویژگی‌های قطعه‌های کوچکی از منحنی‌ها و سطح‌ها را بررسی می‌کند، و تنها در شاخه‌های دوری از آن، بررسی منحنی‌ها و سطح‌های مختلف «به طور کلی» و «در مجموع خود»، بررسی می‌شود.

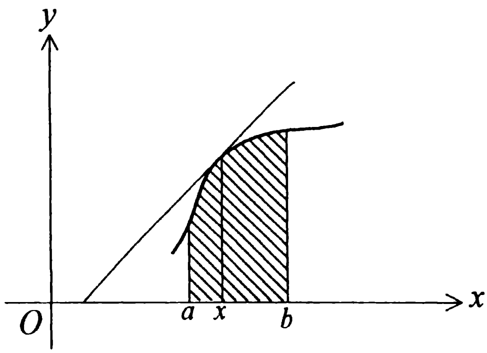
پیشرفت هندسهٔ دیفرانسیلی، به طور جدی، به پیشرفت آنالیز مربوط است. عمل‌های بنیانی آنالیز ــ دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری ــ مفهوم هندسی روشن و مستقیمی دارند. در بخش دوم (جلد اول) هم دیدیم که دیفرانسیل تابع $f(x)$، متناظر است با رسم مماس بر منحنی

$$y=f(x)$$

ضریب زاویهٔ مماس (یعنی تانژانت زاویهٔ مماس آن نسبت به محور Ox) چیزی جز مشتق تابع $f(x)$ (یعنی $f'(x)$) در نقطهٔ مربوطه نیست (شکل ۱). همچنین سطح «زیرمنحنی» $y=f(x)$، چیزی جز انتگرال $\int_a^b f(x)dx$ این تابع نیست، که در فاصلهٔ لازم انتخاب شده است. از آن‌جا که در آنالیز، تابع‌های دل‌خواه مورد بررسی می‌شود، در این‌جا هم صحبت بر

---

۱. هندسهٔ دیفرانسیلی، قبل از هر چیز، خاصیت‌های منحنی‌ها و سطح‌ها را «در نقطه» مطالعه می‌کند (یعنی، خاصیت‌هایی که مربوط به حومهٔ به دل‌خواه کوچکی از نقطهٔ مفروض باشد)، در ضمن این خاصیت‌ها به‌وسیلهٔ مقدارهایی مشخص می‌شوند که به وسیله مشتق‌هایی از این تابع‌ها (در نقطهٔ مفروض) داده شده است، تابع‌هایی که معرف معادلهٔ منحنی یا سطح هستند. به همین مناسبت، هندسهٔ دیفرانسیلی مقید به بررسی منحنی‌ها و سطح‌هایی است که امکان کاربرد محاسبهٔ دیفرانسیلی درباره آن‌ها ممکن باشد: باید بتوان منحنی یا سطح را به صورت معادله‌هایی نشان داد که در آن‌ها، تابع‌هایی داخل شده باشد که تا جایی که لازم است، دارای مشتق‌های متوالی باشند.



شکل ۱

سر منحنی‌ها و سطح‌های دل‌خواه است. در آنالیز، بیش از همه روش‌های کلی مطالعهٔ رفتار منحنی در صفحه، بررسی می‌شود: بالا رفتن و پایین آمدن آن، زیادی یا کمی خمیدگی آن، جهت برآمدگی آن، جای پیچ‌های آن و غیره. خود نام دورهٔ اول آنالیز، که به وسیلهٔ ***هوپیتال***، ریاضیدان فرانسوی در سال ۱۶۹۵ چاپ شده ـ «آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها، برای شناسایی خط‌های منحنی» ـ بستگی نزدیکی با نظریهٔ منحنی‌ها دارد.

وقتی، بعد از ***نیوتن*** و ***لایپ‌نیتس*** و نخستین اخلاف آن‌ها، حساب دیفرانسیل و انتگرال در میانه‌های سدهٔ هیجدهم، پیشرفت کافی پیدا کرد، امکان‌های گستردهٔ کاربرد آن در هندسه، روشن شد. و از همین زمان است که تکامل خود نظریهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها هم آغاز می‌شود. برای منحنی‌های فضایی و سطح‌ها، مسأله‌هایی مطرح شد، که به حالت منحنی‌های مسطحه شبیه، ولی بی‌اندازه پیچیده‌تر و از لحاظ مضمون، غنی‌تر بود. در جریان زمان، این مسأله‌ها رشد کرد و خود را از قالب کاربُرد سادهٔ آنالیز در هندسه، بیرون کشید و منجر به تشکیل نظریهٔ مستقل منحنی‌ها و سطح‌ها شد. در پیشرفت نخستینِ این نظریه در نیمهٔ دوم سدهٔ هیجدهم، بسیاری از ریاضیدانان سهیم بودند: ***کِلِرو***، ***اولر***، ***مونژ***[1] و دیگران، که به خصوص ***اولر*** را باید پایه‌گذار نظریهٔ کلی سطح‌ها دانست. نخستین اثر دربارهٔ نظریهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها، عبارت است از کتاب ***مونژ*** به نام «کاربرد آنالیز در هندسه»، که در سال ۱۷۹۵ چاپ شد. در بررسی‌های این ریاضیدانان، و به خصوص در کتاب نامبردهٔ ***مونژ***، به

۱. ***گاسپار مونژ*** (۱۷۴۶-۱۸۲۸)، نه تنها یک دانشمند مشهور، بلکه در ضمن یکی از فعالان انقلاب فرانسه بود (او وزیر دریاداری و سپس مسئول تولید توپ و باروت برای ارتش انقلابی بود). او راهی شبیه بورژوازی فرانسه، از هواخواهی ژاکوین‌ها تا طرفداری امپراطوری ناپلئون، طی کرد.

روشنی عامل‌های محرکهٔ پیشرفت هندسهٔ دیفرانسیلی دیده می‌شود. این‌ها عبارت بود از نیازهای روبه افزون مکانیک، فیزیک و اخترشناسی، یعنی در تحلیل آخر، نیازهای تکنیک و صنعت، که دیگر، هندسهٔ مقدماتی موجود برای برطرف کردن آن‌ها به هیچوجه کافی نبود.

کارهایی هم که **گوس** (۱۷۷۷-۱۸۵۵) در زمینهٔ نظریهٔ سطح‌ها کرده است، با عمل ارتباط دارد. اثر **گوس**، که در سال ۱۸۲۷، زیر نام «بررسی‌های کلی دربارهٔ سطح‌های منحنی» چاپ شد، مبانی هندسهٔ دیفرانسیلی سطح‌ها را به عنوان بخش مستقلی از ریاضیات، بنیان گذاشت. در این کتاب، بعضی از روش‌های کلی و مسأله‌هایی از نظریهٔ سطح‌ها آمده است که ما دربارهٔ آن‌ها در بند ۴، گفت‌وگو خواهیم کرد. **گوس**، به خصوص، به نیازهای نقشه‌بردارها توجه داشته است. مسألهٔ نقشه‌برداری این است که بتوانیم قطعه‌ای از سطح زمین را با دقت هر چه بیشتر، روی صفحه نشان دهیم. در این‌جا، به نمایش دقیق نمی‌توانیم برسیم: نسبت مقیاس‌ها را باید، به عنوان نتیجه‌ای از پست و بلندی‌های سطح زمین در نظر گرفت. بنابراین، این مسأله در برابر ما قرار می‌گیرد که تا آن‌جا که ممکن است، روش‌های دقیق‌تری برای تصویر پیدا کنیم. رسم نقشه از زمان‌های بسیار دور معمول بوده است، ولی، تشکیل یک نظریهٔ کلی برای آن، در زمانی که خیلی از ما دور نیست، انجام گرفته است؛ و این نظریه هم، بدون تکامل نظریهٔ کلی سطح‌ها و روش‌های کلی آنالیز ریاضی ممکن نبود. یادآوری می‌کنیم که **پ.ل. چبیشف** (۱۸۲۱-۱۸۹۴)، یکی از مسأله‌های ریاضی دشوار مربوط به نقشه‌برداری را بررسی کرد. او همچنین نتیجه‌گیری‌های مهمی دربارهٔ شبکهٔ خط‌های منحنی در سطح‌ها به‌دست آورد و این بررسی‌های او، منجر به تعدادی مسأله‌های عملی شد.

مسأله‌های کلی نگاشت یک سطح بر دیگری و مسأله‌های تغییر شکل سطح‌ها هم، امروز یکی از بخش‌های مرکزی هندسه را تشکیل می‌دهند. در این باره **ف. مین‌دینگ** (۱۸۰۶-۱۸۸۵). استاد دانشگاه تارتو، در سال ۱۸۳۸ به نتیجه‌های مهمی رسید.

تا نیمهٔ دوم سدهٔ گذشته، نظریهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها، در مبانی خود تحکیم می‌شد (به شرطی که گفت‌وگو از به اصطلاح «هندسهٔ دیفرانسیلی سنتی» باشد، والا جهت‌های تازهٔ دیگری هم پیدا شد که دربارهٔ آن‌ها در بند ۵ صحبت خواهیم کرد). معادله‌های اصلی نظریهٔ منحنی‌ها، که به فرمول‌های *فرنه* مشهورند، به دست آمد. در سال ۱۸۵۳، **ک.م. پترسون**، شاگرد **مین‌دینگ** در دانشگاه تارتو در تالیف‌های علمی خود، معادله‌های اصلی نظریهٔ سطح‌ها را پیدا کرد و مورد استفاده قرار داد؛ ۱۵ سال بعد، همین معادله‌ها را **گوداتسی**، ریاضی‌دان ایتالیایی به دست آورد و تعمیم داد، که اغلب هم آن‌ها را به نام همین دانشمند

می‌نامند. **پترسون**، وقتی که دانشگاه تارتو را تمام کرد، در مسکو به عنوان معلم دبیرستان، مشغول کار شد. او بدون این که هیچ‌گونه عنوان فرهنگستانی داشته باشد، به خاطر موفقیت‌های علمی مهمی که به دست آورد، دست کم یکی از بنیان‌گذاران انجمن ریاضی مسکو بود و مجلهٔ «مجموعهٔ ریاضی» او، که از سال ۱۸۶۶ در مسکو آغاز به انتشار کرد، تا امروز هم ادامه پیدا کرده است. آغاز مکتب علمی هندسهٔ دیفرانسیلی را در مسکو، باید از کارهای **پترسون**، به حساب آورد.

جمع‌بندی تکامل هندسهٔ دیفرانسیلی «سنتی» را باید مربوط به کتاب چهار جلدی **لاربو**، هندسه‌دان فرانسوی دانست، که به نام «درس‌هایی دربارهٔ نظریهٔ کلی سطح‌ها»، در سال‌های ۱۸۸۷ تا ۱۸۹۶، چاپ شد. در سدهٔ بیستم هم، هندسهٔ دیفرانسیلی رسمی، راه خود را ادامه می‌دهد و بررسی نظریهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها، تا حد زیادی به مسیر تازه‌ای افتاده است که در آن دایرهٔ شکل‌های مورد بررسی و خاصیت‌های آن‌ها، بیش از پیش، گسترش پیدا می‌کند.

۲. نظریهٔ منحنی‌ها (خم‌ها)

روش طرح منحنی‌ها در هندسهٔ دیفرانسیلی. با طرح منحنی‌ها به وسیلهٔ معادله‌ها، در آنالیز و هندسهٔ تحلیلی، آشنا هستیم. در مختصات قائم روی صفحه، می‌توان منحنی را یا به وسیلهٔ معادلهٔ

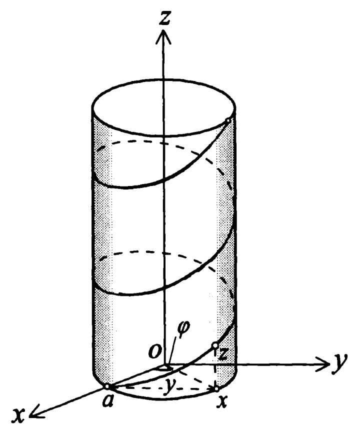
$$y=f(x)$$

و یا به وسیلهٔ معادلهٔ کلی‌تر

$$F(x,y)=0$$

مشخص کرد. ولی، این روش، تنها به درد منحنی مسطحه (یعنی منحنی که روی صفحه باشد) می‌خورد. باید بتوانیم منحنی‌های فضایی را هم (که نمی‌توان آن‌ها را بر یک صفحه جا داد)، به وسیلهٔ معادله بیان کنیم. نمونهٔ این منحنی‌ها، خط مارپیچی است که در شکل ۲ داده شده است.

برای هدفی که هندسهٔ دیفرانسیلی دنبال می‌کند و برای خیلی از حالت‌های دیگر، راحت‌تر این است که منحنی را، به عنوان اثر حرکت پیوستهٔ نقطه، در نظر بگیریم.البته، یک منحنی مفروض، ممکن است سرچشمهٔ دیگری داشته باشد، ولی همیشه می‌توانیم در ذهن



شکل ۲

خود، نقطه‌ای را در نظر بگیریم که منحنی را طی می‌کند.

دستگاه مختصات دکارتی ثابتی را در فضا در نظرمی‌گیریم. اگر نقطهٔ متحرک X را واداریم تا منحنی را در زمان از $t=a$ تا $t=b$ طی کند، در این‌صورت، مختصات این نقطهٔ متحرک، تابع‌هایی از زمان خواهند بود: $x(t)$ ، $y(t)$ ، $z(t)$. به عنوان مثال‌های عینی، می‌توان پرواز هواپیما یا حرکت گلولهٔ توپ را در نظر گرفت. برعکس، اگر تابع‌های $x(t)$ ، $y(t)$ ، $z(t)$ از قبل داده شده باشد، به وسیلهٔ آن‌ها می‌توان مختصات نقطهٔ متحرک X را معین کرد.نقطه‌ای که با تغییر t حرکت می‌کند، یک منحنی را رسم می‌کند. بنابراین، منحنی‌ها را می‌توان در فضا به کمک سه معادله، به صورت

$$x=x(t)\ ,y=y(t)\ ,\ z=z(t)$$

مشخص کرد. به همین ترتیب، هر منحنی روی صفحه، با دو معادله مشخص می‌شود.

$$x=x(t),y=y(t)$$

این روش معین‌کردن منحنی‌ها، روشی کلی است.

به عنوان مثال، خط مارپیچی را در نظر می‌گیریم. این منحنی ضمن حرکت مارپیچی نقطه به‌دست می‌آید و این حرکت، مجموعی است از دوران یکنواخت دور یک خط راست ــ محور مارپیچ ــ و انتقال یکنواخت در امتداد همین محور. محور مارپیچ را، محور Oz می‌گیریم. فرض کنید در لحظهٔ $t=0$، نقطه بر محور Ox واقع باشد. بستگی بین مختصات آن را با زمان پیدا می‌کنیم. اگر حرکت در امتداد Oz با سرعت c انجام بگیرد، روشن است که

جابه‌جایی در این جهت برحسب زمان t خواهد بود:

$$z = ct$$

اگر φ، زاویهٔ دوران دور محور Oz و a، فاصلهٔ نقطه تا محور باشد، همان‌طور که از شکل ۲ دیده می‌شود.

$$x = a\cos\varphi\ ,\ y = a\sin\varphi$$

چون دوران یکنواخت است، زاویهٔ φ متناسب با زمان خواهد بود: $\varphi = \omega t$ (ω، سرعت زاویه‌ای دوران است). بنابراین، به دست می‌آید:

$$x = a\cos\,\omega t\ ,y = a\sin\omega t\ ,z = ct$$

و این، همان معادلهٔ خط مارپیچی است: با تغییر t، نقطه‌ای که مختصات آن چنین است خط مارپیچی را رسم می‌کند.

البته، متغیر t و یا آن‌طور که اغلب می‌گویند، پارامتر t، همیشه مفهوم زمان را نمی‌رساند. به‌جز آن، از پارامتر مفروض t می‌توان به پارامتر دیگری عبور کرد: برای نمونه، متغیر دیگری مثل u را با دستور $t=u^3$ و یا به طور کلی $t=f(u)$ در نظر گرفت[1]. در هندسه، طبیعی این است طول s کمان منحنی را، که از نقطهٔ ثابتی مثل A روی منحنی به حساب می‌آید، به عنوان پارامتر در نظر بگیریم. هر مقدار ممکن طول s، به کمان AX خودش متناظر است. بنابراین، موقعیت X، به طور کامل با مقدار s معین، و مختصات نقطهٔ X به صورت تابع‌هایی از طول کمان s بیان می‌شود:

$$x = x(s)\ ,y = y(s)\ ,z = z(s)$$

همهٔ این‌ها، و همچنین روش‌های دیگری که می‌توان برای بیان منحنی‌ها آورد[2]، راه را

---

۱. در ضمن اگر دقیق باشیم، باید شرط کنیم، تابع f یکنوا (مونوتون) باشد.

۲. منحنی روی صفحه را، به عنوان محل برخورد دو سطحی هم که معادله‌های آن‌ها معلوم باشد، می‌توان داد: $F(x\ ,y\ ,z) = 0$ ، $G(x\ ,y\ ,z) = 0$. یعنی منحنی، به عنوان مجموعهٔ این دو معادله، معین می‌شود. در استنتاج‌های نظری، اغلب منحنی را به صورت بُرداری می‌دهند، یعنی جای نقطهٔ X از منحنی به وسیلهٔ بردار $r=\overrightarrow{OX}$، که از مبداء مختصات به این نقطه می‌رود، معین می‌شود. با تغییر بُردار r، انتهای آن، X، منحنی مفروض را رسم می‌کند (شکل ۳).

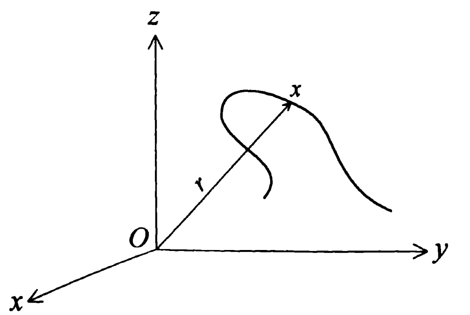
برای کاربرد محاسبه در بررسی‌ها باز می‌کند. تنها به‌شرطی که منحنی را به‌کمک معادله‌هایی مشخص کرده باشیم، می‌توانیم ویژگی‌های آن را به کمک آنالیز ریاضی بررسی کنیم.

در هندسهٔ دیفرانسیلی، سه مفهوم اساسی برای بررسی منحنی روی صفحه، وجود دارد: طول، مماس و انحنا. دربارهٔ منحنی فضایی، به‌جز این‌ها، به اصطلاح صفحهٔ بوسان و تاب هم وجود دارد. و حالا، به ترتیب، به روشن کردن این مفهوم‌ها می‌پردازیم.

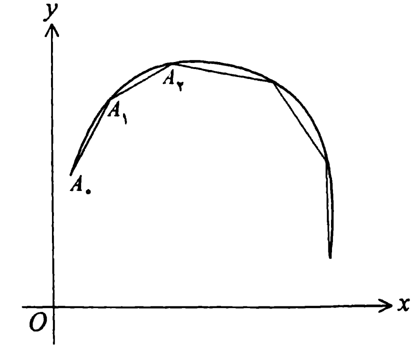
طول. هرکسی دربارهٔ طول، تصوری دارد، ولی باید این تصورها را دقیق کرد. باید تعریف دقیقی از طول منحنی ریاضی در دست داشته باشیم که خصلتی عددی داشته باشد و به کمک آن بتوان طول منحنی‌ها را با هر دقتی که لازم است پیدا کرد و هرجا گفت‌وگو از طول است، بتوان با دقت بحث را ادامه داد. این وضع، دربارهٔ هر مفهومی از ریاضیات صادق است. عبور از تصورهای شکل نگرفته به سمت اندازه‌گیری و تعریف دقیق، در واقع، عبور از مفهوم غیرعلمی یک موضوع به سمت مفهوم علمی آن است. دقیق کردن مفهوم‌ها، برای نیازهای صنعت و دانش‌های طبیعی هم لازم است، زیرا پیشرفت آن‌ها بستگی به مطالعهٔ طول، سطح و دیگر کمیت‌های هندسی دارد.

تعریف سادهٔ طول، که در ضمن معمول‌ترین آن‌هاست، چنین است: ***طول*** منحنی عبارت است از حد طول خط شکسته‌ای که در این منحنی محاط شده باشد، وقتی که رأس‌های خط شکسته روی منحنی مرتب به هم نزدیکتر شوند.

این تعریف، از روش طبیعی اندازه‌گیری سرچشمه گرفته است. روی منحنی، نقطه‌های A_0 ، A_1 ، A_2 ، ... را پشت سر هم نشان می‌گذاریم (شکل ۴) و سپس فاصله‌های بین آن‌ها را اندازه می‌گیریم. مجموع این فاصله‌ها (که همان طول خط شکستهٔ محاطی است)،



شکل ۳



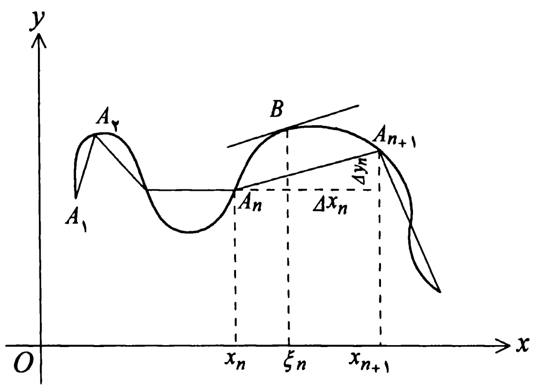
شکل ۴

طول منحنی را به تقریب بیان می‌کند. طبیعی است، اگر بخواهیم طول منحنی را دقیق‌تر به دست آوریم، باید نقطه‌های A را بیشتر نزدیک به هم انتخاب کنیم تا خط شکسته بیشتر به خط منحنی نزدیک شود. سرانجام، برای این‌که مقدار دقیق طول را پیدا کنیم، باید حد طول خط شکسته را، وقتی که نقطه‌های A بی‌نهایت به هم نزدیک شده‌اند، به دست آوریم[1]. به این ترتیب، این تعریف طول، تعمیمی از روش عملی و تجربی اندازه‌گیری است.

وقتی منحنی به صورت تحلیلی داده شده باشد، از این تعریف می‌توان به سادگی دستوری برای محاسبهٔ طول آن به دست آورد. با وجود این، یادآوری می‌کنیم، دستورهای ریاضی، تنها در خدمت محاسبه نیستند. هر دستور، در واقع، کوتاه شدهٔ قضیه‌ای است که رابطهٔ بین کمیت‌های مختلف ریاضی را برقرار می‌کند. مفهوم نظری چنین رابطه‌ای، ممکن است بعدها، به دستور، معنای محاسبه‌ای هم بدهد. مثل قضیهٔ ***فیثاغورس*** که با دستور $c^2 = a^2 + b^2$ بیان می‌شود، تنها به محاسبهٔ مربع وتر c منجر نمی‌شود، بلکه قبل از هر چیز، رابطه‌ای را که بین ضلع‌های یک مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد، نشان می‌دهد.

در این‌جا، دستوری برای طول منحنی مسطحه‌ای می‌دهیم که معادلهٔ آن در دستگاه محورهای مختصات دکارتی، به صورت $y=f(x)$ باشد. در ضمن فرض می‌کنیم، تابع $f(x)$ دارای مشتق پیوسته است.

خط شکسته را در منحنی محاط می‌کنیم. فرض کنید که A_n، A_{n+1}، دو رأس مجاور از



شکل ۵

۱. وجود این حد، و در نتیجه وجود طول منحنی در یک حوزهٔ محدود، از قبل معلوم نیست. اگر منحنی خیلی پیچ بخورد، طول آن ممکن است خیلی زیاد بشود. از نظر ریاضی، می‌توان یک منحنی در نظر گرفت که چنان «پیچ خورده» باشد که هیچ کمانی از آن، طول محدودی نداشته باشد (یعنی طول خط شکستهٔ محاط در آن، به طور نامحدود صعودی باشد).

ایــن خــط‌شکسته و $(x_n\ ,\ y_n)$ ، $(x_{n+1}\ ,\ y_{n+1})$ مـختصات ایـن رأس‌هـا بـاشد. پـاره‌خط A_nA_{n+1}وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه آن برابر است با

$$\Delta x_n = |\, x_{n+1} - x_n \,| \ \ , \ \ \Delta y_n = |\, y_{n+1} - y_n \,|$$

بنابراین، طبق قضیهٔ ***فیثاغورس***، داریم:

$$\overline{A_nA}_{n+1} = \sqrt{(\Delta x_n)^2 + (\Delta y_n)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}\right)^2}\ \Delta x_n$$

به سادگی می‌توان پیش خود تصور کرد، اگر خط راستی را که از نقطه‌های A_n و A_{n+1} گذشته است، موازی با خود حرکت دهیم (بالا یا پایین ببریم)، در لحظه‌ای که خط راست از منحنی جدا می‌شود، به وضع مماس بر این منحنی در نقطه‌ای مثل B در می‌آید، یعنی در قطعهٔ منحنی A_nA_{n+1} ، دست کم یک نقطه وجود دارد که مماس در آن نقطه بر مـنحنی، ضریب‌زاویه‌ای برابر با ضریب‌زاویهٔ وتر A_nA_{n+1} ، داشته بـاشد (ایـن یـادآوری روشــن را می‌توان به سادگی و با دقت اثبات کرد).

از آن‌چه گفتیم، معلوم می‌شود که می‌توان نسبت $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$ را به تانژانت زاویهٔ شیب مماس در نقطهٔ B (ضریب‌زاویهٔ مماس) تبدیل کرد، یعنی $\frac{\Delta y_n}{\Delta x_n}$ را به مشتق $y'(\xi_n)$ تبدیل کرد، که در آن ξ_n عبارت است از طول نقطهٔ B. حالا، طول یک حلقه، به این صورت در می‌آید:

$$\overline{A_nA}_{n+1} = \sqrt{1 + y'^2(\xi_n)}\ \Delta x_n$$

طول تمامی خط شکسته، برابر با مجموع طول حلقه‌های آن است. در نتیجه، اگر طول خط شکسته را s_1 بگیریم، خواهیم داشت:

$$s_1 = \sum \sqrt{1 + y'^2(\xi_n)}\ \Delta x_n$$

برای این‌که طول منحنی را به دست آوریم، باید به سمت مقدار حدی برویم، بـه ایـن شرط که بزرگترین مقدار Δx_n به سمت صفر میل کند:

$$s = \underset{\Delta x \to 0}{\text{حد}} \sum \sqrt{1 + y'^2(\xi_n)}\ \Delta x_n$$

ولی این حد مجموع، چیزی جز یک انتگرال نیست (بنابر تعریفی که در بخش دوم ـ جلد اول

دیده‌ایم)، یعنی انتگرال از تابع $\sqrt{1 + y'^2}$. بنابراین، طول منحنی مسطحه با این دستور بیان می‌شود:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad (1)$$

که در آن a و b عبارت‌اند از مقدارهای x در دو انتهای کمان منحنی.

دستوری هم که برای طول منحنی فضایی به دست می‌آید، با برخی تفاوت‌ها، بر همین اساس قرار دارد.

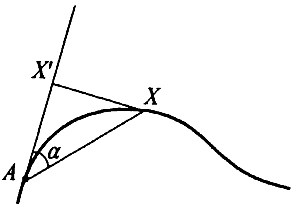
البته، محاسبهٔ عملی به کمک این دستور، همیشه ساده نیست. برای نمونه، محاسبهٔ طول محیط دایره به کمک دستور (۱)، بسیار پیچیده است. ولی، همان‌طور که گفتیم، دستور تنها برای محاسبه نیست؛ و از جمله از دستور (۱) می‌توان برای بررسی ویژگی‌های طول، ارتباط آن با دیگر کمیت‌ها و غیره، استفاده کرد. در بخش هشتم، به حالتی برخواهیم خورد که از دستور (۱) استفاده کنیم.

مماس. مماس بر منحنی مسطحه را در بخش دوم (جلد اول) بررسی کرده‌ایم. مفهوم مماس، برای منحنی فضایی هم، با مفهوم مسطحهٔ آن شباهت دارد. برای این‌که مماس برمنحنی را، در نقطهٔ A به دست آوریم، نقطهٔ X را، جدا از نقطهٔ A و روی منحنی، انتخاب و قاطع AX را رسم می‌کنیم. سپس، نقطهٔ X را روی منحنی به A نزدیک می‌کنیم. اگر، در این ضمن، قاطع‌های AX به سمت یک وضع حدی میل کند، در آن صورت، خط راستی که در حد به دست می‌آید، مماس در نقطهٔ A نامیده می‌شود[1].

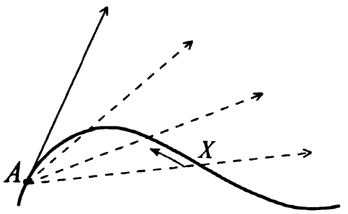
اگر ابتدا و انتهای منحنی، و در ضمن ترتیب آن‌ها، مشخص باشد، آن وقت می‌توان دراین باره گفت‌وگو کرد که از دو نقطهٔ A و X، کدام یک اولی و کدام یک دومی هستند (در شکل، وقتی قطار از تهران به طرف خرمشهر حرکت می‌کند، روشن است که قم قبل از اراک قرار گرفته است). اگر چنین باشد، می‌توان قاطع را با پیکانی نشان داد، که جهت آن از طرف نقطهٔ اول به نقطهٔ دوم باشد. حد چنین «قاطع‌های جهت‌دار»، یک «مماس جهت‌دار» خواهد بود (شکل ۶). پیکان نشان می‌دهد که حرکت در طول منحنی، در لحظه‌ای که از نقطهٔ A عبور

---

۱. همان‌طور که در شکل ۱۳ بخش دوم (جلد اول) دیده می‌شود، ممکن است برای قاطع‌ها، وضع حدی وجود نداشته باشد. منحنی $y=x\sin\frac{1}{x}$، که در آن‌جا نشان داده شده است، در نزدیکی صفر، نوعی نوسان دارد، به نحوی که قاطع OA، ضمن نزدیک شدن A به O، به طور دایم از خط راست OM به خط راست OL، و برعکس، جابه‌جا می‌شود.



شکل ۷



شکل ۶

می‌کند، در چه جهتی ادامه دارد. ضمن حرکت نقطه بر منحنی، سرعت حرکت در لحظه، در جهت مماس بر منحنی مسیر است.

مماس، خاصیت هندسی مهمی دارد: در نزدیکی نقطهٔ تماس، منحنی از این خط راست، کمتر از هر خط راست دیگری منحرف می‌شود: در ضمن، فاصلهٔ نقطهٔ منحنی از مماس، خیلی کمتر از فاصلهٔ آن تا نقطهٔ تماس است. به طور دقیق‌تر، وقتی X به سمت A میل می‌کند، نسبت $\frac{XX'}{AX}$ به سمت صفر میل می‌کند[1] (شکل ۷). بنابراین، تکهٔ کوچکی از منحنی را می‌توان با مماس عوض کرد، که اشتباه آن کمتر از اندازهٔ پاره‌خط انتخاب شده است و اغلب از این خاصیت مماس استفاده می‌کنند، یعنی برای ساده‌تر کردن نتیجه‌ها، به‌جای تکه‌های کوچک منحنی‌ها، پاره‌خط‌های راست مماس را درنظر می‌گیرند. البته، وقتی در حالت حدی باشیم، این روش، به نتیجه‌گیری‌های درست و دقیق می‌رسد.

پی‌گیری این مطلب جالب است که برای منحنی که خط راست نیست، یعنی به مفهوم سابق دارای جهت نیست، توانستیم با مقایسهٔ آن با خط راست، جهت آن را در هر نقطه به دست آوریم. در این‌جا، مفهوم جهت، گسترش پیدا کرده است: در جایی معنا پیدا کرده است که پیش از آن مفهومی نداشت. این مفهوم تازهٔ جهت، منعکس کنندهٔ طبیعت واقعی حرکت در روی منحنی است: این حرکت، در هر لحظه، جهتی دارد و در ضمن به طور دایم در حال تغییر است.

انحنا. وقتی یک میلهٔ نازک یا یک منحنی داشته باشیم و بخواهیم دربارهٔ خمیدگی مسیر آن با

---

۱. این حکم، نتیجهٔ مستقیم تعریف مماس است. در واقع، همان‌طور که از شکل ۷ دیده می‌شود، داریم: $\frac{XX'}{AX}=\sin\alpha$، که در آن α عبارت است از زاویهٔ بین مماس و قاطع AX. بنابراین نسبت $\frac{XX'}{AX}$ هم، همراه با α، به سمت صفر میل می‌کند.

چشمان خود داوری کنیم، نیازی به ریاضیات نداریم. ولی، حتی برای ساده‌ترین مسأله‌های مکانیک هم، این دید کلی کافی نیست و باید خمیدگی را به طور دقیق و با خصلت عددی، بیان کنیم. این بیان وقتی به دست می‌آید که مضمون انحنا، به عنوان سرعت تغییر جهت منحنی، در نظر گرفته شود.

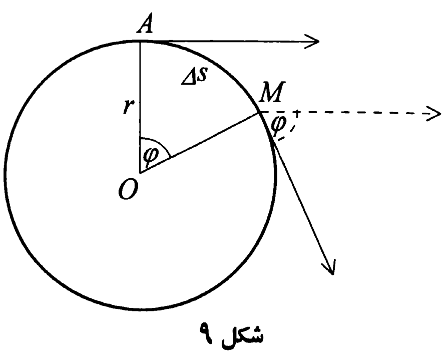
A را نقطه‌ای از منحنی و M را نقطه‌ای نزدیک به A فرض می‌کنیم (شکل ۸). زاویهٔ بین مماس‌ها در این نقطه‌ها، چرخش منحنی را در قطعهٔ از A تا M بیان می‌کند. این زاویه را به φ نشان می‌دهیم. روشن است که سرعت میانگین چرخش، یا دقیق‌تر، چرخش میانگین در واحد طول مسیر در قطعهٔ AM (به طول Δs)، برابر است با $\frac{\varphi}{\Delta s}$. و طبیعی است، انحنا هم، به عنوان سرعت چرخش در خود نقطهٔ A، به عنوان حد نسبت $\frac{\varphi}{\Delta s}$ به ازای $M \to A$ (و یا به زبان دیگر وقتی $\Delta s \to ۰$)، به دست می‌آید. به این ترتیب، انحنا با این دستور تعریف می‌شود:

$$k = \underset{\Delta s \to ۰}{\text{حد}} \frac{\varphi}{\Delta s}$$

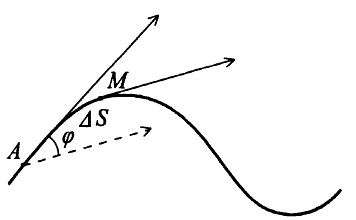
به عنوان مثال، انحنای دایره را بررسی می‌کنیم (شکل ۹). روشن است که زاویهٔ φ بین شعاع‌های OA و OM، برابر است با زاویهٔ φ بین مماس‌های بر دایره در این نقطه‌ها (زیرا ضلع‌های دو زاویه، نظیر به نظیر بر هم عمودند). طول قوس AM برابر است با $\Delta s = \varphi r$ و از آن‌جا

$$\frac{\varphi}{\Delta s} = \frac{۱}{r}$$

یعنی، نسبت $\frac{\varphi}{\Delta s}$، مقداری ثابت است بنابراین انحنای دایره، به عنوان مقدار حدی این



شکل ۹



شکل ۸

نسبت، در همهٔ نقطه‌ها یکی است و برابر است با عکس مقدار شعاع[۱].

دستور انحنای منحنی روی صفحه‌ای را، که با معادلهٔ $y=f(x)$ داده شده است، پیدا می‌کنیم. نقطهٔ N را به عنوان مبداء محاسبهٔ طول کمان، به صورت نقطهٔ ثابتی در نظر می‌گیریم (شکل ۱۰). روشن است، زاویهٔ φ بین مماس‌های در نقطه‌های A و M، برابر است با مقدار تغییر زاویهٔ شیب مماس، ضمن عبور از A به M

$$\varphi = |\Delta\alpha|$$

چون ممکن است زاویهٔ α، نزولی هم باشد، مقدار قدر مطلق $|\Delta\alpha|$ را در نظر گرفته‌ایم. باید این مقدار حدی را پیدا کنیم

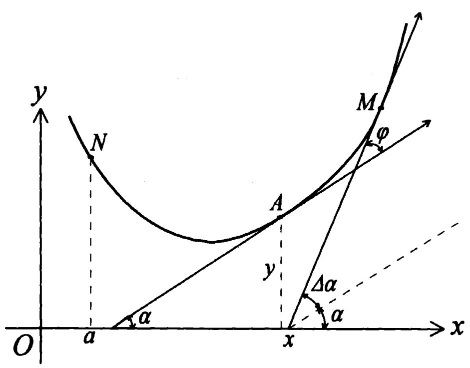
$$k = \underset{\Delta s \to 0}{\text{حد}} \frac{\varphi}{\Delta s} = \underset{\Delta s \to 0}{\text{حد}} \frac{|\Delta\alpha|}{\Delta s} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{حد}} \frac{\frac{|\Delta\alpha|}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{|\alpha'|}{s'}$$

طول کمان NA، با انتگرال

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

بیان می‌شود و از آن‌جا

$$s' = \sqrt{1 + y'^2}$$



شکل ۱۰

۱. یادآوری می‌کنیم، به طور کلی، مفهوم انحنا را در هر منحنی می‌توان در مقایسه با منحنی دایره داد، که در ضمن نقش نمونه و معیار را برای انحنا به عهده دارد: انحنا عبارت است از عکس شعاع دایره‌ای که به بهترین شکل، در نزدیکی نقطهٔ مورد بررسی، بر منحنی قرار گرفته است.

اکنون باید α' را به دست آوریم. می‌دانیم که $\tan\alpha = y'$؛ بنابراین $\alpha = \arctan y'$. اگر از این رابطه، نسبت به x، مشتق بگیریم، به دست می‌آید:

$$\alpha' = \frac{۱}{۱+y'^{۲}}y''$$

به این ترتیب، سر آخر خواهیم داشت:

$$k = \frac{|\alpha'|}{s'} = \frac{|y''|}{(۱+y'^{۲})^{(۳/۲)}}$$

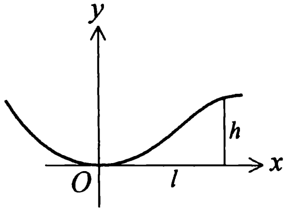
دستورهای مشابه برای منحنی‌هایی که به صورت‌های دیگری داده شده‌اند و یا برای منحنی‌های فضایی، در کتاب‌های عادی آنالیز یا هندسهٔ دیفرانسیلی وجود دارد.

این دستور، راه را برای تفسیر هندسی دیگری از انحنا باز می‌کند، که به‌ویژه در بسیاری از مسأله‌ها به درد می‌خورد. انحنای یک منحنی در نقطهٔ مفروض می‌تواند با دستور

$$k = \underset{l\to ۰}{\text{حد}} \frac{۲h}{l^{۲}}$$

بیان می‌شود که در آن، h عبارت است از فاصلهٔ نقطهٔ منحنی تا مماس بر نقطهٔ مفروض، و l عبارت است از طول پاره‌خط راست مماس، از نقطهٔ تماس تا تصویر نقطهٔ منحنی بر مماس (شکل ۱۱).

برای اثبات، دستگاه قائم مختصات را طوری انتخاب می‌کنیم که مبداء مختصات بر نقطهٔ مفروض منحنی، و محور Ox بر مماس منحنی در این نقطه، منطبق باشد (شکل ۱۱) (برای سادگی کار، منحنی را، روی صفحه گرفته‌ایم). در این‌صورت $y'=۰$ و بنابراین $k=|y''|$. تابع $y=f(x)$ (معادلهٔ منحنی مفروض) را، طبق دستور **تیلور**، بسط می‌دهیم، به دست می‌آید: $y=\frac{۱}{۲}y''x^{۲}+\varepsilon x^{۲}$ (در این‌جا $y'=۰$ به حساب آورده‌ایم). در ضمن، وقتی $x\to ۰$، آن وقت



شکل ۱۱

$\varepsilon \to 0$. از این‌جا نتیجه می‌شود $\lim\limits_{l\to 0}\frac{2|y|}{x^2}=|y''|=k$ و چون $|y|=h$ و $x^2=l^2$، بنابراین

$$k=\lim_{l\to 0}\frac{2h}{l^2}$$

این دستور نشان می‌دهد که انحنا، سرعت دور شدن منحنی از مماس را مشخص می‌کند.

درباره بعضی از مهم‌ترین بستگی‌های مفهوم انحنا، با مسأله‌های مکانیک گفت‌وگو می‌کنیم.

اول این مسأله را در نظر می‌گیریم. فرض کنید نخ قابل انعطافی روی تکیه‌گاهی کشیده شده باشد (شکل ۱۲)، در ضمن، نخ را روی یک صفحه در نظر بگیرید. می‌خواهیم فشار نخ را بر تکیه‌گاه در هر نقطه پیدا کنیم، به عبارت دقیق‌تر، باید حد

$$p=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{P}{\Delta s} \qquad (2)$$

را معین کرد، که در آن P، عبارت است از مقدار نیروی P، که بر تکیه‌گاه و در جهتی به طول Δs، که شامل نقطهٔ مفروض است، عمل می‌کند. برای سادگی کار، فرض می‌کنیم که مقدار T کشش $\mathbf{T}$ در طول تمامی نخ، یک‌نواخت باشد.

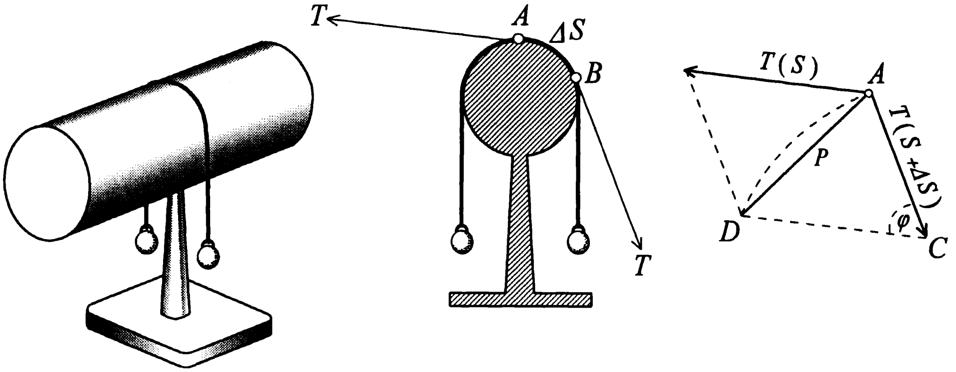
نقطهٔ A و قطعهٔ مجاور آن AB را در نظر می‌گیریم[1]. بر قطعه نخ AB به طول Δs، به‌جز عکس‌العمل تکیه‌گاه، تنها دو نیروی خارجی عمل می‌کند: نیروهای کششی بر دو انتهای قطعه، که از لحاظ مقدار با هم برابرند و در جهت‌های مخالف روی مماس‌های دو انتهای قطعه قرار گرفته‌اند. بنابراین، به تکیه‌گاه، از طرف نخ، نیروی $\mathbf{P}$، برابر با مجموع هندسی کشش‌ها در دو انتها وارد می‌شود. همان‌طور که در شکل ۱۲ دیده می‌شود، بردار $\mathbf{P}$ قاعدهٔ AD از مثلث متساوی‌الساقین CAD است. هر ساق این مثلث برابر است با T، و زاویهٔ φ در رأس C، برابر است با چرخش مماس، ضمن عبور از A به B.

با کم شدن Δs، زاویهٔ φ هم کوچک می‌شود و زاویهٔ بین $\mathbf{P}$ و مماس در نقطهٔ A، به زاویهٔ قائمه نزدیک می‌شود. بنابراین، فشار در جهت عمود بر مماس است.

برای جست‌وجوی مقدار فشار، از این موضوع استفاده می‌کنیم که کمان کوچکی از دایره، به طول وتر آن نزدیک است و طول وتر AD، یعنی مقدار P را، با طول T_φ کمان AD،

---

۱. طبیعی‌تر این است، قطعه‌ای را انتخاب کنیم که نقطهٔ A وسط آن باشد، ولی، این وضع نتیجه را تغییر نمی‌دهد، به‌خصوص که تا حدی محاسبه را پیچیده‌تر می‌کند.



شکل ۱۲

تغییر می‌دهیم. در این‌صورت، بنابر دستور (۲) خواهیم داشت:

$$p = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{P}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{T_\varphi}{\Delta s} = T \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\varphi}{\Delta s} = Tk$$

به این ترتیب، فشار در هر نقطه، برابر است با حاصلضرب انحنا در کشش نخ، و در ضمن در جهت عمود بر مماس در این نقطه قرار دارد.

مسألهٔ دیگری را بررسی می‌کنیم. نقطه‌ای مادی (یعنی جسمی بسیار کوچک) را در نظر می‌گیریم که روی یک منحنی مسطحه با سرعت v، که از لحاظ مقدار ثابت است، حرکت می‌کند. شتاب آن در نقطهٔ مفروض A چقدر است؟ شتاب، بنابر تعریف خود، برابر است با نسبت نمو سرعت (در زمان Δt) به نمو زمان (Δt). سرعت را باید هم از لحاظ مقدار و هم از لحاظ جهت، یعنی بردار سرعت را، در نظر گرفت. مسألهٔ ریاضی مربوط به مقدار شتاب، منجر به پیدا کردن حد

$$w = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{|\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)|}{\Delta t}$$

می‌شود که در آن $\mathbf{v}(t)$، سرعت نقطهٔ A و $\mathbf{v}(t+t\Delta)-\mathbf{v}(t)$، طول برداری است که اختلاف سرعت‌ها را بیان می‌کند. این حد را به این‌صورت هم می‌توان نوشت:

$$\lim_{\Delta s\to 0} \frac{|-\mathbf{v}(t)+\mathbf{v}(t+\Delta t)|}{\Delta s} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

که در آن، Δs عبارت است از طول کمان AB، که در زمان Δt طی شده است.

اگر به شکل ۱۳ توجه کنیم و به یاد بیاوریم که سرعت در هر نقطه، در جهت مماس است و در ضمن در این‌جا، مقدار سرعت ثابت است، معلوم می‌شود، جست‌وجوی مجموع $-\mathbf{v}(t)+\mathbf{v}(t+\Delta t)$، از لحاظ هندسی، چیزی جز جست‌وجوی همان بردار $\mathbf{P}$، که در مسألهٔ قبل داشتیم، نیست. بنابراین، می‌توانیم از همان جواب مسألهٔ قبل استفاده کنیم، با این تفاوت که کشش را، به سرعت تبدیل کنیم:

$$\underset{\Delta s\to 0}{\text{حد}} \frac{|-\mathbf{v}(t)+\mathbf{v}(t+\Delta t)|}{\Delta s} = vk$$

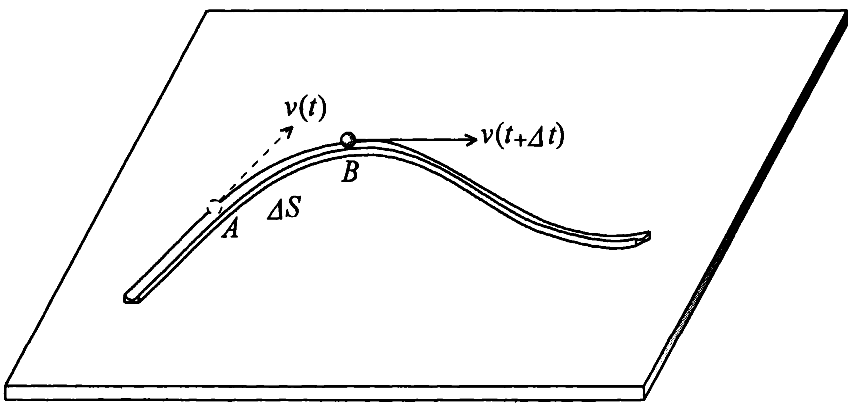
علاوه بر آن داریم $v=\underset{\Delta t\to 0}{\text{حد}}\frac{\Delta s}{\Delta t}$. به این ترتیب، سر آخر می‌توان گفت که شتاب جسم، ضمن حرکت یکنواخت خود روی منحنی، برابر است با حاصل‌ضرب انحنا در مربع سرعت

$$w = \mathbf{k}v^{2} \qquad (۳)$$

این شتاب در جهت قائم بر منحنی، یعنی در جهت خط راست عمود بر مماس است.

اشاره به نوعی شباهت هندسی، که به ما اجازه داد از جواب مسألهٔ مربوط به نخ، برای حل مسألهٔ مربوط به شتاب استفاده کنیم، یکبار دیگر ثابت می‌کند که چگونه انتزاع مفهوم‌ها و نتیجه‌گیری‌های ریاضی از پدیده‌های خاص و مشخص، باعث غنی شدن این نتیجه‌گیری‌ها می‌شود و امکان کاربرد آن‌ها را افزایش می‌دهد.

این را هم یادآوری کنیم که انحنا، که انعکاسی از تغییر جهت حرکت از دیدگاه مکانیکی است، با نیروهایی که این تغییر را به وجود می‌آورند، بستگی دقیق دارد. اگر دو طرف برابری



شکل ۱۳

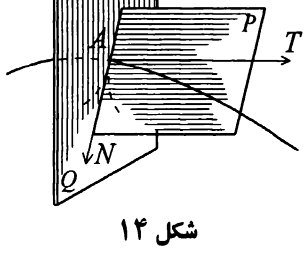
(۳) را در جرم m مربوط به نقطهٔ متحرک، ضرب کنیم، این بستگی به دست می‌آید:

$$F_n = mw = v^۲mk$$

که در آن، F_n عبارت است از مقدار مؤلفهٔ نیروهایی که بر نقطه عمل می‌کنند.

صفحهٔ بوسان. با وجودی که منحنی فضایی در یک صفحه واقع نیست، می‌توان به هر نقطهٔ A از آن، صفحه‌ای مثل P نسبت داد به نحوی که منحنی در نزدیکی این نقطه، کمتر از هر صفحهٔ دیگری، نسبت به آن انحراف داشته باشد. این صفحه را، ***صفحهٔ بوسان*** منحنی در این نقطه گویند.

طبیعی است، صفحهٔ بوسان، به عنوان صفحه‌ای که تا حد امکان به منحنی محکم چسبیده است، از نقطهٔ A و مماس T بر منحنی مفروض می‌گذرد. ولی از نقطهٔ A و خط راست T، که از نقطهٔ A گذشته است، بی‌نهایت صفحه عبور می‌کند. برای این‌که از میان آن‌ها، صفحه‌ای را جدا کنیم که کمتر از هر صفحهٔ دیگری نسبت به منحنی انحراف داشته باشد، به جای منحنی، مماس بر آن را در نظر می‌گیریم. برای این منظور، در طول مماس T به منحنی نگاه می‌کنیم، به زبان دیگر، منحنی خود را بر ***صفحهٔ قائم*** Q، که از نقطهٔ A عبور کرده است و برخط مماس T عمود است، تصویر می‌کنیم (شکل ۱۴). تصویر بخشی از منحنی که شامل نقطهٔ A است، در صفحهٔ Q منحنی جدیدی را به وجود می‌آورد (روی شکل ۱۴، این منحنی نقطه‌چین داده شده است). این منحنی، معمولاً در نقطهٔ A یک راس پیدا می‌کند. اگر منحنی به دست آمده دارای مماسی مثل N در نقطهٔ A باشد، طبیعی است صفحهٔ P که از خط‌های راست T و N می‌گذرد در نزدیکی نقطهٔ A، بیش از هر صفحهٔ



شکل ۱۴

دیگری به منحنی اصلی چسبیده است، یعنی همان صفحهٔ بوسان در نقطهٔ A خواهد بود. می‌توان ثابت کرد، اگر تابعی که منحنی ما را مشخص می‌کند، مشتق دوم داشته باشد و انحنای منحنی در نقطهٔ A مخالف صفر باشد، صفحهٔ بوسان وجود دارد و معادلهٔ آن، خیلی ساده برحسب مشتق‌های اول و دوم تابع منحنی مفروض ما، قابل بیان است.

اگر خاصیت مماس اجازه می‌دهد که منحنی را در قطعهٔ کوچکی از آن، به صورت خط راستی در نظر بگیریم و اشتباه ناشی از این فرض، کوچکتر از طول قطعه منحنی است، در این‌جا هم ویژگی‌های صفحهٔ بوسان این امکان را بوجود می‌آورد که منحنی فضایی را، در تکه‌های کوچک آن، به عنوان یک صفحه، با تغییر تصویر آن بر صفحهٔ بوسان در نظر بگیریم. در ضمن، اشتباهی که در این باره پیش می‌آید، حتی از مجذور طول قطعه منحنی هم کمتر است.

تعداد خط‌های راستی که در فضا، بر مماس عمودند، خیلی زیاد است؛ آن‌ها صفحهٔ قائم بر منحنی در این نقطه را می‌پوشانند. از بین این عمودها، آن را که بر صفحهٔ بوسان قرار دارد، یعنی خط راست N را انتخاب می‌کنیم. این خط راست را ***قائم اصلی*** منحنی گویند. معمول هست روی قائم اصلی، جهتی را هم در نظر می‌گیرند که به سمت تعقر تصویر منحنی بر صفحهٔ بوسان است. نقش قائم اصلی در منحنی فضایی، شبیه نقش قائم منحصر به فرد معمولی، در منحنی روی صفحه است (برای نمونه، اگر تکیه‌گاهی، نخی را که دارای کشش T است، وادار کند تا به شکل یک منحنی فضایی در آید، در آن‌صورت، فشار نخ بر تکیه‌گاه در هر نقطه برابر است با Tk، و در همان جهت قائم اصلی. اگر یک نقطهٔ مادی با سرعت v، که از لحاظ مقدار ثابت است، روی منحنی فضایی حرکت کند، شتاب آن برابر با kv^2 و در جهت قائم اصلی، می‌شود).

تاب. روشن است که وضع صفحهٔ بوسان، در طول منحنی و وقتی از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر می‌رود، ممکن است تغییر کند. همان‌طور که سرعت چرخش مماس، انحنا را مشخص می‌کرد، سرعت چرخش صفحهٔ بوسان هم، کمیت تازه‌ای را مشخص می‌کند که ***تاب*** منحنی نام دارد. در این‌جا هم، مثل حالت انحنا، سرعت را نسبت به طول کمانی که عبور کرده‌ایم، در نظر می‌گیرند. یعنی اگر، ψ را زاویهٔ بین صفحهٔ بوسان در نقطهٔ ثابت A و صفحهٔ بوسان نقطهٔ X (که خیلی به نقطهٔ A نزدیک است)، و Δs را طول کمان AX بگیریم، شتاب τ در نقطهٔ A، به عنوان حد

$$\tau = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\psi}{\Delta s}$$

معین می‌شود[1]. تاب دارای علامت است و این علامت بستگی به این دارد که صفحهٔ بوسان، ضمن حرکت در طول منحنی در چه جهتی چرخیده است.

به این ترتیب، می‌توان پیش خود تصور کرد، ضمن حرکت نقطه بر منحنی، پردهٔ صفحهٔ بوسان هم همراه با مماس و قائم اصلی که روی آن رسم شده‌اند، حرکت می‌کند. در ضمن مماس در هر لحظه، با سرعتی که به وسیلهٔ انحنا معین می‌شود، به طرف قائم می‌چرخد و صفحه هم، با سرعت و جهتی که از روی تاب معین می‌شود، دور مماس می‌چرخد.

به کمک نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی می‌توان قضیهٔ اصلی را ثابت کرد که می‌گوید: منحنی‌هایی که انحنا و تاب یکسان داشته باشند، برابرند. این حکم را روشن می‌کنیم. اگر از مبداء منحنی، کمان‌های s به طول‌های مختلف، جابه‌جا شوند، بسته به مقدارهای s، در نقطه‌های مختلفی از منحنی قرار می‌گیریم، که در هر کدام از آن‌ها، مقداری برای انحنای k و تاب τ، که مخصوص به همان نقطه است، خواهیم داشت. به زبان دیگر، $k(s)$ و $\tau(s)$ برای هر منحنی، تابع‌هایی از کمان s (که از مبداء منحنی طی شده است) می‌باشد.

قضیهٔ بالا می‌گوید اگر در دو منحنی، انحنا و تاب به عنوان تابع‌هایی از طول کمان، یکی باشند، خود منحنی‌ها برابرند (یعنی می‌توان به کمک حرکت، یکی را بر دیگری منطبق کرد). بنابراین، انحنا و تاب به عنوان تابع‌هایی از طول، وضع منحنی را در فضا مشخص می‌کنند و می‌توان گفت که همهٔ ویژگی‌های منحنی، مربوط به طول، انحنا و تاب آن است. به این ترتیب، این سه مفهوم، نوعی مبنا برای بررسی مسأله‌های مربوط به منحنی‌ها به‌شمار می‌روند. به کمک آن‌ها، مفهوم‌های سادهٔ نظریهٔ سطح‌ها را هم می‌توان بررسی کرد، که ما دربارهٔ آن‌ها، هم اکنون گفت‌وگو خواهیم کرد.

البته نباید گمان کرد که با همین توضیح‌ها، نظریهٔ منحنی‌ها به پایان خود می‌رسد. مفهوم‌های بسیار دیگری دربارهٔ منحنی‌ها وجود دارد، که مطالعهٔ گونه‌های خاص منحنی‌ها، خانوادهٔ منحنی‌ها، قرارگرفتن منحنی‌ها در سطح‌ها و پرسش‌های مربوط به شکل منحنی‌ها در مجموع، از آن جمله است. این موضوع‌ها و روش‌های حل آن‌ها، به تقریب به همهٔ

۱. می‌توان ثابت کرد، تاب منحنی پیچی (شکل ۲) در همهٔ نقطه‌های آن یکسان است. به همین مناسبت، مفهوم تاب را در هر منحنی دل‌خواه، می‌توان از مقایسهٔ با منحنی پیچی، که به بهترین صورتی به منحنی ما در نقطهٔ مفروض نزدیک شده باشد، تعریف کرد. تاب، تفاوت منحنی را از حالت مسطحه هم، مشخص می‌کند. در مقایسه با انحنا، می‌توان گفت که تاب، سرعت عبور منحنی از صفحهٔ بوسان را مشخص می‌کند.

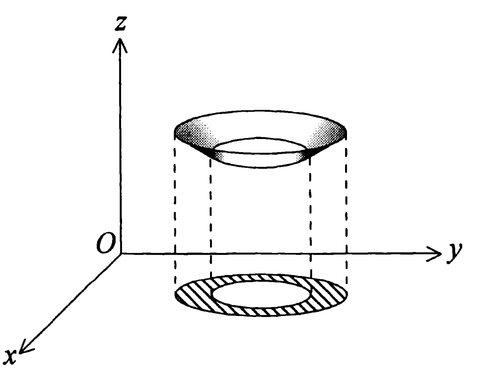
شاخه‌های ریاضیات مربوط می‌شود. گروه مسأله‌هایی که حل آن‌ها را با نیروی این نظریه می‌توان به دست آورد، بسیار غنی و گوناگون است.

۳. مفهوم‌های اصلی نظریهٔ سطح‌ها

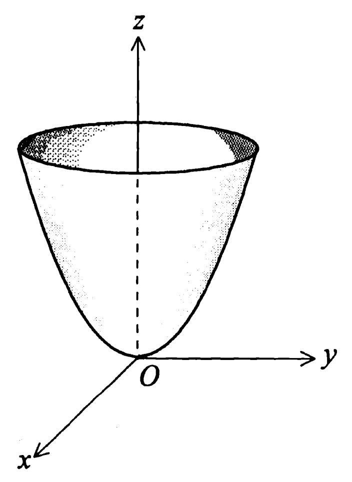
روش‌های مربوط به بیان سطح‌ها. طبیعی است، برای مطالعه سطح‌ها (یا رویه‌ها) به کمک آنالیز، باید بتوانیم آن‌ها را به صورت تحلیلی بیان کنیم. ساده‌تر از همه، بیان سطح به کمک معادلهٔ

$$z=f(x,y)$$

است، که در آن x ، y و z عبارت‌اند از مختصات دکارتی نقطهٔ واقع بر سطح. در ضمن، لازم نیست، تابع $f(x,y)$، برای همهٔ مقدارهای x و y، معین باشد: حوزهٔ تعریف آن، می‌تواند ساختمان‌های مختلفی داشته باشد. از جمله، در شکل ۱۵ سطحی را نشان داده‌ایم که برای آن $f(x,y)$ در داخل یک حلقه، معین است. ما نمونه‌های بیان سطح‌ها را به وسیلهٔ $z=f(x,y)$، درهندسهٔ تحلیلی دیده‌ایم. برای نمونه، می‌دانیم معادلهٔ $z=Ax+By+C$ یک صفحه و معادلهٔ $z=x^2+y^2$ یک سهموی (پارابولوئید) دوار را می‌دهد (شکل ۱۶). برای این‌که بتوانیم از محاسبهٔ دیفرانسیلی استفاده کنیم، باید تابع $f(x,y)$ دارای مشتق‌های اول و



شکل ۱۵

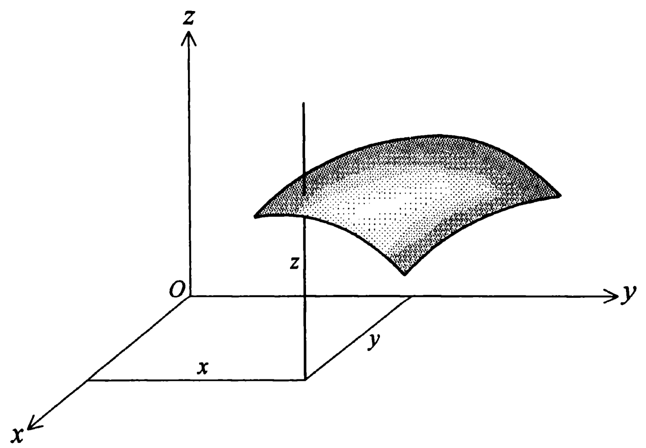


شکل ۱۶

دوم (و حتی گاهی بعضی از مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر) باشد. سطحی را که چنین معادله‌ای داشته باشد، **سطح منظم** گویند. از لحاظ هندسی، منظم بودن سطحی، یعنی (گرچه دقیق نیست) این‌که سطح به طور پیوسته خمیدگی پیدا می‌کند و دارای شکستگی و دیگر نقطه‌های خاص نیست. برای مطالعهٔ سطح‌هایی که از این شرط پیروی نمی‌کنند، و از جمله دارای رأس‌ها، یال‌ها و دیگر حالت‌های خاص هستند، باید روش‌های دیگری پیدا کرد (بند ۵ را ببینید).

با وجود این، همهٔ سطح‌هایی را هم، که فاقد حالت‌های خاص هستند، نمی‌توان به طور کامل به صورت معادلهٔ $z=f(x, y)$ نشان داد. اگر هر زوج مقدار x و y از حوزهٔ تعریف $f(x, y)$ متناظر با مقدار معینی از z باشد، به این معناست که هر خط راستی که موازی محور Oz رسم شود، باید با سطح، یک نقطه و تنها یک نقطهٔ مشترک داشته باشد (شکل ۱۷). بنابراین، حتی سطح‌های ساده‌ای چون کره یا استوانه را هم نمی‌توان به طور کامل، با معادله‌ای به صورت $z=f(x, y)$ بیان کرد. در چنین حالت‌هایی، سطح را به صورت دیگری، و از جمله به صورت معادلهٔ ضمنی $F(x, y, z)=0$ بیان می‌کنند. برای نمونه، معادلهٔ کرهٔ به شعاع R و مرکز مبداء مختصات به صورت $x^2+y^2+z^2=R^2$ و معادلهٔ استوانهٔ به شعاع r به صورت $x^2+y^2=r^2$ در می‌آید.

آن‌جا که گفت‌وگو از مطالعهٔ قطعه‌های کوچکی از سطح است (و در هندسهٔ دیفرانسیلی سنتی در اساس با مسأله‌هایی از همین نوع سروکار داریم)، روش بیان سطح با معادلهٔ



شکل ۱۷

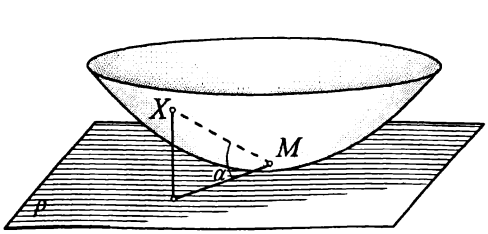
$z = f(x , y)$، کلی است، زیرا هر قطعهٔ به اندازهٔ کافی کوچک از سطح هموار را می‌توان به این صورت نشان داد. ما هم، همین روش را، مبنای کار خود قرار می‌دهیم و دربارهٔ دیگر روش‌های بیان سطح در بندهای ۴ و ۵ گفت‌وگو خواهیم کرد.

صفحهٔ مماس. همان‌طور که دربارهٔ منحنی هموار، در هر نقطه خط راست مماسی وجود دارد که در حوالی این نقطه به منحنی نزدیک است، دربارهٔ بسیاری از سطح‌ها هم، در هر نقطهٔ آن‌ها به اصطلاح ***صفحهٔ مماس*** وجود دارد.

تعریف دقیق صفحهٔ مماس چنین است: صفحهٔ P، که از نقطهٔ M روی سطح F گذشته است، مماس بر سطح F در این نقطه نامیده می‌شود، به شرطی که زاویهٔ α بین صفحهٔ P و شعاع MX (که از نقطهٔ M به نقطهٔ دل‌خواه X از سطح وصل شده است) وقتی که نقطهٔ X به M نزدیک می‌شود، به سمت صفر میل کند (شکل ۱۸). روشن است، همهٔ مماس‌های بر منحنی‌های سطح، که از نقطهٔ M گذشته‌اند، بر صفحهٔ مماس قرار دارند.

سطح F را هموار گویند، به شرطی که در هر نقطهٔ آن، صفحهٔ مماسی وجود داشته باشد که وضع آن، ضمن عبور از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر، به طور پیوسته تغییر کند.

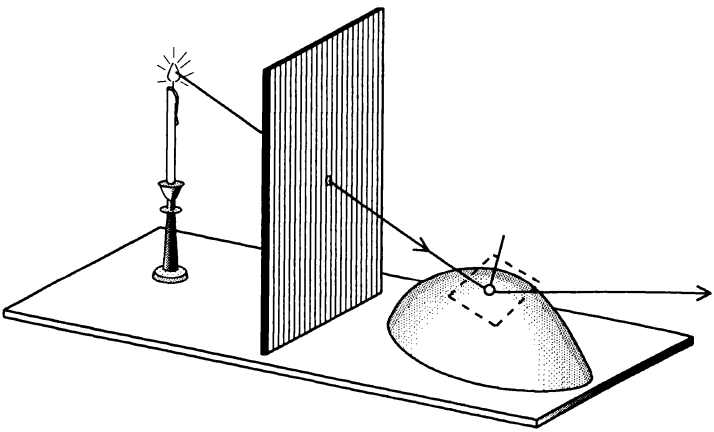
سطح، در نزدیکی نقطهٔ تماس، کمی از صفحهٔ مماس خود منحرف می‌شود: اگر نقطهٔ X، روی سطح، به نقطهٔ M نزدیک شود، انحراف نقطهٔ X از صفحهٔ مماس، در مقایسه با فاصلهٔ آن از نقطهٔ M، مرتب کمتر می‌شود (خواننده به سادگی می‌تواند این موضوع را در ذهن و با نزدیک کردن نقطهٔ X به M روی شکل ۱۸، دنبال کند). به این ترتیب مثل این است که در نزدیکی نقطهٔ M، صفحهٔ مماس با سطح یکی می‌شود. بنابراین، می‌توان در تقریب اول، قطعهٔ کوچک، یا آن‌طور که معمول است، «عنصر» سطح را، به قطعه‌ای از صفحهٔ مماس تبدیل کرد. عمود بر صفحهٔ مماس، که از نقطهٔ تماس گذشته باشد، نقش عمود بر سطح را در این نقطه به عهده دارد و ***قائم*** نامیده می‌شود.



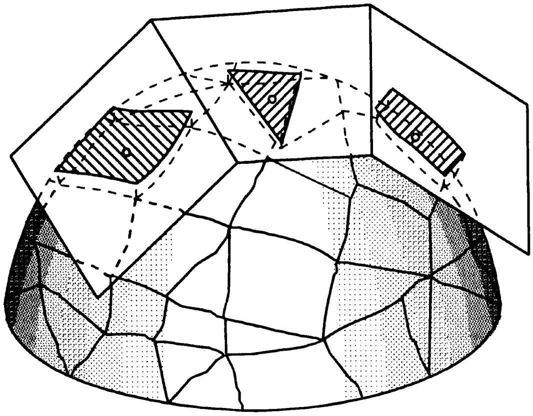
شکل ۱۸

این امکان تبدیل عنصر سطح به قطعه‌ای از صفحهٔ مماس، در بسیاری حالت‌ها نمایان می‌شود. از جمله، بازتاب نور از سطح منحنی، به همان صورت بازتاب از صفحه اتفاق می‌افتد، یعنی جهت برگشت نور با همان قانون معمولی بازتاب، معین می‌شود: شعاع تابش و شعاع بازتاب، با قائم بر سطح در یک صفحه قرار دارند و با آن، زاویه‌های برابر می‌سازند (شکل ۱۹)، درست مثل موقعی که بازتاب از صفحهٔ مماس اتفاق می‌افتاد. به همین ترتیب، ضمن شکست نور در سطح منحنی، هر شعاع در عنصر سطح، درست طبق قانون معمولی شکست نور، و مثل این‌که این عنصر مسطحه است، شکسته می‌شود. همهٔ محاسبه‌ها دربارهٔ بازتاب و شکست نور در ابزارهای نوری، براساس همین تبصره قرار دارد و بعد، در مثل جسم‌های صلبی که بر هم مماس باشند، در نقطهٔ تماس، صفحهٔ مماس مشترکی دارند. جسم‌ها به وسیلهٔ عنصرهای سطح‌هایشان، بر هم مماس‌اند و فشار یک جسم بر دیگری، به فرض نبودن مالش (اصطکاک) در جهت قائم در نقطهٔ تماس قرار دارد. این حکم، حتی در حالت‌هایی هم که جسم‌ها در بیش از یک نقطه بر هم مماس‌اند، درست است؛ در چنین حالتی، در هر کدام از نقطه‌های تماس، فشار در جهت قائم متناظر آن قرار می‌گیرد.

با تغییر عنصرهای سطح به قطعه‌های مسطحه، تعریف مساحت سطح‌های مختلف را هم می‌توان پایه‌گذاری کرد. سطح را به قطعه‌های کوچک F_1 ، F_2 ، ... ، F_n تقسیم، و هر کدام از قطعه‌ها را بر صفحهٔ مماس بر سطح در یکی از نقطه‌های این قطعه، تصویر می‌کنند



شکل ۱۹



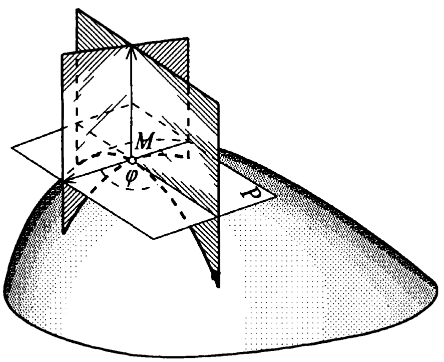
شکل ۲۰

(شکل ۲۰). به این ترتیب، حوزه‌های مسطحه‌ای مثل P_1، P_2، ...، P_n به دست می‌آید، که مجموع مساحت‌های آن‌ها، مقدار تقریبی مساحت سطح را می‌دهد. خود مساحت سطح هم، به عنوان حد مجموع مساحت‌های قطعه‌های P_1، P_2، ...، P_n تعریف می‌شود، با این شرط که تقسیم سطح به قطعه‌های هر چه کوچکتری، انجام شود. از همین جا می‌توان بیان دقیق مساحت را، به صورت یک انتگرال دوگانه نتیجه گرفت[1].

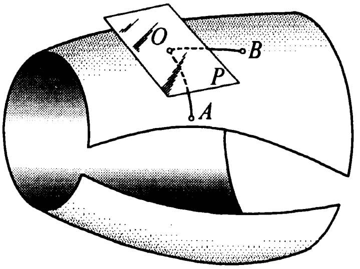
از همین اشاره‌ها، اهمیت مفهوم صفحهٔ مماس روشن می‌شود. با وجود این، در بسیاری حالت‌ها، نمایش تقریبی عنصر سطح به وسیلهٔ صفحه، کافی نیست و باید خمیدگی سطح را به حساب آورد.

انحنای منحنی‌های واقع بر سطح. خمیدگی سطح در نقطهٔ مفروض به این ترتیب مشخص می‌شود که ببینیم، سطح با چه سرعتی از صفحهٔ مماس خودش دور می‌شود. ولی در جهت‌های مختلف سطح می‌توان از صفحهٔ مماس با سرعت‌های متفاوتی دور شد (از جمله، سطحی که در شکل ۲۱ نشان داده شده است، در جهت OA خیلی سریع‌تر از صفحهٔ P دور می‌شود تا در جهت OB). بنابراین، طبیعی است که خمیدگی سطح را به کمک انحناهای منحنی‌هایی که در جهت‌های مختلف روی آن رسم شده‌اند، تعریف کنیم.

۱. به خصوص، به همین ترتیب، بیان مساحت را که در بند ۱ بخش هشتم استفاده کرده‌ایم، می‌توان نتیجه گرفت.



شکل ۲۲



شکل ۲۱

از نقطهٔ M صفحهٔ مماس P را رسم می‌کنیم و جهت معینی از قائم بر آن را انتخاب می‌کنیم (شکل ۲۲). منحنی‌هایی را در نظر می‌گیریم که از برخورد سطح با صفحه‌هایی که ***از قائم*** در نقطهٔ M می‌گذرند، به دست آمده باشد: این منحنی‌ها را ***مقطع‌های قائم*** گویند. انحنای مقطع قائم، با علامت در نظر گرفته می‌شود. انحنای مقطع را مثبت می‌گیریم به شرطی که تقعر آن در جهت قائم باشد، در حالتی که تقعر مقطع در جهت عکس باشد، علامت انحنای آن منفی خواهد بود. برای نمونه، در سطح زینی‌شکلی که در شکل ۲۳ نشان داده‌ایم، اگر جهت قائم را به سمتی که پیکان نشان داده است، انتخاب کنیم، انحنای مقطع MA، مثبت و انحنای مقطع MB، منفی به حساب می‌آید.

مقطع قائم با زاویه φ داده می‌شود که عبارت است از زاویهٔ بین صفحهٔ مقطع با نیم‌خط اولیه‌ای که روی صفحهٔ مماس انتخاب شده است (شکل ۲۲). با دانستن انحنای مقطع قائم، یعنی $k(\varphi)$، که بستگی به زاویهٔ φ دارد، تصور کاملا روشنی دربارهٔ ساختمان سطح در دور و بر نقطهٔ M خواهیم داشت.

خمیدگی سطح، به صورت‌های متفاوتی می‌تواند باشد، و بنابراین به نظر می‌رسد، بستگی انحنای k با زاویهٔ φ، می‌تواند هر نوعی باشد. ولی، در واقع این‌طور نیست. ***اولر*** روشن کرد که برای سطح‌های منظمی که در هندسهٔ دیفرانسیلی بررسی می‌شوند، قانون‌مندی ساده‌ای وجود دارد که بستگی بین انحناهای مقطع‌های قائم را، که از یک نقطهٔ مفروض در جهت‌های مختلف عبور می‌کنند، معلوم می‌کند.

معلوم می‌شود در هر نقطهٔ سطح، دو جهت وجود دارد به نحوی که

۱) بر هم عمودند؛

۲) انحناهای k_1 و k_2 از مقطع‌های قائمی که در این جهت‌ها قرار گرفته‌اند، حداکثر و حداقل مقدار را در بین همهٔ مقطع‌های قائم به دست می‌دهند[1].

۳) اگر انحنای $k(\varphi)$ مقطع قائم، با مقطع قائم به انحنای k_1، زاویهٔ φ را بسازد، $k(\varphi)$ را می‌توان از این دستور به دست آورد:

$$k(\varphi)=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi \tag{۴}$$

چنین جهت‌هایی را ***جهت‌های اصلی***، و انحناهای k_1 و k_2 را ***انحناهای اصلی سطح*** در نقطهٔ مفروض گویند.

این قضیهٔ ***اولر*** نشان می‌دهد که با وجود همهٔ گوناگونی سطح‌ها، ساختمان آن‌ها در نزدیکی هر نقطه، که با دقت تا مقدار مرتبهٔ دوم کوچکی، نسبت به دوری آن‌ها از نقطهٔ مفروض بررسی می‌شود، تنها می‌تواند از نوع‌های معینی باشد. در واقع، اگر مقدارهای k_1 و k_2 هم علامت باشند، علامت $k(\varphi)$ ثابت می‌ماند، و سطح در نزدیکی نقطهٔ مورد بررسی، به صورتی است که در شکل ۲۲ نشان داده‌ایم. اگر k_1 و k_2 با علامت‌های مختلف باشند، در مثل $k_1>0$ و $k_2<0$، روشن است که انحنای مقطع قائم، تغییر علامت می‌دهد. و این، از این‌جا معلوم می‌شود که به ازای $\varphi=0$، داریم: $k=k_1>0$ و به ازای $\varphi=\frac{\pi}{2}$: $k=k_2<0$.

از دستور (۴) معلوم می‌شود، وقتی φ از 0 تا π تغییر کند، علامت $k(\varphi)$ دوبار تغییر می‌کند[2] و بنابراین، در نزدیکی نقطهٔ مورد بررسی، سطح شکل زینی پیدا می‌کند (شکل ۲۳).

وقتی یکی از عددهای k_1 و k_2 صفر باشد، انحنا علامت خود را حفظ می‌کند، ولی به ازای یک مقدار φ صفر می‌شود. از جمله، چنین وضعی در تمام نقطه‌های استوانه وجود دارد (شکل ۲۴). در حالت کلی، سطح در نزدیکی چنین نقطه‌ای، شکلی نزدیک به استوانه خواهد داشت.

سرانجام، به ازای $k_1=k_2=0$، همهٔ مقطع‌های قائم، انحنائی برابر صفر دارند. در نزدیکی

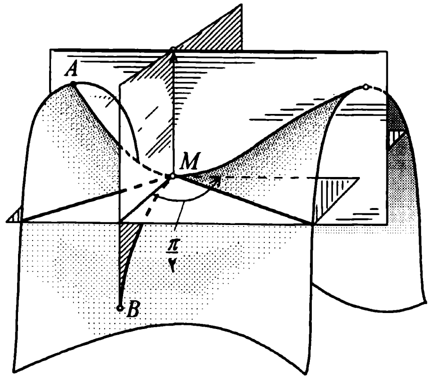
---

۱. در حالت خاصی که $k_1=k_2$، انحناهای همه مقطع‌ها با هم برابرند (مثل حالتِ کره).

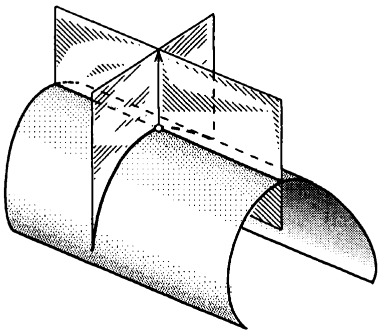
۲. محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که $k(\varphi)=k_1\cos^2\varphi+k_2\sin^2\varphi$، به ازای

$$\varphi=\arctan\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}},\quad \varphi=\pi-\arctan\sqrt{-\frac{k_1}{k_2}}$$

صفر می‌شود، بار اول، علامت از مثبت به منفی و بار دوم از منفی به مثبت می‌رود.



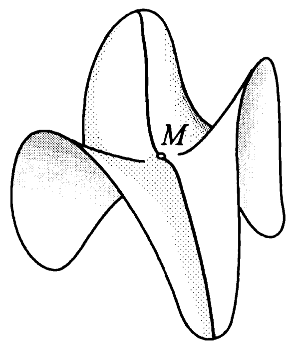
شکل ۲۳



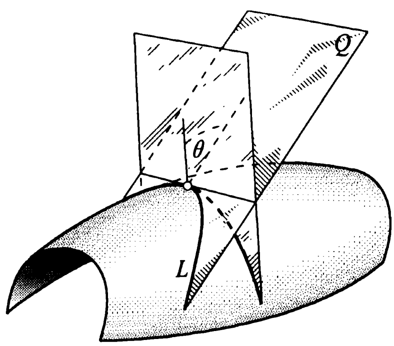
شکل ۲۴

چنین نقطه‌ای، سطح خیلی «تنگ» به صفحهٔ مماس می‌چسبد. به همین مناسبت، به چنین نقطه‌هایی، ***نقطه‌های تخت*** گویند. یکی از نمونه‌های این نقطه را در شکل ۲۵ داده‌ایم (نقطهٔ M). ویژگی‌های سطح در نزدیکی نقطه‌های تراکم، ممکن است بسیار پیچیده باشد.

حالا مقطع سطح را با صفحهٔ دل‌خواه Q که از قائم نگذشته است بررسی می‌کنیم (شکل ۲۶). انحنای k_L منحنی L (مقطع صفحهٔ Q با سطح)، همان‌طور که **مه‌نیو**[1] نشان داد، بستگی ساده‌ای با انحنای k_H مقطع قائمی دارد که در همین جهت قرار دارد (یعنی صفحهٔ قائمی که صفحهٔ مماس را در همان خط راستی قطع کند که صفحهٔ Q قطع می‌کند). این



شکل ۲۵



شکل ۲۶

۱. **مه‌نیو** (۱۷۵۴-۱۷۹۳)، ریاضی‌دان فرانسوی، شاگرد مونژ و ژنرال ارتش انقلابی، در اثر زخمی که در جنگ برداشت، از دنیا رفت.

بستگی با دستور

$$k_L = \frac{|k_H|}{\cos\theta}$$

بیان می‌شود، که در آن، θ عبارت است از زاویهٔ بین قائم و صفحهٔ Q (درستی این دستور را به طور عینی، به خصوص در نمونهٔ کره می‌توان تعقیب کرد).

سرانجام می‌توان ثابت کرد که انحنای هر منحنی که روی سطح باشد و صفحهٔ Q، صفحهٔ بوسان آن باشد، بر انحنای منحنی مقطع سطح با صفحهٔ Q، منطبق است.

به این ترتیب، با معلوم بودن k_1 و k_2، انحنای هر منحنی روی سطح، به وسیلهٔ جهت مماس آن و زاویهٔ بین صفحهٔ بوسان آن با قائم بر سطح، معین می‌شود. بنابراین، خصلت خمیدگی سطح در نقطهٔ مفروض، به وسیلهٔ دو عدد k_1 و k_2 مشخص می‌شود. این دو عدد، از لحاظ قدرمطلق برابرند با انحنای دو مقطع قائم عمود بر هم، و علامت آن‌ها، جهت تقعر مقطع قائم مربوط را، نسبت به جهتی که روی قائم بر سطح انتخاب کرده‌ایم، نشان می‌دهد.

قضیه‌های *اولر* و *مه‌نیو* را، که در بالا آوردیم، ثابت می‌کنیم.

۱. برای اثبات قضیهٔ *اولر*، از پیش‌قضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم. اگر تابع $f(x, y)$ در نقطهٔ مفروض، مشتق‌های مرتبهٔ دوم پیوسته داشته باشد، می‌توان محورهای مختصات را به اندازهٔ زاویه‌ای مثل α دوران داد، به نحوی که در دستگاه مختصات جدید، مشتق دوم $f_{x'y'}$، در این نقطه، برابر صفر باشد[1]. به یاد می‌آوریم، ضمن دوران محورها، متغیرهای تازه x' و y' با رابطه‌های زیر به متغیرهای قبلی x و y مربوط‌اند.

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \; ; \;\; y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

(جلد اول، بخش سوم بند ۷ را ببینید). برای اثبات پیش‌قضیه، توجه می‌کنیم که

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \cos\alpha \;\; , \;\; \frac{\partial y}{\partial x'} = \sin\alpha \;\; , \;\; \frac{\partial x}{\partial y'} = -\sin\alpha \;\; , \;\; \frac{\partial y}{\partial y'} = \cos\alpha$$

حالا مشتق $f_{x'y'}$ را بنابر قاعدهٔ دیفرانسیل‌گیری، محاسبه کنیم. بعد از محاسبه، به دست می‌آید:

$$f_{x'y'} = f_{xy}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}(f_{yy} - f_{xx})\sin 2\alpha$$

---

۱. ما برای سادگی کار، از شکل ساده شدهٔ علامت‌ها برای نشان دادن مشتق‌های جزئی استفاده کرده‌ایم؛ به‌جای $\frac{\partial f}{\partial x}$ می‌نویسیم f_x و به جای $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ می‌نویسیم f_{yy} و غیره.

از این‌جا به سادگی نتیجه می‌شود که در واقع، به ازای

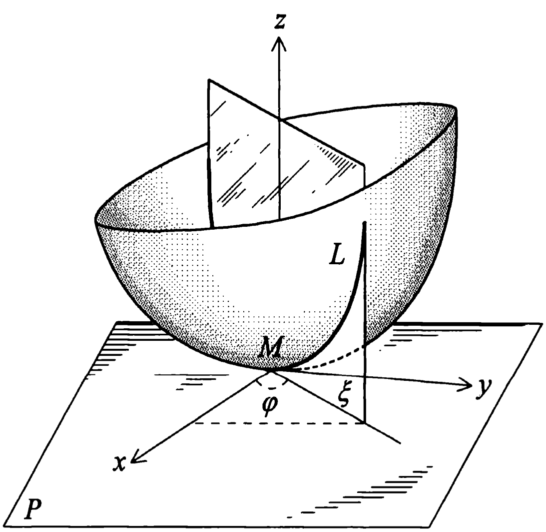
$$\operatorname{cotan} ۲\alpha = \frac{۱}{۲} \cdot \frac{f_{xx} - f_{yy}}{f_{xy}}$$

خواهیم داشت: $f_{x'y'} = ۰$.

اکنون سطح F را با معادلهٔ $z = f(x\ ,\ y)$ در نظر می‌گیریم. در ضمن مبداء مختصات بر نقطهٔ مورد نظر M قرار دارد و محورهای Ox و Oy بر صفحهٔ مماس P انتخاب و طوری چرخانده شده‌اند که داشته باشیم: $f_{xy}(۰\ ,\ ۰) = ۰$. بر صفحهٔ P، خط راست دل‌خواهی را اختیار می‌کنیم که با محور Ox زاویه‌ای برابر φ بسازد و مقطع قائم L را که در جهت این خط راست می‌رود، در نظر می‌گیریم (شکل ۲۷). با توجه به دستوری که در بند ۲ داده‌ایم، برای انحنای L در نقطهٔ M خواهیم داشت:

$$k_L = \lim_{\xi \to ۰} \frac{۲f(x\ ,\ y)}{\xi^۲}$$

در این‌جا $f(x\ ,\ y)$، به علامت فاصلهٔ نقطه‌ای از L تا خط انتخابی، درنظر گرفته شده است. $f(x\ ,\ y)$ را بنابر دستور تیلور بسط می‌دهیم (بخش دوم، بند ۹) و توجه می‌کنیم که $f_x(۰, ۰) = f_y(۰, ۰) = ۰$ (زیرا محورهای Ox و Oy بر صفحهٔ مماس قرار دارند)، به‌دست می‌آید:



شکل ۲۷

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(f_{xx}x^2 + f_{yy}y^2) + \varepsilon(x^2+y^2)$$

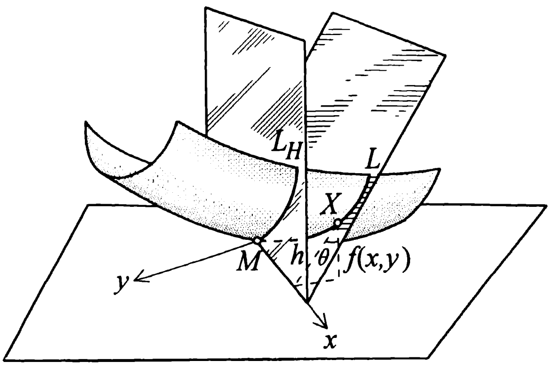
که در آن به ازای $x \to 0$ و $y \to 0$، داریم: $\varepsilon \to 0$. برای نقطه‌های واقع بر L داریم: $x=\xi\cos\varphi$ ، $y=\xi\sin\varphi$ ، $\xi^2=x^2+y^2$ (شکل ۲۷)، بنابراین به دست می‌آید:

$$k_L = \lim_{\xi\to 0} \frac{f_{xx}\xi^2\cos^2\varphi + f_{yy}\xi^2\sin^2\varphi + 2\varepsilon\xi^2}{\xi^2} = f_{xx}\cos^2\varphi + f_{yy}\sin^2\varphi$$

با فرض $\varphi = 0$ و $\varphi=\frac{\pi}{2}$، معلوم می‌شود که f_{xx} و f_{yy}، انحناهای k_1 و k_2 مقطع‌های قائم در جهت محور Ox و Oy هستند. بنابراین، دستوری هم که به دست می‌آید، همان دستور ***اولر*** است: $k=k_1\cos^2\varphi + k_2\sin^2\varphi$ (این موضوع هم که k_1 و k_2، نقش بزرگترین و کوچکترین انحنا را به عهده دارند، از همین دستور نتیجه می‌شود).

۲. برای اثبات قضیهٔ **مه‌نیو**، مقطع قائم L_H و مقطع L را، که صفحهٔ آن از دوران صفحهٔ مقطع L_H به اندازهٔ زاویهٔ θ به دست آمده است، در نظر می‌گیریم (شکل ۲۸). محورهای Ox و Oy بر صفحهٔ مماس چنان قرار گرفته‌اند که محور Ox در مبداء مختصات، بر منحنی‌های L_H و L مماس است. روشن است که فاصلهٔ $h(x, y)$ از نقطهٔ X به مختصات $(x, y, f(x, y))$ تا محور Ox، برابر است با $h(x,y) = \frac{|f(x,y)|}{\cos\theta}$ (شکل ۲۸). با استفاده از دستور **تیلور**، عبارت انحنای k_L از منحنی L را به این ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$k_L = \lim_{x\to 0}\frac{2h(x,y)}{x^2} = \lim_{x\to 0} 2\,\frac{|f(x,y)|}{x^2\cos\theta}$$



شکل ۲۸

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left| f_{xx}x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy}y^2 + 2\varepsilon(x^2+y^2) \right|}{x^2 \cos\theta} \tag{۵}$$

در ضمن $\varepsilon \to 0$، وقتی که $(x, y) \to 0$. روشن است، چون محور Ox بر منحنی L مماس است، داریم $\lim_{x\to 0} \frac{y}{x} = 0$. به‌این ترتیب، با عبور به‌مقدار حدی دستور (۵) به‌دست می‌آید:

$$k_L = \frac{|f_{xx}|}{\cos\theta}$$

ولی، معادلهٔ منحنی L_H، در دستگاه مختصات انتخابی ما، به صورت $z=f(x, 0)$ است و برای آن $|k_H| = |f_{xx}|$. بنابراین $k_L = \frac{|k_H|}{\cos\theta}$. قضیهٔ **مه‌نیو** ثابت شد.

انحنای میانگین. در نظریهٔ سطح‌ها، در بسیاری حالت‌ها به جای خود انحناهای اصلی، از بـه اصطلاح ***انحنای میانگین و انحنای گوسی*** یا ***انحنای کامل*** سطح در نقطهٔ مفروض، که نـقش مهمتری دارند، استفاده می‌شود. دربارهٔ آن‌ها، به تفصیل صحبت می‌کنیم.

انحنای میانگین سطح در نقطهٔ مفروض، عبارت است از نصف مجموع انحناهای اصلی

$$K_m = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

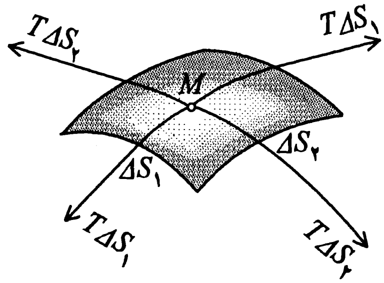
برای این‌که نمونه‌ای از کاربرد این مفهوم را در دست داشته باشیم، یک مسألهٔ مکانیکی را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم در طول سطح جسم F، غشای قابل ارتجاع، مثل غشای لاستیکی، محکم کشیده باشیم. می‌خواهیم بدانیم در هر نقطهٔ غشا روی سطح جسم F، چه فشاری وجود دارد.

فشار به نقطهٔ M با نیرویی اندازه‌گیری می‌شود که در جهت غشای روی واحد مساحت در بخش کوچکی از سطح که شامل نقطهٔ M است، عمل می‌کند؛ دقیق‌تر، فشار در «نقطهٔ M» از حد نسبت نیروی مذکور به مساحت قطعه، وقتی که این مساحت به سمت نقطهٔ M جمع شود، اندازه گرفته می‌شود.

نقطهٔ M را در روی سطح، با مستطیل منحنی‌الخط کوچکی احاطه می‌کنیم که ضلع‌های آن به‌طول Δs_1 و Δs_2 و به ترتیب عمود بر اولین و دومین جهت اصلی در نقطهٔ M، باشند (شکل ۲۹) [1]. بر هر ضلع مستطیل، نیرویی عمل می‌کند که (بنا بر فرض یکـنواخت بـودن

---

۱. بحث ما خیلی دقیق نیست. با وجود این، با ارزیابی خطایی که در ایـن‌جا پـیش مـی‌آید، مـی‌توان هـمین نتیجه‌گیری را دقیق‌تر کرد.



شکل ۲۹

کشش غشا) با طول ضلع و مقدار T کشش غشا، متناسب است. بنابراین، بر ضلعی که عمود بر اولین جهت اصلی است، نیروهایی که به تقریب برابر $T\Delta s_۱$ و در جهت مماس بر سطح هستند، عمل می‌کنند. نیروهای مشابهی، برابر با $T\Delta s_۲$ بر زوج دیگر ضلع مستطیل عمل می‌کنند. برای این‌که، مقدار فشار وارد بر نقطهٔ M را پیدا کنیم، باید نیرویی را که هم ارز با این چهار نیرو است بر مساحت مستطیل، که به تقریب برابر $\Delta s_۱\Delta s_۲$ است تقسیم کنیم و حد آن را، وقتی که $\Delta s_۱$ و $\Delta s_۲$ به سمت صفر میل می‌کنند، پیدا کنیم. دو نیروی اول را به طول جداگانه جمع، و نیروی هم ارز آن‌ها را بر $\Delta s_۱\Delta s_۲$ تقسیم می‌کنیم.

اگر از پهلو به مستطیل نگاه کنیم (شکل ۳۰)، می‌توان دید که این نیروها در جهت مماس بر مقطع قائم اول است و فاصلهٔ بین نقطه‌های عمل آن‌ها، برابر است با $\Delta s_۲$. به این ترتیب، محاسبهٔ حد لازم، همان مسأله‌ای است که در بند ۲، و دربارهٔ مسألهٔ مربوط به فشار نخ بر تکیه‌گاه، حل کردیم. با استفاده از نتیجه‌ای که در آن‌جا به دست آوردیم، معلوم می‌شود این حد برابر است با $k_۱T$ که در آن $k_۱$ عبارت است از انحنای مقطع قائم اول. اگر دو نیروی دیگر را هم، به همین ترتیب، به حساب آوریم، به این رابطه می‌رسیم:

شکل ۳۰

$$P_M = T(k_1 + k_2) = 2TK_m$$

نتیجه‌ای که به دست آوردیم، کاربردهای زیاد و مهمی دارد. نمونه‌ای می‌آوریم.

می‌دانیم، غشای سطحی مایع، در همهٔ جهت‌ها دارای کشش سطحی یکنواختی است. وقتی مرزهای جسم مایع، خمیدگی داشته باشد، این کشش، بنابر آنچه گفتیم باعث فشار غشای سطحی بر مایع می‌شود که متناسب با انحنای میانگین مرزی در نقطهٔ مفروض است.

به این علت، فشارهای زیادی بر قطره‌هایی که اندازه‌ای کوچک دارند وارد می‌آید. این مانع به‌وجود آمدن قطره‌های بسیار کوچک می‌شود. همان‌طور که می‌دانیم، ضمن سرد کردن بخار، ابتدا قطره‌های آب در اطراف غبارها و ذرهای باردار تشکیل می‌شوند. در بخار خالص، تشکیل قطره، ضمن سرد شدن، به تاخیر می‌افتد. و اگر در مثل از درون این بخار، ذره‌ای که محرک یونش مولکول‌هاست، با سرعت زیاد عبور کند، بلافاصله، در اطراف یون‌هایی که در مسیر آن به وجود آمده است، قطره‌های بخار تشکیل می‌شود، به نحوی که ردپای ذره را قابل مشاهده می‌کند (اتاق ***ویلسون***، برهمین اساس ساخته شده است و در فیزیک هسته‌ای و برای مشاهدهٔ حرکت ذره‌های مختلف باردار به کار می‌رود).

از آن‌جا که مایع، فشار را در همهٔ جهت‌ها به طور یکنواخت منتقل می‌کند، قطرهٔ مایع، به شرطی که منبع فشار دیگری نداشته باشد، باید به شکلی باشد که در همهٔ نقطه‌های سطح آن، انحنای میانگین یکسان باشد. در به اصطلاح آزمایش **پلاتو**، دو مایع با وزن مخصوص‌های برابر انتخاب می‌شود، که یک مایع به خاطر تکاثف خود، در داخل دیگری، که در حال تعادل است، شناور است. می‌توان فرض کرد، مایع شناور، تنها زیر تاثیر فشار ناشی از کشش سطحی مرزهای آن باشد[1]. در ضمن معلوم می‌شود که مایع «شناور» همیشه به شکل کره در می‌آید. نتیجهٔ این آزمایش، این موضوع را تلفیق می‌کند که هر سطح بسته‌ای که انحنای میانگین ثابتی داشته باشد، کره است. این قضیه، در واقع هم درست است، ولی اثبات دقیق ریاضی آن، بسیار دشوار است.

می‌توان پرسش را از جهت دیگری مطرح کرد. از آن‌جا که غشای سطحی مایع، میل کوچک شدن دارد و حجم مایع هم نمی‌تواند تغییر کند، طبیعی است انتظار داشته باشیم که

---

۱. از نمو فشار در عمق می‌توان صرف‌نظر کرد، زیرا این نمو، برای هر دو مایع یکی است (به مناسبت یکی بودن وزن‌های مخصوص). بنابراین، در مرز جدایی آن‌ها، فشارهای اضافی درونی و بیرونی، یکدیگر را خنثا می‌کنند.

تودهٔ شناور مایع، باید کمترین سطح را برای حجم مفروض داشته باشد. و ثابت شده است، جسمی با این ویژگی یک کره است.

رابطه‌ای که بین فشار جانبی غشا و انحنای میانگین آن به دست آوردیم، می‌توان دربارهٔ مسألهٔ مربوط به شکل غشای صابونی هم، که دور محیطی کشیده شده است، به کار برد. از آن‌جا که در این حالت، فشار جانبی غشا که در جهت قائم بر سطح آن است، به وسیلهٔ هیچ عکس‌العمل تکیه گاهی، متعادل نمی‌شود (در این‌جا، تکیه‌گاه به طور کلی وجود ندارد)، باید برابر صفر باشد، برای سطح ما، به این شرط می‌رسیم:

$$K_m = \text{۰} \tag{۶}$$

با استفاده از عبارت تحلیلی انحنای میانگین، از این شرط، یک معادلهٔ دیفرانسیلی به دست می‌آید و مسأله منجر به حل این معادله می‌شود، که در ضمن باید توجه داشت، این سطح، از دورهٔ مفروض هم می‌گذرد[1].

مسألهٔ مربوط به پیدا کردن سطحی که روی دورهٔ مفروض، کمترین مساحت را داشته باشد، نیز به همین معادله (۶) منجر می‌شود. از دیدگاه فیزیک، این پیش‌آمد طبیعی است، زیرا غشا میل به کوچک شدن دارد و تعادل وقتی پیش می‌آید که به حداقل مساحتی که با شرط‌های مفروض ممکن است، برسد. با توجه به این مسأله، سطحی را که انحنای میانگین صفر دارد، ***سطح کمینال*** گویند.

بررسی ریاضی سطح‌های کمینال، خیلی جالب است، به‌ویژه در آزمایش با غشاهای صابونی، حالت‌های کیفی گوناگونی پیدا می‌شود. در شکل ۳۱، تصویر غشاهای صابونی را که روی دوره‌های مختلف کشیده شده است، نشان داده‌ایم[2].

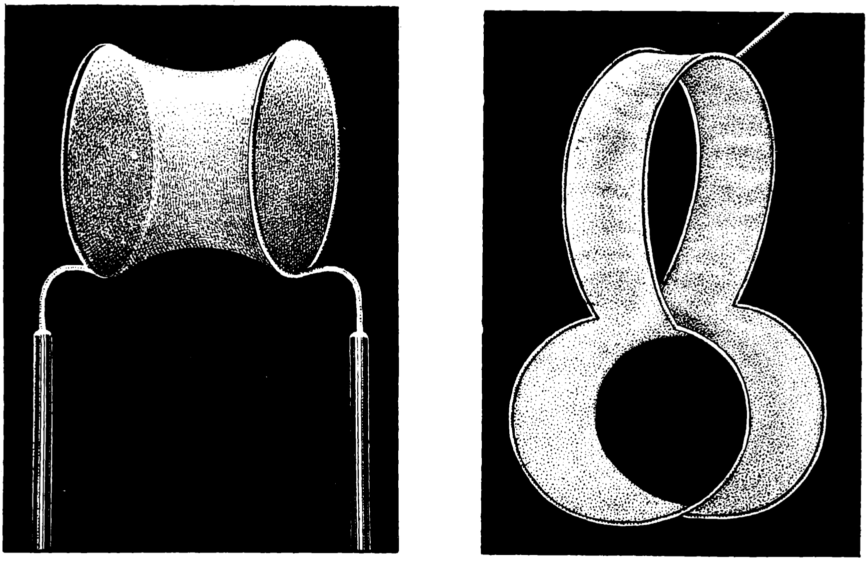
انحنای گوسی. ***انحنای گوسی*** سطح در نقطهٔ مفروض، به حاصل‌ضرب انحناهای اصلی آن،

---

۱. برای سطحی که معادلهٔ آن به صورت $z=z(x\ ,\ y)$ باشد، معادلهٔ (۶)، به این صورت در می‌آید:

$$(\text{۱}+z_y'^{\text{۲}})z''_{xx}-\text{۲}z'_x\,z'_y\,z''_{xy}+(\text{۱}+z_x'^{\text{۲}})z''_{yy}=\text{۰}$$

۲. تحقیق در باره رویه‌های کمینال همچنان ادامه دارد. یک حباب یگانه به شکل یک کره در می‌آید چرا که برای یک حجم ثابت، کره دارای حداقل سطح است. اما شکل یک حباب دوگانه (رویه‌ای با حداقل سطح که دو حجم داده شده را دربر گیرد) چگونه است؟ حدس این است که حباب دوگانه شامل دو بخش کره‌ای و یک قرص است. دو کره در دایره‌ای که مرز قرص است به هم متصل‌اند و زاویه بین دو کره در نقطه اتصال $\frac{\text{۲}\pi}{\text{۳}}$ است. در حالتی که دو حجم داده شده برابراند، این حدس در سال ۱۹۹۵ به وسیله هاس، هاچینگز و شلفلی ثابت شد (ویراستار).



شکل ۳۱

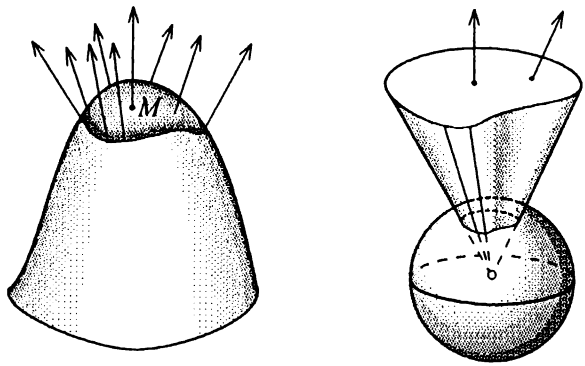
گفته می‌شود:

$$K = k_1 . k_2$$

علامت انحنای گوسی، خصلت ساختمان سطح را، در نزدیکی نقطه‌ای که بررسی می‌کنیم، معین می‌کند. به ازای $K > 0$، سطح به شکل کاسه است (k_1 و k_2، هم‌علامت‌اند) و به ازای $K < 0$، وقتی k_1 و k_2 علامت‌های مختلف دارند، به شکل زین. حالت‌های دیگر ساختمانی سطح‌ها، که دربارهٔ آن‌ها پیش از این صحبت کرده‌ایم، متناظر با انحنای گوسی صفر هستند. قدر مطلق انحنای گوسی، تصوری دربارهٔ درجهٔ خمیدگی کلی سطح، به ما می‌دهد. این موضوع، به خصوص وقتی روشن می‌شود که به تعریف دیگری از انحنای گوسی توجه کنیم، که هیچ تکیه‌ای بر بررسی منحنی‌های واقع بر سطح ندارد.

قطعهٔ کوچک G از سطح F را در نظر می‌گیریم که شامل نقطهٔ M باشد و در هر نقطهٔ این قطعه، قائمی بر سطح رسم می‌کنیم.

اگر این قائم‌ها را از یک نقطه بگذرانیم، کنجی را پر می‌کنند (شکل ۳۲). هر چه قطعهٔ G وسیع‌تر باشد و هر چه خمیدگی سطح در این نقطه شدیدتر باشد، مقدار این کُنج هم بزرگتر می‌شود. بنابراین، درجهٔ خمیدگی قطعهٔ سطح را می‌توان با نسبت مقدار کنجی که به وسیلهٔ قائم‌ها پر شده است، بر مساحت خود قطعهٔ G مشخص کرد؛ و طبیعی است که خمیدگی



شکل ۳۲

سطح در نقطهٔ مفروض را به کمک حد این نسبت اندازه می‌گیریم، وقتی که G به طرف نقطهٔ M جمع شود[1]. معلوم می‌شود که این حد برابر است با قدر مطلق انحنای گوسی در نقطهٔ M.

مهم‌ترین خاصیت انحنای گوسی، که نقش آن را در نظریهٔ سطح‌ها معین می‌کند، چنین است. فرض کنیم سطحی که بررسی می‌کنیم از مادهٔ قابل انحنا، ولی غیرقابل ارتجاعی، در مثل از رویهٔ نازک بیرونی توپ، درست شده باشد. قطعهٔ آن را می‌توان خم کرد و شکل آن را تغییر داد، ولی ماده‌ای را که از آن ساخته شده است، نمی‌توان کش داد و یا پاره کرد. در ضمن، انحناهای اصلی تغییر خواهند کرد، ولی همان‌طور که **گوس** ثابت کرده است، حاصل‌ضرب k_1k_2، در هر نقطه، مقدار ثابتی باقی می‌ماند. این نتیجه‌گیری مهم در نظریهٔ سطح‌ها، نشان می‌دهد که سطح‌های با انحناهای گوسی مختلف، تفاوت عمیقی با یکدیگر دارند، به نحوی که با هر گونه خم و پیچ دادن به آن‌ها، و هر تغییر شکل آن‌ها به‌جز کش دادن، از جمله نمی‌توان آن‌ها را بر هم منطبق کرد. به فرض، قطعه‌ای از سطح کره را، با هیچ‌گونه خم‌وپیچی، نمی‌توان بر صفحه و یا بر سطح کره‌ای که شعاعی دیگر دارد، قرار داد.

ما بعضی از مفهوم‌های اصلی نظریهٔ سطح‌ها را بررسی کردیم. آن‌چه مربوط به روش‌های کار دراین نظریه است، همان‌طور که گفتیم، بیش از همه به کاربرد آنالیز و به‌ویژه نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی نیاز دارد. ما ضمن ساده‌ترین مثال‌ها و حتی برای اثبات **قضیهٔ *اولر* و *مه‌نیو***، از آنالیز استفاده کردیم. یادآوری می‌کنیم که برای حل مسأله‌های پیچیده‌تر،

---

۱. برای اندازه‌گیری کُنج باید کره‌ای با شعاع واحد و به مرکز رأس آن ساخت. سطح حوزه‌ای که از مقطع کره با کنج به دست می‌آید، به عنوان مقدار کنج، در نظر گرفته می‌شود (شکل ۳۲).

حتی روش خاص نظریهٔ سطح‌ها در مسأله‌های آنالیز هم به کار گرفته می‌شود. این روش بر اساس به اصطلاح مختصات منحنی‌الخط قرار دارد که برای نخستین بار به وسیلهٔ **گوس**، و برای مسأله‌هایی که در بند بعد روشن می‌کنیم، به وجود آمد.

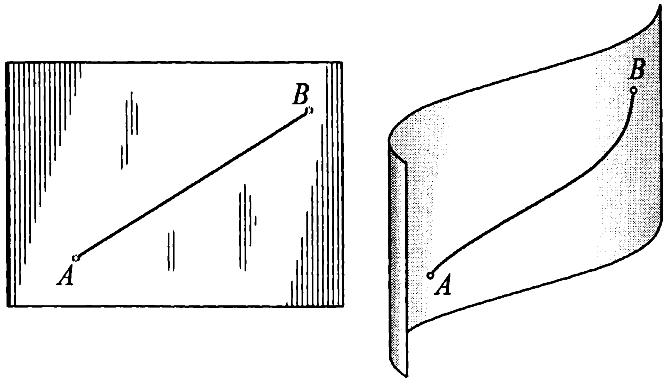
۴. هندسهٔ درونی و خمش سطح

هندسهٔ درونی (ذاتی). می‌دانیم، خمش سطح، یعنی چنان تغییر شکلی از سطح، که ضمن آن، طول همهٔ منحنی‌هایی که بر سطح قرار گرفته‌اند، ثابت بماند. اگر نوار کاغذ را دور یک لوله بپیچیم، از دیدگاه هندسی، چیزی جز خمش یک قطعه از صفحه نیست. در واقع، ضمن این عمل، کاغذ کش نمی‌آید و طول همهٔ منحنی‌هایی که روی آن رسم شده باشد، ضمن این پیچیدگی تغییر نمی‌کند. بعضی از مقدارهای دیگر هندسی هم، که مربوط به سطح است، مثل مساحت شکلی که بر آن قرار دارد، تغییر نمی‌کند. همهٔ ویژگی‌هایی از سطح، که ضمن خمش بی‌تغییر باقی می‌مانند، موضوع **هندسهٔ درونی** سطح را تشکیل می‌دهند.

این ویژگی‌ها کدام‌اند؟ روشن است، در هر خمشی، تنها چنان ویژگی‌هایی می‌تواند بی‌تغییر بماند که سر آخر به طول منحنی‌ها مربوط می‌شود، یعنی آنچه از راه اندازه‌گیری در روی خود سطح، قابل انجام باشد. خمش، یعنی هر تغییر شکلی که طول منحنی‌ها را محفوظ نگه دارد، و هرگونه ویژگی که به وسیلهٔ خمش قابل تغییر نباشد، به نحوی به وسیلهٔ طول تعریف می‌شود. خیلی ساده می‌توان گفت که هندسهٔ درونی، یعنی ***هندسهٔ روی سطح***. خود واژهٔ «هندسهٔ درونی» به این معناست که تنها ویژگی‌های درونی خود سطح، چنان ویژگی‌هایی که به هرگونه خمشی در فضا بستگی ندارد، بررسی می‌شود[1]. برای مثال اگر روی صفحهٔ کاغذ، دو نقطه را به وسیلهٔ پاره‌خط راستی به هم وصل کنیم و سپس صفحه را خم کنیم (شکل ۳۳)، پاره‌خط راست به خط منحنی تبدیل می‌شود. با وجود این، این ویژگی را حفظ کرده است که در روی سطح، کوتاه‌ترین منحنی است که دو نقطهٔ مفروض را به هم وصل می‌کند، و بنابراین، این ویژگی مربوط به هندسهٔ درونی است. برعکس، انحنای این

---

۱. یادآوری می‌کنیم، اندیشهٔ هندسهٔ درونی، مفهوم ریاضی فضا را به طور گسترده‌ای تعمیم داده و توانسته است در فیزیک جدید نقش اساسی داشته باشد. دراین باره در بخش هفدهم (جلد سوم) به تفصیل صحبت شده است.



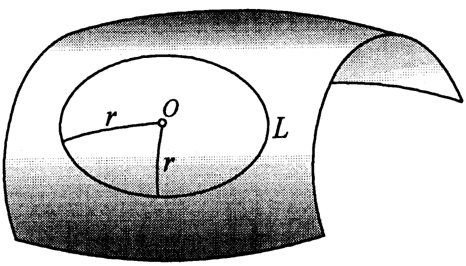
شکل ۳۳

خط منحنی، بستگی به میزان خم کردن کاغذ دارد و بنابراین، انحنا به هندسهٔ درونی مربوط نمی‌شود.

به طور کلی، از آن‌جا که هندسهٔ مسطحه در نتیجه‌گیری‌های خود، به ویژگی‌های فضا توجهی ندارد، همهٔ قضیه‌های آن به هندسهٔ درونی هر سطحی که از خمش صفحه به دست آید، مربوط می‌شود. می‌توان گفت هندسهٔ مسطحه، هندسهٔ داخلی صفحه است.

همهٔ نمونه‌های دیگر شناخته شدهٔ هندسهٔ درونی، عبارت است از هندسهٔ روی سطح کره، که ما ضمن اندازه‌گیری‌های روی سطح کرهٔ زمین با آن سروکار داریم. مثالی می‌آوریم که حقیقت مفهوم هندسهٔ درونی را به‌خوبی روشن می‌کند. موضوع این است که به علت بزرگی شعاع کرهٔ زمین، بخش‌هایی از سطح آن که به طور مستقیم دیده می‌شود، همچون صفحه به نظر می‌آید. وقتی هندسهٔ مسطحه را کنار بگذاریم و در مثل بخواهیم فاصله‌های بزرگ را اندازه‌گیری کنیم، آن را به عنوان نتیجه‌ای از خمیدگی سطح زمین در فضا در نظر نمی‌گیریم، بلکه قانون‌های مخصوص به خود «هندسهٔ سطح زمین»، قانون‌هایی را که ویژگی‌های هندسی خود سطح زمین را بیان می‌کند، به حساب می‌آوریم.

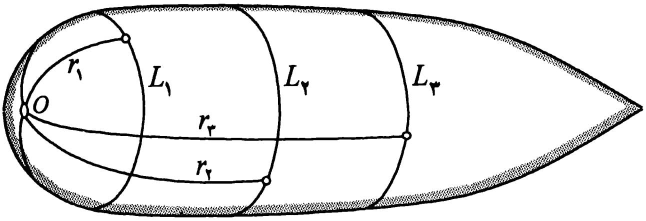
باید توجه داشت، خود اندیشهٔ مطالعهٔ هندسهٔ درونی، به وسیلهٔ **گوس**، و به‌ویژه به خاطر مسأله‌های مربوط به مساحی و نقشه‌برداری، به وجود آمد. و در واقع هم، هر دوی این دانش‌های عملی، به هندسهٔ درونی سطح زمین مربوط‌اند. نقشه‌برداری، به خصوص با نسبت اندازه‌ها، ضمن نشان دادن قطعه‌ای از سطح کرهٔ زمین در روی صفحه، سروکار دارد و بنابراین، سروکار آن با اختلاف هندسهٔ درونی سطح زمین از هندسهٔ مسطحه است. به همین



شکل ۳۴

ترتیب، می‌توان هندسهٔ درونی هر سطحی را تصور کرد: فرض می‌کنیم که روی سطح مفروض، موجودهای کوچکی زندگی کنند که سطح زیر پایشان در چشم‌انداز آن‌ها، صفحه به نظر آید (می‌دانیم، اگر قطعهٔ به اندازهٔ کافی کوچک از یک سطح را انتخاب کنیم، خیلی کم با صفحهٔ مماس آن، تفاوت دارد)؛ در این صورت، این موجودها توجه نمی‌کنند، سطح زیر پای آن‌ها، در فضا خم شده است. ولی ضمن اندازه‌گیری فاصله‌های بزرگ، معتقد می‌شوند که بر هندسهٔ آن‌ها قانون‌های دیگری حکومت می‌کند که مربوط به هندسهٔ درونی همان سطحی است که روی آن زندگی می‌کنند. از آن‌جا که این قانون‌ها، برای سطح‌های مختلف، متفاوت‌اند، می‌توان از جمله، استدلال سادهٔ زیر را ارائه داد. نقطهٔ O را روی سطح در نظر می‌گیریم و منحنی L را چنان انتخاب می‌کنیم که فاصلهٔ هر نقطهٔ آن تا O در روی سطح (یعنی، طول کوتاه‌ترین منحنی که این نقطه را به O وصل می‌کند)، برابر با مقدار ثابت r باشد (شکل ۳۴). منحنی L، از دید هندسهٔ درونی، چیزی جز یک دایره به شعاع r نیست. رابطه‌ای که محیط آن $s(r)$ را بیان کند، بستگی به r دارد و مربوط به هندسهٔ درونی سطح مفروض است. در ضمن، این رابطه، می‌تواند به اندازهٔ کافی گوناگون باشد: در صفحه به صورت $s(r)=2\pi r$، در کرهٔ به شعاع R به صورت $s(r)=2\pi R\sin\frac{r}{R}$ در می‌آید، در سطحی که روی شکل ۳۵ نشان داده‌ایم، طول محیط دایرهٔ به مرکز انتخابی O، از جایی به بعد، هیچ گونه بستگی به r ندارد، و بعد آغاز به کوچک شدن می‌کند. بنابراین، هر کدام از این سطح‌ها، هندسهٔ درونی خاص خودشان را دارند.

مفهوم‌های اساسی هندسهٔ درونی. برای این‌که با چگونگی مفهوم‌ها و قضیه‌های هندسهٔ درونی آشنا شویم، به سراغ هندسهٔ مسطحه می‌رویم که همان‌طور که گفته‌ایم، عبارت است از



شکل ۳۵

هندسهٔ درونی صفحه. موضوع هندسهٔ مسطحه عبارت است از شکل‌های روی صفحه و خاصیت‌های آن‌ها، که اغلب به صورت رابطه‌هایی بین کمیت‌های اصلی هندسی، مثل طول، زاویه و مساحت، بیان می‌شوند. با وجود این، برای این‌که قبول کنیم، زاویه و مساحت هم به هندسهٔ درونی مربوط‌اند، باید ثابت کنیم که می‌توان آن‌ها را برحسب طول‌ها بیان کرد. در واقع هم چنین است: زاویه را می‌توان به کمک ضلع‌های مثلثی، که این زاویه متعلق به آن است، محاسبه کرد؛ مساحت مثلث هم برحسب ضلع‌های آن قابل بیان است، و برای محاسبهٔ مساحت هر چندضلعی هم، می‌توان آن را به مثلث‌هایی تقسیم کرد.

در بررسی هندسهٔ روی صفحه، به عنوان هندسهٔ درونی صفحه، لازم نیست خود را در چارچوب هندسهٔ دبیرستانی محدود کنیم. برعکس، می‌توانیم آن را تا هر جا که بخواهیم تکامل دهیم و مسأله‌های تازه‌ای طرح کنیم، تنها شرطی که وجود دارد این است که همهٔ مفهوم‌هایی که وارد می‌کنیم، باید سرآخر منجر به اندازه‌گیری طول‌ها بشود. برای نمونه، می‌توان مفهوم‌های طول منحنی‌ها، مساحت شکل‌های منحنی‌الخط و غیر آن را در هندسهٔ روی صفحه وارد کرد؛ همهٔ این‌ها به هندسهٔ درونی صفحه مربوط می‌شوند.

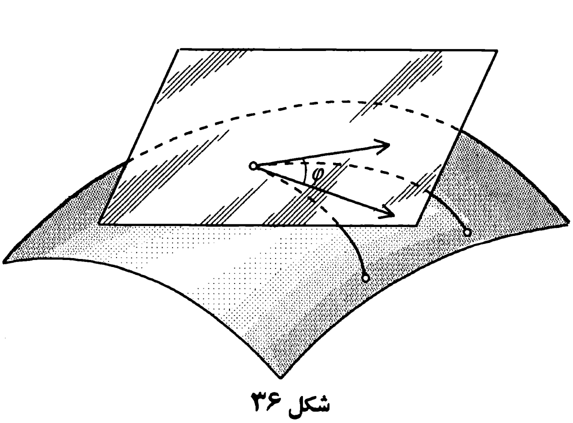
همین مفهوم‌ها را به هندسهٔ درونی هر سطح دیگری هم می‌توان وارد کرد. در ضمن، طول منحنی، مفهوم آغازین به حساب می‌آید؛ کار با زاویه و مساحت، اندکی پیچیده‌تر است. اگر هندسهٔ درونی یک سطح، غیر از هندسهٔ روی صفحه باشد، دیگر نمی‌توانیم زاویه و مساحت را برحسب طول‌ها به وسیلهٔ رابطه‌های معمولی معین کنیم. با وجود این، همان‌طور که می‌دانیم، سطح در نزدیکی نقطهٔ مفروض، خیلی کم با صفحهٔ مماس خودش اختلاف دارد. به‌بیان دقیق‌تر: اگر قطعهٔ کوچکی از سطح را که شامل نقطهٔ M است، بر صفحهٔ مماس در این نقطه تصویر کنیم، در این‌صورت اختلاف فاصلهٔ بین دو نقطه از طریق سطح و فاصلهٔ بین تصویرهای همان دو نقطه، نسبت به فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ M، بی‌نهایت کوچکی از

مرتبهٔ دوم است. بنابراین، ضمن تعیین مقدارهای هندسی مربوط به یک نقطهٔ مفروض سطح و پیدا شدن مقدار حدی، که در آن بی‌نهایت کوچک‌های مرتبهٔ دوم نقشی ندارند، می‌توان به جای قطعهٔ سطح، از تصویر آن بر صفحهٔ مماس استفاده کرد. در ضمن، مقدارهایی که با اندازه‌گیری بر صفحهٔ مماس به دست می‌آیند، برای سطح، مقدارهای هندسهٔ درونی هستند. این امکان بررسی قطعهٔ کوچکی از سطح، به صورت صفحه، مبنای تعریف همهٔ مفهوم‌های هندسهٔ درونی است.

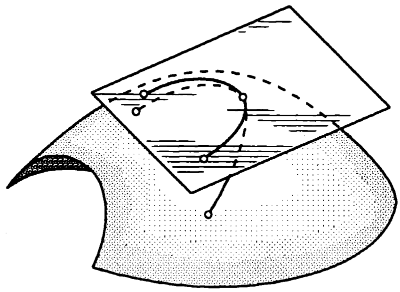
برای مثال، تعریف زاویه و مساحت را می‌آوریم. با دنبال کردن روش کلی، زاویهٔ بین دو منحنی که بر سطح قرار گرفته‌اند، به عنوان زاویهٔ بین تصویرهای آن‌ها بر صفحهٔ مماس، تعریف می‌شود (شکل ۳۶). روشن است، زاویه‌ای که به این ترتیب تعریف شود، بر زاویهٔ بین مماس‌های بر منحنی‌ها، منطبق است. تعریفی هم که از مساحت در بند ۳ دادیم، مبتنی بر همین روش بود. سرانجام، برای مشخص کردن خمیدگی منحنی «در داخل» خود سطح، از مفهوم ***انحنای ژئودزیک*** استفاده می‌کنیم؛ نام‌گذاری «***انحنای ژئودزیک***»، اندازه‌گیری روی سطح زمین را به خاطر می‌آورد. ***انحنای ژئودزیک*** منحنی در نقطهٔ مفروض، به عنوان انحنای تصویر آن بر صفحهٔ مماس، تعریف می‌شود (شکل ۳۷).

به این ترتیب، می‌بینیم، مفهوم‌های اصلی هندسهٔ مسطحه، در هندسهٔ درونی یک سطح دل‌خواه هم وارد می‌شود.

به‌همین ترتیب، می‌توان تعریف شکل‌ها را هم بر هر سطحی، براساس شکل‌های اصلی مسطحه، تعریف کرد. از جمله، دیدیم که ما با دایره سروکار داشتیم که شبیه مسطحهٔ آن تعریف می‌شد. به همین ترتیب، شبیه پاره‌خط، از کوتاه‌ترین منحنی گفت‌وگو کردیم که دو



شکل ۳۶



شکل ۳۷

نقطهٔ مفروض واقع بر سطح را به هم وصل می‌کند. و به طور طبیعی، مثلث (به عنوان شکلی که به سه تا از این کوتاه‌ترین منحنی‌ها محدود شده است)، چندضلعی و غیره هم تعریف می‌شود. با وجود این، ویژگی‌های همهٔ این شکل‌ها و مقدارها، بستگی به سطح مفروض دارد، و به این مفهوم، بی‌نهایت هندسهٔ درونی مختلف داریم. ولی هندسهٔ درونی، به عنوان شاخهٔ خاصی از نظریهٔ سطح‌ها، بیشتر توجه خود را به قانون‌مندی‌های کلی دارد که برای هندسهٔ درونی هر سطحی صادق باشد و در ضمن معلوم می‌کند چگونه این قانون‌ها برحسب مقدارهایی که به وسیلهٔ سطح مفروض مشخص می‌شوند، بیان می‌شود.

همان‌طور که دیدیم، یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های سطح ـ انحنای گوسی آن ـ ضمن خمش تغییر نمی‌کند، یعنی تنها به هندسهٔ درونی سطح مربوط می‌شود. معلوم شد که انحنای گوسی، تا حد زیادی درجهٔ انحراف هندسهٔ درونی سطح را از هندسهٔ روی صفحه، در نزدیکی نقطهٔ مفروض، مشخص می‌کند. برای مثال، دایرهٔ L را با شعاع خیلی کوچک r و به مرکز نقطهٔ مفروض O در نظر می‌گیریم. طول محیط این دایره، یعنی $s(r)$، در صفحه با رابطهٔ $s(r)=۲\pi r$ بیان می‌شود. در سطحی که با صفحه اختلاف دارد، بستگی بین محیط دایره و شعاع آن، به نحو دیگری است؛ در ضمن می‌توان ثابت کرد، انحراف $s(r)$ از $۲\pi r$، به ازای مقدارهای کوچک r، اساساً به انحنای گوسی K در مرکز دایره، بستگی دارد؛ یعنی:

$$s(r) = ۲\pi r - \frac{\pi}{۳} K r^۳ + \varepsilon r^۳$$

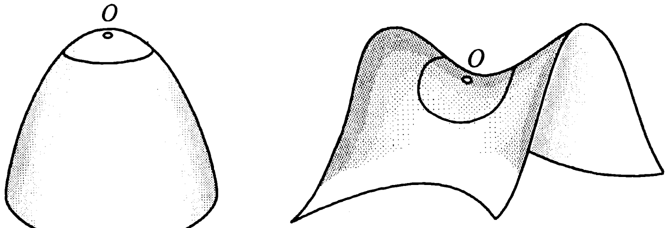
که در آن اگر $r \to ۰$ داریم $\varepsilon \to ۰$. به عبارت دیگر، به ازای مقدارهای کوچک r، می‌توان طول محیط دایره را به وسیلهٔ رابطهٔ عادی ـ با اشتباهی از مرتبهٔ سوم بی‌نهایت کوچک‌ها ـ محاسبه کرد؛ در ضمن خود این اشتباه (با دقتی بالاتر از مرتبهٔ سوم بی‌نهایت کوچک‌ها)،

متناسب با انحنای گوسی است. به خصوص به ازای $K>0$ طول محیط دایرهٔ با شعاع کوچک، کمتر از محیط دایرهٔ روی صفحه با همان شعاع است و در حالت $K<0$، برعکس بزرگتر است. این مطلب را با چشم هم می‌توان دید: در نزدیکی نقطه‌ای با انحنای مثبت، سطح به شکل «کاسه» است و دایره در روی آن منقبض می‌شود؛ در حالی که در نزدیکی نقطهٔ با انحنای منفی، دایره در روی «زین» جا می‌گیرد و مثل این است که کمی کش می‌آید (شکل ۳۸).

از این قضیه‌ها نتیجه می‌شود اگر سطح، انحنای گوسی داشته باشد، از نظر هندسی ناهمگون است: ویژگی‌های هندسهٔ درونی آن، ضمن عبور از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر، تغییر می‌کند. اگر خصلت مسألهٔ هندسهٔ درونی، شباهتی به مسأله‌های هندسهٔ مسطحه داشته باشد، این ناهمگونی، تفاوت اصولی وعمیق آن را به هندسهٔ مسطحه نشان می‌دهد. به عنوان نمونه، در صفحه، مجموع زاویه‌های هر مثلث برابر است با دو قائمه؛ در حالی که مجموع زاویه‌های مثلث در روی یک سطح دل‌خواه (که هر ضلع آن، کوتاه‌ترین خط منحنی است که دو رأس آن را به هم وصل می‌کند)، مقدار مشخصی نیست، و حتی اگر سطحی که این مثلث بر آن واقع است و «اندازه‌های» آن، مثل طول ضلع‌های آن، معلوم باشد، این مجموع قابل تعیین نیست. ولی اگر انحنای گوسی K درهر نقطهٔ این مثلث معلوم باشد، می‌توان مجموع زاویه‌های α ، β و γ آن را با این رابطه محاسبه کرد:

$$\alpha+\beta+\gamma=\pi+\iint K d\sigma$$

که در آن، انتگرال مربوط، نسبت به مساحت مثلث به دست می‌آید. قضیه‌های مربوط به مجموع زاویه‌های مثلث در صفحه و در کرهٔ واحد، حالت خاصی از این رابطه می‌شود. در



شکل ۳۸

حالت اول $K=0$ و $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ و در حالت دوم $K=1$ و $\alpha+\beta+\gamma=\pi+S$، که در آن S عبارت است از مساحت مثلث کروی.

می‌توان ثابت کرد، هر قطعهٔ به‌قدر کافی کوچک سطح را، که انحنای گوسی صفر داشته باشد، می‌توان بر صفحه گسترد. زیرا هندسهٔ درونی آن با هندسهٔ درونی صفحه، یکی است. چنین سطح‌هایی را، ***سطح‌های قابل گسترش*** (یا گستردنی) گویند. در حالتی که انحنای گوسی نزدیک به‌صفر باشد، اگر چه نمی‌توان سطح را بر صفحه گسترد، با وجود این، هندسهٔ درونی چنین سطحی خیلی کم با هندسهٔ روی صفحه فرق دارد. و این، یکبار دیگر ثابت می‌کند که انحنای گوسی، مقیاسی برای «اندازه‌گیری» انحراف هندسهٔ درونی یک سطح، از هندسهٔ روی صفحه است.

خط‌های ژئودزیک. در هندسهٔ درونی سطح‌ها، نقش خط‌های راست به عهدهٔ به‌اصطلاح ***خط‌های ژئودزیک***، و یا به طور ساده «ژئودزیک‌ها» است.

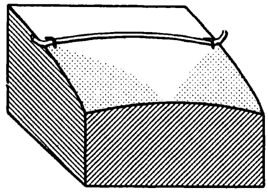
در صفحه، خط راست را می‌توان به عنوان خطی تعریف کرد که از پاره خط‌ها تشکیل شده است و این پاره خط‌ها بر یکدیگر تکیه دارند. خط ژئودزیک را هم، درست به همین ترتیب می‌توان تعریف کرد، تنها در این‌جا به جای پاره‌خط‌ها باید از «کوتاه‌ترین‌ها» نام برد. به زبان دیگر، خط ژئودزیک عبارت است از یک منحنی واقع بر سطح، به نحوی که هر کمان به اندازهٔ کافی کوچک آن، «کوتاه‌ترین» باشد. این‌که هر خط ژئودزیک ممکن است در مجموع، کوتاه‌ترین نباشد، از نمونهٔ سطح کره روشن می‌شود. در آن‌جا، هر کمانی از دایرهٔ عظیمه، ژئودزیک است، در حالی که تنها بخشی از آن، که بزرگتر از نیم‌دایره نباشد، کوتاه‌ترین است. همان‌طور که می‌بینیم، خط ژئودزیک، حتی ممکن است بسته باشد.

برای این‌که بعضی از ویژگی‌های مهم خط‌های ژئودزیک را روشن کنیم، نمونهٔ مکانیکی زیر را بررسی می‌کنیم[1]. فرض کنیم روی سطح F، نخ لاستیکی کشیده شده‌ای را قرار داده و دو سر آن را محکم کرده باشیم (شکل ۳۹)[2]. وقتی نخ، حداقل طول را داشته باشد، درحال تعادل است، زیرا هر تغییری در وضع آن، بستگی به درازتر کردن آن دارد وبنابراین تنها وقتی

---

۱. از قبل یادآوری می‌کنیم، در داوری‌های خود مدعی اثبات دقیق ویژگی‌های خط‌های ژئودزیک نیستیم، بلکه تنها می‌خواهیم مهمترین این ویژگی‌ها را روشن کنیم.

۲. نخ کشیده شده، تنها به سطح محدب می‌چسبد. بنابراین، برای این‌که استثنایی قایل نشده باشیم، بهتر است سطح را به صورت دو لایه در نظر بگیریم، که نخ بین دو لایهٔ آن قرار گرفته است.



شکل ۳۹

پیش می‌آید که زیر تاثیر نیروهای خارجی باشد. یعنی، نخی که بر کوتاه‌ترین فاصلهٔ دو نقطهٔ انتهایی آن منطبق باشد، در حالت تعادل است. برای تعادل، باید نیروهای کششی در هر تکهٔ نخ بامقاومت سطح که در جهت قائم بر آن است، هم‌ارز شود (سطح را صاف به حساب می‌آوریم واز اصطکاک بین نخ و سطح، صرف‌نظر می‌کنیم). ولی در بند ۲ روشن کردیم که فشار وارد از نخ کشیده شده بر تکیه‌گاه، در جهت قائم اصلی بر منحنی است (همان منحنی که نخ در طول آن قرار دارد). بنابراین به این نتیجه می‌رسیم: قائم اصلی خط ژئودزیک در هر نقطه، در جهت قائم بر سطح قرار دارد. قضیهٔ عکس هم درست است: هر منحنی واقع بر یک سطح منظم، که دارای چنین خاصیتی باشد، خط ژئودزیک است.

این ویژگی خط ژئودزیک، اجازه می‌دهد حکم بسیار جالب زیر را کشف کنیم: اگر نقطهٔ مادی طوری بر سطح حرکت کند که هیچ نیروی دیگری، به‌جز عکس‌العمل سطح، بر آن اثر نکند، مسیر آن، خط ژئودزیک خواهد بود. در واقع، همان‌طور که از بند ۲ می‌دانیم، شتاب نقطه درجهت قائم اصلی بر مسیر قرار دارد، و چون تنها نیرویی است که بر نقطه اثر می‌کندعکس‌العمل سطح است، قائم اصلی مسیر بر قائم اصلی سطح منطبق می‌شود وبنابر قضیهٔ اخیر، مسیر همان خط ژئودزیک خواهد بود. این ویژگی خط‌های ژئودزیک، شباهت آن‌ها را به خط‌های راست، باز هم عمیق‌تر می‌کند. همان‌طور که حرکت نقطهٔ آزاد، روی خط راست اتفاق می‌افتد، مسیر حرکت نقطه‌ای هم که بدون وجود نیروی خارجی ناچار است بر یک سطح حرکت کند، خط ژئودزیک است[1].

از همین ویژگی خط‌های ژئودزیک، قضیهٔ زیر هم نتیجه می‌شود: وقتی دو سطح، در طول یک منحنی بر هم مماس‌اند، اگر این منحنی در یکی از سطح‌ها، خط ژئودزیک باشد در دیگری هم خط ژئودزیک خواهد بود. در واقع، چون در هر نقطهٔ این منحنی، سطح‌ها

۱. در این‌جا، منظورمان از «نیروهای خارجی» هر نیرویی به‌جز عکس‌العمل سطح است.

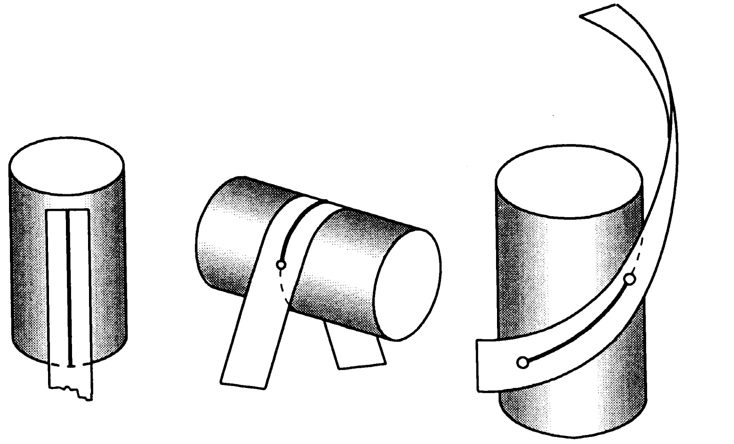
دارای صفحهٔ مماس مشترکی هستند، در این نقطه‌ها قائم مشترکی خواهند داشت، و چون منحنی در یکی از سطح‌ها، خط ژئودزیک است، این قائم منطبق بر قائم اصلی نسبت به منحنی است. بنابراین، همین منحنی در سطح دوم هم، خط ژئودزیک است.

ازاین نتیجه‌گیری، دو خاصیت عینی دیگر هم، از خط‌های ژئودزیک به دست می‌آید، اول، اگر یک صفحهٔ قابل انعطاف مستطیل شکل (و در مثل یک خط‌کش فولادی) در طول خط میانهٔ خود به سطحی محکم بچسبد، در آن صورت، در طول یک خط ژئودزیک براین سطح، مماس خواهد بود(در واقع، خط تماس برای خط‌کش ژئودزیک است و بنابراین برای سطح هم ژئودزیک خواهد بود).دوم، اگر سطحی روی یک صفحه چنان بغلتد که بر صفحه در طول یک خط راست مماس باشد، اثر این خط راست بر صفحه، یک خط ژئودزیک است[1]. هر دوی این خاصیت‌ها، به سادگی روی نمونه استوانه دیده می‌شود. با آزمایش معلوم می‌شود، خط میانهٔ نوار مستطیلی، وقتی روی سطح استوانه قرار گیرد (شکل ۴۰)، یا روی مولد، یا روی دایره و یا روی منحنی پیچی واقع می‌شود (به سادگی می‌توان ثابت کرد، خط‌های ژئودزیک سطح استوانه‌ای، تنها یکی از این سه نوع می‌تواند باشد). اگر روی صفحه‌ای، خط راستی را با گچ رسم کنیم و استوانه را روی این خط راست بغلطانیم، همین خط‌ها، به عنوان اثر گچ روی استوانه، پیدا خواهد شد.

به شباهت خط‌های ژئودزیک با خط‌های راست واقع بر صفحه، ویژگی مهم دیگری را هم می‌توان اضافه کرد که اغلب به عنوان تعریف خط‌های ژئودزیک پذیرفته می‌شود. خط‌های راست را می‌توان به عنوان منحنی‌هایی از صفحه تعریف کرد که انحنایی برابر صفر دارند، خط‌های ژئودزیک را هم می‌توان به همین ترتیب، منحنی‌هایی از سطح دانست که دارای انحنای ژئودزیک صفرند (به یاد بیاوریم که انحنای ژئودزیک، یعنی انحنای تصویر منحنی بر صفحهٔ مماس بر سطح در نقطه‌ای که بررسی می‌کنیم. شکل ۳۷ را ببینید). یکی بودن این تعریف خط‌های ژئودزیک را با تعریف قبلی، می‌توان به این ترتیب روشن کرد: اگر در هر نقطهٔ منحنی، انحنای تصویر آن بر صفحهٔ مماس برابر صفر باشد، در آن صورت، منحنی از مماس خود، در اساس، در جهت قائم‌های بر سطح دور می‌شود و بنابراین، قائم اصلی منحنی هم، همیشه در جهت قائم بر سطح خواهد بود، و در نتیجه، منحنی به مفهوم

---

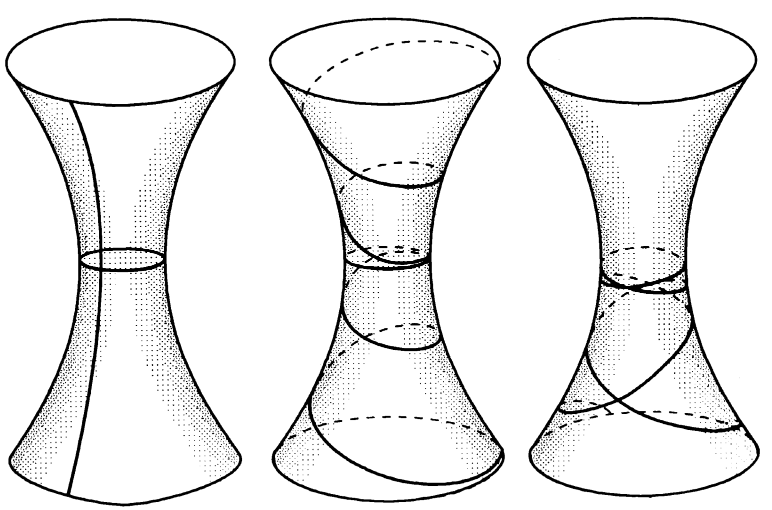
۱. این حکم در واقع، همان حکم قبلی است. زیرا غلتیدن سطح بر صفحه با پیچیدن نوار مسطح بر سطح، دو مفهوم هم‌ارز هستند.



شکل ۴۰

قبلی، خط ژئودزیک می‌شود. برعکس، اگر منحنی، خط ژئودزیک باشد، قائم اصلی آن، و بنابراین بخش اصلی انحراف از خط مماس، در جهت قائم بر سطح است و در نتیجه، ضمن تصویر بر صفحهٔ مماس، چنان منحنی به دست می‌آید، که انحراف از مماس دربارهٔ آن، خیلی کمتر از منحنی اصلی است و انحنای تصویر به دست آمده، برابر صفر می‌شود.

مسیر خط ژئودزیک بر سطح‌های مختلف، بسیار متنوع است. به عنوان نمونه، در شکل ۴۱، چند خط ژئودزیک را روی هذلولوی (هیپربولوئید) دوار، نشان داده‌ایم.



شکل ۴۱

خمش سطح. بررسی خود خمش‌ها هم به هندسهٔ درونی، که کارش مطالعهٔ خاصیت‌هایی است که ضمن خمش تغییر نمی‌کنند، ارتباط دارد. نظریهٔ خمش‌های سطح، از جملهٔ شاخه‌های پرمضمون و در عین حال دشوار هندسه است وشامل مسأله‌های متنوع و زیادی است که بعضی از آن‌ها، با وجود طرح ساده و طبیعی آن‌ها، تا امروز به طور کامل حل نشده است.

اولر و ***مین‌دینگ*** هم به مسأله‌های مربوط به خمش پرداخته بودند، ولی نتیجه‌گیری‌های کلی مربوط به خمش یک سطح دل‌خواه، خیلی دیرتر به دست آمد.

در نظریهٔ کلی خمش، قبل از همه این پرسش مطرح است که آیا همیشه می‌توان سطح را خم کرد و اگر می‌توان، تا چه درجه‌ای! برای به اصطلاح ***سطح‌های تحلیلی***، یعنی سطح‌هایی که می‌توان آن‌ها را به وسیلهٔ تابع‌هایی که قابل بسط به رشتهٔ ***تیلور*** هستند، بیان کرد. این پرسش به وسیله ***داربو***، هندسه‌دان فرانسوی، در پایان سدهٔ ۱۹، حل شد. به خصوص معلوم شد: اگر روی سطحی یک خط ژئودزیک انتخاب کنیم و منحنی (تحلیلی) دل‌خواهی با همان طول در فضا داده شده باشد، به نحوی که در هیچ جا انحنای صفر نداشته باشد، می‌توان باریکهٔ به اندازهٔ کافی کم عرضی از سطح را، که شامل ژئودزیک مفروض است، طوری خم کرد که خط ژئودزیک، به منحنی مفروض تبدیل شود[1]. این قضیه نشان می‌دهد، باریکهٔ سطح را می‌توان به طور دل‌خواه، خم کرد. با وجود این ثابت شد، اگر منحنی (که باید خط ژئودزیک به آن تبدیل شود) مفروض باشد، سطح راتنها به دو طریق می‌توان خم کرد (برای نمونه، اگر این خط مسطحه باشد، دو وضع سطح، نسبت به این صفحه، قرینهٔ یکدیگرند). ولی اگر خط ژئودزیک، خط راست باشد، همان‌طور که هر نمونه‌ای از خمش سطح استوانه‌ای نشان می‌دهد، حکم اخیر درست نیست.

ما خمش را، به عنوان تغییر شکلی از سطح، تعریف کردیم که در نتیجهٔ آن طول همهٔ منحنی‌های واقع بر سطح، بی‌تغییر باقی بماند. به این ترتیب، ما دربارهٔ نتیجهٔ قطعی و نهایی تغییرشکل گفت‌وگو کردیم و به این پرسش که رفتار سطح در جریان تغییر شکل چگونه است، نپرداختیم. در ضمن، وقتی سطح را به صورت ماده‌ای که قابل انعطاف است، ولی کش‌دار نیست، در نظر می‌گیریم، طبیعی است، به پیوستگی تغییر شکل آن، در هر لحظه‌ای

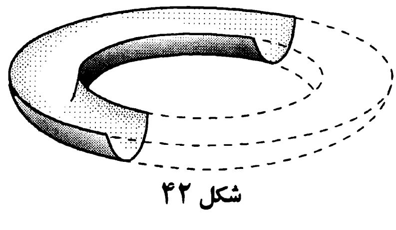
---

۱. حالت تبدیل خط ژئودزیک به خطی با انحنای صفر، استثنا است. زیرا به سادگی معلوم می‌شود برای سطح با انحنای گوسی مثبت، این عمل ممکن نیست.

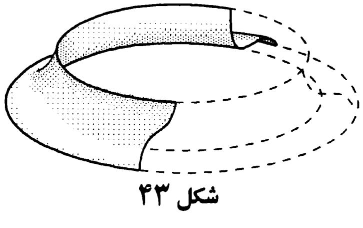
که طول‌ها ثابت می‌مانند، توجه داشته باشیم (از نظر فیزیکی، این موضوع، متناظر با کش‌دار نبودن ماده است). چنین تغییر شکلی را، **خمش پیوسته** گویند.

در برخورد اول، ممکن است به نظر آید، هر خمشی را می‌توان به طور پیوسته انجام داد، ولی، اینطور نیست. از جمله، ثابت می‌شود سطح به شکل ناودان گرد (شکل ۴۲) را، نمی‌توان به طور پیوسته خم کرد (این مطلب را از این حقیقت روشن هم می‌توان درک کرد که وقتی لبه‌های سطل برگردانده و دولا شده باشد، خیلی بادوام‌تر از حالت صاف آن است)؛ ولی، چنین سطحی را می‌توان خم کرد: کافی است ناودان را روی دایره‌ای که در طول آن بر صفحهٔ افقی مماس است، ببریم و سپس یکی از دو نیمه را با قرینهٔ آن نسبت به صفحه، عوض کنیم (روی شکل‌های ۴۲ و ۴۳، برای این‌که بهتر دیده شود، تنها نیمی از سطح نشان داده شده است). به طور شهودی می‌توان فهمید که با خمش پیوسته، نمی‌توان ناودان را به شکل حلقه درآورد (در حالی که، اگر ناودان، مستقیم باشد، می‌توان این تغییر شکل را با خمش پیوسته به دست آورد).

اگر به‌بخش به اندازهٔ کافی کوچکی از سطح محدود شویم، هیچ مانعی برای خمش پیوستهٔ آن باقی نمی‌ماند و می‌توان انتظار داشت هر خمشی از قطعهٔ کوچک سطح، به طور پیوسته ممکن باشد. این حکم، در واقع هم درست است، تنها با این شرط که در این بخش کوچک سطح، انحنای گوسی صفر نباشد (بدون در نظر گرفتن حالتی که در همه‌جا، این انحنای گوسی برابر صفر باشد). وقتی، انحنای گوسی در نقطه‌های جداگانه صفر باشد، همان‌طور که ن.و. **یفیموف** در سال ۱۹۴۰ ثابت کرد، حتی اگر قطعهٔ کوچک سطح را به اندازهٔ کافی هم کوچک بگیریم، ممکن است خمش پیوسته با حفظ منظم بودن سطح، عملی نباشد. از جمله، سطحی که به وسیلهٔ معادلهٔ $z=x^9+\lambda x^6y^3+y^9$ داده شده است (λ، عددی غیرجبری است)، طوری است که هرقدر هم قطعه سطح حاوی مبداء مختصات را کوچک بگیریم، امکان خمش پیوستهٔ منظم برای آن وجود ندارد. قضیهٔ **یفیموف**، نتیجه‌ای تازه و تا



شکل ۴۲



شکل ۴۳

حدی غیرقابل انتظار در هندسهٔ دیفرانسیلی سنتی است.

در کنار مسأله‌های کلی نظریهٔ خمش، بررسی حالت‌های خاص خمش سطح‌ها، اهمیت زیادی در هندسه دارد.

بستگی هندسهٔ درونی سطح با شکل فضایی آن. ما می‌دانیم که بعضی از ویژگی‌های سطح و شکل‌های واقع بر آن، با نحوهٔ قرارگرفتن سطح در فضا بستگی مستقیم دارد. از طرف دیگر، بعضی ویژگی‌های «هندسی ـ بیرونی»، به وسیلهٔ هندسهٔ درونی سطح معین می‌شوند. از جمله، حاصل‌ضرب انحناهای اصلی سطح (انحنای گوسی)، از روی هندسهٔ درونی معین می‌شود. مثال دیگر: برای این‌که دربارهٔ منحنی واقع بر سطح قائم اصلی، همه‌جا منطبق بر قائم بر سطح باشد، لازم و کافی است، این منحنی، ویژگی معینی از هندسهٔ درونی داشته باشد، یعنی خط ژئودزیک باشد.

پس هندسهٔ درونی سطح، شکل فضایی آن را تنها تا حدمعینی مشخص می‌کند.

بستگی شکل فضایی سطح را با هندسهٔ درونی آن، می‌توان به صورت تحلیلی و به‌کمک معادله‌هایی شامل مقدارهایی که مشخص کنندهٔ هندسهٔ درونی هستند ومقدارهایی که مشخص کنندهٔ نحوهٔ نشانده‌شدن سطح در فضا است، بیان کرد. یکی از این معادله‌ها، رابطه‌ای است که انحنای گوسی را برحسب مقدارهایی از هندسهٔ درونی بیان می‌کند و منتسب به **گوس** است. معادله‌های دیگر از این نوع، معادله‌های ***پیترسون ـ کوداتسی*** است که دربارهٔ آن‌ها در بند ۱ صحبت کرده‌ایم.

معادله‌های ***گوس ـ پیترسون ـ کوداتسی*** به طور کامل بستگی بین هندسهٔ درونی سطح و خمیدگی آن در فضا را معین می‌کند، به نحوی که همهٔ بستگی‌های ممکن بین مقدارهای هندسهٔ درونی و مقدارهای هندسهٔ بیرونی یک سطح دل‌خواه، دست‌کم به صورت پنهانی، دراین معادله‌ها وجود دارد.

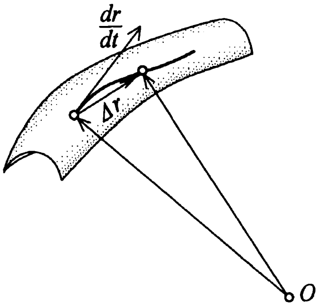
از آن‌جا که شکل سطح در فضا، تنها به یاری هندسهٔ درونی، معین نمی‌شود، به طور طبیعی این پرسش پیش می‌آید: چه مقدارهایی از هندسهٔ بیرونی باید داده شود، تا سطح به طور کامل مشخص باشد؟ معلوم شده است، اگر دو سطح دارای یک هندسهٔ درونی باشند و انحناهای مقطع‌های قائم این سطح‌ها، در نقطه‌ها و جهت‌های متناظر، برابر باشند، در آن صورت خود این سطح‌ها برابرند، یعنی می‌توان با حرکت، آن‌ها را بر هم منطبق کرد. یادآوری می‌کنیم که ***پترسون*** این قضیه را ۱۵ سال قبل از **بونه** کشف کرد، اگر چه امروز به نام

بونه مشهور شده است.

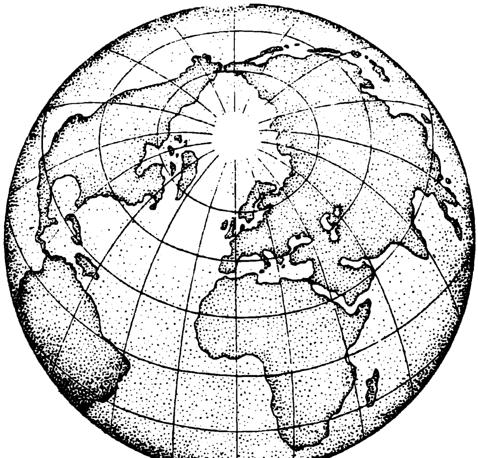
دستگاه تحلیلی نظریهٔ سطح‌ها. برای به کار بردن آنالیز در نظریهٔ سطح‌ها، باید چنان دستگاه تحلیلی ساخت که به طور خاص به چنین هدفی خدمت کند. گام قطعی را در این جهت، **گوس** برداشت که روش تحلیلی را برای سطح‌ها، به وسیلهٔ به اصطلاح مختصات منحنی‌الخط وارد کرد. این روش عبارت است از تعمیم طبیعی اندیشهٔ مختصات دکارتی در صفحه، که درست به هندسهٔ درونی سطح بستگی دارد ودر آن اگر سطح با معادلهٔ $z=f(x , y)$ داده شده باشد، دشواری‌هایی پیش می‌آورد. این دشواری‌ها، ناشی از آن است که مختصات (x , y) نقطه‌ای که بر سطح قرار دارد، ضمن خمش تغییر می‌کند. برای این‌که این دشواری را از بین ببریم، مختصات را در خود سطح وارد و هر نقطه را با دوعدد u و v، که بستگی به نقطهٔ مفروض دارند، معین می‌کنیم (و این بستگی، بعد از خمش هم، حفظ می‌شود). مختصات فضایی (x , y , z) هرنقطه هم، همیشه به عنوان تابع‌هایی از uو v بیان می‌شوند. عددهای uو v، که نقطه را بر سطح معین می‌کنند، و ***مختصات منحنی‌الخط (مختصات خمیده خطی)*** آن نامیده می‌شود. دلیل این نام‌گذاری معلوم است. اگر مقدار یکی از مختصات، و در مثل v ثابت و دیگری متغیر باشد، خط مختصاتی را روی سطح به دست می‌آوریم. خط‌های مختصاتی در سطح، شبکهٔ منحنی‌الخطی را، شبیه شبکهٔ مختصاتی در صفحه، تشکیل می‌دهند. یادآوری می‌کنیم، تعیین جای نقطه‌ها بر سطح زمین به کمک طول و عرض جغرافیایی، چیزی جز وارد کردن مختصات منحنی‌الخط بر سطح کره نیست: شبکهٔ مختصاتی در این حالت عبارت است از دایره‌های نصف‌النهارها و مدارها[1] (شکل ۴۴). برای این‌که وضع فضایی صفحه را به کمک مختصات منحنی‌الخط بدهیم، وضع هر نقطهٔ آن را در بستگی که با uو vدارد معین می‌کنیم، و برای نمونه بُرداری مثل $\mathbf{r}$ را درنظر می‌گیریم که از یک مبداء ثابت، به نقطهٔ سطح می‌رود (به اصطلاح شعاع حامل سطح). این بردار تابعی از uو v خواهد بود: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u , v)$ (و این هم‌ارز با آن است که مؤلفه‌های x ، y، zبردار $\mathbf{r}$ را به صورت تابع‌هایی از uو vبدهیم)[2]. برای بیان منحنی که بر سطح مفروض قرار دارد، باید

۱. این مطلب جالب است که مختصات جغرافیایی و کاربرد عملی آن‌ها، از خیلی قدیم و قبل از آنکه ***دکارت*** مختصات معمولی را در صفحه بیاورد، معمول بوده است.

۲. البته، **گوس** از علامت‌های برداری استفاده نمی‌کرد. او هر سه مختص نقطهٔ واقع بر سطح را جداجدا و ←



شکل ۴۵



شکل ۴۴

مختصات u و v را به صورت تابع‌هایی از یک پارامتر t و شعاع حامل نقطهٔ متغیر واقع بر این منحنی را به صورت تابع مرکب $\mathbf{r}[u(t)\ ,\ v(t)]$ بدهیم.

روی تابع‌های برداری، مفهوم مشتق و دیفرانسیل تعمیم پیدا می‌کند؛ در ضمن، به طور مستقیم و از تعریف مشتق به عنوان حد $\frac{\Delta r}{\Delta t}$، وقتی $\Delta t \to 0$ ($\mathbf{r}$ تابعی است از پارامتر t) نتیجه می‌شود که مشتق شعاع حامل منحنی، برداری است در جهت مماس بر این منحنی (شکل ۴۵). تابع‌های برداری هم دارای همان خاصیت‌های اصلی مشتق‌های معمولی هستند، به خصوص قانون مربوط به دیفرانسیل‌گیری از تابع‌های مرکب

$$\frac{d\,\mathbf{r}\,[u(t)\ ,\ v(t)]}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dt} = \mathbf{r}_u u'_t + \mathbf{r}_v v'_t \qquad (۷)$$

که در آن $\mathbf{r}_u$ و $\mathbf{r}_v$، عبارت‌اند از مشتق‌های جزیی تابع برداری $\mathbf{r}(u\ ,\ v)$.

می‌توان ثابت کرد که طول منحنی با انتگرال

$$s = \int \sqrt{x'^{2}(t) + y'^{2}(t) + z'^{2}(t)}\,dt$$

$\longrightarrow$ به طور مستقیم به عنوان تابع‌هایی از u و v در نظر می‌گرفت. بردارها، که در نتیجهٔ کارهای ***هامیلتون*** و ***گراسمان*** پیدا شدند در ابتدا کاربرد گسترده‌ای در فیزیک پیدا کردند و خیلی دیرتر (در سدهٔ بیستم) به صورت دستگاه سنتی در طرح‌های تحلیلی و هندسهٔ دیفرانسیلی در آمدند.

بیان می‌شود. بنابراین، دیفرانسیل طول منحنی برابر است با

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\, dt$$

ولی، چون $x'(t)$ ، $y'(t)$ ، $z'(t)$، چیزی جز مؤلفه‌های بردار $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{r}'_t$ نیست، می‌توان نوشت $ds=|\mathbf{r}'_t|dt$ که در آن $|\mathbf{r}'_t|$ به معنای طول بردار $\mathbf{r}'_t$ است. برای منحنی واقع بر سطح، بنابر (۷) به دست می‌آید:

$$ds = |\mathbf{r}_u u'_t+\mathbf{r}_v v'_t|\,dt$$

اگر مجذور طول بردار را، که در سمت راست قرار گرفته است، محاسبه کنیم، طبق قانون جبربرداری[1]، به دست می‌آید:

$$ds^2=[\mathbf{r}_u^2\, u'^2_t + 2\,\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v u'_t v'_t + \mathbf{r}_u^2 v'^2_t]\,dt^2$$

که اگر به دیفرانسیل عبور کنیم و قرار بگذاریم:

$$\mathbf{r}_u^2 = E(u,v)\ ,\ \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v = F(u,v)\ ,\ \mathbf{r}_v^2 = G(u,v)$$

خواهیم داشت:

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdu\,dv + Gdv^2$$

می‌بینیم، مجذور دیفرانسیل طول کمان واقع بر سطح، صورت درجه دومی از دیفرانسیل‌های du و dv، با ضریب‌هایی که بستگی به نقطهٔ سطح دارند، است. این صورت، **نخستین صورت درجه دو *اساسی* سطح** نامیده می‌شود. دستوری که در هر نقطهٔ سطح برای ضریب‌های E ، F و G از نخستین صورت درجه دو اساسی وجود دارد، اجازه می‌دهد که طول هر منحنی روی سطح را با رابطهٔ

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{Eu'^2_t + 2Fu'_t v'_t + Gv'^2_t}\, dt$$

محاسبه کنیم و بنابراین، به طور کامل هندسهٔ درونی آن معلوم شود.

---

۱. مجذور طول بردار عبارت است از حاصل‌ضرب اسکالر بردار در خودش، و برای ضرب اسکالر، همان‌طور که می‌دانیم [بخش سوم (جلد اول)، بند ۹ را ببینید] ، قانون‌های عادی باز کردن پرانتزها، درست است.

به عنوان نمونه، نشان می‌دهیم، چگونه می‌توان زاویه و مساحت را برحسب E ، F و G بیان کرد. فرض کنید از نقطه‌ای، دو منحنی آغاز شود که یکی از آن‌ها با معادله‌های $u=u_1(t)$، $v=v_1(t)$ و دیگری با معادله‌های $u=u_2(t)$، $v=v_2(t)$، داده شده باشد. در این‌صورت، مماس‌های براین منحنی‌ها، این بردارها هستند:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_u \frac{du_1}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv_1}{dt}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_u \frac{du_2}{dt} + \mathbf{r}_v \frac{dv_2}{dt}$$

کسینوس زاویهٔ بین این بردارها، برابر است با نسبت حاصل‌ضرب اسکالر آن‌ها $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2$ بر حاصل‌ضرب طول‌های آن‌ها r_1r_2:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2}{r_1r_2} = \frac{\mathbf{r}_u^2 \frac{du_1}{dt}\cdot\frac{du_2}{dt} + \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\left(\frac{du_1}{dt}\cdot\frac{dv_2}{dt}+\frac{du_2}{dt}\cdot\frac{dv_1}{dt}\right) + \mathbf{r}_v^2\frac{dv_1}{dt}\cdot\frac{dv_2}{dt}}{r_1r_2}$$

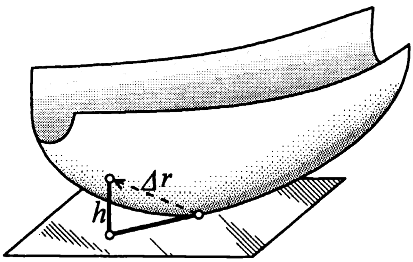
که اگر قرار دهیم $\mathbf{r}_u^2=E$، $\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v=F$ ، $\mathbf{r}_v^2=G$، به دست می‌آید:

$$\cos\alpha=\frac{E\frac{du_1}{dt}\cdot\frac{du_2}{dt}+F\left(\frac{du_1}{dt}\cdot\frac{dv_2}{dt}+\frac{du_2}{dt}\cdot\frac{dv_1}{dt}\right)+G\frac{dv_1}{dt}\cdot\frac{dv_2}{dt}}{\sqrt{E\left(\frac{du_1}{dt}\right)^2+2F\frac{du_1}{dt}\cdot\frac{dv_1}{dt}+G\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2}\cdot\sqrt{E\left(\frac{du_2}{dt}\right)^2+2F\frac{du_2}{dt}\cdot\frac{dv_2}{dt}+G\left(\frac{dv_2}{dt}\right)^2}}$$

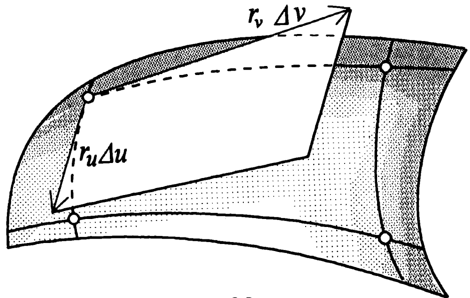
برای پیدا کردن رابطهٔ مساحت، چهارضلعی منحنی‌الخطی را در نظر می‌گیریم‌که به خط‌های مختصاتی $u=u_0$ و $v=v_0$ ، $u=u_0+\Delta u$ ، $v=v_0+\Delta v$ محدود باشد و توجه می‌کنیم که این متوازی‌الاضلاع به تقریب بر صفحهٔ مماس قرار دارد و روی بردارهای $\mathbf{r}_u\Delta u$ و $\mathbf{r}_u\Delta v$، مماس‌های بر خط‌های مختصاتی را رسم می‌کنیم (شکل ۴۶). مساحت این متوازی‌الاضلاع برابر است با $\Delta s = |\mathbf{r}_u|\,|\mathbf{r}_v|\,\Delta u\Delta v\sin\varphi$، که در آن φ عبارت است از زاویهٔ $\mathbf{r}_u$ و $\mathbf{r}_v$. از آن‌جا خواهیم داشت:

$$\Delta s = |\mathbf{r}_u|\;|\mathbf{r}_v|\;\Delta u\Delta v\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \sqrt{\mathbf{r}_u^2\,\mathbf{r}_v^2 - |\mathbf{r}_u|^2\,|\mathbf{r}_v|^2\cos^2\varphi}\;\;\Delta u\,\Delta v$$

و چون $\mathbf{r}_u^2=E$ ، $\mathbf{r}_v^2=G$ ، $|\mathbf{r}_u|.|\mathbf{r}_v|\cos\varphi = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v = F$، به دست می‌آید:



شکل ۴۷



شکل ۴۶

$$\Delta s = \sqrt{EG-F^{2}}\,\Delta u\Delta v$$

که با جمع کردن مساحت‌های متوازی‌الاضلاع‌ها و عبور به سمت مقدار حدی، وقتی که Δu و Δv به سمت صفر میل کند، برای مساحت به رابطهٔ:

$$S = \iint_D \sqrt{EG-F^{2}}\;du\,dv$$

می‌رسیم که در آن، انتگرال‌گیری در حوزهٔ D انجام می‌گیرد و حوزهٔ تغییر متغیرهای u و v متناظر با قطعهٔ مفروض سطح است.

به این ترتیب، مختصات منحنی‌الخط، وسیلهٔ خوبی برای بررسی هندسهٔ درونی سطح است.

معلوم می‌شود، خمیدگی سطح در فضا هم، می‌تواند به وسیلهٔ یک صورت درجه دو از دیفرانسیل‌های du و dv مشخص شود. در واقع، اگر $\mathbf{n}$، بردار واحد قائم بر سطح در نقطهٔ M و $\Delta\mathbf{r}$، نمو شعاع حامل سطح، ضمن جدا شدن از این نقطه باشد، در این‌صورت انحراف h سطح از صفحهٔ مماس (شکل ۴۷)، برابر است با $\mathbf{n}\Delta\mathbf{r}$. اگر نمو $\Delta\mathbf{r}$ را طبق دستور تیلور بسط دهیم، به دست می‌آید:

$$h = \mathbf{n}\,d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\,\mathbf{n}\,d^{2}\mathbf{r} + \varepsilon(du^{2}+dv^{2})$$

که در آن، وقتی $\sqrt{du^{2}+dv^{2}}$ به سمت صفر میل کند، ε هم به سمت صفر میل می‌کند. از آن‌جا که بردار $d\mathbf{r}$ بر صفحهٔ مماس قرار دارد، خواهیم‌داشت: $\mathbf{n}d\mathbf{r}=0$؛ جملهٔ آخر $\varepsilon(du^{2}+dv^{2})$ در مقایسه با مربع دیفرانسیل‌های du و dv کوچک است و جملهٔ اصلی $\frac{1}{2}\mathbf{n}d^{2}\mathbf{r}$ باقی می‌ماند. دو برابر قسمت اصلی h، یعنی مقدار $\mathbf{n}d^{2}\mathbf{r}$، صورت درجه دو نسبت به du و

dv از آب در می‌آید:

$$\mathbf{n}\,d^{2}\mathbf{r} = \mathbf{n}\mathbf{r}_{uu}\,du^{2} + 2\,\mathbf{n}\mathbf{r}_{uv}\,du\,dv + \mathbf{n}\,\mathbf{r}_{vv}\,dv^{2}$$

که انحراف سطح را از صفحهٔ مماس نشان می‌دهد و **دومین صورت درجه دو** اساسی سطح نامیده می‌شود. ضریب‌های آن را، که به u و v بستگی دارند، این‌طور می‌نامیم:

$$\mathbf{n}\mathbf{r}_{uu} = L\ ,\ \mathbf{n}\mathbf{r}_{uv} = M\ ,\ \mathbf{n}\mathbf{r}_{vv} = N$$

با در دست داشتن این صورت درجه دو، می‌توانیم انحنای هر خطی از سطح را محاسبه کنیم. در واقع، با استفاده از رابطهٔ $k = \lim\limits_{l\to 0} \frac{2h}{l^{2}}$، معلوم می‌شود که انحنای مقطع قائمی که جهت آن متناظر با نسبت دیفرانسیل‌های du/dv است، برابر است با

$$k_n = \frac{\mathbf{n}d^{2}\mathbf{r}}{ds^{2}} = \frac{L du^{2} + 2M du\,dv + N dv^{2}}{E du^{2} + 2F du\,dv + G dv^{2}}$$

اگر منحنی، مقطع قائم نباشد، بنابرقضیهٔ *مه‌نیو* کافی است انحنای مقطع قائمی را که در همان جهت است بر کسینوس زاویهٔ بین قائم اصلی منحنی و قائم بر سطح، تقسیم کنیم.

دومین صورت درجه دو، روش تحلیلی مطالعهٔ خمیدگی سطح را به دست می‌دهد. به خصوص می‌توان بیان خالص تحلیلی قضیه‌های *اولر* و *مه‌نیو*، انحنای گوسی و غیره را به دست آورد.

قضیهٔ *پترسون*، که دربارهٔ آن در بالا صحبت کردیم، نشان می‌دهد که دو صورت درجه دو، وقتی با هم در نظر گرفته شوند، سطح را با دقت وضع آن در فضا، معین می‌کنند و بنابراین مطالعهٔ هر خاصیتی از سطح به صورت تحلیلی، منجر به مطالعهٔ این صورت‌ها می‌شود.

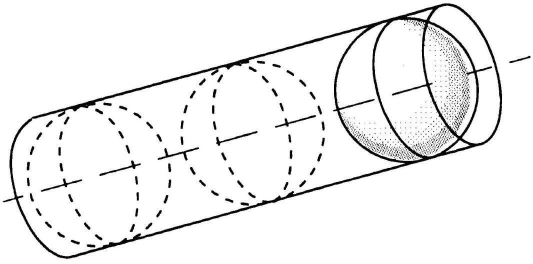
در پایان یادآور می‌شویم، ضریب‌های دو صورت درجه دو، مستقل نیستند؛ آن بستگی که بین هندسهٔ درونی سطح و شکل فضایی آن وجود دارد (و ما دربارهٔ آن گفت‌وگو کرده‌ایم)، به صورت تحلیلی به شکل سه رابطه (*معادله‌های گوس ـ گوداتسی*) بین ضریب‌های دو صورت درجه دو بیان می‌شوند.

۵. دیدگاه‌های تازه در نظریهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها

خانوادهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها. گرچه اساس نظریهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها تا حد زیادی در میانه‌های سدهٔ ۱۹ گذاشته شد، نظریه، تکامل خود را ادامه داد و ادامه می‌دهد. در ضمن، مسیرهای تازه‌ای هم به تدریج در آن وجود می‌آید: گروه شکل‌ها و ویژگی‌هایی که در هندسهٔ دیفرانسیلی معاصر بررسی می‌شود، گسترش می‌یابد. ولی، سرچشمهٔ یکی از این مسیرها، به زمان تولد خود هندسهٔ دیفرانسیلی می‌رسد. منظور ما، نظریهٔ «خانواده‌ها»، یعنی مجموعه‌های پیوستهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها است. با وجود این، این نظریه را می‌توان به این مفهوم، جدید به حساب آورد که پیشرفت جدی آن تنها وقتی آغاز شد که مبانی نظریهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها به طور کامل به وجود آمده بود.

به طور کلی، مجموعهٔ پیوستهٔ شکل‌ها، وقتی ***خانوادهٔ n پارامتری*** نامیده می‌شود که هر شکل این مجموعه با مفروض بودن n پارامتر داده شود؛ در ضمن، فرض می‌شود همهٔ مقدارهایی که مشخص‌کنندهٔ شکل هستند (وضع آن، نوع شکل آن و غیره)، دست کم به طور پیوسته، به این پارامترها مربوط باشند. از دیدگاه این تعریف کلی، می‌توان منحنی را به عنوان خانوادهٔ یک پارامتری نقطه‌ها و سطح را به عنوان خانوادهٔ دو پارامتری نقطه‌ها، بررسی کرد. مجموعهٔ همهٔ دایره‌های واقع بر صفحه، نمونه‌ای از خانوادهٔ منحنی‌های سه پارامتری است، زیرا دایره‌ای که بر صفحه واقع باشد، با سه پارامتر مشخص می‌شود: دو مختص مرکز و شعاع آن.

ساده‌ترین مسألهٔ نظریهٔ خانوادهٔ منحنی‌ها یا سطح‌ها، عبارت است از پیدا کردن به اصطلاح پوش خانواده. سطحی را **پوش** خانوادهٔ مفروض سطح‌ها گویند، وقتی که این سطح، در هر نقطهٔ خود، بر یکی از سطح‌های خانواده، و بنابراین بر هر کدام از آن‌ها، مماس باشد: پوش خانوادهٔ کره‌هایی که با شعاع‌های برابر و به مرکز واقع بر یک خط راست، رسم شده‌اند، عبارت است از استوانه (شکل ۴۸)، و پوش خانوادهٔ همهٔ کره‌های با شعاع‌های برابر و به مرکز نقطه‌های واقع بر یک صفحهٔ مفروض، عبارت است از دو صفحهٔ موازی. به همین ترتیب، پوش خانوادهٔ منحنی‌ها هم تعریف می‌شود. در شکل ۴۹ ـ الف، فوران آب از فواره‌هایی که با سطح زمین زاویه‌های متفاوتی دارند، نشان داده شده است؛ این‌ها در یک صفحه، خانوادهٔ منحنی‌هایی را تشکیل می‌دهند که می‌توان به تقریب، سهمی به حسابشان آورد. در شکل ۴۹ ـ ب، به روشنی، پوش آن‌ها دیده می‌شود که در واقع، همان دورهٔ کلی



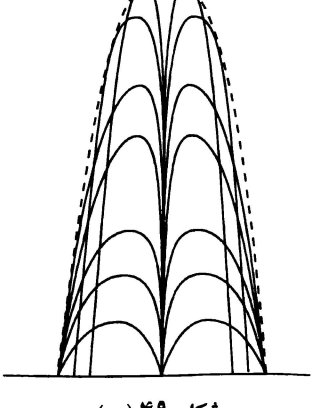
شکل ۴۸

آبشار آب است. البته، هر خانواده‌ای از منحنی‌ها یا سطح‌ها، پوش ندارد (از جمله، خانواده خط‌های راست موازی، پوشی ندارند). روش عمومی ساده‌ای برای پیدا کردن پوش هر خانواده وجود دارد؛ برای حالت خانوادهٔ منحنی‌های روی صفحه، حتی **لایپ‌نیتس**، این روش را داده است.

روشن است، هر منحنی را می‌توان، پوش مماس‌های خودش دانست. به همین ترتیب، هر سطحی، پوش صفحه‌های مماس بر خودش است (و همین مطلب، اساس روش تازه‌ای برای دادن منحنی یا سطح از راه مفروض‌بودن خانوادهٔ خط‌های راست مماس و یا صفحه‌های مماس به دست می‌دهد، و بیان منحنی یا سطح به این ترتیب، خیلی راه‌ها را گشوده است).

در حالت کلی، در نقطه‌های مختلف سطح، صفحه‌های مماس مختلفی وجود دارد، و

شکل ۴۹ (الف)

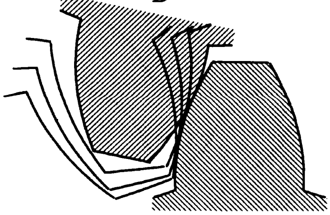


شکل ۴۹ (ب)

بنابراین، خانوادهٔ صفحه‌های مماس بر سطح، اغلب دو پارامتری است. با وجود این، بعضی حالت‌ها مثل حالت سطح استوانه‌ای، خانوادهٔ صفحه‌های مماس، یک پارامتری است. قضیهٔ مهم زیر در این باره ثابت شده است. خانوادهٔ یک پارامتری صفحه‌های مماس، تنها مربوط به سطح‌هایی هستند که قابل گسترش بر صفحه باشند، یعنی چنان سطح‌هایی که هر قطعهٔ به اندازه کافی کوچک آن را بتوان به یک قطعهٔ صفحه تبدیل کرد. این‌ها، همان سطح‌های قابل گسترش هستند، که در بند ۴ از آن‌ها صحبت کردیم. هر سطح تحلیلی از این نوع، از پاره‌خط‌های راستی تشکیل شده است و یا سطح استوانه‌ای است (خط‌های راست موازی) یا سطح مخروطی است (خط‌های راست که در یک نقطه به هم رسیده‌اند)، و یا مماس‌های بر یک منحنی فضایی را تشکیل می‌دهند.

نظریهٔ پوش‌ها، اغلب در مسأله‌های مهندسی، مثل نظریهٔ انتقال‌ها، به کار می‌رود. دو چرخ دندانه‌دار A و B را در نظر می‌گیریم. حرکت نسبی آن‌ها را می‌توان به این ترتیب تجسم کرد که فرض کنیم چرخ A بی‌حرکت است و چرخ B روی آن می‌غلتد (شکل ۵۰). وقتی محیط دندانهٔ چرخ B، به وضع‌های مختلف در می‌آید، در صفحهٔ چرخ A، خانواده‌ای از منحنی‌ها را تشکیل می‌دهد که محیط چرخ A باید همیشه بر آن‌ها مماس باشد، یعنی نقش پوش این خانواده را به عهده دارد. البته، برای انتقال، این امر کافی نیست، بلکه باید قلاب‌گیری از یک دانه، به دیگری منتقل شود. ولی شرطی را که آوردیم، مبنایی است که براساس آن باید شکل چرخ‌های دندانه‌ای ساخته شود.

همان‌طور که گفتیم، مسألهٔ مربوط به پوش‌ها، ساده‌ترین مسأله از نظریهٔ خانواده‌های منحنی‌ها و سطح‌هاست، که حل آن هم مدت‌هاست به انجام رسیده است. امکان‌هایی که در این نظریه وجود دارد، به هیچ وجه کمتر از برای نمونه، نظریهٔ سطح‌ها نیست. به خصوص، نظریهٔ «همنهشتی‌ها» یعنی خانواده‌های خط‌های مختلف دو پارامتری، و در



شکل ۵۰

حالت خاص، خط‌های راست (که به اصطلاح همنهشتی‌های مستقیم‌الخط نامیده می‌شوند)، اهمیت جدی پیدا کرده است. در این نظریه هم، در واقع، از همان روش‌های نظریهٔ سطح‌ها، استفاده می‌شود.

آغاز نظریهٔ همنهشتی‌های مستقیم‌الخط را باید از نوشتهٔ **مونژ** به نام «دربارهٔ خاک‌برداری و خاک‌ریزی» دانست، که خود نامگذاری آن نشان می‌دهد که بررسی‌های **مونژ** در ارتباط با مسأله‌های عملی بوده است: گفت‌وگو بر سر باصرفه‌ترین روش حمل و نقل خاک، ضمن خاک‌برداری و خاک‌ریزی است.

پیشرفت منظم نظریهٔ همنهشتی‌ها، که از میانه‌های سدهٔ گذشته آغاز شد، تا حد زیادی به نور هندسی مربوط است: مجموعهٔ شعاع‌های نور، در یک محیط همگن، همیشه همنهشت خط‌های راست هستند.

سطح‌های نامنظم، و هندسه «در مجموع خود». نظریهٔ منحنی‌ها و سطح‌ها (و همچنین خانواده‌های آن‌ها)، که در واقع در پایان سدهٔ نوزدهم جمع‌بندی شد و اغلب به نام هندسهٔ دیفرانسیلی سنتی مشهور است، با این ویژگی‌ها مشخص می‌شود:

اول، این نظریه، تنها منحنی‌ها و سطح‌های «هموار» و به‌اصطلاح منظم را بررسی می‌کند، یعنی چنان منحنی‌ها و سطح‌هایی که به وسیلهٔ تابعی که به تعداد کافی، مشتق‌های اولیه داشته باشد، قابل بیان باشند. بنابراین، برای نمونه سطح‌هایی که راس یا یال داشته باشند، مثل سطح چندوجهی‌ها یا سطح مخروط، یا بررسی نمی‌شود و یا تنها در قطعه‌هایی از آن‌ها که «هموار» هستند، بررسی می‌شوند.

دوم، هندسهٔ دیفرانسیلی رسمی، به طور خاص، ویژگی‌های قطعه‌های به قدر کافی کوچک منحنی‌ها و سطح‌ها را مطالعه می‌کند (هندسهٔ «بی‌نهایت کوچک‌ها»)، و به کلی به مسأله‌هایی از نوع ویژگی‌های سطح‌های کامل بسته (که به اصطلاح به هندسه «در مجموع خود» مربوط می‌شود) نمی‌پردازد.

بهترین مثالی که اختلاف بین «هندسهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها» و «هندسه در مجموع خود» را آشکار می‌کند، خمش سطح‌ها است. برای نمونه، در سال ۱۸۳۸ **میندینگ** ثابت کرد، قطعهٔ به اندازهٔ کافی کوچک کره را می‌توان خم کرد (قضیهٔ مربوط به «بی‌نهایت کوچک‌ها»). در ضمن، این فرض را بیان کرد که کرهٔ کامل قابل خم شدن نیست. و این قضیه، تنها در سال ۱۸۹۹ و به وسیلهٔ ریاضی‌دانان دیگری ثابت شد. در ضمن، خمش ناپذیری کره‌ای را که از

مادهٔ قابل انعطاف و کش‌ناپذیر ساخته شده است، می‌توان به سادگی و با آزمایش کشف کرد. از جمله، توپ پینگ‌پونگ به اندازهٔ کافی سخت است، ولی در عین حال از مادهٔ قابل انعطافی ساخته شده است. نمونهٔ دیگری، که در بند ۴ هم از آن گفت‌وگو کرده‌ایم، سطلی است که از حلبی ساده ساخته شده باشد و به علت شکل کلی خود، در مجموع محکم است، در حالی که قطعه‌های جداگانهٔ آن را می‌توان خم کرد. همان‌طور که دیده می‌شود، بین ویژگی‌های سطح «در حالت جزیی» و «در مجموع خود»، ممکن است تفاوت‌های جدی پیدا شود.

نظریهٔ خط‌های ژئودزیک هم، که در بند ۴ با عنصرهای آن آشنا شدیم، می‌توانند مثال‌های خوبی به دست بدهد. خط ژئودزیک در یک قطعهٔ کوچک، کوتاه‌ترین است، در حالی که «در مجموع خود» ممکن است کوتاه‌ترین نباشد و حتی ممکن است مثل خط بسته‌ای باشد (مثل دایره‌های عظیمهٔ واقع بر کره).

خواننده توجه کرده است، قضیه‌هایی که در بند ۴ دربارهٔ هندسه آوردیم، در اساس قضیه‌هایی از «هندسهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها» است. مسأله‌های مربوط به رفتار خط‌های ژئودزیک در تمامی امتداد آن‌ها هم، مربوط به هندسهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها بود. از جمله، معلوم است که روی سطح منظم، دو نقطهٔ به اندازهٔ کافی نزدیک به هم، که به وسیلهٔ یک خط ژئودزیک منحصر به فرد به هم وصل شده‌اند، از یک محدودهٔ کوچک تجاوز نمی‌کند. در حالی که اگر خط‌های ژئودزیکی را در نظر بگیریم که در امتداد خود به اندازهٔ کافی از این نقطه‌ها دور شده باشند، بنابر ***قضیهٔ مورس***، هر دو نقطه‌ای که بر یک سطح بسته واقع باشند، ممکن است به وسیلهٔ بی‌نهایت خط ژئودزیک به هم وصل شده باشند. به طور مثال، اگر دو نقطهٔ A و B بر سطح جانبی استوانهٔ دواری واقع باشند، می‌توان آن‌ها را با خط‌های ژئودزیک مختلفی به هم وصل کرد: منحنی‌های پیچی که انتخاب می‌شوند، می‌توانند در مسیر از A به B به تعداد مختلفی، دور استوانه پیچیده باشند. ***قضیهٔ پوانکاره***، دربارهٔ خط‌های ژئودزیک بسته هم، که به وسیلهٔ ***آ. لیوسترنیک*** و ***ل. گ. شنیرلمان*** ثابت شد، مربوط به هندسهٔ بی‌نهایت کوچک‌هاست و ما در بند ۵ بخش هیجدهم، دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد.

همهٔ این قضیه‌ها، و بسیاری قضیه‌های دیگر هندسهٔ بی‌نهایت کوچک‌ها، با روش معمولی هندسهٔ دیفرانسیلی عادی، غیرقابل دسترس‌اند و به روش‌های تازه‌ای نیاز دارند.

همراه با این مسأله‌ها، در ضمن باید توجه ریاضی‌دانان را به این مطلب هم جلب کرد که نمی‌توان برای همیشه، به سطح‌های منظم خود را محدود کرد، دست کم به این دلیل که ما

اغلب با سطح‌های نامنظم و ناپیوسته، همچون سطح مکعب، مخروط، عدسی‌های محدب با کناره‌های تیز و غیره، سروکار داریم. از این گذشته، خیلی از سطح‌های تحلیلی، ضمن ادامهٔ طبیعی خود، ناچار «ویژگی‌هایی» پیدا می‌کنند، مثل یال یا راس، که منظم بودن آن‌ها را نقض می‌کند. یک قطعه سطح مخروطی، ضمن ادامهٔ خود، به راس می‌رسد، که در آن‌جا هموارى سطح نقض می‌شود.

نتیجه‌گیری اخیر، تنها حالت خاصی از این قضیهٔ مهم است: هر سطح قابل گسترش، به‌جز سطح استوانه‌ای، ضمن ادامهٔ طبیعی خود به یال (و یا در مخروط به راس) می‌رسد، که دیگر با حفظ منظم بودن خود، نمی‌تواند ادامه یابد.

به این ترتیب، بین رفتار سطح «در مجموع خود» و ویژگی‌های آن، بستگی عمیقی وجود دارد. و این یکی از دلیل‌هایی است که باید حل مسأله‌ها «در مجموع خود» و بررسی سطح‌هایی که دارای ویژگی‌هایی هستند (یال، راس، انحناهای ناپیوسته و غیره)، با هم انجام گیرد و پیشرفت کند.

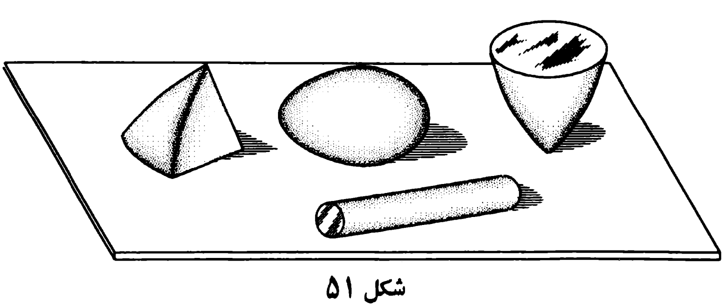
در آنالیز هم، چنین مسیرهای تازه‌ای، به وجود آمده است. ازجمله نظریهٔ کیفی معادله‌های دیفرانسیلی، که دربارهٔ آن در بند ۷، بخش پنجم گفت‌وگو شده است؛ در این نظریه ویژگی‌های جواب‌های معادلهٔ دیفرانسیلی در تمامی حوزهٔ تعریف، یعنی «در مجموع خود» بررسی می‌شود و توجه خاصی به «ویژگی‌ها»، منجر به نقض نظم‌ها و به نقطه‌های خاص معادله می‌شود. علاوه بر آن، آنالیز معاصر، به بررسی تابع‌های نامنظمی پرداخته است که آنالیز سنتی، توجهی به آن‌ها نداشت (بخش پانزدهم را ببینید)، و این بررسی، امکان‌های تازه‌ای، برای مطالعهٔ سطح‌های کلی‌تر، در اختیار هندسه گذاشته است. سرانجام، در محاسبهٔ واریاسیونی، که در آن به طور معمول، منحنی یا سطحی که دارای ویژگی‌های حدی است، جست‌وجو می‌شود، گاهی معلوم می‌شود که منحنی حدی، که دربارهٔ آن به اکسترمم می‌رسیم، منظم نیست. طرح چنین مسأله‌هایی، این نیاز را هم پیش می‌آورد که گروه منحنی‌ها و سطح‌های مورد بررسی، و قبل از همه ساده‌ترین نوع‌های منحنی‌ها و سطح‌های نامنظم را، گسترش دهیم. در یک کلام، مسیرهای تازه در هندسه، نه به طور مجرد، بلکه در ارتباط جدی با پیشرفت همهٔ شاخه‌های ریاضیات، به وجود آمده است.

توجه به حل مسأله «به طور کلی» و «در مجموع خود» و بررسی سطح‌ها، چه منظم و چه نامنظم، از دههٔ نخست سدهٔ بیستم آغاز شد و برای پایه‌گذاری آن، تعداد زیادی از

ریـاضی‌دانـان شـرکت داشـتند. نـخستین تـلاش را بـاید مـربوط بـه ***هـرمان مـینکوسکی*** (۱۸۶۴-۱۹۰۹) دانست که فصل مهمی در هندسه باز کرد: نظریهٔ جسم‌های محدب. یکی از موضوع‌هایی که محرک **مینکوسکی** در این بررسی بود، مسألهٔ مربوط به شبکه‌های منظم است که به نظریهٔ عددها و بلورشناسی هندسی، مربوط می‌شود.

جسمی را **محدب** یا **کوژ** گویند که بتوان از هر نقطهٔ واقع بر سطح آن، صفحه‌ای عبور داد که این جسم را قطع نکند، یعنی چنین جسمی را می‌توان روی هر نقطهٔ سطحش، بر صفحه تکیه داد (شکل ۵۱). جسم محدب به وسیلهٔ سطحش تعریف می‌شود، و تا حد زیادی فرق نمی‌کند که از نظریهٔ جسم‌های محدب گفت‌وگو کنیم یا از نظریهٔ سطح‌های محدب بسته. قضیه‌های کلی مربوط به جسم‌های محدب، برای سطح‌های آن‌ها هم درست است، بدون این‌که شرط‌های اضافی دربارهٔ همواری یا «نظم» آن‌ها کرده باشیم. به این تـرتیب، نـظریهٔ جسم‌ها و سطح‌های محدب، محدودیت هندسهٔ دیفرانسیلی رسمی را نداشت. ولی، هنوز این نظریه‌ها به هم مربوط نبودند. این بستگی خیلی دیرتر پیدا شد.

با آغاز سال ۱۹۴۰، پیشرفت نظریهٔ منحنی‌ها و سطح‌های کلی، به وسیلهٔ ***آ.د. الکساندروف*** آغاز شد. این نظریه، هم شامل سطح‌های منظم هندسهٔ دیفرانسیلی رسمی مـی‌شد و هـم سطح‌های ناهمواری همچون چند وجهی‌ها، سطح‌های محدب دل‌خواه و غیره. با وجـود این‌که طرح پرسش‌ها و نتیجه‌گیری‌های این نظریه، به طور کامل کـلی است، قـبل از هـمه براساس مفهوم‌ها و روش‌های هندسی عینی قـرار گـرفته است، گـرچـه بـه طـور جـدی از مفهوم‌ها و روش‌های آنالیز امروزی هم استفاده می‌کند. یکی از روش‌های اساسی نـظریه عبارت است از نـزدیکی سـطح‌های کـلی بـه جسـم‌های چـند سـطحی (سـطح‌های چـند وجهی‌ها). هر دانش‌آموز دبیرستانی، با ساده‌ترین صورت‌های این روش آشـنایی دارد، از جمله، می‌داند مساحت سطح جانبی استوانه را می‌توان به عنوان حد مساحت مـنشور در

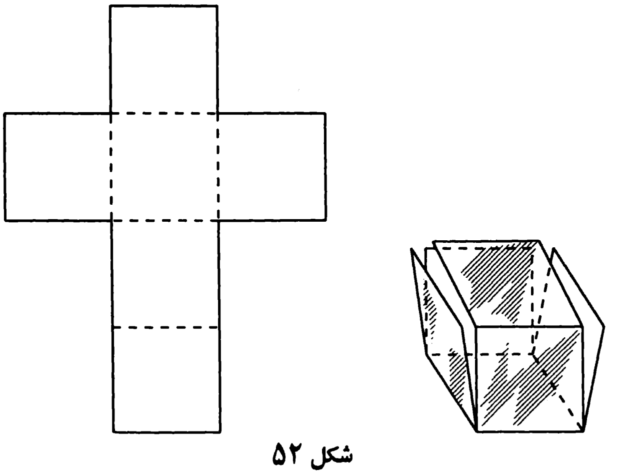


شکل ۵۱

نظر گرفت. با این روش می‌توان به نتیجه‌هایی رسید که یا از راه‌های دیگر به دست نمی‌آید و یا از راه تحلیلی و با صرف نیروی فکری زیاد، در دسترس قرار می‌گیرد. ماهیت روش دراین است که ابتدا، مسأله را دربارهٔ چند وجهی حل می‌کنیم و سپس نتیجه را، برای حالت کلی سطح و از راه انتقال حدی، تعمیم می‌دهیم.

یکی از نظریه‌های اصلی سطح‌های محدب کلی، مربوط به شرط‌هایی می‌شود که به ازای آن‌ها، بتوان از یک گستردهٔ مفروض، چند وجهی محدب را به هم چسبانید. این قضیه، که از جهت تنظیم اولیهٔ خود، مقدماتی است، اثباتی غیرمقدماتی دارد و منجر به نتیجه‌گیری‌هایی برای سطح محدب به طور کلی می‌شود. خواننده با درست کردن چند وجهی‌ها یا سطح‌ها به کمک قطعه‌های آن‌ها، و در مثل، درست کردن مکعب به کمک نمونه صلیبی شکل (شکل ۵۲) یا درست کردن استوانه به کمک مستطیل و دو دایره، آشناست. این روش سادهٔ درست کردن سطح به کمک قطعه‌ها، منجر به روش کلی «بریدن و چسباندن» می‌شود، که در جنبه‌های مختلف نظریهٔ سطح‌ها، به نتیجه‌های جدی رسیده و کاربردهای عملی زیادی پیدا کرده است.

آ. و. پوگورەلو در این زمینه، به نتیجه‌های عمیقی رسیده است. از جمله، ثابت کرده است که هر سطح بستهٔ محدب را، با حفظ محدب بودن آن، نمی‌توان خم کرد. این نتیجه‌گیری، که در سال ۱۹۴۹ به دست آمد نتیجهٔ تلاش ریاضی‌دانان بسیاری است که در جریان ۵۰ سال می‌کوشیدند تا این قضیه را ثابت کنند و تنها به اثبات آن به ازای بعضی فرض‌های اضافی



شکل ۵۲

می‌رسیدند. نتیجه‌گیری‌های **پوگوره‌لو**، همراه با «روش به هم چسباندن»، نه تنها این مسألهٔ را به طور کامل حل کرد، بلکه مسألهٔ مربوط به خم شدن یا خم نشدن سطح‌های محدب بسته یا باز را، به تقریب تا پایان خود، روشن کرد. او همچنین توانست بین نظریهٔ تازه و نظریهٔ «سنتی»، بستگی کاملی برقرار کند.

به این ترتیب، نظریه‌ای برای سطح‌ها ساخته شد که هم نظریهٔ سنتی و هم چند وجهی‌ها را، برای هر سطح محدب و کلی‌ترین سطح‌های غیرمحدب، شامل می‌شد. کمیِ جا، اجازه نمی‌دهد در این‌جا دربارهٔ این نتیجه‌گیری‌ها و همچنین مسأله‌های غیرقابل حلی که هنوز در این نظریه وجود دارد، به تفصیل گفت‌وگو کنیم، گرچه، می‌توانستیم این توضیح را بیاوریم، زیرا اکثر آن‌ها را می‌شود به طور عینی مطرح کرد و با وجود دشواری اثبات دقیق آن‌ها، برای فهم آن‌ها، به هیچگونه دانش خاصی، نیاز نیست.

وقتی در بند ۴، از خمش سطح‌ها گفت‌وگو می‌کردیم، توجهمان به سطح‌های منظم بود که ضمن تبدیل، منظم بودن آن‌ها حفظ شود. برعکس، در قضیه‌ای که هم اکنون از **پوگوره‌لو** نام بردیم، به هیچ‌گونه نظمی در سطح نخستین یا سطح خم شده نیاز ندارد، ولی لازم است که هر دو سطح، محدب باشند.

روشن است، وقتی می‌توانیم کره را خم کنیم که اجازه داشته باشیم، تحدب آن را خراب کنیم. کافی است قطعه‌ای از کره را جدا کنیم و بعد آن را به طور وارونه به جای خودش بگذاریم، به نحوی که برجستگی آن به طرف داخل قرار گیرد، نمونه‌ای از این نوع خمش را به دست می‌آوریم. نتیجه‌گیری مهم و غیرقابل انتظاری، همین چندی پیش به وسیلهٔ **نیش**، ریاضی‌دان امریکایی و **کیپر**، ریاضی‌دان هلندی به دست آمد. آن‌ها ثابت کردند، اگر تنها همواری سطح را حفظ کنیم و هرگونه عبور تند در انحنای سطح ممکن باشد (یعنی از هرگونه شرط پیوستگی، محدودیت و حتی وجود مشتق‌های دوم در تابع‌های سطح مفروض، صرف‌نظر کنیم)، می‌توان سطح را، به عنوان یک کل، تا حد زیادی دل‌خواه، خم کرد. به خصوص، می‌توان کره را به گلوله‌ای به اندازهٔ دل‌خواه کوچک تبدل کرد که سطحی هموار، همراه با جهش‌های موجی بسیار کوچکی، داشته باشد. تصور این تغییر شکل، این امکان خیالی را برای ما تلقین می‌کند که از هر تکهٔ نرم پلاستیکی که به طور کامل مچاله شده باشد، می‌توان یک لفاف کروی درست کرد. وضع دربارهٔ گلوله‌های سلولوئیدی به نحو دیگری است. سطح قابل ارتجاع آن، نه تنها کش نمی‌آید، بلکه حتی پیچ هم نمی‌خورد و به همین مناسبت است که خیلی سفت به نظر می‌آید.

هندسهٔ دیفرانسیلی گروه‌های مختلف تبدیل. از آغاز سدهٔ بیستم، مسیرهای تازهٔ زیادی از درون هندسهٔ دیفرانسیلی سنتی بیرون آمد که به وسیلهٔ یک اندیشهٔ عمومی به هم مربوط می‌شدند. این مسیرهای تازه در این جهت بود که چنان ویژگی‌هایی از منحنی‌ها، سطح‌ها و خانوادهٔ آن‌ها را مطالعه کنند، که ضمن تبدیل‌های مختلف، تغییر نمی‌کنند. هندسهٔ دیفرانسیلی رسمی، ویژگی‌هایی را مطالعه می‌کرد که ضمن حرکت، بی‌تغییر باقی می‌ماندند، ولی روشن است که می‌توان تبدیل‌های هندسی دیگری را هم بررسی کرد. از جمله، *تبدیل تصویری*، به هر تبدیل بخشی از فضا گفته می‌شود که ضمن آن خط راست، به صورت خط راست باقی بماند. به اصطلاح هندسهٔ تصویری، دیر زمانی بود که به وجود آمده بود و ویژگی‌هایی از شکل را که ضمن هر تبدیل تصویری تغییر نمی‌کرد، بررسی می‌کرد. این شاخه، از لحاظ موضوع، در محدودهٔ هندسهٔ مقدماتی و هندسهٔ تحلیلی عادی باقی مانده بود، تا این‌که در نوشته‌های عده‌ای از ریاضی‌دانان، «هندسهٔ دیفرانسیلی تصویری» شکل گرفت، یعنی نظریه‌ای که شبیه هندسهٔ دیفرانسیلی عادی، به منحنی‌ها، سطح‌ها و خانواده‌های آن‌ها مربوط می‌شد، ولی تنها به ویژگی‌هایی از آن‌ها می‌پردازد که ضمن هرگونه تبدیل تصویری، محفوظ می‌ماند. دراین راه، ***ویل چینسکی*** ریاضی‌دان امریکایی و همچنین ***فوبینی***، ریاضی‌دان ایتالیایی و ***چه‌خا***، ریاضی‌دان چک، سهم اساسی داشته‌اند.

«هندسهٔ دیفرانسیلی آفینی» هم به همین ترتیب به وجود آمد که کارش مطالعهٔ ویژگی‌هایی از منحنی‌ها، سطح‌ها و خانواده‌های آن‌هاست که ضمن تبدیل‌های آفینی، محفوظ می‌مانند، یعنی تبدیل‌هایی که نه تنها خط راست را به خط راست منجر می‌کند، بلکه توازی آن‌ها را هم به هم نمی‌زند. کارهای **بلاشکه**، ریاضی‌دان آلمانی و شاگردان او، این رشتهٔ هندسه را، به صورت یک نظریهٔ گسترده، تکامل داد. همچنین، می‌توان از «هندسهٔ همدیسی» نام برد که کارش مطالعهٔ ویژگی‌هایی از شکل‌هاست که ضمن چنین تبدیل‌هایی، باعث بی‌تغییر ماندن زاویهٔ بین هر دو منحنی دل‌خواه می‌شوند.

به طور کلی، امکان‌های «هندسه» بسیار زیاد و گوناگون است، زیرا مبنای هر کدام از آن‌ها را می‌توان براساس مفهوم معینی از یک گروه تبدیل قرار داد و به بررسی چنان ویژگی‌هایی از شکل‌ها پرداخت که ضمن تبدیل‌های این گروه، بی‌تغییر می‌مانند. دربارهٔ روش و تعریف «هندسه‌های» مختلف، در بخش هفدهم (جلد سوم)، باز هم گفت‌وگو خواهیم کرد.

هندسه‌دانان شوروی هم (مثل س. پ. ***فی‌نی‌کوف***، گ. ف. ***لانتو*** و دیگران)، در به وجود

آوردن و تکامل مسیرهای تازه‌ای در هندسهٔ دیفرانسیلی، نقش اساسی داشته‌اند. ولی در این مقالهٔ کوتاه نمی‌شود دربارهٔ همهٔ بررسی‌هایی که امروز، دربارهٔ مسیرهای مختلف هندسهٔ دیفرانسیلی وجود دارد، گفت‌وگو کرد[۱].

۱. اگر معادله خم‌ها و رویه‌های مورد مطالعه چندجمله‌ای‌های چندمتغیره باشند، آنگاه می‌توان از روش‌های هندسه جبری استفاده کرد. هندسه جبری در سالهای اخیر به یکی از پرقدرت‌ترین رشته‌های ریاضی تبدیل شده است (ویراستار).

بخش هشتم

حساب وردش‌ها

و. ای. کریلوف

۱. ورود به مطلب

نمونه‌هایی از مسأله‌های وردشی. برای این‌که محدودهٔ موضوع‌هایی را که در حساب وردش‌ها (یا واریاسیونی)[1] بررسی می‌شود، روشن کنیم، در آغاز به‌چند مسألهٔ جداگانه می‌پردازیم.

۱. منحنی شیب با حداکثر سرعت. مسألهٔ مربوط به‌کمترین زمان (براکیستوکرون، واژه‌ای یونانی، از brachistos به‌معنی «کوتاه‌ترین» و chronos به معنی «زمان»)، یا منحنی شیب با حداکثر سرعت، از نظر تاریخی، نخستین مسأله‌ای است که پیشرفت حساب وردش‌ها، با آن آغاز می‌شود.

می‌خواهیم بین همهٔ خم‌هایی که نقطه‌های $M_۱$ و $M_۲$ را به هم وصل می‌کنند، آن را پیدا کنیم که نقطهٔ مادی، در مسیر آن، زیر تأثیر نیروی جاذبه و بدون سرعت اولیه، از نقطهٔ $M_۱$ در کمترین زمان ممکن به نقطهٔ $M_۲$ برسد.

برای حل این مسأله، باید همهٔ خم‌هایی را که دو نقطهٔ $M_۱$ و $M_۲$ را به هم وصل می‌کنند، بررسی کنیم. اگر خم معینی مثل l را در نظر بگیریم، متناظر با زمان معینی مثل T خواهد بود که همان زمان غلتیدن نقطهٔ مادی روی l است. زمان T به انتخاب l بستگی دارد، و از میان همهٔ خم‌هایی که $M_۱$ را به $M_۲$ وصل می‌کنند، باید آن را انتخاب کنیم که کمترین مقدار T را داشته باشد.

مسألهٔ کمترین زمان را، می‌توان به صورت دیگری هم طرح کرد.

از نقطه‌های $M_۱$ و $M_۲$، صفحهٔ قائم را عبور می‌دهیم. روشن است که منحنی شیب با حداکثر سرعت، باید بر این صفحه قرار گیرد و برای پیدا کردن آن، می‌توانیم جست‌وجوی خود را تنها در بین منحنی‌های واقع بر این صفحه، محدود می‌کنیم. $M_۱$ را مبداء مختصات،

---

۱. مبنای نام‌گذاری «حساب وردش‌ها» را کمی بعد خواهیم داد.

محور Ox را در جهت افقی و محور Oy را در جهت قائم و به طرف پایین، انتخاب می‌کنیم (شکل ۱). مختصات نقطهٔ M_1 عبارت است از $(0\ ,\ 0)$؛ مختصات نقطهٔ M_2 را هم $(x_2\ ,\ y_2)$ می‌نامیم. منحنی دل‌خواهی را که بتواند به وسیلهٔ معادلهٔ

$$y=f(x)\ ,\ 0\le x\le x_2 \tag{1}$$

داده شود در نظر می‌گیریم، که در آن f تابعی است پیوسته و قابل دیفرانسیل‌گیری. از آن‌جا که منحنی ما از نقطه‌های M_1 و M_2 می‌گذرد، تابع f باید در دو انتهای پاره‌خط $[0\ ,\ x_2]$، در این شرط‌ها، صدق کند:

$$f(0)=0\ ,\ f(x_2)=y_2 \tag{2}$$

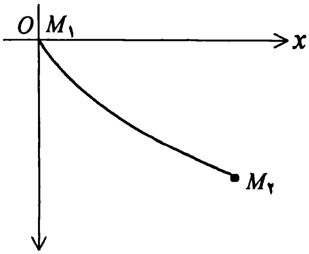
اگر نقطهٔ دل‌خواه $M(x\ ,\ y)$ را روی منحنی در نظر بگیریم، مقدار v، یعنی سرعت نقطهٔ مادی در این نقطهٔ منحنی، به مختص y نقطه بستگی دارد و از این، رابطه فیزیکی به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}v^2=gy \Rightarrow v=\sqrt{2gy}$$

زمان لازم برای این‌که نقطهٔ مادی از عنصر ds کمان منحنی عبور کند، برابر است با

$$\frac{ds}{v}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

و بنابراین، زمان کامل غلتیدن نقطه در طول منحنی از M_1 تا M_2، چنین می‌شود:



شکل ۱

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx \qquad (3)$$

جست‌وجوی کمترین زمان، هم‌ارز حل این مسأله می‌شود: بین همهٔ تابع‌های ممکن (۱)، که در شرط (۲) صدق می‌کنند، آن را پیدا کنیم که متناظر با کمترین مقدار انتگرال (۳) باشد.

۲. سطح دوار با کمترین مساحت. بین منحنی‌هایی که دو نقطه از صفحه را به هم وصل می‌کنند، باید آن را پیدا کنیم که کمان آن، ضمن دوران دور محور Ox، سطحی با کمترین مساحت ممکن به‌وجود آورد.

دو نقطهٔ مفروض را $M_1(x_1, y_1)$ و $M_2(x_2, y_2)$ می‌نامیم و معادلهٔ منحنی دل‌خواهی را که از این دو نقطه گذاشته است به صورت

$$y = f(x) \qquad (4)$$

نشان می‌دهیم. چون منحنی از نقطه‌های M_1 و M_2 عبور کرده است، تابع f در این شرط‌ها، صدق می‌کنند:

$$f(x_1) = y_1, \ f(x_2) = y_2 \qquad (5)$$

وقتی کمان M_1M_2 دور محور Ox دوران کند، سطحی را به وجود می‌آورد که مساحت آن به‌صورت عددی با این انتگرال بیان می‌شود:

$$S = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad (6)$$

مقدار این انتگرال، به منحنی انتخابی، و یا هم‌ارز آن به تابع $y=f(x)$ بستگی دارد. باید بین همهٔ تابع‌های (۴)، که در شرط (۵) صدق می‌کنند، چنان تابعی را پیدا کنیم که با کمترین مقدار انتگرال (۶)، متناظر باشد.

۳. تعادل غشای تغییرشکل یافته. منظور از غشا، سطح قابل ارتجاعی است که در حالت آرامش، مسطح، قابل پیچ و خم دادن و کشیدن است. انرژی پتانسیلی غشای تغییرشکل یافته را، متناسب با افزایش مساحت سطح آن، می‌گیریم.

فرض می‌کنیم، غشا در حالت آرامش، حوزهٔ B از صفحهٔ Oxy را در بر گرفته باشد

(شکل ۲). l، مرز حوزهٔ B، را در جهت عمود بر Oxy، تغییر شکل می‌دهیم، و تغییر مکان نقطهٔ M از این مرز را به $\varphi(M)$ نشان می‌دهیم. در این میان، بخش وسط غشا هم تغییر شکل می‌دهد. می‌خواهیم وضع تعادل غشا را، ضمن تغییر شکل مرز آن، پیدا کنیم.

اگر این‌طور به حساب آوریم که همهٔ نقطه‌های غشا، ضمن این تغییر شکل، تغییر مکانی عمود بر صفحه Oxy انجام می‌دهند، تا حد زیادی به دقت کار، نزدیک خواهیم بود. تغییر مکان نقطهٔ $(x\ ,\ y)$ را به $u(x\ ,\ y)$ نشان می‌دهیم. مساحت غشا در حالت تغییر شکل یافته، چنین خواهد بود[1]:

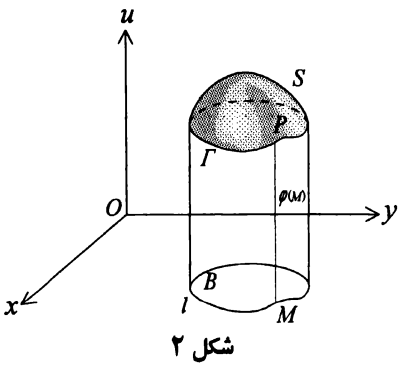
$$\iint_B (1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{1}{2}}\, dxdy$$

اگر تغییر شکل عنصرهای غشا را، چنان کوچک به حساب آوریم، که بتوان از درجه‌های بالای u_x و u_y، در برابر درجه‌های پایین آن صرف‌نظر کرد، عبارت مربوط به مساحت را می‌توانیم به صورت دیگری، که خیلی ساده‌تر است، بنویسیم:

$$\iint_B \left[1+\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)\right] dxdy$$

تغییر مساحت غشا برابر است با

$$\frac{1}{2}\iint_B \left[u_x^2+u_y^2\right] dxdy$$



شکل ۲

۱. همه جا در این بخش، برای نوشتن مشتق‌های جزیی، تنها به گذاشتن اندیسی در پایین تابع قناعت می‌کنیم. این اندیس نشان می‌دهد که مشتق جزیی تابع، نسبت به چه آوندی محاسبه شده است.

و انرژی پتانسیلی تغییر شکل هم چنین خواهد بود:

$$\frac{\mu}{2}\int_B\int\left[u_x^2+u_y^2\right]dxdy \qquad (7)$$

که در آن، μ عبارت است از پتانسیلی که بستگی به ویژگی‌های ارتجاعی غشا دارد.

چون، تغییر مکان نقطه‌های کنارهٔ غشا را، مفروض به حساب آوردیم، تابع $u(x\ ,\ y)$، در مرز حوزهٔ B، در شرط زیر صدق خواهد کرد.

$$u|_l=\varphi(M) \qquad (8)$$

در حالت تعادل، انرژی پتانسیلی تغییر شکل، باید کمترین مقدار ممکن را داشته باشد، و به این ترتیب، تابع $u(x\ ,\ y)$، که انحراف نقطه‌های غشا را معین می‌کند، باید از این مسأله به دست آید: بین همهٔ تابع‌های $u(x\ ,\ y)$، که در حوزهٔ B پیوسته و قابل دیفرانسیل‌گیری هستند و در ضمن در شرط مرزی (۸) صدق می‌کنند، آن را پیدا کنیم که کمترین مقدار را برای انتگرال (۷) بدهد.

اکسترمم‌های فونکسیونل‌ها و حساب وردش‌ها. مثال‌هایی که آوردیم، می‌توانند این امکان را به‌وجود آورند که تصوری دربارهٔ گروه مسأله‌هایی داشته باشیم که در حساب وردش‌ها بررسی می‌شوند. ولی، برای این‌که موقعیت حساب وردش‌ها را درریاضیات دقیق‌تر معین کنیم، باید با چند مفهوم تازه آشنا شویم. می‌دانیم، یکی از مفهوم‌های اساسی آنالیز ریاضی، مفهوم تابع (فونکسیون یا نگاشت) است. در ساده‌ترین حالت، می‌توان مفهوم بستگی تابعی را، به این ترتیب داد. فرض کنید M مجموعه‌ای از عددهای حقیقی باشد. اگر هر عدد x از مجموعهٔ M، متناظر با عددی مثل y باشد، گویند که روی مجموعهٔ M، تابع $y=f(x)$ تعریف شده است. مجموعهٔ M را، اغلب، حوزهٔ تعریف تابع مفروض گویند.

مفهوم فونکسیونل (یا تابعک)، تعمیم مستقیم و طبیعی مفهوم تابع است، به نحوی که مفهوم تابع به عنوان حالت خاصی از آن به شمار می‌رود.

M را مجموعه‌ای از چیزهای دل‌خواه فرض کنید. طبیعت این چیزها، برای ما بی‌تفاوت است و می‌توانند عددها، نقطه‌های فضا، خط‌ها، تابع‌ها، سطح‌ها، حالت‌ها و حتی حرکت‌های یک دستگاه مکانیکی و غیره، باشند. از این به بعد، برای سادگی کار، این چیزها

را، عضوهای مجموعهٔ M می‌نامیم و با حرف x نشان می‌دهیم.

اگر هر عضو x از مجموعهٔ M، متناظر با عددی مثل y باشد، گویند که روی مجموعهٔ M، فونکسیونل $y=F(x)$، تعریف شده است.

اگر مجموعهٔ M، مجموعهٔ عددهای x باشد، فونکسیونل $y=F(x)$ تابعی از یک آوند خواهد بود. اگر M، مجموعه‌ای از زوج عددهای (x_1 , x_2)، یا مجموعه‌ای از نقطه‌های صفحه باشد، فونکسیونل، تابع $y=F(x_1 , x_2)$ از دو آوند خواهد بود و غیره.

برای فونکسیونل $y=F(x)$ مسأله زیر را طرح می‌کنیم:

بین همهٔ عضوهای x از مجموعهٔ M، می‌خواهیم عضوی را پیدا کنیم که برای آن فونکسیونل $y=F(x)$ کمترین مقدار را داشته باشد.

به همین ترتیب، می‌توان مسألهٔ مربوط به ماکزیمم این فونکسیونل را هم تنظیم کرد.

یادآوری می‌کنیم، اگر فونکسیونل $F(x)$ را تغییر علامت بدهیم، و فونکسیونل $-F(x)$ را در نظر بگیریم، حداکثر $F(x)$ به حداقل $-F(x)$، و برعکس، تبدیل می‌شود. بنابراین، بررسی جداگانهٔ ماکزیمم و می‌نیمم معنایی ندارد، و از آن‌جا که بررسی این دو مفهوم خیلی به‌هم نزدیک است، ترجیح می‌دهیم تنها دربارهٔ می‌نیمم‌های فونکسیونل گفت‌وگو کنیم.

در مسألهٔ مربوط به منحنی شیب با کمترین زمان، فونکسیونلی که می‌نیمم آن لازم است، عبارت بود از انتگرال (۳)، یعنی زمان غلتیدن نقطهٔ مادی در طول منحنی. این فونکسیونل، از بین همهٔ تابع‌های ممکنی که به صورت (۱) باشند و در شرط (۲) صدق کنند، معین می‌شود.

در مسألهٔ مربوط به وضع تعادل غشا، فونکسیونل عبارت است از انرژی پتانسیلی (۷) از غشای تغییر شکل یافته، و ما باید می‌نیمم آن را در مجموعهٔ تابع‌های $u(x , y)$، که در شرط مرزی (۸) صدق می‌کنند، پیدا کنیم.

هر فونکسیونل با دو عامل معین می‌شود: مجموعهٔ M از عضوهای x و قانونی که به وسیلهٔ آن، هر عضو x متناظر با عددی (مقدار فونکسیونل) می‌شود. روش‌هایی که برای پیدا کردن مقدارهای حداکثر و حداقل فونکسیونل‌ها به کار می‌رود، بدون تردید باید بستگی به ویژگی‌های مجموعهٔ M داشته باشد.

حساب وردش‌ها، بخش ویژه‌ای از نظریهٔ فونکسیونل‌ها را تشکیل می‌دهد. در این بخش، فونکسیونل‌هایی بررسی می‌شود که در مجموعهٔ تابع‌هایی داده شده‌اند، و مسألهٔ وردشی، عبارت است از ساختن نظریهٔ اکسترمم‌های این فونکسیونل‌ها.

این شاخهٔ ریاضیات، به خصوص به خاطر بستگی‌هایی که با بسیاری از بخش‌های فیزیک و مکانیک دارد، اهمیت زیادی دارد. همان‌طور که در این جا خواهیم دید، برای این‌که تابعی، اکسترمم یک فونکسیونل را بدهد، لازم است که این تابع در یک معادلهٔ دیفرانسیلی، صدق کند. از طرف دیگر، همان‌طور که در بخش‌های قبلی دیده‌ایم، اغلب، قانون‌های کمیتی مکانیک و فیزیک هم، به صورت معادله‌های دیفرانسیلی، شرح داده می‌شوند. در جریان کار معلوم شد، بسیاری از این گونه معادله‌ها، معادله‌های دیفرانسیلی حساب وردش‌ها هستند و بنابراین، این امکان به وجود آمد که معادله‌های مکانیک و فیزیک، به عنوان شرط اکسترمم فونکسیونل‌های متناظر در نظر گرفته شود و قانون‌های فیزیکی، به صورت جست‌وجوی اکسترمم (و در حالت خاص، می‌نیمم) بعضی از مقدارها، قابل بیان باشد. و چنین وضعی، این امکان را به وجود آورد که در مکانیک و فیزیک، دیدگاه‌های تازه‌ای، از راه تبدیل قانون‌های فیزیکی به هم‌ارز آن‌ها «قانون‌های جست‌وجوی اکسترمم‌ها» پیدا شود. در ضمن، این وضع منجر به کشف راه‌های تازه‌ای، برای حل دقیق و یا تقریبی مسأله‌های فیزیکی، به یاری جست‌وجوی می‌نیمم‌های فونکسیونل‌های مربوطه، باشد.

۲. معادله‌های دیفرانسیلی حساب وردش‌ها

معادلهٔ دیفرانسیلی اولر. به یاد آوریم، شرط لازم وجود اکسترمم در نقطه‌ای مثل x از تابع f ــ که قابل دیفرانسیل‌گیری است ــ برابر صفر بودن مشتق آن در این نقطه $f'(x)=۰$ یا هم‌ارز آن، برابر صفر بودن دیفرانسیل تابع $df=f'(x)dx=۰$ است.

نزدیک‌ترین هدف ما این است که شبیه این شرط را برای حساب وردش‌ها پیدا کنیم و روشن کنیم تابعی که اکسترمم فونکسیونل را می‌دهد با چه شرط لازمی باید بسازد.

ثابت می‌کنیم چنین تابعی، باید در یک معادلهٔ دیفرانسیلی صدق کند. شکل این معادلهٔ دیفرانسیلی، بستگی به وضع فونکسیونل L دارد. از ساده‌ترین انتگرال حساب وردش‌ها، آغاز می‌کنیم که فونکسیونل آن، دارای این نمایش انتگرال است:

$$I(y) = \int_{x_۱}^{x_۲} F(x, y, y')dx \qquad (۹)$$

تابع F که زیر علامت انتگرال قرار دارد، به سه آوند x ، y و y'، بستگی دارد. در ضمن فرض می‌کنیم این تابع در حوزه‌ای مثل B از صفحهٔ Oxy معین نسبت به آوند y' و همچنین نسبت به آوندهای x و y، به طور پیوسته تا دوبار قابل دیفرانسیل‌گیری باشد. در این‌جا، بدون این‌که تأکید کنیم، فرض براین است که همه‌جا در داخل این حوزه هستیم.

y خود تابعی از x است:

$$y = y(x) \qquad (۱۰)$$

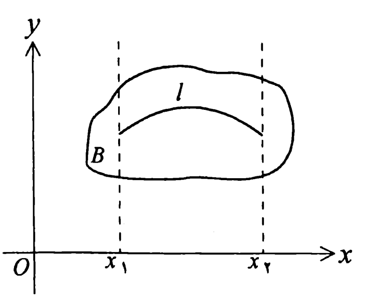
که به طور پیوسته در فاصلهٔ $x_۱ \leq x \leq x_۲$ قابل دیفرانسیل‌گیری است و y' هم مشتق آن است.

از لحاظ هندسی، تابع $y(x)$ را می‌توان در صفحهٔ Oxy، به صورت خمی مانند l، که بالای پاره‌خط راست $[x_۱ , x_۲]$ قرار دارد، نشان داد (شکل ۳).

انتگرال (۹)، صورت کلی انتگرال‌های (۳) و (۶) است که در مسأله‌های مربوط به شیب کمترین زمان و سطح دوار با کمترین مساحت، با آن‌ها برخورد کرده بودیم. مقدار این انتگرال، به انتخاب تابع $y(x)$ و یا منحنی l بستگی دارد، و مسألهٔ مربوط به می‌نیمم آن، به مفهوم زیر است.

مجموعهٔ M تابع‌های (۱۰) (منحنی‌های l) داده شده است. می‌خواهیم بین آن‌ها چنان تابعی (یا چنان منحنی از بین منحنی‌های l) را پیدا کنیم، که به ازای آن انتگرال $I(y)$ به کمترین مقدار خود برسد.

قبل از همه، باید مجموعهٔ M تابع‌هایی را که به ازای آن‌ها، مقدار انتگرال (۹) را بررسی می‌کنیم، معین کنیم. تابع‌های این مجموعه را، در حساب وردش‌ها، اغلب تابع‌های قابل قبول می‌گویند. مسأله را با در نظر گرفتن مقدارهای مرزی بررسی می‌کنیم. در این‌جا



شکل ۳

مجموعهٔ تابع‌های قابل قبول، با این دو شرط، معین می‌شود:

۱) $y(x)$ روی پاره‌خط راست $[x_۱ , x_۲]$ به طور پیوسته، قابل دیفرانسیل‌گیری است.

۲) $y(x)$ در دو انتهای پاره‌خط، مقدارهایی را که از پیش داده شده است، قبول می‌کند.

$$y(x_۱)=y_۱ , y(x_۲)=y_۲ \tag{۱۱}$$

به غیر از این دو شرط، تابع $y(x)$ می‌تواند دل‌خواه باشد. اگر به زبان هندسی گفت‌وگو کنیم، آن‌چه باید بررسی کنیم، همهٔ گونه‌های ممکن منحنی‌های همواری است که در فاصلهٔ $[x_۱ , x_۲]$ قرار گرفته‌اند و از دو نقطهٔ $A(x_۱ , y_۱)$ و $B(x_۲ , y_۲)$ می‌گذرند و می‌توانند به وسیلهٔ (۱۰) داده شوند. فرض می‌کنیم، تابعی که می‌نیمم انتگرال را تامین می‌کند، وجود داشته باشد و آن را $y(x)$ می‌نامیم.

ملاحظه‌های ساده‌ای، که اغلب برای حساب وردش‌ها در نظر گرفته می‌شود، این امکان را به وجود می‌آورد، خیلی ساده، شرط لازم را برای $y(x)$ به دست آوریم. این ملاحظه‌ها، در واقع، مسألهٔ مربوط به می‌نیمم انتگرال (۹) را، به مسألهٔ می‌نیمم تابع منجر می‌کنند.

خانوادهٔ تابع‌هایی را در نظر می‌گیریم که به پارامتر عددی α بستگی دارند:

$$\bar{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x) \tag{۱۲}$$

برای این‌که $\bar{y}(x)$ به ازای هر مقدار α، تابعی قابل قبول باشد، باید $\eta(x)$ را به طور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری به حساب آوریم، که در ضمن در دو انتهای پاره‌خط $[x_۱ , x_۲]$ برابر صفر می‌شود:

$$\eta(x_۱)=\eta(x_۲)=۰ \tag{۱۳}$$

انتگرال (۹)، اگر برای $\bar{y}$ محاسبه شود، تابعی از پارامتر α خواهد بود[۱]:

$$I(\bar{y}) = \int_{x_۱}^{x_۲} F(x , y+\alpha\eta , y'+\alpha\eta')\, dx = \Phi(\alpha)$$

---

۱. تفاضل $\bar{y}-y=\alpha\eta$ را **وردش** (تغییر یا واریاسیون) تابع y می‌نامند و به δy نشان می‌دهند. همچنین تفاضل $I(\bar{y})-I(y)$ را هم ***وردش (تغییر) کامل انتگرال*** (۹) می‌نامند. دلیل نام‌گذاری حساب وردش‌ها از همین‌جاست.

چون $y(x)$ کمترین مقدار انتگرال را می‌دهد، تابع $\Phi(\alpha)$ باید به ازای $\alpha=0$ می‌نیمم باشد و بنابراین، مشتق آن در این نقطه، برابر صفر می‌شود:

$$\Phi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\left[F_y(x\,,y\,,\,y')\eta+F_{y'}(x\,,y\,,y')\eta'\right]dx=0 \qquad (۱۴)$$

برابری اخیر باید برای همهٔ تابع‌های $\eta(x)$، که به طور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری هستند و در دو انتهای پاره‌خط $[x_1\,,\,x_2]$ برابر صفر می‌شوند، برقرار باشد. جملهٔ دوم از شرط (۱۴) را ، بنابر انتگرال‌گیری جزء به جزء، تبدیل می‌کنیم:

$$\int_{x_1}^{x_2}F_{y'}\eta'dx=-\int_{x_1}^{x_2}\eta\frac{d}{dx}F_{y'}dx$$

و شرط (۱۴) را به این صورت می‌نویسیم:

$$\Phi'(0)=\int_{x_1}^{x_2}\left[F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right]\eta dx=0 \qquad (۱۵)$$

این پیش‌قضیه را می‌توان ثابت کرد:

فرض کنید، این شرط‌ها برقرار باشد:

۱) تابع $f(x)$ در فاصلهٔ بستهٔ $[a\,,b]$ پیوسته باشد؛

۲) تابع $\eta(x)$ در فاصلهٔ بستهٔ $[a\,,b]$ به طور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری و در دو انتهای فاصله، برابر صفر باشد.

در این‌صورت اگر برای تابع دل‌خواه $\eta(x)$، انتگرال $\int_a^b f(x)\eta(x)dx$ برابر صفر باشد، نتیجه می‌شود $f(x)\equiv 0$.

در واقع، اگر تابع f در نقطه‌ای مانند c، مخالف صفر باشد، ثابت می‌کنیم، در این صورت، تابعی برای $\eta(x)$ وجود دارد که به ازای آن داشته باشیم: $\int_a^b f(x)\eta(x)dx\neq 0$، که در واقع، شرط پیش‌قضیه را نقض می‌کند.

چون $f(c)\neq 0$ و f پیوسته است، در حوالی c، فاصله‌ای مثل $[\alpha\,,\,\beta]$، پیدا می‌شود که در همهٔ نقطه‌های آن، f مخالف صفر و دارای علامت ثابتی است.

همیشه می‌توان تابع $\eta(x)$ را طوری ساخت که در فاصلهٔ $[a\,,b]$ به طور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری، در فاصلهٔ $[\alpha\,.\,\beta]$ مثبت و در خارج فاصلهٔ $[\alpha\,,\,\beta]$ برابر صفر باشد

(شکل ۴).

برای نمونه می‌توانید تابع $\eta(x)$ را به ترتیب زیر تعریف کنید:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & (\text{در فاصلهٔ } [a\,,\ \alpha]) \\ (x-\alpha)^2(\beta-x)^2 & (\text{در فاصلهٔ } [\alpha\,,\ \beta]) \\ 0 & (\text{در فاصلهٔ } [\beta\,,\ b]) \end{cases}$$

ولی برای چنین تابعی از $\eta(x)$ داریم:

$$\int_a^b f\eta dx = \int_\alpha^\beta f\eta dx$$

انتگرال سمت راست برابری هم نمی‌تواند برابر صفر شود، زیرا حاصل‌ضرب $f\eta$ در داخل فاصلهٔ انتگرال‌گیری، مخالف صفر و با علامت ثابتی است.

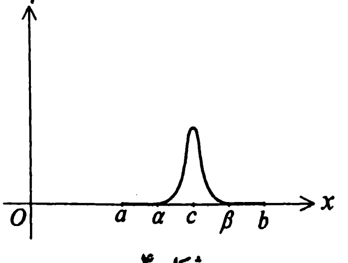
از آن‌جا که برابری (۱۵) باید برای هر تابعی از $\eta(x)$، که به طور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری و در دو انتهای پاره‌خط $[x_1\,,\ x_2]$ برابر صفر است، برقرار باشد، با توجه به پیش‌قضیه می‌توان حکم کرد، این وضع تنها در حالتی می‌تواند وجود داشته باشد که داشته باشیم:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \tag{16}$$

و یا، بعد از محاسبهٔ مشتق نسبت به x:

$$F_y(x\,,y\,,y') - F_{xy'}(x\,,y\,,y') - F_{yy'}(x\,,y\,,y')y' - F_{y'y'}(x\,,y\,,y')y'' = 0 \tag{17}$$

و این، یک معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم، نسبت به تابع y است. این معادلهٔ دیفرانسیلی، به ***معادلهٔ اولر*** مشهور شده است.



شکل ۴

می‌توانیم این نتیجهٔ را بیان کنیم:

اگر تابع $y(x)$، انتگرال $I(y)$ را به می‌نیمم برساند، در این‌صورت باید در معادلهٔ دیفرانسیلی *اولر* (معادلهٔ (۱۷)) صدق کند. و این، در حساب وردش‌ها، شبیه آن است که در نظریهٔ اکسترمم‌های تابع، به شرط لازم $df=0$ رسیده بودیم. و این امکان به دست می‌آید که یک باره، همهٔ تابع‌های قابل قبولی را که با این شرط نمی‌سازند، رها کنیم. زیرا به ازای آن‌ها، انتگرال ما، نمی‌تواند به می‌نیمم برسد. به این ترتیب، دایرهٔ تابع‌های قابل قبولی که باید بررسی شوند، خیلی تنگ‌تر می‌شود و می‌توانیم تمامی توجه خود را تنها روی جواب‌های معادلهٔ (۱۷)، متمرکز کنیم.

خود جواب‌های معادلهٔ (۱۷) دارای این ویژگی هستند که مشتق $\left\{\frac{d}{d\alpha} I(y+\alpha\eta)\right\}_{\alpha=0}$ برای آن‌ها، به ازای هر $\eta(x)$، صفر می‌شود، و از لحاظ مفهوم خود، به نقطه‌های ساکن تابع می‌مانند. به همین مناسبت، اغلب می‌گویند انتگرال $I(y)$، برای جواب‌های (۱۷) دارای مقداری ساکن است.

در مسألهٔ ما، که مقدارهای مرزی آن مشخص شده است، به همهٔ جواب‌های معادلهٔ *اولر* نیازی نداریم و تنها باید جواب‌هایی را پیدا کنیم که در نقطه‌های x_1 و x_2، مقدارهای y_1 و y_2 را قبول کنند.

به این نکته توجه کنیم که معادلهٔ *اولر*، از مرتبهٔ دوم است و جواب کلی آن، شامل دو مقدار ثابت دل‌خواه است:

$$y=\varphi(x\,,C_1\,,C_2)$$

این دو مقدار ثابت با استفاده از این مطلب پیدا می‌شوند که منحنی انتگرالی از نقطه‌های A و B عبور می‌کند و به این ترتیب، دو معادله برای پیدا کردن مقدارهای ثابت C_1 و C_2 به دست می‌آید:

$$\varphi(x_1, C_1, C_2)=y_1\,,\ \ \varphi(x_2, C_1, C_2)=y_2$$

در بسیاری حالت‌ها، این دستگاه تنها یک جواب دارد و در این صورت، تنها یک منحنی انتگرالی وجود دارد که از نقطه‌های A و B می‌گذرد.

جست‌وجوی تابع‌هایی که مربوط به می‌نیمم انتگرال هستند، منجر به حل این مسألهٔ مرزی، از معادله‌های دیفرانسیلی می‌شود: باید روی پاره‌خط $[x_1\,,x_2]$، آن جواب‌هایی از معادلهٔ (۱۷) را پیدا کرد که در دو انتهای این پاره‌خط، مقدارهای مفروض y_1 و y_2 را قبول می‌کند.

اغلب، مسألهٔ اخیر را می‌توان به کمک روش‌هایی که در نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی شناخته شده است، حل کرد.

یکبار دیگر اشاره می‌کنیم، هر جواب چنین مسألهٔ مرزی، تنها می‌تواند مظنون به می‌نیمم باشد، و بعد باید دوباره و ضمن آزمایش معلوم شود آیا انتگرال را به کمترین مقدار خود می‌رساند یا نه! ولی، در حالت‌های خاص، اغلب به نمونه‌هایی برمی‌خوریم که معادلهٔ *اولر* به طور کامل مسألهٔ مربوط به پیدا کردن می‌نیمم انتگرال را حل می‌کند. فرض کنید، از قبل بدانیم تابعی که انتگرال را به می‌نیمم می‌رساند، وجود دارد و به‌جز آن فرض می‌کنیم معادلهٔ *اولر* (۱۷) تنها یک جواب داشته باشد که با شرط مرزی (۱۱) بسازد، در نتیجه، تنها یک منحنی قابل قبول بتواند برای می‌نیمم، مظنون باشد. با این شرط‌ها، می‌توان اطمینان داشت که در واقع، همان جوابی که از معادلهٔ (۱۷) به دست آمده است، می‌نیمم انتگرال را تامین می‌کند.

مثال. دیدیم که مسألهٔ مربوط به منحنی کمترین زمان حرکت روی سطح شیب‌دار را می‌توان منجر به پیدا کردن می‌نیمم انتگرال

$$I(y)=\int_{\circ}^{x_{۲}}\frac{\sqrt{۱+y'^{۲}}}{\sqrt{y}}\,dx$$

در مجموعهٔ تابع‌هایی که در این شرط مرزی صدق می‌کنند، کرد:

$$y(\circ)=\circ\ ,\ y(x_{۲})=y_{۲}$$

در این مسأله داریم:

$$F=\frac{\sqrt{۱+y'^{۲}}}{\sqrt{y}}$$

معادلهٔ *اولر* چنین است:

$$-\frac{۱}{۲}y^{-\frac{۳}{۲}}\sqrt{۱+y'^{۲}}-\frac{d}{dx}\left(y^{-\frac{۱}{۲}}\frac{y'}{\sqrt{۱+y'^{۲}}}\right)=\circ$$

که بعد از ساده کردن به این صورت در می‌آید:

$$\frac{۲y''}{۱+y'^{۲}}=-\frac{۱}{y}$$

دو طرف برابری را در y' ضرب می‌کنیم و انتگرال می‌گیریم، به دست می‌آید:

$$\ln(۱+y'^{۲}) = -\ln y + \ln k$$

یا

$$y'^{۲} = \frac{k}{y} - ۱$$

$$\sqrt{\frac{y}{k-y}}\, dy = \pm dx$$

اکنون فرض می‌کنیم:

$$y=\frac{k}{۲}(۱-\cos u)\ ,\ \ dy=\frac{k}{۲}\sin u\ du$$

که اگر در رابطهٔ بالا قرار دهیم و ساده کنیم، می‌شود:

$$\frac{k}{۲}(۱-\cos u)du=\pm dx$$

که از آنجا، بعد از انتگرال‌گیری، به دست می‌آید:

$$x=\pm\frac{k}{۲}(u-\sin u)+C$$

و چون، منحنی باید از مبداء مختصات بگذرد، باید فرض کرد: $C=۰$.

به این ترتیب می‌بینیم که «منحنی کمترین زمان»، یک سیکلوئید است:

$$x=\frac{k}{۲}(u-\sin u)\qquad ,\qquad y=\frac{k}{۲}(۱-\cos u)$$

مقدار ثابت k را باید با توجه به این شرط پیدا کرد که منحنی از نقطهٔ $M_۲(x_۲\ ,\ y_۲)$ می‌گذرد.

فونکسیونل‌هایی که وابسته به چند تابع‌اند. ساده‌ترین فونکسیونل حساب وردش‌ها (۱۷)، که در این‌جا بررسی کردیم، تنها به یک تابع وابسته بود. حالت‌هایی وجود دارد که موضوع بررسی (یا رفتار آن) تنها به وسیلهٔ یک رابطهٔ فونکسیونلی معین می‌شود. از جمله، منحنی که بر

صفحه واقع است، به وسیلهٔ رابطه‌ای که عرض نقطه‌های آن را به طول این نقطه‌ها مربوط می‌کند، معین می‌شود؛ حرکت نقطهٔ مادی در طول محور، به وسیلهٔ رابطه‌ای که مختصات آن را با زمان مربوط می‌کند، مشخص می‌شود و غیره.

با همهٔ این‌ها، اغلب به موضوع‌هایی برخورد می‌کنیم که نمی‌توان آن‌ها را به این سادگی معین کرد. برای این‌که یک منحنی فضایی مشخص شود، باید دو رابطهٔ فونکسیونلی، که دو مختص آن را به سومی مربوط می‌کند، داده شده باشد. حرکت یک نقطه در فضا، به وسیلهٔ رابطه‌ای که سه مختص آن با زمان دارد، معین می‌شود و غیره. مطالعهٔ چنین موضوع‌های پیچیده‌تری، منجر به مسألهٔ وردشی با چند تابع متغیر می‌شود.

ما تنها به حالتی می‌پردازیم که فونکسیونل به دو تابع $y(x)$ و $z(x)$ مربوط باشد، زیرا حالتی که تعداد تابع‌ها بیشتر باشد، با این حالت تفاوت اساسی ندارد.

این مسأله را در نظر می‌گیریم دو تابع $y(x)$ و $z(x)$ را با این شرط‌ها تعریف می‌کنیم:

۱) تابع‌های

$$y=y(x),\, z=z(x) \tag{۱۸}$$

روی پاره‌خط $[x_۱ \,,\, x_۲]$، به طور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری هستند؛

۲) این تابع‌ها، در دو انتهای پاره‌خط، مقدارهای مفروضی را قبول می‌کند:

$$y(x_۱)=y_۱,\, y(x_۲)=y_۲$$

$$z(x_۱)=z_۱,\, z(x_۲)=z_۲ \tag{۱۹}$$

بین همهٔ زوج تابع‌های ممکن $y(x)$و $z(x)$، باید آن را پیدا کرد که به کمترین مقدار انتگرال زیر پاسخ دهد:

$$I(y\,,\, z)=\int_{x_۱}^{x_۲} F(x\,,\, y\,,\, z\,,\, y'\,,\, z')\,dx \tag{۲۰}$$

در فضای سه‌بعدی x ، y ، z، هر زوج تابع قابل قبول، متناظر با یک منحنی lاست، که به وسیلهٔ معادله‌های (۱۸) معین می‌شود و از نقطه‌های $M_۱(x_۱\,,\, y_۱\,,\, z_۱)$ و $M_۲(x_۲\,,\, y_۲\,,\, z_۲)$ می‌گذرد.

باید می‌نیمم انتگرال (۲۰) را، در مجموعهٔ همهٔ این منحنی‌ها جست‌وجو کنیم.

فرض می‌کنیم، چنین زوج تابعی که می‌نیمم انتگرال (۲۰) را تامین کند وجود داشته باشد

و آن‌ها را $y(x)$ و $z(x)$ می‌نامیم. در کنار آن‌ها، زوج دیگری از تابع‌ها را در نظر می‌گیریم:

$$\bar{y} = y + \alpha\eta(x) \quad , \quad \bar{z} = z + \alpha\zeta(x)$$

که در آن، $\eta(x)$ و $\zeta(x)$ تابع‌های دل‌خواهی به‌طور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری هستند و در دو انتهای x_1 و x_2 پاره‌خط، صفر هستند؛ $\bar{y}$ و $\bar{z}$ هم قابل قبول‌اند و به ازای $\alpha=0$ بر تابع‌های y و z منطبق می‌شوند. آن‌ها را در (۲۰) قرار می‌دهیم.

$$I(\bar{y}, \bar{z}) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y + \alpha\eta \ , \ z + \alpha\zeta \ , \ y' + \alpha\eta' \ , \ z' + \alpha\zeta')\, dx = \Phi(\alpha)$$

انتگرال به دست آمده، تابعی از α است. از آن‌جا که به ازای $\alpha=0$، $\bar{y}$ و $\bar{z}$ بر y و z منطبق می‌شود، تابع $\Phi(\alpha)$ باید به ازای $\alpha=0$ می‌نیمم داشته باشد. در نقطهٔ می‌نیمم هم، مشتق Φ باید صفر باشد:

$$\Phi'(0) = 0$$

محاسبه مشتق می‌دهد:

$$\int_{x_1}^{x_2} [F_y . \eta + F_z . \zeta + F_{y'} . \eta' + F_{z'} \ , \ \zeta']\, dx = 0$$

و یا

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \eta(x) + \left[F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} \right] \zeta(x) \right\} dx = 0$$

برابری اخیر، باید برای هر دو تابع $\eta(x)$ و $\zeta(x)$، که به طور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری هستند و در دو انتهای پاره‌خط، برابر صفر هستند، برقرار باشد. از آن‌جا، و براساس پیش‌قضیه‌ای که چند صفحهٔ قبل ثابت کردیم، به‌سادگی می‌توان نتیجه گرفت این شرط‌ها باید برقرار باشد:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$$

$$F_z - \frac{d}{dx} F_{z'} = 0 \qquad (۲۱)$$

به‌این ترتیب، اگر تابع‌های y و z، انتگرال (۲۰) را به می‌نیمم برسانند، باید در دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی *اولر* (۲۱) صدق کنند.

این نتیجه‌گیری دوباره به ما اجازه می‌دهد مسألهٔ وردشی مربوط به می‌نیمم انتگرال (۲۰) را به مسألهٔ مقدار مرزی نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی تبدیل کنیم: باید روی پاره‌خط $[x_1 , x_2]$، جوابی از y و z دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی (۲۱) را به دست آورد که در شرط مرزی (۱۹) صدق کند.

مثل حالت قبل، از این طریق هم، یکی از راه‌های ممکن حل مسألهٔ کمترین‌ها، گشوده می‌شود.

به عنوان نمونهٔ کاربرد دستگاه *اولری* (۲۱)، قاعدهٔ وردشی *اوستروگرادسکی ـ هامیلتون* را در مکانیک نیوتنی بررسی می‌کنیم. ساده‌ترین شکل این قاعده را توضیح می‌دهیم.

جسم مادی به جرم m را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که اندازه‌ها و شکل جسم را بتوانیم ناچیز بشماریم و آن را به عنوان یک نقطهٔ مادی قبول کنیم.

فرض می‌کنیم، نقطهٔ مادی از وضع $M_1(x_1 , y_1 , z_1)$ در لحظهٔ t_1، به وضع $M_2(x_2 , y_2 , z_2)$ در لحظهٔ t_2، جابه‌جا شده باشد؛ و فرض می‌کنیم، حرکت از قانون مکانیک نیوتنی تبعیت کند و زیر تاثیر نیروی $F(x , y , z , t)$ باشد، که مربوط به موضع نقطه و زمان t، و دارای تابع پتانسیلی $U(x , y , z , t)$ است. معنای مفهوم اخیر چنین است: مؤلفه‌های F_x ، F_y و F_z از نیروی F روی محورهای مختصات، عبارت‌اند از مشتق‌های جزئی تابعی مثل U، نسبت به مختص متناظر خود:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

حرکت را آزاد به حساب می‌آوریم، یعنی از هیچ بستگی محدودکننده‌ای تبعیت نمی‌کند[1].

معادلهٔ حرکت نیوتنی چنین است:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad , \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad , \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z}$$

نقطه، اگر از قانون مکانیک نیوتنی پیروی کند، به نحوی کاملاً قابل پیش‌بینی حرکت می‌کند. در کنار «حرکت نیوتنی» نقطه، حرکت‌های دیگری از آن را بررسی خواهیم کرد که

---

۱. این شرط برای قاعدهٔ *اوستروگرادسکی ـ هامیلتون*، اساسی نیست؛ در دستگاه مکانیکی هر رابطه‌ای می‌تواند باشد، تنها به این شرط که به صورت معادله‌هایی نوشته شده باشند که شامل مشتق‌های مختصات نسبت به زمان نباشد.

به طور خلاصه به آن‌ها «حرکت‌های قابل قبول» می‌گوییم. این حرکت‌ها را با دو تقاضا تعریف می‌کنیم: در لحظهٔ $t_۱$، نقطه در موضع $M_۱$ و در لحظهٔ $t_۲$، در موضع $M_۲$ است.

به چه ترتیب می‌توان بین «حرکت نیوتنی» نقطه و دیگر حرکت‌های «قابل قبول» آن فرق گذاشت؟ این امکان را قانون اوستروگرادسکی ـ هامیلتون به دست می‌دهد.

انرژی سینتیک نقطه را درنظر می‌گیریم:

$$T = \frac{۱}{۲} m (x'^{۲} + y'^{۲} + z'^{۲})$$

و به اصطلاح انتگرال عمل (یا انتگرال کُنش) را تشکیل می‌دهیم:

$$I = \int_{t_۱}^{t_۲} (T + U) dt$$

مضمون قانون چنین است: اختلاف «حرکت نیوتنی» نقطه، از هر حرکت «قابل قبول» دیگر، در این است که برای «حرکت نیوتنی»، انتگرال عمل مقدار ثابتی است.

انتگرال عمل I، به سه تابع بستگی دارد: $x(t)$، $y(t)$، $z(t)$.

از آن‌جا که در همهٔ حرکت‌های قابل مقایسه، موضع نخستین و آخرین نقطه یکی است، مقدارهای حدی این تابع‌ها، تثبیت شده است. در این‌جا با یک مسألهٔ وردشی سروکار داریم که با سه تابع متغیر بستگی دارد و در دو انتهای فاصلهٔ $[t_۱ \ , \ t_۲]$، مقدارهای ثابتی دارد.

در بالا قرار گذاشتیم، انتگرال (۱۷) روی یک منحنی، وقتی مقدار ثابتی دارد که منحنی انتگرالی معادلهٔ *اولر* باشد. در مسألهٔ ما، تابع

$$F = T + U = \frac{۱}{۲} m (x'^{۲} + y'^{۲} + z'^{۲}) + U(x \ , y \ , z \ , t)$$

به سه تابع بستگی دارد و برای مقدار ثابت انتگرال باید این دستگاه سه معادلهٔ دیفرانسیلی برقرار باشد:

$$F_x - \frac{d}{dt} F_{x'} = ۰$$

$$F_y - \frac{d}{dt} F_{y'} = ۰$$

$$F_z - \frac{d}{dt} F_{z'} = ۰$$

چون داریم: $F_x = \frac{\partial U}{\partial x}$ ، $F_{x'} = mx'$، ...، بنابراین دستگاه معادله‌های **اولر**، بر معادلهٔ حرکت در مکانیک نیوتنی، منطبق است و این درستی قانونی را که آورده بودیم، تایید می‌کند.

مسألهٔ مربوط به می‌نیمم انتگرال چندگانه. آخرین مسأله از محاسبه واریاسیونی، که به آن توجه می‌کنیم، مسألهٔ مربوط به می‌نیمم انتگرال چندگانه است. از آن‌جا که موضوع‌های مربوط به حل این‌گونه مسأله‌ها، کم و بیش برای همهٔ گونه‌های آن‌ها، یکی است، در این‌جا تنها به ساده‌ترین آن‌ها، یعنی انتگرال دوگانه می‌پردازیم.

B را حوزه‌ای از صفحهٔ Oxy می‌گیریم که مرز آن دورهٔ l باشد. مجموعهٔ تابع‌های قابل قبول را با این شرط‌ها تعریف می‌کنیم:

۱) $u(x, y)$ در حوزه B به طور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری است.

۲) u روی l، مقدارهای داده شده‌ای را قبول می‌کند.

$$u\Big|_l = f(M) \tag{۲۲}$$

بین همهٔ تابع‌های u، باید آن را پیدا کرد که مقدار انتگرال زیر را به می‌نیمم برساند.

$$I(u) = \iint_B F(x,y,u,u_x,u_y)\,dx\,dy \tag{۲۳}$$

مفروض بودن مقدارهای مرزی (۲۲) برای تابع u در فضای (x, y, u)، به معنای مفروض‌بودن منحنی فضایی Γ است، که روی l قرار گرفته است (شکل ۲ را ببینید).

همهٔ سطح‌های ممکن S را که از Γ عبور کرده و روی B قرار دارند، بررسی می‌کنیم. می‌خواهیم در میان آن‌ها، آن را پیدا کنیم که به ازای آن، انتگرال (۲۳) به حداقل خود برسد.

ابتدا فرض می‌کنیم، تابعی که می‌نیمم انتگرال را می‌دهد وجود داشته باشد: آن را به u نشان می‌دهیم. همراه با آن، تابع دیگری را هم در نظر می‌گیریم:

$$\bar{u} = u + \alpha\eta(x, y)$$

که در آن، $\eta(x, y)$ تابع دل‌خواهی است که به طور پیوسته قابل دیفرانسیل‌گیری باشد و در ضمن روی l، صفر باشد. در این صورت، تابع

$$I(\bar{u}) = \iint_B F(x, y, u+\alpha\eta, \; u_x+\alpha\eta_x, \; u_y+\alpha\eta_y)\,dx\,dy = \Phi(\alpha)$$

باید به ازای $\alpha=0$، می‌نیمم داشته باشد. بنابراین، باید مشتق اول آن بـه ازای $\alpha=0$ صـفر باشد.

$$\Phi'(0) = 0$$

یا

$$\iint_B \left[F_u\eta + F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y\right] dxdy = 0 \qquad (۲۴)$$

دو جملهٔ آخر را، به کمک دستور ***اوستروگرادسکی***، تبدیل می‌کنیم:

$$\iint_B \left[F_{u_x}\eta_x + F_{u_y}\eta_y\right] dxdy = \iint_B \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\eta) + \frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\eta)\right] dxdy$$

$$- \iint_B \left[\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right]\eta dxdy = \int_l \left[F_{u_x}\cos(n, x) + F_{u_y}\cos(n, y)\right]\eta ds -$$

$$- \iint_B \left[\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right]\eta dxdy$$

باید از انتگرال روی محیط l صرف‌نظر کرد، زیرا تابع η در روی محیط l برابر صفر است. در نتیجه، شرط (۲۴) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\iint_B \left[F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right]\eta dxdy$$

این برابری باید برای هر تابع η، که به طور پیوسته قابل مشتق‌گیری است و روی مرز l صفر است، برقرار باشد.

از این‌جا، مثل قبل، می‌توان نتیجه گرفت که معادلهٔ زیر باید درهمهٔ نقطه‌های حوزهٔ B، برقرار باشد:

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x}F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y}F_{u_y} = 0 \qquad (۲۵)$$

به این ترتیب، اگر تابع u می‌نیمم انتگرال (۲۳) را بدهد، در این صورت باید در معادلهٔ با

مشتق‌های جزئی (۲۵) صدق کند.

مثل همهٔ حالت‌های قبل، در اینجا هم، بین مسألهٔ وردشی مربوط به می‌نیمم انتگرال، و مسألهٔ حدی معادلهٔ دیفرانسیلی (و البته، در حالت اخیر ـ معادلهٔ با مشتق‌های جزئی)، رابطه‌ای وجود دارد.

مثال. انحراف $u(x, y)$ نقطه‌های غشای با کنارهٔ تغییر شکل یافته را، باید از شرط می‌نیمم انرژی پتانسیلی

$$\frac{\mu}{۲} \iint_B \left[u_x^۲ + u_y^۲\right] dx dy$$

به ازای مقدارهای حدی مفروض $u|_l = \varphi$ را پیدا کرد.

اگر برای سادگی کار، ضریب μ را حذف کنیم، می‌توان نوشت:

$$F = \frac{۱}{۲}(u_x^۲ + u_y^۲)$$

و معادلهٔ (۲۵) به این صورت در می‌آید:

$$-\frac{\partial}{\partial x} u_x - \frac{\partial}{\partial y} u_y = ۰$$

یا

$$\Delta u = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$$

بنابراین، تعیین انحراف نقطه‌های غشا، منجر به پیدا کردن تابع همساز u می‌شود، که روی دورهٔ حوزه، مقدارهای مفروض φ را قبول می‌کند (بخش ششم، بند ۳ را ببینید).

۳. روش‌های حل تقریبی مسأله‌های حساب وردش‌ها

ما این بخش را با یادآوری برخی از روش‌های تقریبی حساب وردش‌ها به پایان می‌بریم.

برای مشخص بودن وضع، دربارهٔ ساده‌ترین فونکسیونل

$$I(y) = \int_{x_۱}^{x_۲} F(x, y, y')dx$$

گفت‌وگو می‌کنیم، که دربارهٔ آن، مقدارهای مرزی تابع‌های قابل قبول، ثابت باشد.

فرض کنید، $y(x)$ جواب دقیق مسألهٔ مربوط به می‌نیمم I، و $m=I(y)$، مقدار حداقلِ متناظر انتگرال باشد. روشن است، اگر تابع قابل قبول $\bar{y}$ را طوری در نظر بگیریم که به ازای آن، مقدار انتگرال $I(\bar{y})$ به m خیلی نزدیک باشد، می‌توان قبول کرد که $\bar{y}$ ، خیلی کم از جواب دقیق y اختلاف دارد. به‌جز این، اگر بتوانیم دنباله‌ای از تابع‌های قابل قبول $\bar{y}_1$ ، $\bar{y}_2$ ، ... را بسازیم، به نحوی که $I(\bar{y}_n)\to m$، می‌توان انتظار داشت، چنین دنباله‌ای به سمت جواب y، هم‌گرا است، و اگر $\bar{y}_n$ را با اندیسی به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار کنیم، می‌توانیم جواب را با هر دقت دل‌خواه به دست آوریم.

برای ساختن «دنبالهٔ می‌نیمم‌های» $\bar{y}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ ، می‌توان از روش‌های تقریبی حساب وردش‌ها استفاده کرد.

از نظر تاریخی، نخستین روش تقریبی، عبارت است از روش خط‌های شکسته، یا روش *اولر*. پاره‌خط $[x_1 , x_2]$ را به چند بخش تقسیم می‌کنیم و این بخش‌ها را به یک اندازه می‌گیریم، به نحوی که نقطه‌های تقسیم، چنین باشند:

$$x_1 , x_1+h , x_1+2h , \ldots , x_1+nh=x_2 , h = \frac{x_2-x_1}{n}$$

اکنون، خط شکستهٔ p_{n-1} را با راس‌هایی که بالای نقطه‌های تقسیم قرار گرفته‌اند، می‌سازیم. عرض‌های این راس‌ها را

$$b_0 , b_1 , b_2 , \ldots , b_{n-1} , b_n$$

می‌نامیم. در ضمن ترتیبی می‌دهیم که انتها و ابتدای این خط شکسته، همان انتها و ابتدای منحنی‌های قابل قبول باشد، یعنی $b_0=y_1$ و $b_n=y_2$. در این‌صورت، خط شکسته، به وسیلهٔ عرض‌های b_1، b_2، ...، b_{n-1}، معین خواهد شد.

اکنون باید دید، خط شکستهٔ p_{n-1} را (یعنی خطی را که راس‌های آن به عرض‌های b_i است) چگونه معین کنیم که تا حد امکان به جواب دقیق مسأله نزدیک باشد.

برای رسیدن به این هدف، طبیعی است، این‌طور عمل کنیم. انتگرال I را برای خط شکسته، محاسبه می‌کنیم. مقدار این انتگرال بستگی به b_i دارد

$$I(p_{n-1}) = \Phi(b_1 , b_2 , \ldots , b_{n-1})$$

و تابعی از این عرض‌هاست. حالا، b_i را طوری انتخاب می‌کنیم که $I(p_{n-1})$ را به حداقل

برساند. برای تعیین همهٔ b_iها، این دستگاه معادله‌ها را داریم:

$$\frac{\partial}{\partial b_i} I(p_{n-1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

از آن‌جا که به هر منحنی قابل قبول، و به خصوص به جواب دقیق مسأله، می‌توان به کمک خط شکسته‌ای که نه تنها از لحاظ موقعیت خود در صفحه بلکه در ضمن از لحاظ جهت مماس‌ها به آن نزدیک است، به تقریب رسید، بنابراین روشن است، دنبالهٔ خط‌های شکستهٔ p_{n-1}، که به این ترتیب به دست می‌آید، در واقع، همان دنبالهٔ می‌نیمم‌هاست. وقتی n را به اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم، می‌توان امید رسیدن به جوابی را داشت که تا حد دل‌خواه در تمامی فاصلهٔ $[x_1, x_2]$، دقیق باشد. روشن است که مسألهٔ هم‌گرائی دنباله را باید در هر حالت بررسی کرد.

روش زیر هم، که از لحاظ محاسبه، عملی‌تر و ساده‌تر است، در فیزیک و صنعت، کاربرد بسیار پیدا کرده است.

تابع دل‌خواه $\varphi_0(x)$ را که در شرط‌های مرزی $\varphi_0(x_1) = y_1$ و $\varphi_0(x_2) = y_2$ صدق می‌کند، اختیار می‌کنیم، به نحوی که در ضمن دنبالهٔ تابع‌های $\varphi_1(x)$، $\varphi_2(x)$، ... ، در دو انتهای فاصلهٔ $[x_1, x_2]$ به سمت صفر میل کند.

سپس، ترکیب خطی

$$s_n(x) = \varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

را تشکیل می‌دهیم. تابع $s_n(x)$، به ازای همهٔ مقدارهای ضریب‌های عددی a_1، a_2، ... ، a_n، قابل قبول‌اند.

اگر $s_n(x)$ را به جای y در انتگرال I بگذاریم و همهٔ محاسبه‌های لازم را انجام دهیم، تابعی از ضریب‌های a_i به دست خواهیم آورد.

حالا a_i را طوری انتخاب می‌کنیم که این تابع، به حداقلِ مقدار خود برسد. ضریب‌ها باید از دستگاه

$$\frac{\partial}{\partial a_i} I(s_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

به دست آیند. با حل این دستگاه، مقدارهای معین ضریب‌های a_1، a_2، ... ، a_n را به دست می‌آوریم، که $I(s_n)$ را به می‌نیمم می‌رسانند، و به وسیلهٔ آن‌ها به مقدار تقریبی جواب نزدیک می‌شویم:

$$\bar{s}_n(x) = \varphi_0(x) + \bar{a}_1\varphi_1(x) + \cdots + \bar{a}_n\varphi_n(x)$$

وقتی دنبالهٔ تقریب‌های $\bar{s}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ را به این ترتیب بسازیم برای هر انتخاب دل‌خواه φ_i، به هدف می‌نیمم بودن، نمی‌رسیم. برای تامین این نظر، باید دنبالهٔ تابع‌های φ_i در شرط‌هایی صدق کنند، که ما در این‌جا دربارهٔ آن‌ها چیزی نگفته‌ایم.

بخش نهم

تابع‌های با متغیر مختلط

م. و. کِلدیش

۱. عددهای مختلط و تابع‌های با متغیر مختلط

عددهای مختلط و اهمیت آن‌ها برای جبر. عددهای مختلط، ضمن حل معادله‌های جبری به ریاضیات وارد شد. ناممکن بودن حل معادلهٔ

$$x^{۲} + ۱ = ۰ \qquad (۱)$$

در حوزهٔ عددهای حقیقی، منجر به قبول نوعی عدد، با واحد موهومی (یا انگاری) i شد که با برابری

$$i^{۲} = -۱ \qquad (۲)$$

تعریف می‌شود. عددی که به صورت $a+bi$ باشد (a و b عددهایی حقیقی‌اند)، ***عدد مختلط (یا عدد به‌هم بافته)*** نامیده شد. با این عددها هم، مثل عددهای حقیقی، می‌توان عمل‌های جمع و ضرب را (مثل جمع یا ضرب دو جمله‌ای‌ها) انجام داد. در ضمن، اگر از برابری (۲) استفاده کنیم، با انجام عمل‌های اصلی حساب روی عددهای مختلط، دوباره به یک عدد مختلط می‌رسیم[۱]. تقسیم عددهای مختلط هم، که به عنوان عکس عمل ضرب تعریف می‌شود، همیشه عملی یک‌ارزشی است (یعنی تنها به یک جواب منجر می‌شود)، تنها به شرطی که بخشیاب برابر صفر نباشد. به این ترتیب، در آغاز به نظر می‌رسید، عددهای مختلط، موقعیتی جالب، ولی صوری دارند: در کنار عددهای حقیقی، عددهای دیگری هم وجود دارد (عددهای مختلط)، که دربارهٔ آن‌ها هم می‌توان، همهٔ عمل‌های حسابی را انجام داد.

---

۱. دربارهٔ عددهای مختلط که در هر کتاب درسی هم به آن‌ها پرداخته شده است، می‌توانید در ضمن به بخش چهارم، بند ۳ (جلد اول) هم مراجعه کنید.

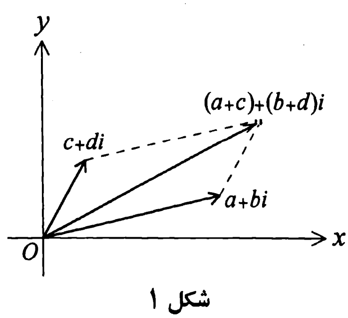
در گام‌های بعد، تصور هندسی عددهای مختلط هم، پیدا شد. هر عدد مختلط $a+bi$ را می‌توان متناظر با نقطه‌ای به مختصات $(a\ ,\ b)$ در صفحهٔ Oxy، و یا متناظر با بُرداری که از آغاز خود در مبداء مختصات، به نقطهٔ $(a\ ,\ b)$ رفته است، در نظر گرفت. این تعبیر هندسی، دید تازه‌ای به عددهای مختلط بود. عددهای مختلط، عبارت‌اند از زوج‌های $(a\ ,\ b)$ از عددهای حقیقی، که می‌توان دربارهٔ آن‌ها، عمل‌های جمع و ضرب را، که از همان قانون‌های عمل‌های مربوط به عددهای حقیقی پیروی می‌کنند، برقرار کرد. در ضمن، کیفیت جالبی هم کشف شد: مجموع دو عدد مختلط

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

از نظر هندسی، معرف قطرمتوازی‌الاضلاعی است که روی بردارهایی که متناظر با جمله‌های این جمع هستند، ساخته شده باشد (شکل ۱). به این ترتیب، جمع عددهای مختلط ، از همان قانون مربوط به جمع بردارها، که در مکانیک و فیزیک با آن‌ها برخورد می‌کنیم (نیرو، سرعت، شتاب)، پیروی می‌کند. و همین مطلب، دلیل آن است که عددهای مختلط را، تنها مقدارهایی که تنها جنبهٔ تعمیم صوری دارند، به حساب نیاوریم و اعتقاد پیدا کنیم که می‌توان از آن‌ها در کمیت‌های فیزیکی دنیای واقع، استفاده کرد.

ما در همین بخش خواهیم دید که این دیدگاه، در مسأله‌های مختلف فیزیک ریاضی، به چه پیشرفت‌هایی نایل آمد.

با همهٔ این‌ها، وجود عددهای مختلط، موقعیت‌های خود را، قبل از همه در کشف قانون‌های جبر و آنالیز به دست آورد. دامنهٔ عددهای حقیقی، که نسبت به عمل‌های حسابی بسته است، برای جبر نارسا بود. حتی، معادلهٔ ساده‌ای، مثل معادلهٔ (۱)، در دامنه عددهای



شکل ۱

حقیقی، جواب ندارد. قضیهٔ اصلی جبر عالی، اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد که می‌گوید: هر معادلهٔ جبری با ضریب‌های مختلط به صورت

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

دارای n ریشهٔ مختلط است (بخش چهارم، بند ۳ را ببینید).

این قضیه، نشان می‌دهد که عددهای مختلط، دستگاهی از عددها را تشکیل می‌دهند که نسبت به عمل‌های جبر، یک دستگاه کامل است. و چقدر جالب است که تنها بااضافه کردن ریشهٔ معادلهٔ (۱)، به حوزه عددهای حقیقی، به عددهایی از نوع $a+bi$ می‌رسیم، که در حوزه آن‌ها، هر معادلهٔ جبری قابل حل است. قضیهٔ اصلی جبر عالی ثابت می‌کند که نظریهٔ چندجمله‌ای‌ها را، حتی وقتی که با ضریب‌های حقیقی باشند، تنها وقتی می‌توان تمام شده دانست که مقدارهای چندجمله‌ای را در تمامی صفحهٔ مختلط بررسی کنیم. پیشرفت‌های بعدی نظریهٔ چندجمله‌ای‌های جبری، بیشتر و بیشتر، این دیدگاه را تایید می‌کند. ویژگی‌های چندجمله‌ای‌ها را، تنها وقتی می‌توان کشف کرد، که آن‌ها را به عنوان تابع‌هایی از متغیر مختلط در نظر بگیریم.

رشته‌های توانی و تابع‌های با متغیر مختلط. پیشرفت آنالیز، حقیقت‌هایی را روشن کرد و نشان داد، پیدایش عددهای مختلط، نه تنها در نظریهٔ چندجمله‌ای‌ها، بلکه برای گروه‌های دیگر تابع‌ها هم، ارزش زیادی دارد و از آن جمله ، برای گروه تابع‌هایی که قابل بسط به رشتهٔ توانی هستند:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots \qquad (3)$$

همان‌طور که در بخش دوم (جلد اول) گفتیم، پیشرفت آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها، ایجاب می‌کرد، دیدگاه روشن‌تری نسبت به مفهوم تابع و روش‌های ممکن طرح تابع در ریاضیات به وجود آید. بدون این‌که در این‌جا، به این موضوع‌های جالب بپردازیم، تنها به یاد می‌آوریم که در همان گام‌های نخستین پیشرفت آنالیز، معلوم شد که اغلب به تابع‌هایی برخورد می‌کنیم که در نزدیکی هر نقطهٔ حوزهٔ تعریف آن‌ها، قابل بسط به رشتهٔ توانی هستند. از جمله، همهٔ تابع‌های مقدماتی، همین ویژگی را دارند.

بسیاری از مسأله‌های مشخص آنالیز، منجر به تابعی می‌شوند که قابل بسط به رشتهٔ

توانی است. از طرف دیگر، باید بین تعریف تابع «ریاضی» با دستور «ریاضی»، رابطه‌ای برقرار کرد، و رشتهٔ توانی، صورت گسترده‌تری از دستور «ریاضی» است. این وضع، حتی موجب این شد که در جهت محدود کردن آنالیز، به مطالعهٔ تابع‌هایی که قابل بسط به **رشتهٔ توانی** هستند، تلاشی جدی انجام گیرد؛ و این‌گونه تابع‌ها را ***تابع‌های تحلیلی*** نامیدند. پیشرفت آنالیز نشان داد که چنین قیدی به صلاح نیست. بسیاری مسأله‌های فیزیک ریاضی، خارج از محدودهٔ تابع‌های تحلیلی بودند، تابع‌هایی که حتی نمی‌توانستند تابع‌هایی را که منحنی آن‌ها نقطهٔ زاویه‌ای دارد، در بر بگیرند. با وجود این، کلاس تابع‌های تحلیلی، به خاطر ویژگی قابل توجه و بیان «عبارتی» خود، مهمترین کلاس از تابع‌های قابل بررسی ریاضیات هستند.

از آنجا که محاسبهٔ هر جمله از رشتهٔ توانی، تنها مستلزم عمل‌های حسابی است، مقدار تابعی که با رشتهٔ توانی بیان شده است، می‌تواند برای مقدارهای مختلط متغیر هم محاسبه شود؛ البته برای چنان مقدارهایی از متغیر، که به ازای آن‌ها، رشته هم‌گرا باشد. به این ترتیب، ضمن تعریف تابع با متغیر حقیقی، برای مقدارهای مختلط هم، دربارهٔ «ادامهٔ» آن در دامنه عددهای مختلط ، صحبت می‌کنیم. بنابراین، تابع تحلیلی هم، مثل چند جمله‌ای، می‌تواند هم برای مقدارهای حقیقی و هم برای مقدارهای مختلط متغیر، بررسی شود. به‌جز این، حتی می‌توان رشته‌های توانی با ضریب‌های مختلط را، مطالعه کرد. ویژگی‌های تابع‌های تحلیلی، مثل ویژگی‌های چندجمله‌ای‌ها، تنها زمانی به طور کامل کشف شد که آن‌ها را در دامنهٔ عددهای مختلط، بررسی کردند. برای روشن کردن مطلب، نمونه‌ای می‌آوریم.

دو تابع با متغیر حقیقی را در نظر می‌گیریم:

$$e^x \quad \text{و} \quad \frac{۱}{۱+x^۲}$$

هر دوی این تابع‌ها، پیوسته و تا هر مرتبه‌ای، در تمامی محور Ox، قابل دیفرانسیل‌گیری هستند. آن‌ها را می‌توان به رشتهٔ *تیلور* بسط داد، از جمله، در نزدیک $x=۰$

$$e^x = ۱ + \frac{x}{۱!} + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots \qquad (۴)$$

$$\frac{۱}{۱+x^۲} = ۱ - x^۲ + x^۴ - x^۶ + \cdots \qquad (۵)$$

رشتهٔ نخست، به ازای همهٔ مقدارهایی x هم‌گرا است، در حالی که رشتهٔ دوم، تنها به ازای $-1 < x < +1$، هم‌گرا می‌شود. با بررسی تابع (۵) برای مقدارهای حقیقی متغیر، نمی‌توانیم معلوم کنیم چه ویژگی‌هایی از آن موجب واگرایی رشتهٔ **تیلور** مربوط، به ازای $|x| \geq 1$ می‌شود. در حالی که اگر به دامنهٔ عددهای مختلط برویم، این وضع روشن می‌شود. رشتهٔ (۵) را برای مقدارهای مختلط متغیر در نظر می‌گیریم:

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots \qquad (6)$$

مجموع n جمله از این رشته

$$s_n = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots + (-1)^{n-1} z^{2n-2}$$

مثل حالت حقیقی بودن مقدارهای z، محاسبه می‌شود:

$$s_n = z^2 s_n = 1 + (-1)^n z^{2n}$$

و از آن‌جا

$$s_n = \frac{1 + (-1)^n z^{2n}}{1 + z^2}$$

این عبارت نشان می‌دهد که به ازای $|z| < 1$ داریم:

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1 + z^2}$$

زیرا در این حالت $|z|^{2n} \to 0$. به این ترتیب، به ازای مقدارهای مختلفی از z که در نابرابری $|z| < 1$ صدق می‌کنند، رشتهٔ (۶) هم‌گرا است و مجموعی برابر با $\frac{1}{1+z^2}$ دارد. به ازای $|z| \geq 1$، این رشته واگرا است، زیرا در این حالت، تفاضل $s_n - s_{n-1} = (-1)^{n-1} z^{2n-2}$، به سمت صفر میل نمی‌کند.

نابرابری $|z| < 1$، نشان می‌دهد که نقطهٔ z در فاصله‌ای از مبداء مختصات قرار گرفته است که از واحد تجاوز نمی‌کند. بنابراین، نقطه‌هایی که در آن‌ها، رشتهٔ (۶) هم‌گرا است، در روی صفحهٔ مختلط، دایره‌ای به مرکز مبداء مختصات تشکیل می‌دهند. روی محیط این دایره، دو نقطهٔ i و $-i$ قرار دارد که در آن، تابع $\frac{1}{1+z^2}$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند؛ وجود همین نقطه‌هاست که حوزهٔ هم‌گرایی رشتهٔ (۶) را محدود می‌کند.

حوزهٔ هم‌گرایی رشتهٔ توانی. حوزهٔ هم‌گرایی رشتهٔ توانی

$$a_{۰} + a(z-a) + a_{۲}(z-a)^{۲} + \cdots + a_n (z-a)^n \qquad (۷)$$

در صفحهٔ مختلط، همیشه دایره‌ای است به مرکز نقطهٔ a.

این حکم را، که به ***قضیهٔ آبل*** معروف است، ثابت می‌کنیم.

قبل از هر چیز یادآوری می‌کنیم، اگر جمله‌های رشته‌ای، از عددهای مختلط w_n تشکیل شده باشد:

$$w_{۱} + w_{۲} + \cdots + w_n + \cdots \qquad (۸)$$

می‌توان رشته را به صورت دو رشته در نظر گرفت که یکی از آن‌ها از جمله‌های حقیقی و دیگری از ضریب‌های بخش‌های موهومی عددها، تشکیل شده باشد: $w_n = u_n + i v_n$

$$u_{۱} + u_{۲} + \cdots + u_n + \cdots \qquad (۹)$$

$$v_{۱} + v_{۲} + \cdots + v_n + \cdots \qquad (۱۰)$$

مجموع جزئی s_n مربوط به رشتهٔ (۸)، از روی مجموع‌های جزئی σ_n و τ_n رشته‌های (۹) و (۱۰) به دست می‌آید:

$$s_{۲} = \sigma_n + i\tau_n$$

بنابراین، هم‌گرایی (یا تقارب) رشتهٔ (۸)، هم ارز است با هم‌گرایی رشته‌های (۹) و (۱۰)، و مجموع s مربوط به رشتهٔ (۸)، از روی مجموع‌های σ و τ رشته‌های (۹) و (۱۰)، بیان می‌شود:

$$s = \sigma + i\tau$$

بعد از این یادآوری‌ها، این پیش‌قضیه روشن را می‌آوریم.

اگر جمله‌های رشتهٔ (۸)، از لحاظ قدرمطلق، کمتر از جمله‌های تصاعد هندسی هم‌گرایِ

$$A + Aq + \cdots + aq^n + \cdots$$

باشد، که در آن A و q مقدارهای مثبت و $q < ۱$ است، در آن صورت رشتهٔ (۸) هم هم‌گرا است.

در واقع، اگر $|w_n|<Aq^n$ آن‌گاه

$$|u_n| \le |w_n| < Aq^n$$

$$|v_n| \le |w_n| < Aq^n$$

بنابراین (بخش دوم، بند ۱۴ ــ جلد اول ــ را ببینید)، رشته‌های (۹) و (۱۰)، و در نتیجه رشتهٔ (۸) هم، هم‌گرا می‌شود.

حالا ثابت می‌کنیم، اگر رشتهٔ توانی (۷) در نقطه‌ای مثل z_0 هم‌گرا باشد، و اگر دایره‌ای را در نظر بگیریم که مرکز آن نقطهٔ a و z_0 یکی از نقطه‌های محیط آن باشد، آن‌گاه، رشتهٔ مفروض در تمامی نقطه‌های واقع در داخل این دایره، هم‌گرا خواهد بود (شکل ۲). از این حکم، نتیجه می‌شود که حوزهٔ هم‌گرایی رشتهٔ (۷)

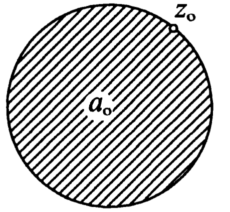
$$a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

عبارت است از: یا تمامی صفحه، یا نقطهٔ منحصر به فرد $z=a$، و یا دایره‌ای با شعاع معین.

به این ترتیب، فرض کنید رشتهٔ (۷) در نقطهٔ z_0 هم‌گرا باشد؛ در این صورت، جملهٔ عمومی رشتهٔ (۷)، برای $z=z_0$، وقتی $n\to\infty$، به سمت صفر میل می‌کند، و این به معنای آن است که همهٔ جمله‌های رشتهٔ (۷) در داخل دایره‌ای قرار گرفته‌اند؛ A را، شعاع این دایره می‌گیریم، در این صورت، برای هر مقدار n خواهیم داشت:

$$|a_n(z_0-a)^n| < A \qquad (11)$$

اکنون نقطه‌ای مثل z را در نظر می‌گیریم که فاصلهٔ آن از a، کمتر از فاصلهٔ نقطهٔ z_0 تا a باشد، ثابت می‌کنیم رشته، در نقطهٔ z هم‌گرا است.



شکل ۲

روشن است که $|z-a| < |z_0-a|$ و بنابراین

$$q = \frac{|z-a|}{|z_0-a|} < 1 \qquad (۱۲)$$

جملهٔ عمومی رشتهٔ (۷) را در نقطهٔ z ارزیابی می‌کنیم.

$$|a_n(z-a)^n| = \left|a_n(z_0-a)^n\left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n\right| = |a_n(z_0-a)^n|\left(\frac{|z-a|}{|z_0-a|}\right)^n$$

که با توجه به‌نابرابری‌های (۱۱) و (۱۲) نتیجه می‌شود

$$|a_n(z-a)^n| < Aq^n$$

یعنی، جملهٔ عمومی رشتهٔ (۷)، از جملهٔ عمومی تصاعد هندسی هم‌گرا، کوچکتر است؛ و بنابراین بنا بر پیش‌قضیه قبل، رشتهٔ (۷) در نقطهٔ z هم‌گرا است.

دایره‌ای که رشتهٔ توانی در داخل آن هم‌گرا و در خارج آن واگرا باشد، ***دایرهٔ هم‌گرایی*** و شعاع این دایره، ***شعاع هم‌گرایی*** رشتهٔ توانی نامیده می‌شود. مرز دایرهٔ هم‌گرایی، همیشه از نزدیک‌ترین نقطه‌های *صفحهٔ مختلط* به a، که در آن‌جا رفتار منظم تابع خراب می‌شود، عبور می‌کند.

رشتهٔ توانی (۴)، در تمامی صفحهٔ متغیر مختلط، هم‌گرا است، و رشتهٔ توانی (۵)، همان‌طور که گفتیم، شعاع هم‌گرایی برابر با واحد دارد.

تابع نمایی و تابع‌های مثلثاتی با متغیر مختلط. رشتهٔ توانی را می‌توان برای «ادامهٔ» تابع‌های با متغیر حقیقی به حوزهٔ مختلط، به کار برد. از جمله برای مقدارهای مختلط z، تابع e^z با رشتهٔ توانی تعریف می‌کنیم:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots \qquad (۱۳)$$

و به همین ترتیب، برای تابع‌های مثلثاتی با متغیر مختلط:

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots \qquad (۱۴)$$

$$\cos z = ۱ - \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۴}{۴!} - \cdots \qquad (۱۵)$$

این رشته‌ها، در تمامی صفحه، هم‌گرا هستند.

و این موضوع جالب است که بتوانیم بستگی بین تابع نمایی و تابع‌های مثلثاتی را، ضمن عبور به حوزه مختلط، به دست آوریم.

اگر در برابری (۱۳)، iz را به جای z قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$e^{iz} = ۱ + i\frac{z}{۱!} - \frac{z^۲}{۲!} - i\frac{z^۳}{۳!} + \frac{z^۴}{۴!} + \cdots$$

که اگر جمله‌های بدون ضریب i را با هم، و جمله‌های با ضریب i را با هم، گروه‌بندی کنیم، به دست می‌آید

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad (۱۶)$$

و به همین ترتیب، به دست می‌آید:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z \qquad (۱۶')$$

دستورهای (۱۶) و ('۱۶)، به دستورهای ***اولر*** مشهور شده‌اند. اگر (۱۶) و ('۱۶) را، نسبت به $\cos z$ و $\sin z$ حل کنیم، به دست می‌آید:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{۲} \quad , \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{۲i} \qquad (۱۷)$$

این خیلی مهم است که برای مقدارهای مختلط متغیرها هم، قانون ساده‌ای که به قضیهٔ جمع متغیرها معروف شده است، برقرار است:

$$e^{z_۱} . e^{z_۲} = e^{z_۱ + z_۲} \qquad (۱۸)$$

از آن‌جا که برای مقدارهای مختلط متغیر، تابع e^z را با رشتهٔ (۱۳) تعریف کردیم، دستور (۱۸) را باید با آغاز از همین تعریف، ثابت کرد. این اثبات را می‌آوریم:

$$e^{z_۱} . e^{z_۲} = \left(۱ + \frac{z_۱}{۱!} + \frac{z_۱^۲}{۲!} + \cdots\right) \cdot \left(۱ + \frac{z_۲}{۱!} + \frac{z_۲^۲}{۲!} + \cdots\right)$$

رشته‌ها را، جمله به جمله در هم ضرب می‌کنیم. جمله‌هایی را که به دست می‌آید،

می‌توان به صورت یک جدول مربعی نوشت:

$$۱\cdot ۱+۱\cdot\frac{z_۲}{۱!}+۱\cdot\frac{z_۲^۲}{۲!}+۱\cdot\frac{z_۲^۳}{۳!}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{z_۱}{۱!}\cdot ۱+\frac{z_۱}{۱!}\cdot\frac{z_۲}{۱!}+\frac{z_۱}{۱!}\cdot\frac{z_۲^۲}{۲!}+\frac{z_۱}{۱!}\cdot\frac{z_۲^۳}{۳!}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{z_۱^۲}{۲!}\cdot ۱+\frac{z_۱^۲}{۲!}\cdot\frac{z_۲}{۱!}+\frac{z_۱^۲}{۲!}\cdot\frac{z_۲^۲}{۲!}+\frac{z_۱^۲}{۲!}\cdot\frac{z_۲^۳}{۳!}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{z_۱^۳}{۳!}\cdot ۱+\frac{z_۱^۳}{۳!}\cdot\frac{z_۲}{۱!}+\frac{z_۱^۳}{۳!}\cdot\frac{z_۲^۲}{۲!}+\frac{z_۱^۳}{۳!}\cdot\frac{z_۲^۳}{۳!}+\cdots$$

حالا، جمله‌هایی را که مجموع توان‌های $z_۱$ و $z_۲$ آن‌ها یکی است، با هم می‌نویسیم. به سادگی دیده می‌شود، این‌گونه جمله‌ها، به صورت قطری در این جدول قرار گرفته‌اند. به دست می‌آید:

$$e^{z_۱}\cdot e^{z_۲}=۱+\left(\frac{z_۲}{۱!}+\frac{z_۱}{۱!}\right)+\left(\frac{z_۲^۲}{۲!}+\frac{z_۱}{۱!}\cdot\frac{z_۲}{۱!}+\frac{z_۱^۲}{۲!}\right)+\cdots \qquad (۱۹)$$

جملهٔ عمومی این رشته چنین است:

$$\frac{z_۲^n}{n!}+\frac{z_۲^{n-۲}}{(n-۱)!}\cdot\frac{z_۱}{۱!}+\frac{z_۲^{n-۲}}{(n-۲)!}\cdot\frac{z_۱^۲}{۲!}+\cdots+\frac{z_۱^n}{n!}$$

$$\frac{۱}{n!}\left(z_۲^n+\frac{n!}{۱!(n-۱)!}z_۲^{n-۱}z_۱+z_۱+\frac{n!}{۲!(n-۲)!}z_۲^{n-۲}z_۱^۲+\cdots+z_۱^n\right)$$

که اگر از دستور دوجمله‌ای نیوتن استفاده کنیم، جملهٔ عمومی به این صورت در می‌آید:

$$\frac{(z_۱+z_۲)^n}{n!}$$

به‌این ترتیب، جملهٔ عمومی رشتهٔ (۱۹)، بر جملهٔ عمومی رشتهٔ مربوط به $e^{z_۱+z_۲}$ منطبق است، و همین مطلب، قضیهٔ مربوط به درستی ضرب (۱۸) را ثابت می‌کند.

قضیهٔ مجموع و دستور *اولر*، این امکان را به وجود می‌آورند که بتوانیم تابع e^z را برحسب

تابع‌های با متغیر حقیقی و به صورت محدود (بدون رشته) بنویسیم. در واقع، با فرض $z=x+iy$، به دست می‌آید

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \ . \ e^{iy}$$

و چون

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

خواهیم داشت:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \qquad (۲۰)$$

این دستور، برای بررسی ویژگی‌های تابع e^z، خیلی اهمیت دارد. دو ویژگی آن را یادآوری می‌کنیم: ۱) تابع e^z، هرگز صفر نمی‌شود؛ در واقع $e^x \neq ۰$، و $\cos y$ و $\sin y$، که در دستور (۲۰) وارد شده‌اند، نمی‌توانند با هم برابر صفر شوند، ۲) تابع e^z، دورهٔ تناوبی برابر $۲\pi i$ دارد، یعنی

$$e^{z+ ۲\pi i} = e^z$$

حکم اخیر، از قضیهٔ ضرب و برابری زیر نتیجه می‌شود:

$$e^{۲\pi i} = \cos ۲\pi + i \sin ۲\pi = ۱$$

دستور (۱۷) امکان می‌دهد، تابع‌های $\cos z$ و $\sin z$ را در حوزهٔ مختلط بررسی کنیم. به خواننده پیشنهاد می‌کنیم ثابت کند که حوزهٔ مختلط، $\cos z$ و $\sin z$ دورهٔ تناوبی برابر ۲π دارند و قضیهٔ مربوط به سینوس و کسینوس مجموع دربارهٔ آن‌ها درست است.

مفهوم کلی تابع‌های با متغیر مختلط و دیفرانسیل‌گیری از تابع‌ها. به کمک رشته‌های توانی، می‌توان تابع‌های تحلیلی با متغیر مختلط را تعریف کرد. با وجود این، مطالعهٔ عمل‌های اساسی آنالیز، و در نوبت اول، عمل دیفرانسیل‌گیری برای تابع‌های دل‌خواه با متغیر مختلط، باید مورد توجه قرار گیرد. با این مطالعه، می‌توان حقیقت‌های بسیار زیادی را، که مربوط به مشتق‌گیری از تابع‌های با متغیر مختلط است، کشف کرد. همان‌طور که کمی بعد خواهیم دید، از یک طرف، تابعی که در همهٔ نقطه‌های حوالی نقطه‌ای مثل $z_۰$، مشتق اول داشته باشد، حتی در $z_۰$، مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر را هم خواهد داشت، و به‌جز آن، در این نقطه

قابل تبدیل به رشتهٔ توانی است، یعنی یک تابع تحلیلی است. به این ترتیب، با بررسی تابع‌های با متغیر مختلط که قابل دیفرانسیل‌گیری هستند، دوباره به کلاس تابع‌های تحلیلی می‌رسیم. از طرف دیگر، مطالعهٔ مشتق، طبیعت هندسی تابع با متغیر مختلط را به ما نشان می‌دهد و بستگی نظریهٔ تابع‌ها را، با معادله‌های فیزیک ریاضی روشن می‌کند.

به همین مناسبت، بعد از این، وقتی بگوییم تابعی در **نقطهٔ** z **تحلیلی** است، به این معناست که این تابع، در تمامی نقطه‌های حومه‌ای از z، دارای مشتق است.

به عنوان تعریف کلی تابع، می‌گوییم: متغیر مختلط w، تابعی از متغیر مختلط z است، وقتی که قانونی وجود داشته باشد، که به یاری آن بتوان مقدارهای w را، از روی مقدارهای مفروض z به دست آورد.

هر عدد مختلط $z=x+iy$، به وسیلهٔ نقطهٔ (x , y) واقع در صفحهٔ Oxy نشان داده می‌شود؛ در حالی که عددهای $w=u+iv$، نقطه‌هایی را مشخص می‌کنند که در صفحهٔ Ouv ــ صفحهٔ تابع‌ها ــ قرار دارند. به این ترتیب، از نظر هندسی، تابع با متغیر مختلط

$$w=f(z)$$

قانونی را معین می‌کند، که حاکی از بستگی بین نقطه‌های صفحهٔ Oxy آوندها و نقطه‌های صفحهٔ Ouv تابع‌هاست. به زبان دیگر، تابع با متغیر مختلط، نگاشت صفحهٔ متغیرها را به روی صفحهٔ تابع‌ها، می‌دهد. مفروض بودن تابع با متغیر مختلط، یعنی مفروض بودن تناظر بین زوج عددهای (x , y) و (u , v). بنابراین، هر تابع با متغیر مختلط، هم‌ارز است با دو تابع

$$u=\varphi(x , y) , \ v=\psi(x , y)$$

در ضمن، روشن است که

$$w=u+iv=\varphi(x , y)+i\psi(x , y)$$

از جمله، اگر داشته باشیم:

$$w=z^۲=(x+iy)^۲=x^۲-y^۲+۲ixy$$

خواهیم داشت:

$$u=\varphi(x , y)=x^۲-y^۲ , \ v=\psi(x , y)=۲xy$$

مشتق تابع با متغیر مختلط هم، از نظر صوری، درست مثل مشتق تابع با متغیر حقیقی، تعریف می‌شود. مشتق، عبارت است از حد نسبت نمو تابع به نمو متغیر

$$f'(z) = \underset{\Delta z \to 0}{\text{حد}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \qquad (۲۱)$$

به شرطی که این حد وجود داشته باشد.

شرط وجود مشتق‌های جزئی برای تابع‌های حقیقی u و v (که $w=f(z)$ را تشکیل داده‌اند)، نسبت به x و y، برای وجود مشتق از تابع $f(z)$، غیرکافی است. در واقع، حد نسبت نموها، بستگی به جهتی دارد، که نقطهٔ $z'=z+\Delta z$ را به نقطهٔ z نزدیک می‌کند (شکل ۳). برای وجود مشتق $f'(z)$، باید این حد به روش نزدیک شدن z' به z، بستگی نداشته باشد. برای نمونه، حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که z' به z موازی با محور Ox و یا موازی با محور Oy، نزدیک می‌شود.

در حالت اول

$$\Delta z = \Delta x$$

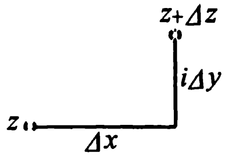
$$f(z + \Delta z) - f(z) = u(x + \Delta x\ , y) - u(x\ , y) + i\,[v(x + \Delta x\ , y) - v(x\ , y)]$$

و نسبت نموها

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{u(x + \Delta x\ , y) - u(x\ , y)}{\Delta x} + i\,\frac{v(x + \Delta x\ , y) - v(x\ , y)}{\Delta x}$$

به ازای $\Delta x \to 0$، به سمت حد

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (۲۲)$$



شکل ۳

میل می‌کند. در حالت دوم

$$\Delta z = i\Delta y$$

و نسبت نموها

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = -i\frac{u(x\,,y+\Delta y)-u(x\,,y)}{\Delta y} + \frac{v(x\,,y+\Delta y)-v(x\,,y)}{\Delta y}$$

در حد چنین می‌شود

$$\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (۲۳)$$

اگر تابع $w=f(z)$ مشتق داشته باشد، باید دو عبارتی که دست آمده است، برابر باشد، بنابراین

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (۲۴)$$

برقراری این معادله‌ها، شرط لازم برای وجود مشتق از تابع $w=u+iv$ است. در واقع، شرط‌های (۲۴)، نه تنها لازم، بلکه کافی هم هستند، ولی ما در اینجا به اثبات کافی بودن آن‌ها نمی‌پردازیم. شرط‌های (۲۴) را، معادله‌های ***کوشی ـ ریمان*** گویند.

به سادگی می‌توان روشن کرد، همهٔ قاعده‌های مربوط به دیفرانسیل‌گیری از تابع‌های با متغیر حقیقی، بدون هیچ تغییری دربارهٔ تابع‌های با متغیر مختلط هم به کار می‌رود. از جمله دیفرانسیل گرفتن از تابع z^n، مجموع، حاصل‌ضرب و خارج قسمت، به قوت خود باقی می‌ماند. خود نتیجه‌گیری این دستورها هم، با همان روش مربوط به تابع‌های با متغیر حقیقی انجام می‌گیرد، تنها در این‌جا باید به‌جای کمیت‌های حقیقی، از کمیت‌های مختلط صحبت کرد. بنابراین، هر چندجمله‌ای از z

$$w = a_۰ + a_۱ z + \cdots + a_n z^n$$

همیشه، یک تابع قابل دیفرانسیل‌گیری است. هر تابع گویایی که برابر با نسبت دو چندجمله‌ای باشد

$$w = \frac{a_۰ + a_۱ z + \cdots + a_n z^n}{b_۰ + b_۱ z + \cdots + b_m z^m}$$

در همهٔ نقطه‌هایی که مخرج را صفر نکند، قابل دیفرانسیل گرفتن است.

برای این‌که بتوانیم از تابع $w=e^z$ دیفرانسیل بگیریم، می‌توان از شرط **کوشی ـ ریمان** استفاده کرد. بنا بر دستور (۲۰) داریم:

$$u=e^x \cos y,\ v=e^x \sin y$$

که اگر تابع‌ها را در (۲۴) قرار دهیم، معلوم می‌شود، معادله‌های **کوشی ـ ریمان** برقرار است. مشتق را می‌توان از جمله از روی دستور (۲۲) محاسبه کرد. به دست می‌آید:

$$\frac{dw}{dz}=e^z$$

به کمک دستورهای (۱۷) می‌توان به سادگی، از تابع‌های مثلثاتی دیفرانسیل‌گیری کرد و با به کار بردن دستورهایی که از آنالیز می‌دانیم، مشتق آن‌ها را به دست آورد.

تابع $\ln z$. در این‌جا به‌بررسی همهٔ تابع‌های مقدماتی با متغیر مختلط نمی‌پردازیم؛ ولی آشناشدن با ویژگی‌های تابع $\ln z$ اهمیت زیادی دارد. شبیه حالت مربوط به حوزهٔ حقیقی، فرض می‌کنیم.

$$w=\ln z$$

به‌شرطی که داشته باشیم:

$$z=e^w$$

برای این‌که بتوانیم تابع $\ln z$ را بهتر تجزیه و تحلیل کنیم، عدد z را به صورت مثلثاتی آن می‌نویسیم:

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

از طرف دیگر داریم:

$$z=e^w=e^{u+iv}=e^u\ .\ e^{iv}=e^u(\cos v+i\sin v)$$

از مقایسهٔ این دو رابطه، به دست می‌آید:

$$e^u=r \qquad (\alpha)$$

$$\cos v+i\sin v=\cos\varphi+i\sin\varphi \qquad (\beta)$$

توجه داشته باشیم، u و r عددهایی حقیقی هستند. از دستور (α) نتیجه می‌شود

$$u = \ln r$$

که در آن $\ln r$ عبارت است از مقدار لگاریتم طبیعی عددی حقیقی. برابری (β) تنها وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$\cos v = \cos\varphi \ , \ \sin v = \sin\varphi$$

و برای این منظور، باید v و φ به اندازهٔ مضربی از 2π با هم اختلاف داشته باشند:

$$v = \varphi + 2\pi n$$

برابری (β) به ازای هر مقدار درست عدد n، برقرار است. براساس عبارت‌هایی که برای u و v به دست آوردیم، داریم:

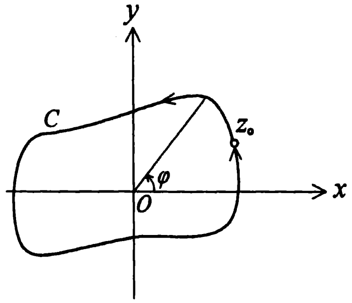
$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi n) \qquad (۲۵)$$

دستور (۲۵)، تابع $\ln z$ را، برای همهٔ مقدارهای عدد مختلط z، به‌جز صفر، تعریف می‌کند. و این، تعریف لگاریتم، نه تنها برای عددهای مثبت، بلکه در ضمن برای عددهای منفی و عددهای مختلط است.

عبارتی که برای تابع $\ln z$ به دست آوردیم، شامل عدد درست و دل‌خواه n است. و این، به معنای آن‌ست که $\ln z$، یک تابع چندارزشی است و به ازای هر مقدار n، یکی از مقدارهای ممکن تابع $\ln z$ به دست می‌آید. اگر n را مقدار ثابتی بگیریم، در آن‌صورت، یکی از مقدارهای ممکن این تابع را به دست می‌آوریم.

با وجود این، مقدارهای مختلف $\ln z$ به طور طبیعی با هم بستگی دارند. در واقع، برای نمونه، مقدار $n=0$ را در نقطهٔ z_0 تثبیت می‌کنیم. حالا، فرض کنید که z به طور پیوسته روی منحنی بستهٔ C، که مبداء مختصات را دور زده است، حرکت می‌کند و به نقطهٔ z_0 برمی‌گردد (شکل ۴). ضمن حرکت z، زاویهٔ قطبی φ به طور پیوسته بزرگ می‌شود، و بعد از آن‌که نقطهٔ z تمامی دور بستهٔ C را طی کند، مقدار φ به 2π می‌رسد. به این ترتیب، اگر مقدار لگاریتم را در نقطهٔ z_0 معین کنیم

$$(\ln z)_0 = \ln r_0 + i\varphi_0$$



شکل ۴

و این مقدار را، ضمن حرکت z روی منحنی بسته‌ای که مبداء مختصات را دور می‌زند، به طور پیوسته تغییر دهیم، وقتی به نقطهٔ z_0 برسیم، مقدار دیگری از تابع به دست می‌آید:

$$(\ln z)_0 = \ln r_0 + i(\varphi_0 + ۲\pi)$$

این مطلب ثابت می‌کند که می‌توان به طور پیوسته از هر مقدار $\ln z$ به مقدار دیگری از آن رسید. برای این منظور، باید نقطهٔ M، به طور پیوسته، مبداء مختصات را به تعداد لازم دور بزند. نقطهٔ $z=0$ را **نقطهٔ شاخه** برای تابع $\ln z$ گویند.

اگر بخواهیم بررسی خود را تنها به یکی از مقدارهای $\ln z$ محدود کنیم، باید نقطهٔ z را از رسم منحنی‌های بسته‌ای که نقطهٔ $z=0$ را احاطه کرده‌اند، منع کرد. این کار را به این ترتیب می‌توان انجام داد که از مبداء مختصات، خط پیوسته‌ای به سمت بی‌نهایت رسم می‌کنیم و مراقبت می‌کنیم که نقطهٔ z، این خط را، که **مقطع** نامیده می‌شود، قطع نکند. اگر z در صفحه‌ای که این چنین بریده شده، تغییر کند، دیگر نمی‌توان عبور پیوسته‌ای از یک مقدار $\ln z$ به مقدار دیگر آن، به دست آورد و با آغاز از مقدار معینی از لگاریتم در نقطه‌ای مثل z_0، در هر نقطه، تنها یک مقدار از لگاریتم به دست می‌آید. این مقدار مشخص تابع $\ln z$ را، شاخهٔ یک‌ارزشی آن گویند.

به عنوان نمونه، اگر مقطع در طول بخش منفی محور Ox رسم شده باشد، شاخهٔ یک‌ارزشی $\ln z$ را به دست می‌آوریم، که تغییر آوند آن در حدود

$$(۲k-۱)\pi < \varphi \leq (۲k+۱)\pi$$

محدود شده است (k عدد درست دل‌خواهی است).

با در نظر گرفتن شاخهٔ یک‌ارزشی لگاریتم، می‌توان قابلیت دیفرانسیل‌گیری از آن را،

مطالعه کرد. با فرض

$$r=\sqrt{x^{2}+y^{2}} \quad , \quad \varphi=\arctan\frac{y}{x}$$

به سادگی معلوم می‌شود که $\ln z$ در شرط **کوشی ـ *ریمان*** صدق می‌کند و مشتق آن، از جمله با محاسبهٔ به وسیلهٔ دستور (۲۲)، برابر است با

$$\frac{d\ln z}{dz}=\frac{1}{z}$$

تأکید می‌کنیم، مشتق $\ln z$ هم، یک تابع یک‌ارزشی است.

۲. بستگی تابعِ با متغیر مختلط با مسأله‌های فیزیک ریاضی

بستگی با مسأله‌های هیدرودینامیک. شرط‌های *کوشی ـ ریمان*، بستگی مسأله‌های فیزیک ریاضی را با نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط، برقرار می‌کند. این مطلب را، روی مسأله‌های هیدرودینامیک روشن می‌کنیم.

بین همهٔ حرکت‌های ممکن محیط مایع، ***حرکت‌های دائمی*** (یا پایا) نقش اساسی دارد و به حرکت‌هایی از مایع گفته می‌شود که برای آن‌ها، توزیع سرعت‌ها در فضا، در جریان زمان، تغییر نمی‌کند. از جمله، ناظری که روی پل ایستاده است و به جریان رودخانه از پشت پایهٔ پل نگاه می‌کند، طرحی از جریان دائمی را می‌بینید. گاهی، برای ناظری که همراه یک جسم حرکت می‌کند، جریانی دایمی است. اگر ضمن حرکت یک کشتی، تلاطمی که در آب به وجود می‌آید، به وسیلهٔ ناظری که در ساحل ایستاده است، دیده شود، برای او نمای حرکت آب، دایمی نیست، در حالی که برای ناظری که روی کشتی است، جریان آب، دائمی به نظر می‌رسد. برای مسافرانی هم که در هواپیما نشسته‌اند، به شرطی که هواپیما، سرعت ثابتی داشته باشد، تلاطمی که در هوا به وسیلهٔ هواپیما به وجود می‌آید، یک حرکت دایمی است.

در حرکت دایمی، بردار سرعت V اجزاء مایع، که از نقطهٔ مفروضی در فضا می‌گذرند، در جریان زمان تغییر نمی‌کند. اگر حرکتی برای ناظری متحرک دایمی باشد، بردار سرعت در جریان زمان، در نقطه‌هایی که در دستگاه مختصاتی (که همراه با ناظر حرکت می‌کند)،

مختصات ثابتی دارد، تغییر نمی‌کند.

بین حرکت‌های مایع، ***دسته‌حرکت‌های موازی با صفحه***، اهمیت زیادی به دست آورده است. این، جریانی است که در آن، سرعت ذره‌ها، در همه جا موازی با یک صفحه و توزیع سرعت در تمامی صفحه‌هایی که موازی با صفحه مفروض‌اند، یکنواخت باشد.

اگر پیش خود، تودهٔ بی‌پایانی مایع را در نظر بگیریم، که دور یک جسم استوانه‌ای و عمود بریک مولد آن جاری باشد، در همهٔ سطح‌هایی که عمود بر مولد استوانه باشند، توزیع سرعت‌ها، یکنواخت و حرکت مایع موازی با صفحه خواهد بود. گاهی هم می‌توان حرکت مایع را، به تقریب موازی با صفحه دانست. برای نمونه، اگر بخواهیم طرح سرعت جریان هوا را، در صفحه‌ای که عمود بر هواپیماست، معین کنیم، در حالتی که این صفحه خیلی نزدیک به تنه یا بال هواپیما نباشد، حرکت هوا را می‌توان به تقریب موازی با صفحه به حساب آورد.

می‌خواهیم نشان دهیم که چگونه می‌توان نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط را، برای مطالعهٔ جریان‌های دایمی موازی با صفحهٔ مایع‌ها به کار برد. در ضمن، مایع را تراکم‌ناپذیر به حساب می‌آوریم، یعنی چگالی آن، با تغییر فشار، تغییر نمی‌کند. از جمله، آب دارای چنین خاصیتی است، ولی حتی هوا را هم می‌توان ضمن مطالعهٔ حرکت‌های آن، تراکم‌ناپذیر به حساب آورد، به شرطی که سرعت حرکت، خیلی زیاد نباشد. فرضیهٔ تراکم‌ناپذیری هوا، به شرطی منجر به خطای بارزی نمی‌شود که سرعت حرکت از ۰٫۶ تا ۰٫۸ سرعت صوت تجاوز نکند (سرعت صوت برابر ۳۳۰ متر در ثانیه است).

جریان مایع، به وسیلهٔ توزیع سرعت ذره‌های آن، مشخص می‌شود. اگر جریان موازی با صفحه باشد، کافی است سرعت ذره‌ها را در یکی از صفحه‌هایی که حرکت موازی با آن انجام می‌گیرد، بدانیم.

$V(x\,,\ y\,,\ t)$ را، بُردار سرعت ذره‌ای می‌گیریم که در لحظهٔ t از نقطهٔ با مختصات $(x\,,\ y)$ عبور کرده باشد. در حالتی که در این جا بررسی می‌کنیم، حرکت دایمی V، بستگی به زمان ندارد. مسیر ذره‌های مایع را بررسی می‌کنیم. در حالت حرکت دائمی، مسیر ذره‌هایی که از نقطهٔ مفروض فضا، صادر شده‌اند، در طول زمان تغییر نمی‌کند. اگر دامنهٔ سرعت‌ها معلوم باشد، یعنی مولفه‌های سرعت را به عنوان تابعی از x و y بشناسیم، می‌توانیم مسیر ذره‌ها را، با استفاده از این مطلب که همیشه سرعت ذره بر مسیر آن مماس است، معین کنیم. به دست می‌آید.

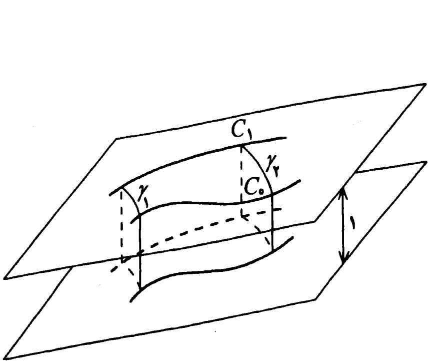
$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x,y)}{u(x,y)}$$

و این، معادلهٔ دیفرانسیلی مسیر است. مسیرهای ذره‌های با حرکت دایمی را ***منحنی‌های جریان*** گویند.

مفهوم «تابع جریان» هم، اهمیت زیادی دارد. یکی از منحنی‌های جریان، مثل C_0 را، ثابت می‌گیریم، و کانال فرضی را در نظر می‌گیریم که از یک طرف به سطح‌های استوانه‌ای (با مولدهایی عمود بر صفحهٔ جریان) که از منحنی جریان C_0 و منحنی جریان دیگری مثل C_1 می‌گذرد، و از طرف دیگر، به دو صفحه‌ای که موازی صفحهٔ حرکت و به فاصلهٔ واحد از یکدیگر قرار دارند، محدود شده باشد (شکل ۵).اگر دو مقطع عرضی دل‌خواه از این کانال را در نظر بگیریم ــ مقطع‌های مشخص γ_1 و γ_2 ــ مقدار مایعی که از مقطع‌های γ_1 و γ_2 در واحد زمان جاری می‌شود، برای دو مقطع یکی خواهد بود. در واقع، در داخل حجمی، که با دیواره‌های C_1 ، C_0 و γ_1، γ_2 مشخص شده است، مقدار مایع با چگالی ثابت، نمی‌تواند تغییر کند. از طرف دیگر، دیواره‌های کناری C_0 و C_1، با منحنی‌های جریان درست شده‌اند و بنابراین، مایع از توی آن‌ها نفوذ نمی‌کند، و در نتیجه، همان مقدار مایعی که در واحدزمان به γ_1 وارد می‌شود، از γ_2 خارج خواهد شد.

تابع جریان، که $\psi(x,y)$ نامیده می‌شود و روی منحنی جریان C_1 مقدار ثابتی را قبول می‌کند، برابر است با مقدار مایعی که در واحد زمان از مقطع عرضی کانالی که روی منحنی‌های C_0 و C_1 ساخته است، جریان پیدا می‌کند.

تابع جریان را می‌توان تا هر مقدار ثابت دل‌خواهی بسته به انتخاب منحنی جریان آغازی C_0، مشخص کرد. اگر تابع جریان معلوم باشد، روشن است که معادلهٔ منحنی جریان، چنین



شکل ۵

خواهد بود:

$$\psi(x,y) = C \qquad \text{(مقدار ثابت)}$$

مؤلفه‌های سرعت جریان، برحسب مشتق‌های تابع جریان، بیان می‌شوند. برای این‌که این عبارت‌ها را به دست آوریم، کانالی را در نظر می‌گیریم که از منحنی جریان C ـ که از نقطهٔ $M(x,y)$ عبور کرده است ـ و منحنی جریان C' ـ که از نقطهٔ $M'(x, y+\Delta y)$ نزدیک به آن گذشته است ـ و دو صفحهٔ موازی صفحهٔ حرکت ـ که به فاصلهٔ واحد از یکدیگر قرار دارند ـ تشکیل شده باشد. مقدار مایع q را که در زمان dt از مقطع عرضی MM' کانال جریان دارد، محاسبه می‌کنیم.

از یک طرف، با توجه به تعریف تابع جریان داریم:

$$q = (\psi' - \psi)\, dt$$

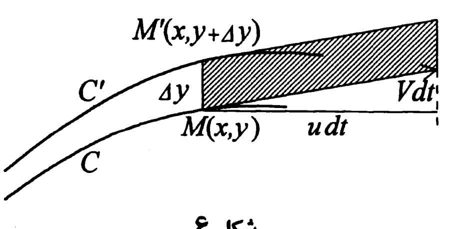
از طرف دیگر، q برابر است با (شکل ۶)، حجم جسمی که از رسم بُردار Vdt، در هر نقطهٔ مقطع MM' به دست می‌آید. اگر MM' کوچک باشد، می‌توانیم V را در تمامی MM' ثابت و برابر با مقدار آن در نقطهٔ M بگیریم. مساحت قاعدهٔ متوازی‌السطوحی که به دست می‌آید، برابر است با $\Delta y \times ۱$ (روی شکل ۶، ضخامت واحد قشر، نشان داده نشده است)، و ارتفاع آن ـ تصویر بردار Vdt روی محور Ox ـ برابر است با $u\,dt$؛ به این ترتیب

$$q \approx u\,\Delta y\, dt$$

و بنابراین

$$u\,\Delta y \approx \Delta \psi$$

اگر دو طرف این برابری را بر Δy تقسیم کنیم، بعد از عبور به حد، به دست می‌آید



شکل ۶

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad (۲۶)$$

همین استدلال را می‌توان دربارهٔ مؤلفهٔ دوم هم به کار برد

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (۲۶')$$

برای تعریف میدان سرعت‌ها، در کنار تابع جریان، تابع دیگری را هم وارد می‌کنیم. ورود این تابع، بستگی به بررسی چرخش ذرات کوچک مایع دارد. اگر فرض کنیم که ذرهٔ کوچک جداگانه‌ای از مایع، سفت و محکم شده باشد، در حالت کلی دارای حرکت چرخشی خواهد بود. با وجود این، اگر حرکت مایع از حالت آرام به وجود آمده باشد و در ضمن از اصطکاک درونی بین ذره‌های مایع صرف‌نظر کنیم، به نظر می‌رسد، چرخش ذره‌ها، نمی‌تواند در مایع پیدا شود. چنین حرکت‌های بدون چرخش ذره‌ها را، حرکت‌های ***بی‌تلاطم*** نامند، و در مطالعهٔ حرکت جسم‌ها در مایع، نقش اساسی به عهده دارد. در هیدرومکانیک ثابت می‌شود برای حرکت‌های بی‌تلاطم، تابع دوم $\varphi(x\ ,\ y)$ وجود دارد که می‌توان مؤلفه‌های سرعت را برحسب آن به وسیلهٔ فرمول‌های

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x},\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad (۲۷)$$

بیان کرد. تابع φ را، ***پتانسیل سرعت‌های*** جریان گویند و ما در این‌جا، به مطالعهٔ حرکت‌های با پتانسیل سرعت‌ها می‌پردازیم.

مقایسهٔ دستور مؤلفه‌های سرعت برحسب تابع جریان و برحسب پتانسیل سرعت‌ها، به نتیجه بسیار جالب زیر منجر می‌شود.

پتانسیل سرعت‌ها ـ $\varphi(x\ ,\ y)$ ـ و تابع جریان ـ $\psi(x\ ,\ y)$ ـ از مایع تراکم‌ناپذیر، در معادلهٔ ***کوشی ـ ریمان*** صدق می‌کند

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (۲۸)$$

به زبان دیگر، تابع با متغیر مختلط

$$w = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$$

عبارت است از تابعی با متغیر مختلط، که قابل دیفرانسیل‌گیری است. برعکس: اگر از تابع با

متغیر مختلط دل‌خواهی آغاز کنیم که قابل دیفرانسیل‌گیری باشد، در آن صورت، بخش حقیقی و بخش موهومی آن، در شرط **کوشی ـ ریمان** صدق می‌کند و می‌تواند به عنوان پتانسیل سرعت‌ها و تابع جریان مایع تراکم‌ناپذیر، بررسی شود. تابع w را ***تابع مفسر جریان مایع*** گویند.

مفهوم مشتق w را هم، بررسی می‌کنیم. برای نمونه، با استفاده از دستور (۲۲) داریم:

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

با توجه به دستورهای (۲۷) و (′۲۶) به دست می‌آید

$$\frac{dw}{dz}=u-iv$$

و یا، اگر به مزدوج کمیت مختلط برویم:

$$u+iv=\left(\overline{\frac{dw}{dz}}\right) \qquad (۲۹)$$

خطی که بالای $\frac{dw}{dz}$ کشیده‌ایم، به این معناست که باید مزدوج آن را در نظر گرفت.

به این ترتیب، بُردار سرعت برابر است با مزدوج مقدار مشتق تابع مفسر جریان.

مثال‌هایی برای جریان‌های موازی با صفحهٔ مایع. چند مثال را بررسی می‌کنیم. فرض کنید

$$w=Az \qquad (۳۰)$$

که در آن ، A عبارت است از کمیت مختلط. از (۲۹) نتیجه می‌شود

$$u+iv=\overline{A}$$

به این ترتیب، تابع خطی (۳۰)، جریان مایع با بُردار ثابت سرعت را معین می‌کند. اگر فرض کنیم

$$A=u_0-iv_0$$

با جدا کردن بخش حقیقی و موهومی w، خواهیم داشت:

$$\varphi(x, y) = u_{\circ}x + v_{\circ}y$$

$$\psi(x, y) = u_{\circ}y - v_{\circ}x$$

به این ترتیب، منحنی‌های جریان، خط‌های راستی موازی بردار سرعت هستند (شکل ۷).

به عنوان مثال دوم، تابع

$$w = Az^{2}$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن، مقدار ثابت A، حقیقی است. برای این‌که طرح جریان مایع را مشخص کنیم، منحنی جریان را معین می‌کنیم. در این حالت

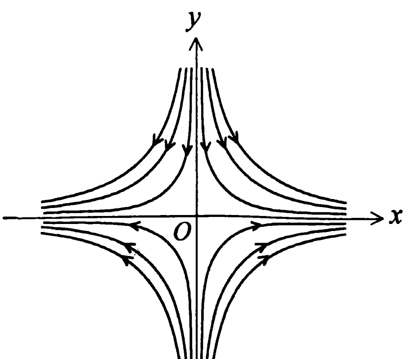
$$\psi(x,y) = 2Axy$$

و معادلهٔ منحنی جریان، چنین می‌شود:

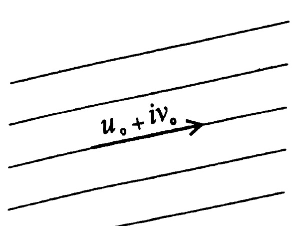
$$xy = C \qquad \text{(مقدار ثابت)}$$

و این، یک هذلولی است که محورهای مختصات، مجانب‌های آن هستند (شکل ۸). پیکان‌ها، نشان می‌دهد که به ازای $A > \circ$، حرکت ذرات، روی منحنی جریان در چه جهتی است. محورهای Ox و Oy هم منحنی‌های جریان هستند.

اگر اصطکاک در مایع خیلی کم باشد، با تبدیل یک منحنی جریان به دیوارهٔ ثابت، بقیهٔ جریان مایع دچار اختلال نمی‌شود، و ذره‌های مایع در طول این دیواره خواهند لغزید. با



شکل ۸



شکل ۷

استفاده‌از این‌اصل، و ردیف‌کردن دیواره‌ها در طول‌محورهای مختصات (روی شکل ۸ آن‌ها را با خط‌های کلفت‌تر نشان‌داده‌ایم)، در مثال ما، طرح حرکت بی‌تلاطم مایع به‌دست می‌آید.

حالت مهمی از جریان را، می‌توان به وسیلهٔ رابطهٔ

$$w = a\left(z + \frac{R^{2}}{z}\right) \qquad (31)$$

به دست آورد، که در آن a و R ، کمیت‌های حقیقی و مثبت هستند.

تابع جریان چنین است:

$$\psi = a\left(y - \frac{R^{2}y}{x^{2}+y^{2}}\right)$$

و بنابراین، معادلهٔ منحنی جریان، چنین می‌شود:

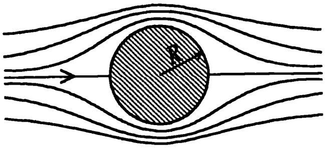
$$y - \frac{R^{2}y}{x^{2}+y^{2}} = C \quad \text{(مقدار ثابت)}$$

در حالت خاصی که مقدار ثابت را برابر صفر بگیریم، یا $y=0$ و یا $x^2+y^2=R^2$ به دست می‌آید؛ بنابراین، دایرهٔ به شعاع R، منحنی جریان است. اگر درون این منحنی از جریان را، به جسم سختی تبدیل کنیم، جریانی نزدیک به استوانهٔ دوّار به دست می‌آید. طرح منحنی جریان این حرکت، در شکل ۹ نشان داده شده است. سرعت جریان را می‌توانیم از دستور (۲۹) معین کنیم.

$$u + iv = a\left(1 - \frac{R^{2}}{z^{2}}\right)$$

وقتی از استوانه دور باشیم، به دست می‌آید

$$\lim_{z\to\infty}(u+iv) = a$$



شکل ۹

یعنی در جایی که از استوانه دور باشد، سرعت به سمت مقدار ثابتی میل می‌کند، و بنابراین، جریان یکنواخت می‌شود. به این ترتیب، از روی دستور (۲۹) معلوم می‌شود، حرکت مایع در فاصلهٔ دور از جریان استوانه‌ای، یکنواخت است.

اندیشه‌های بنیایی نظریهٔ بال هواپیما. قضیهٔ ژوکوسکی. کاربرد نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط در بررسی جریان‌های مایع موازی با صفحه، *ن.ا.* **ژوکوسکی** و *س. آ.* **چاپلیگین** را به طرف کشف بسیار مهمی در آیرودینامیک، هدایت کرد. بررسی حرکت جسم‌ها، آن‌ها را به کشف قانون تولید نیروی بالارونده بال هواپیما، رسانید. برای این‌که تصوری از مسیر اندیشه‌ای که منجر به این کشف شد، داشته باشیم، باید هنوز یک نمونهٔ مشخص از جریان مایع را بررسی کنیم. تابع مفسر

$$w = \frac{\Gamma}{۲\pi i} \ln z$$

را در نظر می‌گیریم که در آن، Γ عبارت است از مقداری ثابت و حقیقی. با وجودی که تابع w، تابعی یک‌ارزشی (یک‌جوابی) نیست، مشتق آن

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\Gamma}{۲\pi i} \cdot \frac{۱}{z} \qquad (۳۲)$$

یک‌ارزشی است، و بنابراین تابع ما، حوزهٔ سرعت‌های جریانی از مایع را، به طور یک‌ارزشی، معین می‌کند. با فرض $z=re^{i\theta}$، پتانسیل سرعت‌ها و تابع جریان را می‌توان به کمک دستور (۲۵) محاسبه کرد.

$$\varphi = \frac{\Gamma}{۲\pi}\theta \, , \, \psi = -\frac{\Gamma}{۲\pi}\ln r$$

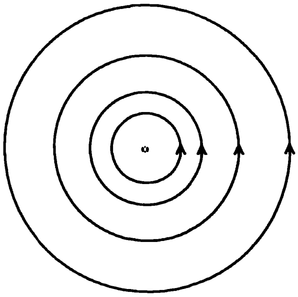
دستور دوم نشان می‌دهد که منحنی‌های جریان، عبارت‌اند از دایره‌های «$r=k$» (شکل ۱۰).

سرعت جریان، به کمک دستور (۲۹) به دست می‌آید.

$$u + iv = -\frac{\Gamma}{۲\pi i} \cdot \frac{۱}{z}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود، مقدار بُردار سرعت عبارت است از

$$V = |u + iv| = \frac{|\Gamma|}{۲\pi} \cdot \frac{۱}{r}$$



شکل ۱۰

یعنی، سرعت روی هر منحنی جریان، مقداری است ثابت. به‌جز این، بررسی مفصل‌تر نشان می‌دهد که جریان به ازای $\Gamma>0$، برخلاف حرکت عقربه‌های ساعت و به ازای $\Gamma<0$، در جهت آن است.

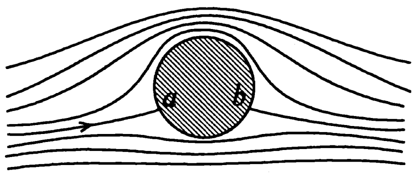
اگر یکی از منحنی‌های جریان را، با مرز محکم و سختی عوض کنیم، حرکت دورانی مایع در نزدیکی استوانه به دست می‌آید. چنین حرکتی را **حرکت چرخشی** گویند.

پتانسیل این حرکت هم، تابعی یک‌ارزشی نخواهد بود. ضمن دور زدن محیط بسته در نزدیکی استوانه، پتانسیل به اندازه Γ تغییر می‌کند. این تغییر پتانسیل را ***چرخش جریان*** گویند.

اگر به تابع (۳۱)، که مفسر جریانی است که استوانه را دور می‌زند، تابع مفسر جریان چرخشی را (در جهت حرکت عقربه‌های ساعت) اضافه کنیم، تابع مفسر تازه‌ای به دست می‌آوریم

$$w=a\left(z+\frac{R^2}{z}\right)-\frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z \qquad (۳۳)$$

این تابع مفسر هم عبارت است از جریانی در نزدیکی استوانهٔ به شعاع R. در واقع، تابع جریان روی محیط دایرهٔ به شعاع R ثابت است، زیرا ضریب بخش‌های موهومی هر دو جمله، روی محیط این دایره، مقداری است ثابت. سرعت جریانی که به وسیلهٔ تابع (۳۳) مشخص می‌شود، دوباره به ازای $z\to\infty$ به سمت صفر میل می‌کند. و این ثابت می‌کند، تابع مفسر (۳۳)، به ازای هر مقدار Γ، حرکت به دور استوانه را به وسیلهٔ جریان مستقیم‌الخطی، معین می‌کند. روی شکل ۱۱ خصلت چنین جریانی برای $\Gamma>0$ نشان داده شده است. این جریان، متقارن نیست، و نقطه‌های a و b ورود و خروج جریان، در پایین قرار گرفته‌اند.

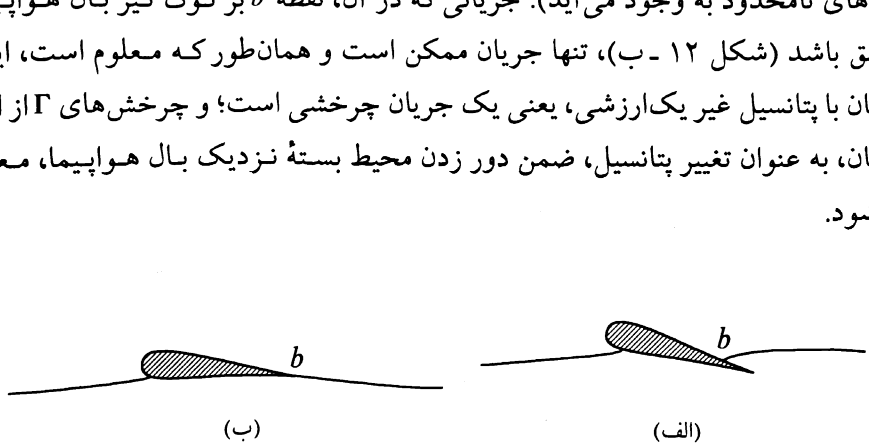


شکل ۱۱

پتانسیل جریان، تابعی چندارزشی است، و تغییر آن، ضمن دورزدن استوانه برابر است با Γ.

ضمن دور زدن استوانه، به خاطر وجود تقارن، اغلب به جریان متقارنی می‌رسیم، که با دستور (۳۲) معین شده است؛ ولی برای جسم‌های دیگری که متقارن نیستند، جریانی به وجود می‌آید که با پتانسیل چندارزشی هستند. ما در اینجا، مبانی فیزیکی این حقیقت را روشن می‌کنیم. روش‌های مربوط به نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط، این امکان را به وجود می‌آورد که بتوانیم جریان‌های ممکن را در نزدیکی هر شکل دل‌خواهی از جسم‌ها، معین کنیم. در بند بعدی، از این روش‌ها گفت‌وگو خواهیم کرد. شبیه حالت استوانه، در کنار هر جسم دیگری هم می‌توان جریان‌هایی با پتانسیل یک‌ارزشی و چندارزشی ساخت.

برای مطالعهٔ حرکت بال هواپیما، با جسم‌هایی سروکار داریم که در عقب خود، لبه‌های تیزی دارند. مقطع بال هواپیما همیشه از عقب، نوک‌تیز است. اگر برای چنین مقطعی، جریانی با پتانسیل یک‌ارزشی بسازیم، معلوم می‌شود که نقطهٔ خروج جریان از مقطع، بر نوک تیز آن منطبق نیست (شکل ۱۲ ـ الف). به نظر می‌رسد، چنین جریانی، از لحاظ فیزیکی ممکن نیست (در چنین جریانی، در نوک تیز مقطع، سرعت‌های نامحدود و افت‌های نامحدود به وجود می‌آید). جریانی که در آن، نقطهٔ b بر نوک تیز بال هواپیما منطبق باشد (شکل ۱۲ ـ ب)، تنها جریان ممکن است و همان‌طور که معلوم است، این جریان با پتانسیل غیر یک‌ارزشی، یعنی یک جریان چرخشی است؛ و چرخش‌های Γ از این جریان، به عنوان تغییر پتانسیل، ضمن دور زدن محیط بستهٔ نزدیک بال هواپیما، معین می‌شود.



شکل ۱۲

حکم مربوط به قابل اجرا بودن جریان در کنار مقطع بال، با خروج جریان از عقبهٔ تیز، به نام *اصل چاپلیگین* معروف شده است.

کشف مهم **ژوکوسکی** این است که: با وجود چرخش در جریان، نیروی بالابرنده‌ای پدید می‌آید که در جهت عمود بر سرعت a از جریان، عمل می‌کند و برابر است با $\rho a\Gamma$ که در آن، ρ عبارت است از چگالی محیط و Γ چرخش جریان (شکل ۱۳).

این حکم، محتوی قضیهٔ **ژوکوسکی** را دربارهٔ نیروی بالا برندهٔ بال تشکیل می‌دهد، که اساس تمامی آیرودینامیک امروزی است. ما، اثبات قضیهٔ **ژوکوسکی** را نمی‌آوریم، و همین‌قدر یادآور می‌شویم که اثبات کلی این قضیه، بر نظریهٔ انتگرال‌های تابع‌های با متغیر مختلط، متکی است.

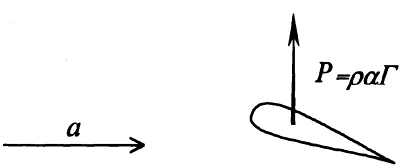
مبانی آیرودینامیک، که در کارهای **ژوکوسکی** و **چاپلیگین** دیده می‌شود، به وسیلهٔ دانشمندان شوروی، تکامل زیادی پیدا کرد.

کاربرد در مسأله‌های دیگر فیزیک ریاضی. نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط، به‌جز نظریهٔ بال‌ها، در بسیاری از مسأله‌های دیگر هیدرودینامیک هم، کاربردهای فراوان پیدا کرده است.

ولی، میدان کاربرد نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط، محدود به هیدرودینامیک نمی‌شود: این کاربرد، خیلی گسترده‌تر است و روش‌های آن در بسیاری از مسأله‌های فیزیک ریاضی قابل استفاده است. برای روشن شدن این مطلب، به شرط *کوشی ـ ریمان* برمی‌گردیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

و از آن‌ها، معادله‌ای را در می‌آوریم که برای آن، بخش حقیقی تابع تحلیلی با متغیر مختلط، سازگار باشد. اگر از نخستین این معادله‌ها نسبت به x و از دومین آن‌ها نسبت به y دیفرانسیل بگیریم و با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:



شکل ۱۳

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

این معادله (که در بخش ششم هم با آن برخورد کرده بودیم)، ***معادلهٔ لاپلاس*** نامیده می‌شود. بسیاری از مسأله‌های فیزیک و مکانیک، به همین معادلهٔ لاپلاس مربوط می‌شود. از جمله، اگر در جسمی، تعادل حرارتی برقرار باشد، در آن صورت دما در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. مطالعهٔ میدان جاذبه، یا میدان الکتروستاتیک، به همین معادله مربوط می‌شود. همچنین برای بررسی تصفیه مایع، از طریق محیط شبکه‌ای، به معادلهٔ لاپلاس می‌رسیم. در همهٔ این مسأله‌هایی که، مطالعهٔ آن‌ها به حل معادلهٔ لاپلاس مربوط می‌شود، روش‌های نظریهٔ تابع‌ها، نقش بسیار گسترده‌ای پیدا می‌کند.

نه تنها بررسی معادلهٔ لاپلاس، بلکه بررسی معادله‌های عمومی‌تر فیزیک ریاضی هم، می‌توانند با نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط، بستگی داشته باشند. یکی از مهم‌ترین نمونه‌ها از این قبیل، مسألهٔ مسطحهٔ نظریهٔ کشسانی (ارتجاع‌پذیری) است. مبانی کاربرد تابع‌های با متغیر مختلط در این زمینه، به وسیلهٔ ***گ. و. کولوسودی*** و ***ن. ای. موس‌خه‌لیش‌ویل***، دانشمندان شوروی، پایه‌گذاری شده است.

۳. بستگی تابع‌های با متغیر مختلط با هندسه

ویژگی‌های هندسی تابع‌های دیفرانسیل‌پذیر. همان‌طور که ضمن مطالعهٔ تابع‌های با متغیر حقیقی دیدیم، تعبیر هندسی تابع‌ها، نقش بزرگی در نظریهٔ تابع‌های تحلیلی به عهده دارند. به جرات می‌توان گفت ویژگی‌های هندسی تابع‌های با متغیر مختلط، نه تنها موجب تجسم عینی خاصیت‌های تحلیلی تابع‌ها می‌شود، بلکه موضوع‌های خاص دیگری را هم در این نظریه، مطرح می‌کند. به مجموعهٔ موضوع‌هایی که به ویژگی‌های هندسی تابع‌ها مربوط می‌شود، ***نظریهٔ هندسی تابع‌ها*** نام داده‌اند. همان‌طور که گفته‌ایم، از دیدگاه هندسی، تابع با متغیر مختلط $w=f(z)$، عبارت است از نگاشت صفحهٔ z به روی صفحهٔ w. این نگاشت را، به وسیلهٔ دو تابع با متغیر حقیقی هم، می‌توان داد

$$u=u(x,y)\ ,\ v=v(x,y)$$

اگر بخواهیم خصلت نگاشت را در حومهٔ بسیار کوچکی از یک نقطه مطالعه کنیم، می‌توانیم این تابع‌ها را به رشتهٔ **تیلور** بسط دهیم و خود را به جمله‌های اصلی بسط محدود کنیم:

$$u-u_\circ=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\circ(x-x_\circ)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_\circ(y-y_\circ)+\cdots$$

$$v-v_\circ=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\circ(x-x_\circ)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_\circ(y-y_\circ)+\cdots$$

که در آن‌ها، مشتق‌ها را در نقطهٔ $(x_\circ\,,\,y_\circ)$ انتخاب کرده‌ایم. بنابراین، در نزدیکی یک نقطه، هر نگاشت را می‌توان، به تقریب، به عنوان نگاشت آفینی[1]، در نظر گرفت

$$u-u_\circ=a(x-x_\circ)+b(y-y_\circ)$$

$$v-v_\circ=c(x-x_\circ)+d(y-y_\circ)$$

که در آن داریم:

$$a=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\circ\ ,\ b=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_\circ$$

$$c=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_\circ\ ,\ d=\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_\circ$$

ویژگی نگاشت تابع تحلیلی را، در نزدیکی نقطه‌ای مثل $z=x+iy$ بررسی می‌کنیم. فرض کنید C منحنی باشد که از نقطه z گذشته است؛ و در صفحهٔ w، نقطهٔ متناظر آن، منحنی Γ را تشکیل دهد که از نقطهٔ w گذشته است. اگر z' نقطه‌ای در مجاور z و w' نقطهٔ متناظر آن باشد، وقتی $z'\to z$، خواهیم داشت $w'\to w$ و

$$\frac{w'-w}{z'-z}\to f'(z) \tag{۳۴}$$

و از آن‌جا، در حالت خاص، نتیجه می‌شود

$$\frac{|w'-w|}{|z'-z|}\to|f'(z)| \tag{۳۵}$$

که آن را به ترتیب زیر می‌توان منظم کرد.

---

۱. بخش سوم (جلد اول) بند ۱۱ را ببینید.

حد نسبت طول‌های وترهای متناظر در صفحهٔ w و در صفحهٔ z در نقطهٔ z، برای همهٔ منحنی‌هایی که از نقطهٔ مفروض z گذشته‌اند، یکی است؛ به زبان دیگر، نسبت عنصرهای خطی روی صفحهٔ w و روی صفحهٔ z در هر نقطهٔ مفروض، بستگی به منحنی که از نقطهٔ z گذشته است، ندارد.

مقدار $|f'(z)|$، که معرف افزایش عنصرهای خطی در نقطهٔ z است، ***ضریب انبساط*** در نقطهٔ z نامیده می‌شود.

اکنون فرض می‌کنیم، در نقطه‌ای مثل z، مشتق $f'(z) \neq 0$ باشد، در این‌صورت، مقدار $f'(z)$، آرگومان (آوند) مشخصی دارد[1]. با استفاده از (۳۴)، آن را محاسبه می‌کنیم:

$$\arg \frac{w' - w}{z' - z} = \arg (w' - w) - \arg (z' - z)$$

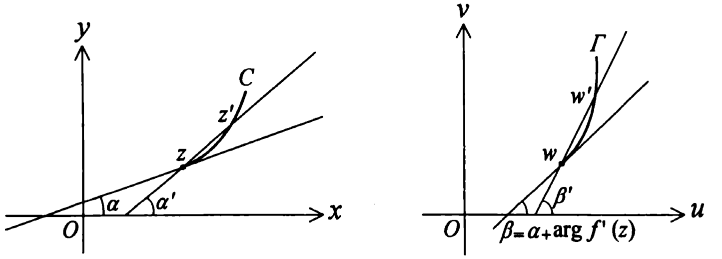
ولی $\arg (w' - w)$ عبارت است از زاویهٔ β' وتر ww' با محور حقیقی، و $\arg (z' - z)$ عبارت است از زاویهٔ α' وتر zz' با محور حقیقی. اگر زاویهٔ متناظر مماس‌های در نقطه‌های z و w را بر منحنی‌های C و Γ به ترتیب α و β بگیریم (شکل ۱۴)، به ازای $z' \to z$ داریم:

$$\alpha' \to \alpha \ , \ \beta' \to \beta$$

و بنابراین، در حد به دست می‌آوریم:

$$\arg f'(z) = \beta - \alpha \qquad (۳۶)$$

این برابری ثابت می‌کند که $\arg f'(z)$ برابر است با زاویهٔ φ، یعنی زاویه‌ای که باید به اندازهٔ آن



شکل ۱۴

۱. بخش چهارم (جلد اول)، بند ۳ را ببینید.

جهت مماس بر منحنی C را در نقطهٔ z چرخانید تا جهت مماس بر منحنی Γ در نقطهٔ w به دست آید. به مناسبت همین ویژگی است که $\arg f'(z)$ را **گردش نگاشت** در نقطهٔ z گویند.

خواننده می‌تواند به سادگی حکم زیر را، از برابری (۳۶) نتیجه بگیرد.

ضمن عبور از صفحهٔ z به صفحهٔ w، مماس‌های بر همهٔ منحنی‌هایی که از نقطهٔ مفروض z گذاشته‌اند، به اندازهٔ زاویهٔ ثابتی دوران می‌کنند.

اگر C_1 و C_2 دو منحنی گذرندهٔ بر نقطهٔ z، و Γ_1 و Γ_2 منحنی‌های متناظر گذرنده بر نقطهٔ w باشند، در این‌صورت، زاویهٔ بین Γ_1 و Γ_2 درنقطه w، برابر است با زاویهٔ C_1 و C_2 درنقطهٔ z.

به این ترتیب، ضمن نگاشت، و با شرط $f'(z)\neq 0$ همهٔ عنصرهای خطی به یک نسبت کشیده می‌شوند، و زاویه‌های بین جهت‌های متناظر، تغییر نمی‌کند.

نگاشت‌هایی که دارای چنین ویژگی‌هایی باشند، ***نگاشت‌های همدیس*** نامیده می‌شوند.

با توجه به ویژگی‌های هندسی نگاشت در نزدیکی نقطه‌ای که برای آن $f'(z_0)\neq 0$، طبیعی است انتظار داشته باشیم، در حومهٔ کوچکی از z_0، نگاشت در تناظر یک به یک باشد. یعنی نه تنها، هر نقطهٔ z متناظر با فقط یک نقطهٔ w باشد، بلکه برعکس هم، هر نقطهٔ w، نگارهٔ تنها یک نقطهٔ z باشد. و البته، این مطلب را می‌توان با دقت ثابت کرد.

برای این‌که بتوانیم به طور کامل، نگاشت‌های همدیس را، بین همهٔ نگاشت‌های دیگر، تشخیص دهیم، نگاشت دل‌خواهی را در حومهٔ نقطه‌ای، بررسی می‌کنیم. اگر جمله‌های اصلی بسط تابع‌های u و v را به رشتهٔ ***تیلور*** در نظر بگیریم، داریم:

$$u-u_0=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\cdots$$

$$v-v_0=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0(y-y_0)+\cdots$$

اگر در حومهٔ کوچک نقطهٔ (x_0, y_0)، از جمله‌های با مرتبه بالاتر صرف‌نظر کنیم، نگاشت ما، همچون یک نگاشت آفینی رفتار خواهد کرد. این نگاشت، به شرطی برگشت‌پذیر است که دترمینان آن مخالف صفر باشد

$$\Delta=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\neq 0$$

در حالت $\Delta=0$، برای بررسی رفتار نگاشت درنزدیکی نقطهٔ (x_0, y_0)، باید جمله‌های از

مرتبه‌های بالاتر را هم در نظر گرفت[۱].

وقتی $u+iv$ یک تابع تحلیلی است، می‌توانیم با استفاده از شرط‌های **کوشی ـ ریمان**، مشتق‌های نسبت به y را برحسب مشتق‌های نسبت به x بنویسیم، در این‌صورت به دست می‌آید:

$$\Delta = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_۰^۲ + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_۰^۲ = \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_۰ + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_۰\right|^۲ = |f'(z_۰)|^۲$$

یعنی، نگاشت وقتی برگشت‌پذیر است که داشته باشیم $f'(z_۰) \neq ۰$. اگر فرض کنیم $f'(z_۰) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$، آنگاه

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_۰ = \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_۰ = r\cos\varphi$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_۰ = -\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_۰ = -r\sin\varphi$$

و نگاشت در نزدیکی نقطهٔ $(x_۰ , y_۰)$، به این صورت در می‌آید:

$$u - u_۰ = r[(x-x_۰)\cos\varphi - (y-y_۰)\sin\varphi] + \cdots$$

$$v - v_۰ = r[(x-x_۰)\sin\varphi + (y-y_۰)\cos\varphi] + \cdots$$

این دستورها ثابت می‌کنند که در حالت تابع تحلیلی $w=u+iv$، نگاشت در نزدیکی نقطهٔ $(x_۰ , y_۰)$، منجر به دورانی به اندازهٔ زاویهٔ φ و کشیدگی با ضریب r می‌شود. در واقع، عبارت‌های واقع در داخل کروشه‌ها، همان دستورهای معروف هندسهٔ تحلیلی دربارهٔ دوران صفحه به اندازهٔ φ است، و ضرب در r به معنای آن است که r مرتبه دراز شده است.

برای این‌که بتوانیم تصوری درباره نگاشت در نقطه‌هایی داشته باشیم، که برای آن‌ها داریم $f'(z) = ۰$، تابع

$$w = z^n \tag{۳۷}$$

۱. در این حالت، یعنی به ازای $\Delta=۰$، نگاشت را آفینی نمی‌گویند. دربارهٔ نگاشت‌های آفینی، بخش سوم (جلد اول)، بند ۱۱ را ببینید.

را در نظر می‌گیریم. مشتق این تابع $w'=nz^{n-1}$، به ازای $z=0$، صفر است. برای بررسی نگاشت (۳۷)، ساده‌تر این است که از مختصات قطبی، یا شکل مثلثاتی عدد استفاده کنیم. فرض کنید

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$
$$w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

می‌دانیم که ضمن ضرب عددهای مختلط، مدول‌ها (کالبدها) در هم ضرب و آرگومان‌ها (آوندها) با هم جمع می‌شوند، داریم:

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

و بنابراین

$$\rho=r^n \qquad\qquad \theta=n\varphi$$

از دستورهای اخیر معلوم می‌شود که شعاع $\varphi=c$ صفحهٔ z، روی صفحهٔ w به شعاع $\theta=n\varphi=c$ منجر می‌شود. بنابراین، زاویهٔ به اندازهٔ α بین دو شعاع صفحهٔ z، به‌زاویه‌ای به‌اندازهٔ $\beta=n\alpha$ تبدیل می‌شود. در واقع، اگر نقطهٔ w به مدول ρ و آرگومان θ داده شده باشد، می‌توان آن را به عنوان نگارهٔ n نقطه با مدول $r=\sqrt[n]{\rho}$ و آرگومان‌های

$$\varphi=\frac{\theta}{n},\ \frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \dots,\ \frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}(n-1)$$

به دست آورد. وقتی به توان n برسد، مدول نقطهٔ متناظر برابر ρ و آرگومان‌ها برابر

$$\theta,\ \theta+2\pi,\ \dots,\ \theta+2\pi(n-1)$$

خواهد شد، و از آنجا که افزایش آرگومان، مضربی از 2π است، جای هندسی نقطه‌ها تغییر نمی‌کند و همه نگاره‌ها در صفحهٔ w بر هم منطبق می‌شوند.

نگاشت همدیس. اگر تابع تحلیلی $w=f(z)$، حوزهٔ D از صفحهٔ z را در تناظر یک به یک، به حوزهٔ Δ از صفحهٔ w تبدیل کند، گویند نگاشت همدیس حوزهٔ D به روی حوزهٔ Δ وجود دارد.

نقش نگاشت‌های همدیس در نظریهٔ تابع‌ها و کاربرد آن، از قضیهٔ کم و بیش روشن زیر

معلوم می‌شود.

اگر $\zeta = F(w)$، تابعی تحلیلی در حوزهٔ Δ باشد، آنگاه تابع مرکب $F[f(z)]$، تابعی تحلیلی در حوزهٔ D خواهد بود. این قضیه، از برابری زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}=\frac{\Delta\zeta}{\Delta w}\cdot\frac{\Delta w}{\Delta z}$$

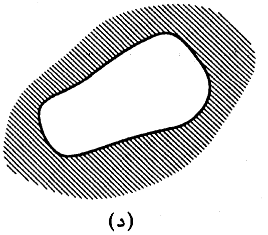
اگر توجه داشته باشیم که تابع‌های $\zeta = F(w)$ و $w=f(z)$ تحلیلی هستند، نتیجه می‌گیریم که هر دو عامل سمت راست برابری دارای حد هستند، و بنابراین، نسبت $\frac{\Delta\zeta}{\Delta z}$ در هر نقطهٔ حوزهٔ D، دارای حد یک ارزشی $\frac{d\zeta}{dz}$ است. و این، تحلیلی بودن تابع $\zeta = F[f(z)]$ را ثابت می‌کند.

این قضیه نشان می‌دهد که می‌توان بررسی تابع‌های تحلیلی در حوزهٔ Δ را به بررسی تابع‌های در حوزهٔ D منجر کرد. اگر ساختمان هندسی حوزهٔ D ساده‌تر باشد، آن وقت بررسی تابع ساده‌تر می‌شود.

مهم‌ترین دسته از حوزه‌هایی که تابع‌های تحلیلی در آن‌ها بررسی می‌شود، دسته **حوزه‌های یک‌پارچه** (یا ساده ـ همبند) است. به حوزه‌ای، یک‌پارچه گویند که مرز آن از یک قطعه تشکیل شده باشد (شکل ۱۵ـالف) و با حوزه‌هایی که مرز آن‌ها شامل چند بخش است، تفاوت دارد (مثل حوزه‌هایی که در شکل‌های ۱۵ـب و ۱۵ـج نشان داده شده است).

یادآوری می‌کنیم، گاهی لازم می‌شود تابع را در حوزه‌ای بررسی کنیم که نه در داخل،

(ج) (ب) (الف)



(د)

شکل ۱۵

بلکه در خارج منحنی قرار دارد. اگر مرز این حوزه، تنها از یک قطعه تشکیل شده باشد، باز هم حوزه را یک‌پارچه گویند (شکل ۱۵ـد).

قضیهٔ زیر ــ که به قضیهٔ *ریمان* معروف است ــ مبنای قضیه‌های مربوط به نگاشت‌های همدیس به شمار می‌رود.

برای هر حوزه یک‌پارچهٔ Δ، می‌توان تابع تحلیلی ساخت که نگاشت همدیس دایرهٔ به شعاع واحد و مرکز مبداء مختصات را به نحوی بدهد که مرکز دایره در نقطهٔ مفروض w_0 از حوزهٔ Δ نگاشته شود و جهت دل‌خواهی در مرکز دایره، به جهت دل‌خواهی در نقطهٔ w_0، منتقل شود. این قضیه نشان می‌دهد که بررسی تابع‌های با متغیر مختلط در یک حوزهٔ یک‌پارچهٔ دل‌خواه را، می‌توان به بررسی تابعی، که از جمله، در دایرهٔ واحد داده شده است، منجر کرد.

در خط‌های کلی خود، روشن می‌کنیم، چگونه می‌توان از این نتیجه‌ها، در مسألهٔ مربوط به نظریه بال هواپیما، استفاده کرد. فرض کنید که بخواهیم جریانی را که در نزدیکی شکل مفروضی از مقطع بال هواپیما قرار دارد، مطالعه کنیم.

اگر بتوانیم حوزهٔ جریان خارج مقطع را، به روی حوزه‌ای که نسبت به دایره خارجی است، به طور همدیس بنگاریم، در این‌صورت می‌توانیم بیانی را که در بالا برای تابع مفسر جریان در نزدیکی دایره آوردیم، برای ساختن تابع مفسر جریان در نزدیکی مقطع به کار ببریم.

فرض می‌کنیم ζ، صفحهٔ دایره و z، صفحهٔ مقطع و $\zeta = f(z)$ تابعی که نگاشت حوزهٔ خارجی مقطع را به روی خارج دایره عملی می‌کند، باشد و در ضمن

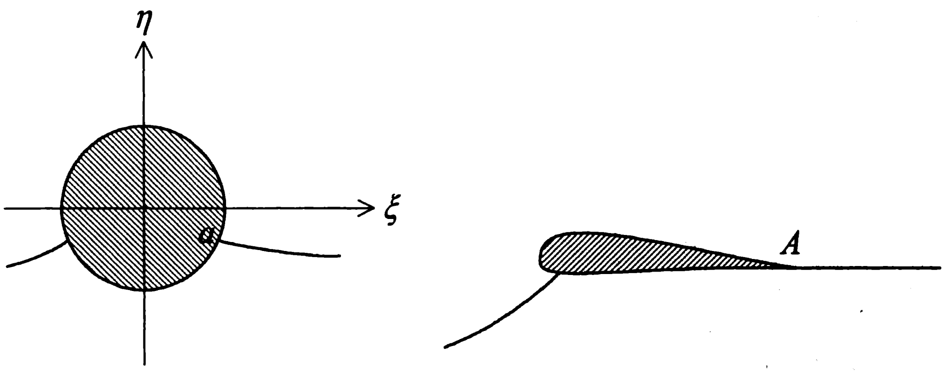
$$\lim_{z\to\infty} \zeta = \infty$$

نقطه‌ای از دایره را که متناظر با A، نوک تیز مقطع باشد، a می‌نامیم، و جریان چرخشی را می‌سازیم که دایره را دور می‌زند و دارای یکی از نقطه‌های نزول جریان در a باشد (شکل ۱۶). این تابع را $W(\zeta)$ می‌نامیم:

$$W(\zeta) = \Phi + i\Psi$$

منحنی جریان، با این معادله‌ها، معین می‌شود:

$$\Psi = c \qquad \text{(مقدار ثابت)}$$



شکل ۱۶

اکنون تابع

$$w(z) = W[f(z)]$$

را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم

$$w = \varphi + i\psi$$

ثابت می‌کنیم $w(z)$ عبارت است از تابع مفسر جریان در نزدیکی مقطع با نزول جریان در نقطهٔ A. قبل از هر چیز، جریانی که به وسیلهٔ تابع $w(z)$ مشخص می‌شود، مقطع را دور می‌زند. برای این‌که این مطلب را ثابت کنیم، باید ثابت کرد که دورهٔ مقطع، همان منحنی جریان است، یعنی روی دورهٔ مقطع داریم:

$$\psi(x,y) = c \qquad \text{(مقدار ثابت)}$$

ولی، این موضوع ناشی از آن است که داریم:

$$\psi(x,y) = \Psi(\xi,\eta)$$

و نقطه‌های $(x\ ,\ y)$ که بر مقطع قرار دارند، متناظر با نقطه‌های $(\xi\ ,\ \eta)$ واقع بر دایره هستند، و روی دایره هم داریم:

$$\Psi(\xi\ ,\ \eta) = c$$

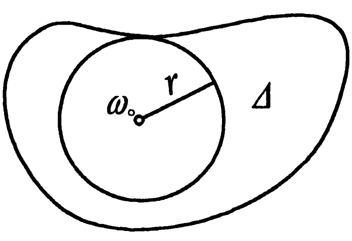
به همین ترتیب، به سادگی ثابت می‌شود که نقطهٔ A، نقطهٔ رکود جریان است. می‌توان

ثابت کرد که با انتخاب سرعت مناسب برخورد جریان به دایره، می‌توان در نزدیکی مقطع، جریانی با سرعت دل‌خواه در برخورد با مقطع به دست آورد.

نقش مهم نگاشت‌های همدیس در نظریهٔ تابع‌ها و کاربردهای آن، مسألهٔ پیدا کردن نگاشت‌های همدیس یک حوزه را بر روی دیگری، وقتی که شکل هندسی این حوزه داده شده است، پیش می‌کشد. حالت‌های ساده، ولی مهم این مسأله را می‌توان به کمک تابع‌های مقدماتی با متغیر مختلط، حل کرد. ولی، در حالت کلی، نمی‌شود از تابع‌های مقدماتی استفاده کرد. همان‌طور که گفته‌ایم، *ریمان* قضیهٔ کلی مربوط به نظریهٔ نگاشت‌های همدیس را بیان کرد، ولی آن را با دقت ثابت نکرد. نیروی بسیاری از ریاضی‌دانان، و در طول ده‌ها سال، صرف شد، تا اثبات دقیق قضیهٔ *ریمان* به دست آمد.

در ارتباط با راه‌های مختلف اثبات قضیهٔ *ریمان*، روش‌های ساختمان کلی نگاشت‌های همدیس حوزه‌ها، به طریق تقریبی، تکامل یافت. گاهی، ساختمان عملی نگاشت همدیس یک حوزه، بر روی دیگری، مسأله‌ای بسیار دشوار از آب در می‌آید. برای بررسی یک رشته از ویژگی‌های کلی تابع‌ها، اغلب در عمل نیازی به نگاشت همدیس یک حوزه بر روی دیگری پیدا نمی‌شود و کافی است، تنها از بعضی ویژگی‌های آن استفاده کنیم. و این موضوع، ما را به مطالعهٔ ویژگی‌های هندسی نگاشت‌های همدیس می‌کشاند. برای این‌که تصوری دربارهٔ قضیه‌هایی از این گونه داشته باشیم، یکی از آن‌ها را توضیح می‌دهیم.

فرض کنید، دایرهٔ به شعاع واحد واقع بر صفحهٔ z و به مرکز مبداء مختصات، بر حوزه‌ای مثل Δ نگاشته شود، در ضمن، مبداء مختصات به نقطهٔ w_0 در حوزهٔ Δ، تبدیل شود (شکل ۱۷). اگر نگاشت دل‌خواهی از دایره را بر حوزهٔ Δ در نظر بگیریم، هیچ حکمی دربارهٔ رفتار نگاشت در نقطهٔ $z=0$ نمی‌توانیم بکنیم. ولی برای نگاشت‌های همدیس حکم قابل توجه زیر وجود دارد.



شکل ۱۷

بسط در مبداء مختصات از چهار برابر شعاع دایرهٔ به مرکز $w_\circ$ و محاط در حوزهٔ Δ تجاوز نمی‌کند.

$$|f'(\circ)| \leq ۴r$$

موضوع‌های مختلف مربوط به نظریهٔ نگاشت‌های همدیس، با بررسی‌های همه‌جانبهٔ ریاضی‌دانان شوروی، روشن شده است. ضمن این بررسی‌ها، دستورهای دقیقی برای بسیاری از دسته‌های جالب نگاشت‌های همدیس به دست آمده است و روش‌های محاسبهٔ تقریبی نگاشت‌های همدیس، و همچنین یک رشته قضیه‌های کلی هندسی دربارهٔ این نگاشت‌ها، مطالعه شده است.

نگاشت‌های شبه‌همدیس. نگاشت‌های همدیس با مطالعهٔ تابع‌های تحلیلی، یا مطالعه زوج‌تابع‌هایی که در شرط ***کوشی ـ ریمان***، یعنی

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

صدق می‌کنند، مربوط می‌شود. در بسیاری از مسأله‌های فیزیک ریاضی، به دستگاه‌های کلی‌تری از معادله‌های دیفرانسیلی برخورد می‌کنیم که مسألهٔ نگاشت یک صفحه بر روی دیگری (که دارای ویژگی‌های هندسی مشخصی در حوالی هر نقطه از صفحهٔ Oxy هستند)، به آن‌ها مربوط می‌شود. برای این‌که این مطلب را روشن کنیم، این نمونه را از دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی، در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=p(x\ ,\ y)\ \frac{\partial v}{\partial y}$$

(۳۸)

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-p(x\ ,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}$$

اگر داشته باشیم: $p(x\ ,\ y)=۱$، این دستگاه به دستگاه ***کوشی ـ ریمان*** تبدیل می‌شود. در حالت کلی، و برای تابع دل‌خواه $p(x\ ,\ y)$، باز هم می‌توانیم هر جواب دستگاه (۳۸) را، به عنوان نگاشت صفحهٔ Oxy بر صفحهٔ Ouv، تفسیر کنیم. ویژگی‌های هندسی این نگاشت را در حوالی نقطهٔ $(x_\circ\ ,\ y_\circ)$ بررسی می‌کنیم. برای این منظور، با در نظرگرفتن حومهٔ کوچکی از

نقطه (x_0, y_0)، تنها نخستین جمله‌ها را در بسط تابع‌های u و v برحسب $x-x_0$ و $y-y_0$ نگه می‌داریم، و نگاشت را به عنوان یک نگاشت آفینی در نظر می‌گیریم:

$$u-u_0=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0(y-y_0)$$

$$v-v_0=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0(y-y_0) \qquad (۳۹)$$

اگر تابع‌های u و v در دستگاه معادله‌های (۳۸) صدق کنند، برای این تبدیل آفینی، این ویژگی برقرار است.

بیضی به مرکز نقطهٔ (x_0, y_0) و قطرهای اصلی موازی با محورهای مختصات و نسبت نیم‌قطرهای

$$\frac{b}{a}=p(x_0, y_0)$$

روی صفحهٔ Ouv به دایره به مرکز (u_0, v_0) تبدیل می‌شود.

این حکم را ثابت می‌کنیم. معادلهٔ دایرهٔ به مرکز (u_0, v_0) روی صفحهٔ Ouv چنین است:

$$(u-u_0)^۲+(v-v_0)^۲=\rho^۲$$

اگر به جای $u-u_0$ و $v-v_0$ مقدارهایشان را برحسب x و y قرار دهیم؛ معادلهٔ منحنی نظیر آن در صفحهٔ Oxy به دست می‌آید:

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^۲+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0^۲\right](x-x_0)^۲+۲\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0\right](x-x_0)(y-y_0)$$

$$+\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^۲+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0^۲\right](y-y_0)^۲=\rho^۲$$

حالا از معادلهٔ (۳۸) استفاده می‌کنیم و مشتق‌های از تابع v را برحسب مشتق‌های از تابع u می‌نویسیم. به دست می‌آید:

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^۲+p^۲\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^۲\right](x-x_0)^۲+\frac{۱}{p^۲}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^۲+p^۲\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0^۲\right](y-y_0)^۲=\rho^۲$$

اگر فرض کنیم

$$a = \frac{\rho}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\circ}^{2} + p^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\circ}^{2}}} \quad , \quad b = \frac{p\rho}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\circ}^{2} + p^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{\circ}^{2}}}$$

معادله به این صورت در می‌آید:

$$\frac{(x-x_{\circ})^{2}}{a^{2}} + \frac{(y-y_{\circ})^{2}}{b^{2}} = 1$$

به این ترتیب، منحنی که به دایره تبدیل می‌شود، یک بیضی حقیقی با ویژگی‌هایی است که آوردیم.

اگر به جای تبدیل آفینی، و در نظر گرفتن جمله‌های نخستین بسط، تبدیل دقیق آن را در نظر بگیریم، در این صورت هر چه اندازه‌های نیم‌قطرهای بیضی کوچکتر باشد، خاصیتی که برای نگاشت پیدا کردیم، دقیق‌تر برقرار خواهد بود.

می‌توان گفت که این ویژگی، برای بیضی‌های بی‌نهایت کوچک، برقرار است.

به این ترتیب، از معادلهٔ (۳۸) نتیجه می‌شود که در هر نقطه، نسبت و جهت نیم‌قطرهای بیضی بی‌نهایت کوچکی که به دایره تبدیل می‌شود، داده شده است. معلوم می‌شود که این ویژگی هندسی، خصلت دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی (۳۸) را به طور کامل معین می‌کند، یعنی اگر تابع‌های u و v در نگاشتی شرکت داشته باشند که دارای چنین ویژگی هندسی باشد، در این صورت، این تابع‌ها در این دستگاه صدق خواهند کرد. به این ترتیب، مسألهٔ بررسی جواب‌های معادلهٔ (۳۸)، با مسألهٔ بررسی نگاشتی که دارای این ویژگی هندسی است، هم‌ارز می‌شود.

یادآوری می‌کنیم، در حالت خاص معادله‌های *کوشی ـ ریمان* این ویژگی به این صورت تنظیم می‌شود:

دایرهٔ بی‌نهایت کوچک به مرکز $(x_{\circ}, y_{\circ})$، به دایرهٔ بی‌نهایت کوچک به مرکز $(u_{\circ}, v_{\circ})$ تبدیل می‌شود.

گروه بزرگی از معادله‌های فیزیک ریاضی را می‌توان به بررسی نگاشتی که دارای ویژگی‌های هندسی زیر باشند، منجر کرد.

برای هر نقطهٔ (x, y) صفحهٔ آوندها، جهت و نسبت نیم قطرهای دو بیضی داده شده

است. باید نگاشتی از صفحهٔ Oxy را بر روی صفحهٔ Ouv به دست آورد، به نحوی که بیضی‌های بی‌نهایت کوچک خانوادهٔ اول، به بیضی‌های کوچک خانوادهٔ دوم به مرکز (u, v)، تبدیل شود.

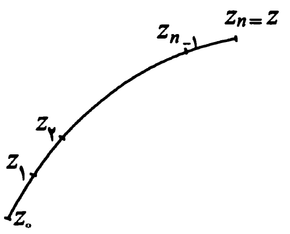
بررسی نگاشت‌هایی که به این دستگاه‌های کلی معادله‌ها مربوط می‌شود، به وسیله **م.آ.لاورنتیف**، ریاضی‌دان شوروی، انجام گرفته است. این نگاشت‌ها، به‌نام **نگاشت‌های شبه‌همدیس** معروف شده است. اندیشهٔ مطالعهٔ نگاشت‌هایی که به وسیلهٔ دستگاه‌های معادله‌های دیفرانسیلی تعریف می‌شوند، امکان گسترش روش‌های نظریهٔ تابع‌های تحلیلی را دربارهٔ گروه بسیار وسیعی از مسأله‌ها، به وجود آورد. **لاورنتیف** و شاگردان او، با بررسی نگاشت‌های شبه‌همدیس، کاربردهای بسیار زیادی از آن را در مسأله‌های مختلف فیزیک ریاضی، مکانیک و هندسه پیدا کرده‌اند. یادآوری این مطلب جالب است که بررسی نگاشت‌های شبه‌همدیس، برای خود نظریهٔ تابع‌های تحلیلی هم، بسیار سودمند است. ولی ما به خاطر محدودیتی که داریم، نمی‌توانیم در اینجا به همهٔ جنبه‌های مختلف کاربرد روش هندسی در نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط بپردازیم.

۴. انتگرال خمیدهٔ خطی. رابطهٔ کوشی و نتیجه‌های آن

انتگرال تابع‌های با متغیر مختلط. برای مطالعهٔ ویژگی‌های تابع تحلیلی، مفهوم انتگرال تابع با متغیر مختلط، نقشی اساسی دارد. مفهوم انتگرال معین از تابع با متغیر حقیقی، متناظر است با انتگرال در طول منحنی از تابع با متغیر مختلط. کمان C را در صفحه در نظر می‌گیریم، که مبداء آن نقطهٔ $z_۰$ و انتهای آن نقطهٔ z باشد، و تابع $f(z)$ در حوزه‌ای که شامل کمان C است داده شده باشد. کمان C را به وسیلهٔ نقطه‌های $z=z_۰, z_۱, \dots, z_n$، به بخش‌های کوچک تقسیم می‌کنیم (شکل ۱۸) و مجموع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$S=\sum_{k=۱}^{n} f(z_k)(z_k-z_{k-۱})$$

اگر تابع $f(z)$ پیوسته و کمان C دارای طول محدودی باشد، مثل تابع‌های حقیقی، ثابت می‌شود که ضمن اضافه کردن n (تعداد نقطه‌های تقسیم)، به نحوی که بزرگترین فاصلهٔ بین نقطه‌های مجاور تقسیم، به سمت صفر میل کند، مجموع S، حد معینی خواهد داشت. این



شکل ۱۸

حد را ***انتگرال در طول کمان*** C گویند و به وسیلهٔ

$$\int_C f(z)\,dz$$

نشان می‌دهند. یادآوری می‌کنیم که ضمن تعریف انتگرال، برای C، ابتدا و انتهایی در نظر گرفتیم، به زبان دیگر، جهت معینی برای حرکت روی منحنی C، انتخاب کردیم.

یک رشته از ویژگی‌های سادهٔ انتگرال، به سادگی قابل اثبات است.

۱° انتگرال مجموع دو تابع، برابر است با مجموع انتگرال‌های هر یک از دو تابع:

$$\int_C \left[f(z)+g(z)\right]dz = \int_C f(z)\,dz + \int_C g(z)\,dz$$

۲° ضریب ثابت را، می‌توان بیرون از انتگرال نوشت:

$$\int_C Af(z)dz = A\int_C f(z)dz$$

۳° اگر کمان C، برابر با مجموع کمان‌های C_1 و C_2 باشد، داریم:

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

۴° اگر $\bar{C}$ همان کمان C، ولی در جهت مخالف باشد:

$$\int_{\bar{C}} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

همه این ویژگی‌ها، برای مجموع S دست است، و برای انتگرال‌ها هم در حالت حدی به دست می‌آید.

۵° اگر طول کمان C برابر L و برای کمان C، نابرابری

$$\left| f(z) \right| \leq M$$

برقرار باشد، داریم:

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M.L$$

این ویژگی را ثابت می‌کنیم. کافی است نابرابری را برای مجموع انتگرالی S ثابت کنیم. زیرا در این صورت، در حالت حد آن، و در نتیجه برای انتگرال هم، صادق خواهد بود. برای مجموع انتگرالی داریم:

$$|S| = \left| \sum f(z_k)\,(z_k - z_{k-1}) \right| \leq \sum \left| f(z_k) \right| \cdot \left| z_k - z_{k-1} \right| \leq M \sum \left| z_k - z_{k-1} \right|$$

ولی مجموع آخر، برابر است با مجموع طول‌های حلقه‌های خط شکسته‌ای که در کمان C محاط و رأس‌های آن، در نقطه‌های z_k است. روشن است که طول این خط شکسته نمی‌تواند از طول منحنی بزرگتر باشد، یعنی

$$|S| \leq M.L$$

انتگرال ساده‌ترین تابع $f(z) = 1$ را بررسی می‌کنیم. روشن است در این حالت داریم:

$$S = (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots + (z_n - z_{n-1}) = z_n - z_0 = z - z_0$$

و این ثابت می‌کند که

$$\int_C 1.\ dz = z - z_0$$

نتیجه‌ای که به دست آوردیم، ثابت می‌کند، برای تابع $f(z) = 1$ ، مقدار انتگرال، برای همهٔ کمان‌هایی که نقطه‌های z_0 و z را به هم وصل می‌کنند، یکی است. به زبان دیگر، تنها به ابتدا و انتهای مسیر انتگرال‌گیری، بستگی دارد. با وجود این، به سادگی معلوم می‌شود، این ویژگی، دربارهٔ هر تابع دل‌خواه با متغیر مختلط، وجود ندارد. در مثل، اگر داشته باشیم $f(z) = x$، با محاسبه‌های ساده‌ای، می‌توان به دست آورد:

$$\int_{C_1} x dz = \frac{x^2}{2} + iyx \quad , \quad \int_{C_2} x\, dz = \frac{x^2}{2} \quad , \quad z = x + iy$$

که در آن، C_1 و C_2 عبارت‌اند از مسیرهای انتگرال‌گیری که در شکل ۱۹ نشان داده شده است. از خواننده می‌خواهیم که خود این برابری را ثابت کند.

قضیهٔ زیر، که به قضیهٔ کوشی معروف است، یکی از حکم‌های اساسی نظریهٔ تابع‌های تحلیلی است.

اگر تابع $f(z)$، درهر نقطهٔ حوزهٔ یک‌پارچهٔ D، قابل دیفرانسیل‌گیری باشد، در این صورت، انتگرال‌هایی که نسبت به کمان‌های مختلف (که دو نقطهٔ دل‌خواه z_0 و z را به هم وصل می‌کنند) به دست می‌آیند، بر هم منطبق‌اند.

ما در این‌جا به اثبات قضیهٔ کوشی نمی‌پردازیم، زیرا هر کس علاقه‌مند باشد، می‌تواند در هر کتابی که به نظریهٔ تابع‌های مختلط پرداخته است، آن را پیدا کند. در این‌جا، تنها به نتیجه‌های مهم این قضیه می‌پردازیم.

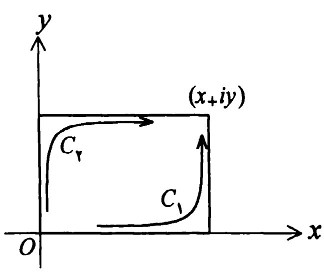
قضیهٔ کوشی قبل از هر چیز اجازه می‌دهد، انتگرال نامعین تابع تحلیلی را مطرح کنیم. در واقع، اگر نقطهٔ z_0 را ثابت نگه داریم و انتگرال نسبت به خطی را در نظر بگیریم که z_0 و z را به هم وصل کرده است داریم:

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta$$

در ضمن، می‌توان انتگرال‌گیری را روی هر خط دل‌خواهی که z_0 و z را به هم وصل کرده است، انجام داد. زیرا با تغییر منحنی، مقدار انتگرال تغییر نمی‌کند و بنابراین، تنها به z مربوط می‌شود. تابع $F(z)$ را ***انتگرال نامعین*** از $f(z)$ گویند.

انتگرال نامعین از $f(z)$، دارای مشتقی برابر $f(z)$ است.

در بسیاری حالت‌ها، بهتر است قضیهٔ کوشی را، به ترتیب هم‌ارز دیگری، داشته باشیم.



شکل ۱۹

اگر $f(z)$، همه جا در حوزه‌ای یک‌پارچه، قابل دیفرانسیل‌گیری باشد، در این صورت، انتگرال نسبت به هر دور بسته‌ای که در این حوزه واقع است، صفر است:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = ۰$$

این حکم روشن است، زیرا در یک دور بسته، ابتدا و انتها بر هم منطبق است، و بنابراین، $z_۰$ و z را می‌توان از مسیر صفر، به هم وصل کرد.

بعد از این، هر جا از دور بسته صحبت کنیم، منظورمان دوری است که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. اگر دوری در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد، آن را به $\overline{\Gamma}$ نشان می‌دهیم.

انتگرال کوشی. با توجه به آن‌چه گفتیم، می‌توانیم دستور اساسی کوشی را بدهیم. این دستور، تابع قابل دیفرانسیل‌گیری را در نقطه‌های درونی دور بسته، برحسب مقدارهای تابع درخود دور، به دست می‌دهد:

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i} \int_{C} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

اثبات این دستور را می‌آوریم. z را ثابت و ζ را متغیر مستقل می‌گیریم. تابع

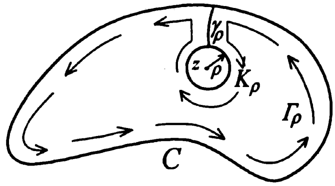
$$\varphi(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

در هر نقطه ζ در داخل حوزهٔ D، به استثنای نقطهٔ $\zeta = z$ که در آن‌جا مخرج صفر است، پیوسته و قابل دیفرانسیل‌گیری است. این موقعیت اجازه نمی‌دهد قضیهٔ کوشی را در تابع $\varphi(\zeta)$ و دورهٔ C به کار بریم.

دایرهٔ K_ρ به مرکز نقطهٔ z و شعاع ρ را در نظر می‌گیریم و ثابت می‌کنیم:

$$\int_{C} \varphi(\zeta)d\zeta = \int_{K_\rho} \varphi(\zeta)d\zeta \qquad (۴۰)$$

برای این منظور دور بستهٔ کمکی Γ_ρ را می‌سازیم، که تشکیل شده است از دور C، کمان γ_ρــ که C را به دایره مربوط می‌کند ــ و دایرهٔ $\overline{K}_\rho$ که در جهت عکس قرار دارد (شکل ۲۰). دورهٔ



شکل ۲۰

Γ_ρ را با پیکان نشان داده‌ایم. چون از Γ_ρ، نقطهٔ $\zeta=z$ حذف شده است، در داخل Γ_ρ، تابع $\varphi(\zeta)$ هم همه جا قابل دیفرانسیل‌گیری است و بنابراین

$$\int_{\Gamma_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta=0 \tag{۴۱}$$

ولی دورهٔ Γ_ρ به چهار قسمت شده است: C ، γ_ρ ، $\overline{K}_\rho$ ، $\overline{\gamma}_\rho$ ؛ بنابراین، براساس ویژگی ۳° انتگرال، خواهیم داشت:

$$\int_{\Gamma_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta=\int_{C}\varphi(\zeta)d\zeta+\int_{\gamma_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta+\int_{\overline{K}_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta+\int_{\overline{\gamma}_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta=0$$

اگر انتگرال‌های نسبت به $\overline{K}_\rho$ و $\overline{\gamma}_\rho$ را با انتگرال‌های نسبت به K_ρ و γ_ρ عوض کنیم، با استفاده از ویژگی ۴°، به دست می‌آید:

$$\int_{\Gamma_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta=\int_{C}\varphi(\zeta)d\zeta-\int_{K_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta=0$$

که رابطهٔ (۴۰) را ثابت می‌کند.

طرف راست (۴۰) را محاسبه می‌کنیم،

$$\int_{K_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta=\int_{K_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\int_{K_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+\int_{K_\rho}\frac{f(z)\,d\zeta}{\zeta-z}=$$

$$=\int_{K_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+f(z)\int_{K_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta-z} \tag{۴۲}$$

ابتدا، جملهٔ دوم را محاسبه می‌کنیم. روی دایرهٔ K_ρ

$$\zeta = z + \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

با توجه به این‌که z و ρ ثابت‌اند، به دست می‌آید:

$$d\zeta = \rho(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta = i\rho(\cos\theta + i\sin\theta)d\theta$$

و به‌جز آن

$$\zeta - z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

بنابراین

$$\int_{K_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \int_{K_\rho} i\,d\theta = ۲\pi i$$

زیرا ضمن دور زدن دایره، تغییر کامل θ برابر است با ۲π. بنابر (۴۰) و (۴۲) داریم:

$$\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = ۲\pi i f(z) + \int_{K_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta$$

در این برابری، وقتی $\rho \to ۰$، به مقدار حدی می‌رسیم. در ضمن مقدار سمت چپ و جملهٔ نخست سمت راست، بی‌تغییر باقی می‌مانند. ثابت می‌کنیم، حد جملهٔ دوم، برابر است با صفر. در این صورت، وقتی $\rho \to ۰$، این برابری، ما را به دستور کوشی می‌رساند. برای این‌که ثابت کنیم جملهٔ دوم به ازای $\rho \to ۰$، به سمت صفر میل می‌کند، توجه می‌کنیم که

$$\underset{\zeta \to z}{\text{حد}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} = f'(\zeta)$$

یعنی، عبارتی که در زیر علامت انتگرال قرار گرفته است، حد معینی دارد و بنابراین محدود است:

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| < M$$

با استفاده از ویژگی ۵° انتگرال، به دست می‌آید:

$$\left| \int_{K_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq M\,۲\pi\rho \to ۰$$

و این، اثبات دستور کوشی را تکمیل می‌کند. دستور کوشی، یکی از ابزارهای اساسی در بررسی نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط، به شمار می‌رود.

بسط تابع‌های قابل دیفرانسیل‌گیری، به رشتهٔ توانی. قضیهٔ کوشی را، برای بیان دو ویژگی اصلی تابع‌های قابل دیفرانسیل‌گیری با متغیر مختلط به کار می‌بریم.

هر تابع با متغیر مختلطی که دارای مشتق مرتبهٔ اول در حوزهٔ D باشد، دارای مشتق از هر مرتبهٔ دل‌خواهی خواهد بود.

در واقع، در داخل دور بسته، تابع ما با انتگرال کوشی بیان می‌شود:

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

زیر علامت انتگرال، تابع دیفرانسیل‌پذیر z قرار دارد؛ بنابراین، اگر از تابع دیفرانسیل‌پذیر زیر انتگرال مشتق بگیریم، به دست می‌آید:

$$f'(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^۲}d\zeta$$

باز هم در زیر علامت انتگرال، تابعی قرار دارد که قابل دیفرانسیل گرفتن است، و بنابراین، می‌توانیم دوباره دیفرانسیل بگیریم، در این صورت

$$f''(z) = \frac{۱\cdot۲}{۲\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^۳}$$

که اگر عمل دیفرانسیل‌گیری را ادامه دهیم، دستور کلی به دست می‌آید:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{۲\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n+۱}}$$

به این ترتیب، می‌توانیم مشتق را از هر مرتبهٔ دل‌خواهی به دست آوریم. برای این‌که این اثبات دقیق باشد، باید ثابت کرد که دیفرانسیل‌گیری از زیر علامت انتگرال، اعتبار قانونی دارد. ولی ما به این قسمت از اثبات نمی‌پردازیم.

ویژگی اساسی دوم چنین است:

اگر $f(z)$ ، همه جا، در دایرهٔ K به مرکز نقطهٔ a، قابل دیفرانسیل‌گیری باشد، در این صورت

بسط $f(z)$ به رشتهٔ توانی تیلور

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(z-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n+۱} + \cdots$$

در داخل دایرهٔ K، همگرا است.

در بند ۱، تابع تحلیلی را به عنوان تابع با متغیر مختلطی که می‌توان آن را به رشتهٔ توانی بسط داد، تعریف کردیم. قضیهٔ اخیر حاکی است که هر تابع با متغیر مختلط دیفرانسیل‌پذیر، یک تابع تحلیلی است. واین، خاصیتی مخصوص تابع‌های با متغیر مختلط است که مشابهی برای آن در تابع‌های با متغیر حقیقی وجود ندارد. تابع‌های با متغیر حقیقی که دارای مشتق اول هستند، ممکن است حتی در یکی از نقطه‌های خود هم، مشتق دوم نداشته باشند.

قضیه‌ای را که در این‌جا آوردیم، ثابت می‌کنیم.

فرض کنید $f(z)$ در داخل و روی مرز دایرهٔ K به مرکز a مشتق داشته باشد. در این صورت، تابع $f(z)$ در داخل K به وسیلهٔ انتگرال **کوشی** بیان می‌شود:

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \qquad (۴۳)$$

می‌نویسیم

$$\zeta - z = (\zeta - a) - (z - a)$$

در این صورت

$$\frac{۱}{\zeta - z} = \frac{۱}{(\zeta - a) - (z - a)} = \frac{۱}{\zeta - a}\cdot\frac{۱}{۱ - \dfrac{z-a}{\zeta-a}} \qquad (۴۴)$$

اگر در نظر داشته باشیم که نقطهٔ z در داخل دایره، و ζ روی محیط دایره واقع است، به دست می‌آوریم

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right| < ۱$$

بنابراین، با توجه به دستور مربوط به تصاعد هندسی

$$\frac{۱}{۱ - \dfrac{z-a}{\zeta-a}} = ۱ + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right) + \cdots + \left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n + \cdots \qquad (۴۵)$$

در ضمن، رشته‌ای که در سمت راست برابری قرار گرفته است، هم‌گرا است. رابطهٔ (۴۳) را، با استفاده از (۴۴) و (۴۵)، می‌توان به این صورت نوشت:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}+(z-a)\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}+\cdots+(z-a)^n\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}+\cdots\right]d\zeta$$

اکنون، از رشته‌ای که در داخل کروشه قرار دارد، جمله به جمله انتگرال می‌گیریم. قانونی بودن این روش را، می‌توان با دقت ثابت کرد. دراین صورت، با قرار دادن عامل‌های $(z-a)^n$، (که مستقل از ζ هستند) در بیرون علامت انتگرال، به دست می‌آید:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-a}+\frac{z-a}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^2}+\cdots+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}+\cdots$$

حالا، اگر از دستورهای انتگرالی، برای مشتق‌های متوالی استفاده کنیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

بنابراین به دست می‌آوریم:

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots$$

ثابت کردیم، تابع قابل دیفرانسیل‌گیری از متغیر مختلط را می‌توان، به رشتهٔ توانی بسط داد. برعکس: از تابع‌هایی که قابل بسط به رشته‌های توانی هستند، می‌توان دیفرانسیل گرفت. مشتق‌های آن‌ها را می‌توان جمله به جمله از رشتهٔ قابل دیفرانسیل‌گیری به دست آورد (معتبر بودن این عمل را می‌توان به دقت ثابت کرد).

تابع‌های تام. رشتهٔ توانی، نمایش تحلیلی تابع را، تنها در یک دایره می‌دهد. شعاع این دایره برابر است با فاصلهٔ تا نزدیک‌ترین نقطه‌ای که تابع، تحلیلی بودن خود را در آن‌جا از دست می‌دهد (نقطهٔ تکین تابع).

طبیعی است، بین تابع‌های تحلیلی، دسته‌ای که به ازای همهٔ مقدارهای محدود آوند، تحلیلی هستند، مورد توجه قرار گیرد. این تابع‌ها، وقتی به رشتهٔ توانی تبدیل شوند، به ازای همهٔ مقدارهای آوند z هم‌گرا هستند، و ***تابع‌های تام*** z نامیده می‌شوند. اگر بسط را در نزدیکی مبداء مختصات در نظر بگیریم، تابع تام به وسیلهٔ رشته‌ای به صورت

$$G(z) = c_۰ + c_۱ z + c_۲ z^۲ + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

بیان می‌شود. اگر ضریب‌های این رشته، از جایی به بعد، صفر باشد، تابع مفروض، یک چندجمله‌ای ساده یا تابع درست گویا خواهد بود:

$$P(z) = c_۰ + c_۱ z + \cdots + c_n z^n$$

اگر در بسط، بی‌نهایت جمله مخالف با صفر باشد، تابع تام را غیرجبری (ترانساندانت) گویند. نمونه‌هایی از این‌گونه تابع‌ها را می‌آوریم:

$$e^z = ۱ + \frac{z}{۱!} + \frac{z^۲}{۲!} + \cdots$$

$$\sin z = \frac{z}{۱!} - \frac{z^۳}{۳!} + \frac{z^۵}{۵!} - \cdots$$

$$\cos z = ۱ - \frac{z^۲}{۲!} + \frac{z^۴}{۴!} - \cdots$$

ضمن مطالعهٔ ویژگی‌های چندجمله‌ای‌ها، موضوع توزیع ریشه‌های معادلهٔ

$$P(z) = ۰$$

یا به طور کلی‌تر، موضوع توزیع نقطه‌هایی که در آن‌جا، چندجمله‌ای، مقدار مفروض A را قبول می‌کند

$$P(z) = A$$

اهمیت زیادی دارد.

قضیهٔ اصلی جبرعالی می‌گوید، هر چندجمله‌ای، دست کم در یک نقطه، مقدار مفروض A را قبول می‌کند. این ویژگی دربارهٔ هر تابع تام، صدق نمی‌کند. برای نمونه تابع $w=e^z$، در هیچ‌کدام از نقطه‌های صفحه، صفر نمی‌شود. با وجود این، قضیهٔ زیر، که به قضیهٔ **پیکار**

معروف است، درست است: هر تابع تام، هر مقدار دل‌خواه را، به‌جز به احتمالی یکی، بی‌نهایت مرتبه قبول می‌کند.

موضوع مربوط به وضع توزیع نقطه‌هایی از صفحه، که تابع تام در آن‌جا مقدار مفروض A را قبول می‌کند، یکی از موضوع‌های اساسی نظریهٔ تابع‌های تام است.

تعداد ریشه‌های چندجمله‌ای، برابر است با درجهٔ آن. درجهٔ چندجمله‌ای هم، با سرعت بزرگ شدن $|P(z)|$، وقتی که $|z|\to\infty$، بستگی نزدیک دارد. در واقع، می‌توان نوشت:

$$|P(z)| = |z|^n \cdot \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}\right|$$

و از آن‌جا که، وقتی $z\to\infty$، عامل دوم به سمت $|a_n|$ میل می‌کند، چندجمله‌ای درجهٔ n، به ازای مقدارهای بزرگ z، همچون $|a_n|\cdot|z|^n$، بزرگ می‌شود. به این ترتیب، هر چه n بزرگتر باشد، $|P_n(z)|$ با سرعت زیادتری به ازای $|z|\to\infty$ بزرگ می‌شود و همچنین، چندجمله‌ای، ریشه‌های بیشتری دارد. معلوم می‌شود، این قانون را دربارهٔ تابع‌های تام هم می‌توان به کار برد. ولی، دربارهٔ تابع تام $f(z)$، تعداد ریشه‌ها در حالت کلی بی‌نهایت است و بنابراین، بحث دربارهٔ تعداد ریشه‌ها، معنایی ندارد. با همهٔ این‌ها، می‌توانیم تعداد $n(r\,,\ a)$، ریشه‌های معادلهٔ

$$f(z) = a$$

را در دایرهٔ به شعاع r، بررسی کنیم و معلوم کنیم این تعداد، ضمن بزرگ شدن r، چه تغییری می‌کند. معلوم می‌شود، سرعت افزایش $n(r\,,\ a)$، با سرعت افزایش $M(r)$، ماکزیمم قدرمطلق تابع تام در دایرهٔ به شعاع r، بستگی دارد. همان‌طور که پیش از این هم گفتیم، برای تابع تام، ممکن است یک مقدار استثنایی a وجود داشته باشد که به ازای آن حتی یک ریشه هم برای معادله پیدا نشود. برای همهٔ مقدارهای دیگر a، سرعت افزایش تعداد $n(r\,,\ a)$، با سرعت افزایش مقدار $\ln M(r)$، متناسب است؛ و ما در این‌جا امکان دقیق‌تر کردن این قانون را نداریم.

ویژگی توزیع ریشه‌های تابع‌های تام، به نظریهٔ عددها مربوط می‌شود و این امکان را می‌دهد که یک رشته از ویژگی‌های تابع *ریمان* $\zeta(s)$[1] را ثابت کنیم که براساس آن‌ها بسیاری از

---

۱. بخش دهم را که به نظریهٔ عددها اختصاص دارد، ببینید.

قضیه‌های مربوط به عددهای اول ثابت می‌شود.

تابع‌های کسری یا مرومورف (برخه‌سان). کلاس تابع‌های تام را می‌توان به عنوان گسترش چندجمله‌ای‌های جبری به حساب آورد. اگر با چندجمله‌ای‌ها سروکار داشته باشیم، می‌توانیم کلاس گسترده‌تر تابع‌های گویا را به دست آوریم:

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

که عبارت‌اند از نسبت دو چندجمله‌ای.

طبیعی است که به همین ترتیب بتوانیم به کلاس تازه‌ای، با استفاده از تابع‌های تام برسیم. تابع $f(z)$ که از نسبت دو تابع تام $G_1(z)$ و $G_2(z)$ به دست آمده است

$$f(z) = \frac{G_1(z)}{G_2(z)}$$

تابع کسری یا مرومورف یا بوفه‌سان نامیده می‌شود. کلاسی از تابع‌ها، که به این ترتیب به دست می‌آید، نقش مهمی در آنالیز ریاضی به عهده دارد. مثل تابع‌های

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}\ ,\ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

که نمونه‌هایی از تابع‌های مقدماتی با متغیر مختلط اند، که در کلاس تابع‌های **مرومورف** قرار دارند.

تابع‌های مرومورف دیگر در تمامی صفحهٔ متغیر مختلط، تحلیلی نیستند. در نقطه‌هایی که برای آن‌ها، مخرج $G_2(z)$ صفر باشد، تابع $f(z)$ بی‌نهایت می‌شود. طبیعی است که تابع $f(z)$، در حومهٔ این نقطه‌ها، نمی‌تواند به رشتهٔ ***تیلور*** بسط داده شود. با وجود این در حومهٔ نقطهٔ a از این نوع، می‌توان تابع مرومورف را با رشتهٔ توانی که شامل تعدادی از توان‌های منفی $(z-a)$ باشد، نشان داد:

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \cdots + C_n(z-a)^n + \cdots \quad (۴۶)$$

وقتی z به نقطهٔ a نزدیک می‌شود، مقدار $f(z)$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. نقطهٔ تکین تنهایی را که در آن‌جا، تابع تحلیلی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، **قطب** می‌نامند. فقدان

تحلیلی بودن تابع در نقطهٔ a، مربوط به وجود جمله‌هایی از $(z-a)$ با توان منفی در بسط (۴۶) است. عبارت

$$\frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{C_{-1}}{(z-a)}$$

رفتار تابع مروморف را در نزدیکی نقطهٔ خاص نشان می‌دهد و ***قسمت اصلی*** بسط (۴۶) نامیده می‌شود. خصلت رفتار تابع مرومورف در دور و بر قطب، به وسیلهٔ جمله‌های اصلی آن معین می‌شود. در بسیاری حالت‌ها، با معلوم بودن بخش‌های اصلی تابع مرومورف در حومهٔ تمامی قطب‌های آن، می‌توان خود تابع را ساخت. برای نمونه، اگر تابع $f(z)$ گویا باشد و در بی‌نهایت صفر باشد، در این صورت، تابع برابر است با مجموع بخش‌های اصلی بسط آن در نزدیکی همهٔ قطب‌های آن (تعداد آن‌ها برای تابع گویا، محدود است):

$$f(z) = \sum_{(k)} \left[\frac{C^{(k)}_{-m_k}}{(z-a_k)^{m_k}} + \cdots + \frac{C^{(k)}_{-1}}{z-a_k} \right]$$

در حالت کلی، تابع گویا می‌تواند به صورت مجموع همهٔ بخش‌های اصلی آن و یک چندجمله‌ای، نشان داده شود:

$$f(z)=\sum_{(k)} \left[\frac{C^{(k)}_{-m_k}}{(z-a_k)^{m_k}} + \cdots + \frac{C^{(k)}_{-1}}{z-a_k} \right] + C_0 + C_1 z + \cdots + C_m z^m \qquad (۴۷)$$

رابطهٔ (۴۷)، بیانی از تابع گویا را می‌دهد که نقش نقطه‌های تکین تابع در ساختمان آن به روشنی دیده می‌شود. عبارت (۴۷) برای تابع گویا، در کاربردهای مختلف این تابع، عبارت مناسب‌تری است و به‌جز آن، این ویژگی قابل توجه را دارد که نشان می‌دهد به چه ترتیبی تمامی ساختمان تابع به وسیلهٔ نقطه‌های تکین آن معین می‌شود. معلوم می‌شود، هر تابع مرومورف هم، مثل تابع گویا، می‌تواند به کمک بخش اصلی قطب‌های آن، ساخته شود. از جمله این عبارت را، برای تابع $\cot z$، بدون اثبات می‌آوریم. قطب‌های تابع $\cot z$، به‌عنوان ریشه‌های معادلهٔ

$$\sin z = 0$$

به دست می‌آید و در نقطه‌های

$$\dots, -k\pi, \dots, -\pi, \dots, \circ, \dots, \pi, \dots, k\pi, \dots$$

قرارگرفته‌اند. می‌توان ثابت کرد، بخش اصلی بسط تابع $\cot z$ به رشتهٔ توانی، در قطب $z=k\pi$ چنین است

$$\frac{۱}{z-k\pi}$$

و تابع $\cot z$ برابر است با مجموع بخش‌های اصلی، نسبت به همهٔ قطب‌های آن

$$\cot z = \frac{۱}{z} + \sum_{k=۱}^{\infty}\left[\frac{۱}{z-k\pi}+\frac{۱}{z+k\pi}\right] \tag{۴۸}$$

بسط تابع مرومورف به رشته به وسیلهٔ بخش اصلی، از این بابت اهمیت دارد که نقطه‌های تکین تابع را به روشنی نشان می‌دهد و چنین نمایش تحلیلی از تابع، این امکان را به وجود می‌آورد که تابع را در تمامی حوزهٔ تعریف خود، محاسبه کنیم.

نظریهٔ تابع‌های مرومورف، برای مطالعهٔ دسته‌هایی از تابع‌ها که در آنالیز اهمیت زیادی دارند، خیلی اساسی است؛ و به خصوص باید دربارهٔ اهمیت آن در نظریهٔ معادله‌های فیزیک ریاضی، تاکید کرد. نظریهٔ معادله‌های انتگرالی، که به بسیاری از مسأله‌های نظریهٔ معادله‌های فیزیک ریاضی پاسخ می‌دهد، به طور جدی بر نظریهٔ تابع‌های مرومورف تکیه دارد.

از این زمان، پیشرفت بخش‌هایی از آنالیز تابعی که به طور جدی به فیزیک ریاضی بستگی دارند ـ نظریهٔ اپراتورها (عملگرها) ـ اغلب بر حکم‌های نظریهٔ تابع‌های تحلیلی تکیه دارند.

دربارهٔ نمایش تحلیلی تابع‌ها. دیدیم، در دور و بر هر نقطه‌ای که تابع دیفرانسیل داشته باشد، می‌توان تابع را به کمک رشتهٔ توانی معین کرد. برای تابع تام، رشتهٔ توانی در تمامی صفحه هم‌گرا است و بیان تحلیلی تابع را برای همهٔ نقطه‌هایی که معین است، به دست می‌دهد؛ در حالتی که تابع، تام نیست، همان‌طور که می‌دانیم، رشتهٔ *تیلور* تنها در دایره‌ای که محیط آن‌از نزدیک‌ترین نقطهٔ تکین تابع می‌گذرد، هم‌گرا است. به این ترتیب، به‌کمک رشتهٔ توانی

نمی‌توان تابع را در تمامی حوزهٔ تعریف آن محاسبه کرد، و بنابراین به وسیلهٔ رشتهٔ توانی نمی‌توان، تابع تحلیلی را در همهٔ حوزهٔ تعریف آن به دست داد. دربارهٔ تابع مرومورف، تابع تحلیلی که تابع را در تمامی حوزهٔ تعریف خود بدهد، به وسیلهٔ بسط نسبت به بخش اصلی به دست می‌آید.

اگر تابعی تام نباشد، ولی در داخل یک دایره معین باشد و یا تابعی داشته باشیم که در حوزه‌ای معین باشد، ولی ما بررسی آن را در داخل دایره‌ای لازم داشته باشیم، برای نمایش آن می‌توانیم از رشتهٔ *تیلور* استفاده کنیم. رشتهٔ توانی، که بیان تابع تحلیلی را در دایره می‌دهد، دارای جمله‌های ساده‌ای به صورت $a_n z^n$ است. به طور طبیعی پرسشی پیش می‌آید: آیا نمی‌شود تابع تحلیلی را در حوزهٔ دل‌خواهی به صورت رشته‌ای از چندجمله‌ای‌ها، بسط داد؟ اگر چنین عملی ممکن باشد، هر جملهٔ رشته، به وسیلهٔ عمل‌های حسابی قابل محاسبه است و برای نمایش تابع امکانی به دست می‌آوریم که دوباره از عمل‌های حساب سرچشمه می‌گیرد. پاسخ کلی به این مسأله، با قضیهٔ زیر داده می‌شود:

هر تابع تحلیلی که در حوزهٔ تعریف دل‌خواهی داده شده و مرز این حوزه از یک منحنی تشکیل شده باشد، می‌تواند به رشته‌ای از چندجمله‌ای‌ها بسط داده شود:

$$f(z) = P_0(z) + P_1(z) + \cdots + P_n(z) + \cdots$$

این قضیه، تنها یک پاسخ کلی به امکان بسط تابع (با حوزهٔ تعریف دل‌خواه)، به رشته‌ای از چندجمله‌ای‌ها می‌دهد. ولی، این قضیه، راه ساختن رشته را از روی تابع مفروض، آن‌طورکه برای رشتهٔ *تیلور* امکان داریم، به دست نمی‌دهد. این قضیه، تنها پاسخ مربوط به بسط تابع به رشته‌ای از چندجمله‌ای‌ها را طرح می‌کند، ولی آن را حل نمی‌کند. پرسش‌های مربوط به ساختن رشتهٔ چندجمله‌ای‌ها، از روی تابع مفروض یا بعضی ویژگی‌های آن، پرسش‌های مربوط به ساختن رشته‌هایی که هر چه سریع‌تر هم‌گرا باشند، رشته‌هایی که به طور کامل به رفتار خود تابع بستگی داشته باشند، پرسش‌های مربوط به بررسی ساختمان تابع‌ها از روی رشتهٔ مفروض چندجمله‌ای، به نظریهٔ بسیار گستردهٔ تقریب تابع‌ها به وسیلهٔ رشته‌های چندجمله‌ای مربوط می‌شود. در به وجود آوردن این نظریه، ریاضی‌دانان شوروی، نقش بزرگی داشته‌اند و به نتیجه‌های اساسی و مهمی دراین باره رسیده‌اند.

۵. ویژگی منحصر به فرد بودن و ادامهٔ تحلیلی

ویژگی منحصر به فرد بودن تابع‌های تحلیلی. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های تابع‌های تحلیلی، ویژگی منحصر بودن آن‌ها است:

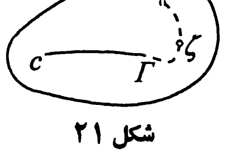
اگر در حوزهٔ D، دو تابع تحلیلی داده شده باشد، به نحوی که روی یک منحنی مثل C واقع در داخل حوزه برهم منطبق باشند، در این صورت، این دو تابع در تمامی حوزه بر هم منطبق‌اند.

اثبات این قضیه، خیلی ساده است. فرض کنید $f_1(z)$ و $f_2(z)$ دو تابع تحلیلی در حوزهٔ D باشند، که روی منحنی C برهم منطبق‌اند. تفاضل

$$\varphi(z) = f_1(z) - f_2(z)$$

خود در حوزهٔ D، یک تابع تحلیلی است و روی منحنی C، صفر است. ثابت می‌کنیم $f(z)$ در هر نقطهٔ حوزهٔ D، برابر است با صفر. در واقع، اگر در حوزهٔ D، نقطه‌ای مثل z_0 وجود داشته باشد (شکل ۲۱) که در آن داشته باشیم $\varphi(z_0) \neq 0$، منحنی C را تا نقطهٔ z_0 ادامه می‌دهیم و روی منحنی به دست آمدهٔ Γ پیش می‌رویم تا آن‌جا که تابع روی منحنی Γ برابر صفر باشد. ζ را نقطه‌ای می‌گیریم که به این ترتیب روی Γ به دست آمده است. اگر $\varphi(z_0) \neq 0$ باشد، $\zeta \neq z_0$ می‌شود و روی پاره‌ای از منحنی Γ، که بعد از نقطهٔ ζ قرار گرفته است، تابع $\varphi(z)$، بنابر تعریف نقطهٔ ζ، برابر صفر نخواهد بود. ثابت می‌کنیم که چنین چیزی ممکن نیست. در واقع، روی قطعهٔ Γ_ζ، بخشی از Γ که قبل از نقطهٔ ζ قرار دارد، داریم $\varphi(z) = 0$، می‌توان همهٔ مشتق‌های تابع $\varphi(z)$ را روی Γ_ζ، تنها با استفاده از مقدارهای $\varphi(z)$ روی Γ_ζ محاسبه کرد؛ به این ترتیب، روی Γ_ζ، همهٔ مشتق‌های $\varphi(z)$ برابر است با صفر. به خصوص در نقطهٔ ζ

$$\varphi(\zeta) = \varphi'(\zeta) = \cdots = \varphi^{(n)}(\zeta) = \cdots = 0$$



شکل ۲۱

تابع $\varphi(\xi)$ را در نقطهٔ ξ، به رشتهٔ *تیلور*، بسط می‌دهیم. همهٔ ضریب‌های بسط به سمت صفر میل می‌کنند و بنابراین در دایرهٔ به مرکز نقطهٔ ξ واقع در حوزهٔ D به دست می‌آوریم:

$$\varphi(z) = 0$$

از همین جا نتیجه می‌شود، برابری $\varphi(z) = 0$ برای قطعه‌ای از منحنی Γ هم، که بعد از ξ قرار دارد، صدق می‌کند. و به این ترتیب، فرض $\varphi(z_0) \neq 0$ به تناقض کشیده می‌شود.

قضیه‌ای که ثابت کردیم، نشان می‌دهد، اگر مقدارهای تابع تحلیلی روی قطعه‌ای از منحنی، یا در قسمتی از حوزه معلوم باشد، آنگاه مقدارهای تابع را، همه جا در حوزهٔ مفروض، به صورت منحصر به فردی، معین می‌کند. به این ترتیب، معلوم می‌شود، مقدارهای تابع در قسمت‌های مختلف صفحهٔ آوند به طور کامل به هم بستگی دارند.

برای این‌که به اهمیت ویژگی منحصر به فرد بودن تابع تحلیلی پی‌ببریم، باید به خاطر آوریم که تعریف کلی تابع با متغیر مختلط، هرگونه قانونی را بین مقدارهای آوند و مقدارهای تابع، قبول می‌کند. و طبیعی است که ضمن چنین تعریفی، نمی‌تواند صحبت از این باشد که مقدارهای تابع در یک جا، مقدارهای آن را در قسمت‌های دیگر صفحه، به طور یک‌ارزشی، معین کند. می‌بینیم تنها، لزوم قابلیت دیفرانسیل‌گیری در تابع‌های با متغیر مختلط، چنان نیرومند است که بستگی بین مقدارهای تابع را در جاهای مختلف، معین می‌کند.

باز هم تاکید می‌کنیم، در حوزهٔ تابع‌های با متغیر حقیقی، امکان دیفرانسیل گرفتن از تابع، نمی‌تواند به نتیجه‌گیری مشابهی منجر شود. در واقع، نمونه‌هایی از تابع‌ها را می‌توان مثال زد، به نحوی که هر چند بار که بخواهیم قابل دیفرانسیل گرفتن و در فاصله‌ای از محور Ox هم بر یکدیگر منطبق باشند، در حالی که در سایر نقطه‌ها، با یکدیگر برابر نشوند. برای نمونه تابعی که به ازای مقدارهای منفی x برابر صفر است، می‌تواند طوری تعریف شود که به ازای مقدارهای مثبت x، مخالف صفر باشد و در ضمن مشتق‌های پیوسته‌ای هم (از هر مرتبهٔ دل‌خواه) داشته باشد. برای این منظور، کافی است به ازای $x > 0$ فرض کنیم

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$

ادامهٔ تحلیلی و تابع‌های تحلیلی کامل. اغلب با مفروض بودن تابع با متغیر مختلط، حوزهٔ تعریف آن، به خاطر نوع بیان تابع، خود به خود محدود می‌شود. یک مثال مقدماتی در نظر

می‌گیریم. فرض کنید، تابعی به وسیلهٔ این رشته داده شده باشد

$$f(z) = ۱ + z + z^۲ + \cdots + z^n + \cdots \qquad (۴۹)$$

همان‌طور که می‌دانیم، این رشته در دایرهٔ واحد به مرکز مبداء مختصات هم‌گرا و در خارج این دایره واگرا است. بنابراین، تابع تحلیلی که با رابطهٔ (۴۹) داده شده است، تنها در این دایره معین است. از طرف دیگر، می‌دانیم، مجموع رشتهٔ (۴۹) در دایرهٔ $|z| < ۱$ با این رابطه بیان می‌شود:

$$f(z) = \frac{۱}{۱ - z} \qquad (۵۰)$$

ولی دستور (۵۰)، دیگر به ازای همهٔ مقدارهای $z \neq ۱$ معنی دارد. با توجه به قضیهٔ منحصر بودن، بیان (۵۰) تنها تابع تحلیلی متناظر با مجموع رشتهٔ (۴۹) در دایرهٔ $|z| < ۱$ است. به این ترتیب، تابعی را که در ابتدا تنها در دایرهٔ واحد داده شده بود، برای تمامی صفحه ادامه دادیم.

اگر تابع $f(z)$ در داخل حوزه‌ای مثل D معین باشد، و تابع دیگری مثل $F(z)$ با حوزهٔ تعریف Δ، که شامل D است، وجود داشته باشد، به نحوی که در D بر $f(z)$ منطبق باشد، در این صورت، بنابر قضیهٔ منحصر به فرد بودن، مقدارهای $F(z)$ در Δ به یک شکل معین می‌شود.

تابع $F(z)$ را ***ادامهٔ تحلیلی*** $f(z)$ گویند. تابع تحلیلی را، وقتی ***کامل*** گویند که با حفظ تحلیلی بودن خود نتواند به بیرون از مرزهای حوزهٔ تعریف خود، ادامه پیدا کند. برای نمونه، تابع تام، که در تمامی صفحه معین است، یک تابع کامل است. تابع مرومورف هم، یک تابع کامل است؛ این تابع در همه جا، به‌جز قطب‌های خود، معین است. با وجود این، تابع‌های تحلیلی هم وجود دارد که حوزهٔ تعریف کامل آن‌ها، یک حوزهٔ محدود است. ولی، ما به این نمونه‌های پیچیده‌تر نمی‌پردازیم.

مفهوم تابع تحلیلی کامل، ایجاب می‌کند به بررسی تابع‌های چندارزشی با متغیر مختلط بپردازیم. این مطلب را روی نمونه تابع

$$\ln z = \ln r + i\varphi$$

نشان می‌دهیم، که در آن $r = |z|$ و $\varphi = \arg z$. اگر در نقطه‌ای مثل

$$z_0 = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$$

از صفحهٔ z، یک مقدار اولیه از تابع را در نظر بگیریم

$$(\ln z)_0 = \ln r_0 + i\varphi_0$$

در این صورت، ضمن حرکت در دور یک منحنی مثل C، تابع تحلیلی می‌تواند به طور پیوسته ادامه یابد. همان‌طور که پیشتر هم یادآوری کردیم، به سادگی معلوم می‌شود، اگر نقطهٔ z ، دور بستهٔ C_0 را با آغاز از نقطه z_0 دور بزند، به نحوی که مبداء مختصات را در برداشته باشد (شکل ۲۲)، و دوباره به نقطه z_0 برگردد، دوباره در نقطه z_0، به همان مقدار اولیهٔ $\ln r_0$ می‌رسد، در حالی که زاویه φ به اندازهٔ 2π بزرگ شده است. این موضوع نشان می‌دهد، اگر تابع $\ln z$ را به طور پیوسته دور مسیر C ادامه دهیم، ضمن دور زدن محیط C، مقدار تابع را به اندازهٔ $2\pi i$ افزایش می‌دهیم. اگر نقطهٔ z ، این دور بسته را، n بار طی کند، به جای مقدار اولیه

$$(\ln z)_0 = \ln r_0 + i\varphi_0$$

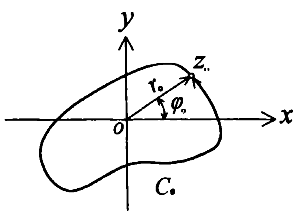
مقدار جدید زیر را به دست می‌آوریم:

$$(\ln z)_n = \ln r_0 + (2\pi n + \varphi_0)i$$

و اگر نقطهٔ z، دور C را m بار در جهت عکس بپیماید، به دست می‌آوریم:

$$(\ln z)_{-m} = \ln r_0 + (-2\pi m + \varphi_0)i$$

از آن‌چه گفتیم معلوم می‌شود که در صفحهٔ متغیر مختلط، باید مقدارهای مختلف $\ln z$ را که به هم بستگی دارند، بررسی کنیم. تابع $\ln z$ ، بی‌نهایت ارزشی است. برای چندارزشی



شکل ۲۲

بودن تابع $\ln z$ ، نقطهٔ $z=۰$، اهمیت زیادی دارد، زیرا ضمن دور زدن آن است که از یک مقدار تابع به مقدار دیگری از آن منتقل می‌شویم. به سادگی دیده می‌شود، اگر z، دور بسته‌ای را که شامل مبداء مختصات نباشد، دور بزند، مقدار $\ln z$ تغییر نمی‌کند. نقطهٔ $z=۰$ را نقطهٔ ***شاخه‌بندی تابع*** $\ln z$ گویند.

به طور کلی، اگر برای تابعی مثل $f(z)$، ضمن دور زدن نقطهٔ a،از یک مقدار به مقدار دیگری منتقل شویم، نقطهٔ a را ***نقطهٔ شاخه‌بندی*** تابع $f(z)$ گویند.

مثال دیگری می‌آوریم. فرض کنید

$$w = \sqrt[n]{z}$$

همان‌طور که دیده‌ایم، این تابع هم چند ارزشی است و n مقدار را قبول می‌کند:

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)\ ,\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+۲\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+۲\pi}{n}\right),\ \dots,$$

$$\dots,\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+۲\pi(n-۱)}{n} + i\sin\frac{\varphi+۲\pi(n-۱)}{n}\right)$$

همهٔ مقدارهای مختلف این تابع را می‌توان با آغاز از یک مقدار

$$w_۰ = \sqrt[n]{r_۰}\left(\cos\frac{\varphi_۰}{n} + i\sin\frac{\varphi_۰}{n}\right)$$

ضمن پیمودن یک منحنی بسته دور مبداء مختصات به دست آورد، زیرا در هر دوری که دور مبداء مختصات بزنیم، زاویهٔ φ به اندازهٔ ۲π افزایش می‌یابد.

وقتی منحنی بسته $(n-۱)$ دور بزند، با آغاز از مقدار اولیهٔ $\sqrt[n]{z}$ بقیهٔ $(n-۱)$ مقدار را به دست می‌آورد. وقتی محیط را n دور بزنیم به این مقدار می‌رسیم:

$$\sqrt[n]{z_۰} = \sqrt[n]{r_۰}\left(\cos\frac{\varphi_۰+۲\pi n}{n} + i\sin\frac{\varphi_۰+۲\pi n}{n}\right) = \sqrt[n]{r_۰}\left(\cos\frac{\varphi_۰}{n} + i\sin\frac{\varphi_۰}{n}\right)$$

یعنی دوباره به همان مقدار نخستین ریشه می‌رسیم.

سطح‌های ریمانی برای تابع‌های چندارزشی. روش هندسی عینی وجود دارد که می‌تواند خصلت

چندارزشی بودن تابع‌ها را نشان دهد.

دوباره تابع $\ln z$ را در نظر می‌گیریم. و روی صفحهٔ z در طول بخش مثبت محور Ox، بریدگی ایجاد می‌کنیم. اگر نقطهٔ z را از برخورد با بریدگی منع کنیم، دیگر نمی‌توانیم از یک مقدار $\ln z$ به مقدار دیگر آن، به طور پیوسته عبور کنیم. با ادامهٔ $\ln z$ از نقطهٔ z_0، تنها به یک مقدار $\ln z$ می‌رسیم.

تابع یک‌ارزشی که به این ترتیب در صفحهٔ بریده شدهٔ z به دست می‌آید، **شاخهٔ یک‌ارزشی** تابع $\ln z$ نامیده می‌شود. همهٔ مقدارهای $\ln z$ در مجموعه‌ای نامتناهی از شاخه‌های یک ارزشی، پخش شده است.

$$\ln r + i\varphi \quad , \quad ۲\pi n < \varphi \leq ۲\pi\,(n + ۱)$$

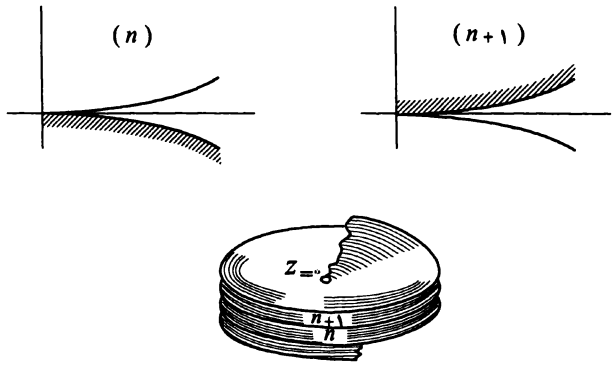
به سادگی معلوم می‌شود که nامین شاخه روی بخش پایین بریدگی، همان مقداری را قبول می‌کند که $(n + ۱)$ امین شاخه، روی طرف بالای بریدگی.

برای این‌که شاخه‌های مختلف $\ln z$ را تشخیص دهیم، باید تعداد زیادی از نمونهٔ صفحهٔ z، که در طول قسمت مثبت محور Ox بریده شده‌اند، انتخاب کنیم و مقدارهایی از آوند z را که متناظر با شاخهٔ nام است روی صفحهٔ nام تصور کنیم. نقطه‌هایی که مختصات برابر دارند، ولی روی نمونه‌های مختلف صفحه‌ها قرار گرفته‌اند، متناظر با یک عدد $x + iy$ هستند؛ تصویر عدد روی صفحهٔ nام، تنها به این معناست که nامین شاخهٔ لگاریتم را در نظر گرفته‌ایم.

برای این‌که به طور هندسی نشان دهیم که شاخهٔ nام لگاریتم در قسمت زیرین بریدگی صفحهٔ nام، بر شاخهٔ $(n + ۱)$ام لگاریتم در قسمت بالایی بریدگی صفحهٔ $(n + ۱)$ام منطبق است، nامین صفحه را به صفحهٔ $(n + ۱)$ام می‌چسبانیم و قسمت زیرین بریدگی صفحهٔ nام را به قسمت بالایی بریدگی صفحهٔ $(n + ۱)$ام وصل می‌کنیم. این ساختمان، ما را به سطحی با برگ‌های زیاد می‌رساند که به شکل یک پلکان مارپیچی است (شکل ۲۳). در ضمن، نقش ستون مرکزی پلکان را، نقطهٔ $z = ۰$ به عهده دارد.

وقتی نقطه از یک شاخه به شاخهٔ دیگر منتقل می‌شود، عدد مختلط به مقدار اولیهٔ خود برمی‌گردد، ولی تابع $\ln z$ از یک شاخه به شاخهٔ دیگر می‌رود.

سطحی که به این ترتیب ساخته شود، **سطح ریمانی** برای تابع $\ln z$ نامیده می‌شود. **ریمان** نخستین کسی بود که اندیشهٔ سطحی را که بتواند خصلت تابع‌های تحلیلی



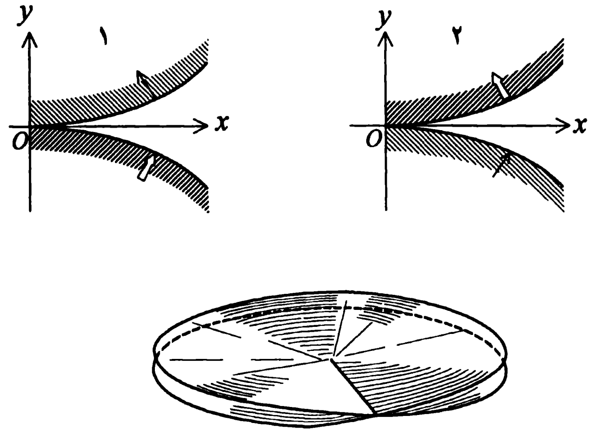
شکل ۲۳

چندارزشی را منعکس کند، مطرح کرد و نتیجه‌هایی را که از این اندیشه حاصل می‌شود، نشان داد.

اکنون ساختمان سطح ریمانی را، برای تابع $\sqrt{z}$ می‌دهیم. این تابع دوارزشی است و دارای نقطهٔ شاخه‌بندی در مبداء مختصات است.

دو نمونه از صفحهٔ z انتخاب می‌کنیم، به نحوی که یکی روی دیگری قرار گرفته و در طول محور Ox شکافته شده باشند. وقتی z، با آغاز از z، محیط بستهٔ C را، که شامل مبداء مختصات است، دور بزنند، $\sqrt{z}$ از یک شاخه به شاخهٔ دیگر منتقل می‌شود، و بنابراین، نقطهٔ سطح ریمانی از یک برگ به برگ دیگر می‌رود. برای این‌که به این هدف برسیم، باید لبهٔ پایینی بریدگی برگ اول را به لبهٔ بالای بریدگی برگ دوم، بچسبانیم، وقتی z برای بار دوم محیط بستهٔ C را بپیماید، باید مقدار $\sqrt{z}$ به همان مقدار اولیه برگردد، و بنابراین، سطح ریمانی باید به همان وضع اولیهٔ خود در برگ اول برگردد. برای رسیدن به این منظور، حالا باید لبهٔ پایینی برگ دوم را به لبهٔ بالایی برگ اول بچسبانیم. در نتیجه، به یک سطح دوبرگی می‌رسیم که خود را در طول بخش مثبت محور Ox قطع کرده است. تصوری از این سطح را می‌توان روی شکل ۲۴ ملاحظه کرد، که در آن دور و بر نقطهٔ $z=0$ روی این سطح، نشان داده شده است.

شبیه چنین سطح‌های چندبرگی را، که منعکس‌کنندهٔ تابع‌های چند ارزشی هستند، می‌توان برای هر تابع چند ارزشی ساخت. برگ‌های مختلف این سطح‌ها، در نزدیکی نقطه‌های شاخه‌بندی تابع به یکدیگر مربوط می‌شوند. معلوم می‌شود که ویژگی‌های تابع‌های تحلیلی، به طور کامل به ویژگی‌های سطح‌های ریمانی آن‌ها، بستگی دارد.



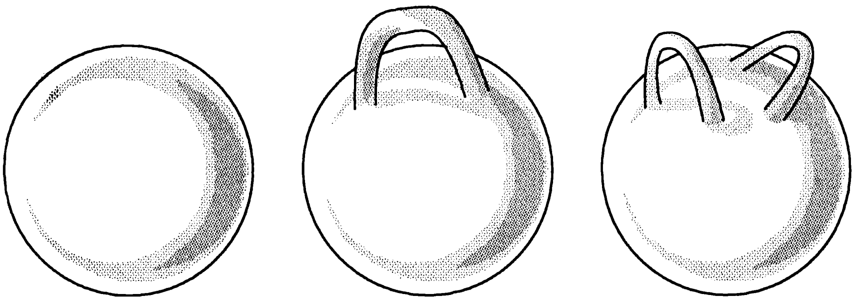
شکل ۲۴

این سطح‌ها، نه تنها وسیلهٔ کمکی با ارزشی برای روشن‌کردن خصلت تابع‌های چند ارزشی به شمار می‌روند، بلکه برای بررسی ویژگی‌های تابع‌های تحلیلی و تکامل روش‌های بررسی آن‌ها، نقشی جدی به عهده دارند. سطح ریمانی به مثابه پلی می‌ماند که آنالیز را در حوزهٔ متغیرهای مختلط به هندسه مربوط می‌کند و نه تنها اجازه می‌دهد عمیق‌ترین ویژگی‌های تحلیلی تابع‌ها را به هندسه مربوط کنیم، بلکه، به شاخهٔ تازه هندسه، یعنی توپولوژی هم (که کارش بررسی ویژگی‌هایی از شکل هندسی است، که ضمن تغییر پیوسته شکل آن تغییر نمی‌کند)، تکانی جدی در جهت تکامل آن داده است.

یکی از نمونه‌های درخشان اهمیت ویژگی‌های هندسی سطح‌های ریمانی، در نظریه تابع‌های جبری دیده می‌شود، تابع‌هایی که از راه حل معادلهٔ

$$f(z, w) = \cdot$$

به دست می‌آیند، که در آن، سمت چپ برابری، عبارت است از یک یا چندجمله‌ای نسبت به z و w. سطح ریمانی این تابع را می‌توان با تغییر پیوسته، همیشه به یک کره یا کره‌ای که همراه با چند دستگیره است، تبدیل کرد (شکل ۲۵). ویژگی‌های خاص این سطح، بستگی به تعداد دستگیره‌های آن دارد. این تعداد دستگیره‌ها را، ***گونای سطح و گونای تابع جبری***، که با آغاز از آن این سطح را به دست آوردیم، گویند. روشن شده است، گونای تابع جبری، می‌تواند مهم‌ترین ویژگی‌های آن را مشخص کند.



شکل ۲۵

۶. نتیجه

نظریهٔ تابع‌های تحلیلی، در رابطه با حل معادله‌های جبری، به وجود آمده است؛ ولی، ضمن پیشرفت خود، همواره با پرسش‌های تازه و تازه‌تری همراه بوده است. نظریه، این امکان را به‌وجود آورد که روشنی بیشتری بر دسته‌های اساسی تابع‌ها (تابع‌هایی که ضمن پیشرفت آنالیز، مکانیک و فیزیک ریاضی به وجود آمدند)، بخشید. بسیاری از احکام اصلی و مرکزی آنالیز را، تنها وقتی می‌توان تا پایان درک کرد که در حوزهٔ مختلط بررسی شوند. تابع‌های با متغیر مختلط، تعبیر فیزیکی مستقیمی، به عنوان میدان‌های بُرداری هیدرودینامیک و الکترودینامیک، پیدا کردند و به صورت وسیلهٔ باارزش و قابل توجهی برای حل مسأله‌های این شاخه‌های دانش در آمدند. بستگی بین نظریهٔ تابع‌ها با مسأله‌های نظریهٔ رسانایی گرما، نظریهٔ کشسانی و غیره کشف شد.

پرسش‌های کلی نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی و روش‌های خاص حل آن‌ها هر روز بیشتر بر نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط متکی می‌شوند. تابع‌های تحلیلی، به طور طبیعی، منجر به نظریهٔ معادله‌های انتگرالی و نظریهٔ کلی عمل‌گرهای (اُپراتورهای) خطی می‌شوند. بستگی جدی تابع‌های تحلیلی با هندسه، کشف شد. هر روزی که می‌گذرد، بستگی نظریهٔ تابع‌ها با شاخه‌های تازه‌ای در ریاضیات و دانش‌های طبیعی، گسترده‌تر می‌شوند و این، به معنای زنده بودن این نظریه و غنی‌تر شدن محتوی و موضوع آن است.

در این مقاله کوتاه نمی‌شود به همه جنبه‌های پربار نظریهٔ تابع‌ها پرداخت. کوشیدیم تنها مسأله‌ها و جهت‌های مختلفی را که در این نظریه وجود دارد، با ذکر حکم‌های مقدماتی که به

عنوان پایه‌های این نظریه به شمار می‌روند، نشان دهیم و نتوانستیم به بسیاری از جنبه‌های مهم این نظریهٔ، مثل بستگی آن با معادله‌های دیفرانسیلی، نظریهٔ تابع‌های بیضوی (الیپتیک) و تابع‌های خوددیسه، بستگی آن با نظریهٔ رشته‌های مثلثاتی و بسیاری چیزهای دیگر، بپردازیم. در حالت‌هایی هم که گفت‌وگو کرده‌ایم، خود را به اشاره‌ای محدود کردیم، ولی، امیدواریم همین مختصر بتواند تصوری دربارهٔ خصلت و اهمیت نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط را به خوانندهٔ ما داده باشد.

بخش دهم

عددهای اول

ک.ک. مارجانیش ویلی

بند آخر به وسیلهٔ

آ.گ. پوستنیکوف

۱. چگونگی مطالعهٔ عددهای اول

عددهای درست. همان‌طور که در بخش اول (جلداول) دیدیم، انسان از زمان‌های دور گذشته باعددهای درست سروکار داشته است، ولی سده‌های بسیار طول کشید تا به درک مفهوم رشتهٔ نامتناهی عددهای طبیعی رسید

$$۱,\ ۲,\ ۳,\ ۴,\ ۵,\ \ldots \qquad (۱)$$

و امروز، آدمی در گوناگون‌ترین فعالیت‌های عملی خود، مرتب به عددهای درست برخورد می‌کند. عددهای درست، بازتابی از مجموعهٔ رابطه‌های کمی در طبیعت هستند؛ در همهٔ حالت‌هایی که با پیوستگی و ناپیوستگی سروکار داریم، به عددهای درست، به عنوان ابزار ریاضی، نیاز داریم.

عددهای درست، در ضمن برای بررسی پیوستگی هم، نقش مهمی به عهده دارند. به عنوان نمونه، در آنالیز ریاضی، بسط تابع‌های تحلیلی به صورت رشتهٔ توانی با توان درست x، بررسی می‌شوند.

$$f(x)=a_۰+a_۱x+a_۲x^۲+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

همهٔ محاسبه‌ها، در واقع ناشی از عددهای درست است، و این مطلب بلافاصله و به روشنی، حتی با مطالعهٔ سطحی کارهای محاسبه‌ای یا ماشین‌های حساب و رایانه‌ها، همچنین جدول‌های محاسبه‌ای، مثل جدول لگاریتم، دیده می‌شود. بعد از عمل روی عددهای درست، در مرحلهٔ معینی به ممیز می‌رسیم که نمایندهٔ کسرهای دهدهی است؛ این کسرها، مثل هر کسر گویایی، عبارت است از نسبت دو عدد درست. در ضمن، وقتی با

عددی حقیقی سروکار داشته باشیم (مثل عدد π)، در عمل به جای آن از یک کسر گویا استفاده می‌کنیم (و از جمله به حساب می‌آوریم: $\pi = \frac{۲۲}{۷}$ یا $\pi = ۳٫۱۴$).

حساب، یعنی انجام قانون‌های عمل‌ها روی عددها؛ ویژگی‌های ژرف‌تر رشتهٔ طبیعی (۱)، به اضافهٔ عدد صفر و عددهای درست منفی، در **نظریهٔ عددها** مورد بررسی می‌شود، که عبارت است از دانش مربوط به دستگاه عددهای درست، و به مفهوم گسترده‌تر خود، مربوط به عددهایی که به کمک عددهای درست، ساخته می‌شوند (به‌ویژه بند ۵ همین بخش را ببینید). روشن است، نظریهٔ عددها، عددهای درست را به طور منفرد و جدا از هم بررسی نمی‌کند، بلکه بستگی متقابل آن‌ها و ویژگی‌هایی از عددها را که معرف رابطهٔ بین آن‌هاست، مطالعه می‌کند.

یکی از موضوع‌های اساسی نظریهٔ عددها، بررسی **بخش‌پذیری** یک عدد بر عدد دیگر است: اگر نتیجهٔ تقسیم عدد درست a برعدد درست b (که برابر صفر نیست)، عددی درست باشد، یعنی اگر

$$a = b.c$$

(a، b و c عددهایی درست‌اند)، گویند a بر b بخش‌پذیر است. یا عدد b، عدد a را می‌شمارد. ولی اگر، به عنوان نتیجهٔ تقسیم عدد درست a بر عدد درست b، یک کسر به دست آید، گویند a بر b بخش‌پذیر نیست. در عمل، بسیار پیش می‌آید که به مسألهٔ بخش‌پذیری برخورد می‌کنیم. ویژگی‌های بخش‌پذیری عددها، در برخی از مسأله‌های آنالیز ریاضی، نقش مهمی دارد. در مثل، اگر در بسط تابع به توان‌های درست x

$$f(x) = a_۰ + a_۱ x + a_۲ x^۲ + \cdots + a_n x^n + \qquad (۲)$$

همهٔ ضریب‌های فرد، یعنی ضریب‌هایی که اندیس آن‌ها بر ۲ بخش‌پذیر نیست، برابر صفر باشد، یعنی اگر

$$f(x) = a_۰ + a_۲ x^۲ + \cdots + a_{۲k} x^{۲k} +$$

در این صورت تابع در شرط

$$f(-x) = f(x)$$

صدق می‌کند. چنین تابعی را تابع زوج گویند و نمودار آن، نسبت به محور عرض، متقارن

است. و اگر در بسط (۲)، همهٔ ضریب‌های زوج، یعنی ضریب‌هایی که اندیس آن‌ها بر ۲ بخش‌پذیراست، برابر صفر باشد، به زبان دیگر، اگر داشته باشیم:

$$f(x) = a_1 x + a_3 x^3 + \cdots + a_{2k+1} x^{2k+1} + \cdots$$

آن‌گاه خواهیم داشت:

$$f(-x) = -f(x)$$

در این حالت، تابع را فرد گویند و نمودار آن، نسبت به مبداء مختصات متقارن است. مثال:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad \text{(تابع فرد)}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad \text{(تابع زوج)}$$

مسألهٔ مربوط به امکان ساختن n ضلعی منتظم، به کمک پرگار و خط‌کش، به طبیعت حسابی عدد n مربوط می‌شود[1].

عدد اول به عدد درستی (بزرگتر از واحد) گفته می‌شود که تنها دو بخشیاب (مقسوم‌علیه) مثبت درست داشته باشد: واحد و خودش. عدد ۱، عددی اول نیست، زیرا دو بخشیاب مثبت مختلف ندارد.

بنابراین، عددهای اول عبارت‌اند از

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots \qquad (3)$$

دربارهٔ نقش اساسی که عددهای اول درنظریهٔ عددها دارند، می‌توان از این قضیهٔ اساسی پی برد: هر عدد درست $n > 1$ را می‌توان به صورت ضرب عددهای اول (که ممکن است بعضی از عامل‌ها تکراری باشد) تبدیل کرد، یعنی به صورت

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k} \qquad (4)$$

---

۱. بخش چهارم (جلد اول) را ببینید.

که در آن $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$، عددهایی اول و a_1، a_2، ...، a_k، عددهایی درست‌اند که کوچکتر از واحد نیستند. در ضمن نمایش n به صورت (۴) منحصر به فرد است.

ویژگی‌هایی از عددها، که مربوط به نمایش آن‌ها به صورت جمع جمله‌ها باشد، ***ویژگی‌های جمعی***؛ ویژگی‌هایی که مربوط به نمایش عددها به صورت عامل‌های ضرب باشد، ***ویژگی‌های ضربی*** نامیده می‌شود. بستگی بین ویژگی‌های جمعی و ضربی عددها، بسیار بغرنج و مربوط به یک رشته مسأله‌های اساسی نظریهٔ عددهاست.

وجود مسأله‌های دشوار در نظریهٔ عددها (با توجه به این‌که عدد درست، ساده‌ترین عددهاست، مفهوم ریاضی روشنی دارد و به طور جدی با واقعیت عینی مربوط است) منجر به این می‌شود که برای مطالعهٔ پرسش‌های عمیق نظریهٔ عددها، اندیشه‌ها و روش‌های نیرومند تازه‌ای شکل می‌گیرد که نه تنها درخود نظریهٔ عددها، بلکه در ضمن در سایر شاخه‌های ریاضیات، اهمیت جدی دارند. برای نمونه، اندیشهٔ بی‌پایان بودن رشتهٔ عددهای طبیعی، که بازتابی از بی‌پایان بودن جهان مادی در فضا و در زمان است، تأثیر فوق‌العاده‌ای در پیشرفت ریاضیات داشته است. منظم بودن جمله‌های رشتهٔ عددهای طبیعی هم، اهمیت زیادی دارد. بررسی عمل‌هایی که روی عددهای درست انجام می‌گیرد، ما را به مفهوم عمل‌های جبری می‌رساند که در شاخه‌های متفاوتی از ریاضیات، نقش اساسی دارند.

مفهوم اَلگوریتم که عبارت است از روند حل مسأله براساس انجام دستورهای مشخص، و قبل از همه در حساب شکل گرفت، اهمیت زیادی در ریاضیات دارد؛ به خصوص، نقش الگوریتم در ریاضیات ماشینی، بی‌اندازه جدی و اساسی است. به عنوان مثال، می‌توان حل الگوریتمی مسأله‌ها را، روی الگوریتم ***اقلیدس***، برای پیدا کردن بزرگترین بخشیاب مشترک دو عدد طبیعی a و b، به روشنی دنبال کرد.

فرض می‌کنیم $a>b$. a را بر b تقسیم می‌کنیم، خارج قسمت q_1، و در صورتی که b بخشیابی از a نباشد، باقی‌ماندهٔ r_2 را به دست می‌آوریم:

$$a = bq_1 + r_2 \quad , \quad 0 < r_2 < b \tag{5_1}$$

سپس به شرط $r_2 \neq 0$، b را بر r_2 تقسیم می‌کنیم

$$b = r_2 q_2 + r_3 \quad , \quad 0 < r_3 < r_2 \tag{5_2}$$

بعد r_2 را بر r_3 تقسیم می‌کنیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا به باقی‌مانده‌ای برابر صفر

برسیم، که با توجه به نزولی بودن عددهای درست و غیرمنفی r_2، r_3، ...، بدون تردید به آن خواهیم رسید. فرض کنید:

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \qquad (5_{n-1})$$

$$r_{n-1} = r_n q_n \qquad (5_n)$$

در این‌صورت r_n، بزرگترین بخشیاب مشترک a و b خواهد بود. در واقع، اگر دو عدد درست l و m، بخشیاب مشترکی مثل d داشته باشند، به ازای عددهای درست h و k، عدد $hl+km$ هم بر d بخش‌پذیر خواهد بود. فرض می‌کنیم که δ، بزرگترین بخشیاب مشترک دو عدد a و b باشد. از برابری (5_1) معلوم می‌شود که δ، بخشیابی از r_2 است؛ از (5_2) نتیجه می‌شود که δ بخشیابی از r_3،...، از (5_{n-1}) دیده می‌شود که r_n بر δ بخش‌پذیر است. ولی خود r_n، بزرگترین بخشیاب مشترک a و b است، زیرا، با توجه به رابطهٔ (5_n)، r_n بخشیابی از r_{n-1}، با توجه به (5_{n-1}) ، r_n، بخشیابی از r_{n-2} است و غیره. بنابراین δ بر r_n منطبق و مسألهٔ پیدا کردن بزرگترین بخشیاب مشترک a و b حل می‌شود، در این‌جا، از روندی استفاده کردیم که دربارهٔ هر دو عدد دلخواه a و b می‌توان به‌کار برد؛ و این نمونهٔ مشخصی از الگوریتم است.

نظریهٔ عددها در بسیاری از شاخه‌های مختلف ریاضیات، همچون آنالیز ریاضی، هندسه، جبر رسمی و جبر جدید، نظریهٔ جمع‌بندی رشته‌ها، نظریهٔ احتمال و غیر آن، تأثیر تکاملی داشته است.

روش‌های نظریهٔ عددها. نظریهٔ عددها را، بنا بر روش‌هایی که دارد، می‌توان در چهار بخش شرح داد: مقدماتی، تحلیلی، جبری و هندسی.

نظریهٔ مقدماتی عددها، ویژگی‌هایی از عددهای درست را بررسی می‌کند که نیازی به دیگر شاخه‌های ریاضیات نداشته باشند. از جمله با توجه به اتحاد ***اولر***

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=$$
$$=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2+(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2$$
$$+(x_1y_3-x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4)^2+(x_1y_4-x_4y_1+x_2y_3-x_3y_2)^2 \qquad (6)$$

می‌توان به تندی ثابت کرد، هر عدد درست $N>0$ به مجموع چهار مربع عددهای درست

قابل تبدیل است، یعنی می‌توان آن را به صورت

$$N=x^2+y^2+z^2+u^2$$

نوشت، که در آن x ، y ، z و u، عددهایی درست هستند[1].

نظریهٔ تحلیلی عددها، برای حل مسأله‌های نظریهٔ عددها، از آنالیز ریاضی استفاده می‌کند. مبانی نظریهٔ تحلیلی عددها را ***اولر*** گذاشت و ***پ.ل.چبیشف***، ***دیریکله***، ***ریمان***، ***رامانوجان***، ***هاردی***، ***لیتلوود*** و دیگران، آن را تکامل دادند. نیرومندترین روش نظریهٔ تحلیلی عددها را ***ای. م. وینوگرادوف*** پیدا کرد، که دربارهٔ آن گفت‌وگو خواهیم کرد. این قسمت از نظریهٔ عددها، با شاخه‌های مختلفی از ریاضیات ــ که پیوند محکمی با کاربردهای عملی دارند ــ مثل نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط، نظریهٔ رشته‌ها، نظریهٔ احتمال و غیرآن، بستگی کامل دارد.

مبنای مفهوم نظریهٔ جبری عددها، مفهوم **عدد جبری** است، یعنی ریشه‌های معادلهٔ

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$$

که در آن a_0 ، a_1 ، a_2 ، ... ، a_n ــ عددهای درست معمولی هستند[2].

در زمینهٔ نظریهٔ جبری عددها، بیش از همه ***لاگرانژ***، ***گوس***، ***کومر***، ***ا.ای. زولوتارف***، ***ددکیند***، ***آ.اُ.هلفوند*** و دیگران کار کرده‌اند.

موضوع اصلی مطالعهٔ نظریهٔ هندسی عددها عبارت است از «شبکه‌های فضایی» دستگاه‌های همهٔ نقطه‌های «درست»، یعنی نقطه‌هایی که همهٔ مختصات آن‌ها در دستگاه مستقیم‌الخط مختصات (قائم یا مایل)، عددهایی درست باشند. شبکه‌های فضایی در هندسه و در بلورشناسی اهمیت زیادی دارند؛ در ضمن بررسی آن‌ها با نظریهٔ عددها، بستگی جدی دارد (به خصوص با نظریهٔ حسابی صورت‌های درجه دو، یعنی صورت‌های درجه دومی که ضریب‌ها و متغیرهای آن‌ها، عددهایی درست باشند). اساسی‌ترین کارها در زمینهٔ نظریهٔ هندسی عددها، به وسیلهٔ ***گ. میکوسکی*** و ***گ. ف. وارانوی***، انجام شده است[3].

---

۱. در این‌جا با یک معادلهٔ سیال سروکار داریم که باید آن را در حوزهٔ عددهای درست، حل کنیم.

۲. درحالت $a_0=1$، عددهای جبری را درست گویند. عددی که جبری نباشد، غیرجبری یا متعالی (ترانساندان) نامیده می‌شود.

۳. در نیمه دوم سده بیستم روش‌های هندسهٔ جبری به شیوه‌ای معمول برای کاوش در نظریهٔ عددها تبدیل شده است (ویراستار).

باید یادآوری کرد، روش‌های نظریهٔ تحلیلی عددها، هم درنظریهٔ جبری و هم در نظریهٔ هندسی عددها، کاربردهای مهمی دارد. به‌ویژه باید تاکید کرد مسألهٔ شمارش تعداد نقطه‌های درست در یک حوزهٔ معین، برای برخی از شاخه‌های فیزیک، اهمیت زیادی دارد. حل این مسأله به وسیلهٔ ***وارانوی*** طرح و روش‌های آن به وسیلهٔ ***ای.م. وینوگرادوف*** تکامل داده شد.

علت اصلی نیروی روش‌های تحلیلی نظریهٔ عددها در این است که در این‌جا بستگی بین عددهای درست ناپیوسته از راه بستگی‌های تازهٔ پیوستگی، غنی‌تر می‌شود.

این مطلب را هم یادآوری کنیم که در این بخش تنها به بعضی از مسأله‌های انتخاب شده در نظریهٔ عددها خواهیم پرداخت.

۲. مسأله‌های مربوط به عددهای اول را چگونه بررسی می‌کردند؟

نامحدود بودن تعداد عددهای اول. طبیعی است، ضمن بررسی دنبالهٔ (۳) عددهای اول

۲ , ۳ , ۵ , ۷ , ۱۱ , ۱۳ , ۱۷ , ۱۹ , ...

این پرسش پیش می‌آید: آیا این دنباله نامحدود است؟ این حقیقت که هر عدد درستی به صورت (۴) قابل تبدیل است، چیزی را حل نمی‌کند، زیرا نماهای a_1 ، ... ، a_k می‌توانند مجموعه‌ای بی‌پایان از مقدارها را قبول کنند. پاسخ به این پرسش را ***اقلیدس*** داده است و ثابت کرد تعداد عددهای اول نمی‌تواند برابر با عدد معینی مثل k باشد.

فرض کنید که p_1 ، p_2 ، ... ، p_k، عددهایی اول باشند، در این صورت عدد

$$m = p_1 p_2 \cdots p_{k+1}$$

مثل هر عدد دیگر بزرگتر از واحد، یا عدد اول و یا دارای بخشیاب‌های اول است. ولی m بر هیچ کدام از عددهای اول p_1 ، p_2 ، ... ، p_k بخش‌پذیر نیست، زیرا در غیر این‌صورت باید تفاضل $m - p_1 p_2 \ldots p_k$ هم بر چنین عددی بخش‌پذیر باشد؛ و چون این تفاضل برابر واحد است، چنین چیزی ممکن نیست. بنابراین، عدد m یا اول است و یا برعدد اولی مثل p_{k+1} که با همهٔ عددهای p_1 ، p_2 ، ... ، p_k فرق دارد، بخش‌پذیر است. و این به معنای آن است که مجموعهٔ عددهای اول نمی‌تواند پایانی داشته باشد.

غربال اِراتُوستن. ***اراتوستن***، ریاضی‌دان یونانی سدهٔ سوم پیش از میلاد، روش «غربال» را برای پیدا کردن همهٔ عددهای اولی که از عدد طبیعی مفروضی مثل N تجاوز نمی‌کنند، کشف کرد. باید همهٔ عددهای درست از ۱ تا N را نوشت:

$$۱ , ۲ , ۳ , ۴ , \ldots , N$$

سپس، ابتدا همهٔ عددهای مضرب ۲ (به‌جز خود ۲) را حذف کرد، بعد همهٔ مضرب‌های ۳ (به‌جز خود ۳) بعد همهٔ مضرب‌های ۵ (مضرب‌های چهار قبلاً حذف شده‌اند)، به‌جز خود ۵ و غیره. واحد را هم حذف می‌کنیم؛ عددهایی که باقی می‌ماند، عددهای اول‌اند. خاطر نشان می‌کنیم، روند حذف باید تا جایی ادامه پیدا کند که تمام مضرب‌های کوچکتر از $\sqrt{N}$ را حذف کرده باشیم، زیرا هر عدد مرکب (یعنی غیر اول)، که از N بزرگتر نباشد، بی‌تردید دارای بخشیاب اولی است که از $\sqrt{N}$ تجاوز نمی‌کند.

بررسی عددهای اول دررشتهٔ همهٔ عددهای درست مثبت، ما را با قانونمندی بغرنجی دربارهٔ تشکیل آن‌ها مواجه می‌کند: گاهی به عددهای اولی همچون ۸۰۰۴۱۱۹ و ۸۰۰۴۱۲۱ برمی‌خوریم که اختلاف آن‌ها برابر است با ۲ (که آن‌ها را عددهای اول «دوقلو» گویند) و گاهی به چنان عددهای اول دور از یکدیگری، همچون ۸۶۶۲۹ و ۸۶۶۷۷ مواجه می‌شویم که بین آن‌ها، حتی یک عدد اول دیگر هم پیدا نمی‌شود[۱]. با همهٔ این‌ها، جدول عددهای اول نشان می‌دهد که با بزرگ شدن عددها، «به طور میانگین، تعداد عددهای اول نادرتر می‌شود.»

اتحاد اولر. اثبات نامحدود بودن عددهای اول به وسیلهٔ اولر. ***لئونارد اولر***، ریاضی‌دان بزرگ سدهٔ هجدهم و عضو فرهنگستان علوم روسیه، تابع زیر را برای مقادیر $s>۱$، بررسی کرد که در زمان ما $\zeta(s)$ نامیده می‌شود:

$$\zeta(s) = ۱+\frac{۱}{۲^s}+\frac{۱}{۳^s}+\cdots+\frac{۱}{n^s}+\cdots \qquad (۷)$$

۱. عدد $(۲^{۶۹۷۲۵۹۳} - ۱)$ بزرگترین عدد اولی است که تا سال ۱۹۹۹ پیدا شده است. تا همین سال، دو عدد زیر بزرگترین عددهای اول دوقلو شناخته شده بودند.

$$۳۶۱۷۰۰۰۰۵۵\times ۲^{۳۹۰۲۰} \pm ۱$$

بسیاری معتقدند تعداد عددهای اول دوقلو نامتناهی است، ولی این حدس هنوز اثبات نشده است. متناهی یا نامتناهی بودن عددهای اول دوقلو یکی از مسأله‌های مهم باز درباره عددهای اول است (ویراستار).

همان‌طور که در بخش دوم (جلد اول) دیدیم، این رشته به ازای $s>1$ هم‌گرا (و به ازای $s \leq 1$ واگرا) است. *اولر* اتحاد بسیار مهمی را پیدا کرد، که در نظریهٔ عددهای اول، نقش بسیار مهمی به عهده دارد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \qquad (8)$$

که در آن، علامت $\prod_p$ به‌معنای آن‌است‌که‌عبارت‌های به‌صورت $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ را برای‌همهٔ عددهای اول p در هم ضرب کنیم. برای این‌که مسیر اثبات این اتحاد را نشان دهیم، یادآوری می‌کنیم که $\frac{1}{1-q} = 1+q+q^2+\cdots$ (به ازای $|q|<1$)، و بنابراین $\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = 1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots$ اگر این رشته‌ها را به ازای مقدارهای مختلف عدد اول p درهم ضرب کنیم و به یاد بیاوریم که هر عدد n، تنها به یک صورت قابل تجزیه به عامل‌های اول است، معلوم می‌شود که

$$\prod_p \left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\cdots\right) = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}+\cdots$$

از اتحاد (۸) می‌توان نتیجه گرفت که رشتهٔ $\sum_p \frac{1}{p}$، که از مقدارهای عکس همهٔ عددهای طبیعی تشکیل شده است، واگرا است (و این اثبات دیگری از این حکم است که تعداد عددهای اول نمی‌تواند محدود باشد)؛ همچنین نسبت تعداد عددهای اولی که از x تجاوز نمی‌کنند، به خود x، وقتی که x به طور نامحدود بزرگ شود، به سمت صفر میل می‌کند.

بررسی‌های پ. ل. چبیشف دربارهٔ توزیع عددهای اول در رشتهٔ طبیعی عددها. تعداد عددهای اولی را که از x تجاوز نمی‌کنند، به $\pi(x)$ نشان می‌دهیم؛ مثل $\pi(10) = 4$، زیرا ۲، ۳، ۵، ۷، همهٔ عددهای اولی هستند که از ۱۰ تجاوز نمی‌کنند؛ $\pi(\pi) = 2$، زیرا ۲ و ۳ تنها عددهای اولی هستند که از π تجاوز نمی‌کنند. دیدیم که:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x} = 0$$

نسبت $\frac{\pi(x)}{x}$ به چه ترتیبی نزولی است، به زبان دیگر، $\pi(x)$ طبق چه قانونی صعودی است؟

آیا نمی‌شود تابع کم و بیش ساده، ولی مشخصی پیدا کرد که با مقدار واقعی $\pi(x)$، اختلاف کمی داشته باشد؟ *لژاندر*، ریاضی‌دان مشهور فرانسوی، با مطالعهٔ جدول عددهای اول، حکم کرد، این تابع عبارت است از

$$\frac{x}{\ln x - A} \tag{۹}$$

که در آن ... ۱٫۰۸ = A، ولی اثبات این حکم را نداد. **گوس** هم که به بررسی توزیع عددهای اول پرداخته بود، حدس زد که $\pi(x)$ با $\int_{۲}^{x} \frac{dt}{\ln t}$ خیلی کم اختلاف دارد (توجه کنیم این رابطه برقرار است:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_{۲}^{x} \frac{dt}{\ln t}}{\frac{x}{\ln x}} = ۱ \tag{۱۰}$$

این رابطه با انتگرال‌گیری جزء به‌جزء و ارزیابی بعدی انتگرال به دست آمده اثبات می‌شود).

نخستین کسی که بعد از *اقلیدس*، توانست در زمینهٔ پرسش دشوار مربوط به توزیع عددهای اول، به موفقیت جدی برسد، **پ. ل. چبیشف** بود. او در سال ۱۸۴۸، با بررسی تابع *اولر* $\zeta(s)$ به ازای مقدارهای حقیقی s، ثابت کرد اگر $n>۰$ به دلخواه بزرگ و $\alpha>۰$ به دلخواه کوچک باشد، آنگاه عدد به دلخواه بزرگ x وجود دارد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\pi(x) > \int_{۲}^{x} \frac{dt}{\ln t} - \frac{\alpha x}{\ln^n x}$$

که با فرض **گوس** هم خیلی خوب تطبیق می‌کند. در حالت خاص ۱ = n، با در نظر گرفتن (۱۰)، **چبیشف** ثابت کرد که

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} = ۱ \tag{۱۱}$$

تنها به شرطی که حد $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$ وجود داشته باشد.

چبیشف فرض *لژاندار* دربارهٔ مقدار A را، که در رابطهٔ (۹) وجود دارد، رد کرد و ثابت کرد، این مقدار تنها می‌تواند ۱ = A باشد.

برتران، ریاضی‌دان مشهور فرانسوی، ضمن بررسی‌هایی که در نظریهٔ گروه‌ها می‌کرد، اثبات حکم زیر را لازم داشت، که خودش درستی آن را برای نامقدارهای بزرگی از n، به طریق تجربی و به کمک جدول، تحقیق کرد. حدس این است: اگر $n>3$، آن‌گاه بین دو عدد n و $2n-2$، دست کم یک عدد اول وجود دارد. تمام کوشش‌های *برتران* و دیگر ریاضی‌دانان، برای اثبات این حکم بی‌نتیجه ماند، تا این‌که در سال ۱۸۵۰، که **چبیشف** اثر دوم خود را، که مربوط به عددهای اول بود، چاپ کرد، نه تنها این فرض (پوستولای *برتران*) را ثابت کرد، بلکه در ضمن ثابت کرد، برای مقدارهای به اندازهٔ کافی بزرگ x، این نابرابری برقرار است:

$$A_1 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}} \qquad (12)$$

که در آن داریم: $0{,}92 < A_1 < 1$ و $1 < A_2 < 1{,}1$.

ما در بند ۳، شرح ساده‌ای از روش **چبیشف** را می‌دهیم، که البته منجر به نتیجهٔ تقریبی‌تری نسبت به نتیجهٔ خود **چبیشف** می‌شود.

کارهای **چبیشف**، انعکاس زیادی در بسیاری از ریاضی‌دانان، و به‌خصوص **سیلوستر** و **پوانکاره** داشت. در دوره‌ای که بیش از چهل سال طول کشید، عده‌ای از دانشمندان، در راه بهتر کردن نابرابری (۱۲) تلاش می‌کردند (تلاش در این جهت بود که مقدار ثابت سمت چپ نابرابری را بزرگتر و مقدار ثابت سمت راست نابرابری را کوچکتر کنند). ولی، در این ضمن، نتوانستند توفیقی در راه اثبات وجود

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$$

به دست آورند (به خاطر داریم، از روی کارهای **چبیشف** معلوم بود اگر این حد وجود داشته باشد، برابر با واحد است).

تنها در سال ۱۸۹۶، *آدامار* با استفاده از نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط، ثابت کرد تابع $\theta(x)$، که در بررسی **چبیشف** آمده است، و با برابری

$$\theta(x) = \sum_{p\le x} \ln p$$

تعریف می‌شود، در شرط زیر صدق می‌کند:

$$\underset{x\to\infty}{\text{حد}} \frac{\theta(x)}{x} = 1 \qquad (۱۳)$$

که از آن‌جا، به سادگی و بدون هیچ فرض اضافی، رابطهٔ (۱۱) به دست می‌آید (که بـه آن قانون *مجانبی توزیع عددهای اول* گویند).

آدامار نتیجهٔ (۱۳) را بـراسـاس بـررسی‌های *ریـمان*، ریاضی‌دان مشـهور آلمـانی سـدهٔ نوزدهم، به دست آورد. *ریمان*، تابع $\zeta(s)$ *اولر* (تابع (۷)) را به ازای مقدارهای مختلط متغیر $s=\sigma+it$، مطالعه کرده بود [*چبیشف* $\zeta(s)$ را به ازای مقدارهای حقیقی آوند بررسی کرده بود][1].

ریمان ثابت کرد $\zeta(s)$، که در نیم‌صفحهٔ $\sigma>1$ به وسیلهٔ رشتهٔ (۷) معین است

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

چنین است که

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$$

یک تابع متعالی (غیر جبری، ترانساندان) تام است [به ازای $s\leq 1$، رشتهٔ (۷) هم‌گرا نیست، ولی مقدارهای $\zeta(s)$ در نیم صفحهٔ $\sigma\leq 1$ به کمک ادامهٔ تحلیلی، معین می‌شوند] (بخش نهم را ببینید). *ریمان* این حدس را آورد (فرضیهٔ *ریمان*) که همهٔ ریشه‌های $\zeta(s)$ در نوار $0\leq\sigma\leq 1$ دارای بخش حقیقی برابر $\frac{1}{2}$ هستند، یعنی روی خط راست $\sigma=\frac{1}{2}$ قرار گرفته‌اند. بحث دربارهٔ درستی این فرضیه، هنوز هم ادامه دارد[2].

مرحلهٔ مهمی از اثبات (۱۳) در این جاست که ثابت کنیم روی خط $\sigma=1$، ریشه‌ای از $\zeta(s)$ وجود ندارد.

بررسی رفتار $\zeta(s)$، موجب تکامل نظریهٔ تابع‌های تام و مروmorf (برخه‌سان) شد، که

---

۱. *آ. سلبرگ*، توانست در سال ۱۹۴۹، اثبات مقدماتی قانون مجانبی عـددهای اول را بـه دست آورد (بـدون این‌که نیازی به نظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط باشد).

۲. فرض ریمان مهم‌ترین مسأله باز در ریاضیات است. اگر ایـن فـرض درست بـاشد آن‌گـاه مـی‌توان $\pi(x)$ را به تقریب ولی با دقتی دل‌خواه پیدا کرد. برای مثال از درستی این فرض می‌توان نتیجه گرفت که برای هر $x\geq 2$ داریم:

$$\left|\pi(x) - \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right| \sqrt{x}\,\ln(x)$$

(ویراستار).

در کاربردهای عملی، اهمیت زیادی دارند.

کارهای وینوگرادوف و شاگردان او در زمینهٔ عددهای اول. به دنبال به دست آمدن برابری (۱۳)، که می‌توان آن را به صورت (۱۰)، به این شکل نوشت:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\int_{۲}^{x}\frac{dt}{\ln t}} = ۱ \qquad (۱۴)$$

این پرسش را پیش آورد: تابع $\int_{۲}^{x}\frac{dt}{\ln t}$، با چه دقتی $\pi(x)$ را نشان می‌دهد. بهترین نتیجه‌ها را در این باره *ن.گ. چوداکف*، براساس به کار گرفتن *روش مجموع‌های مثلثاتی* که به وسیلهٔ *ای. م. وینوگرادوف* ساخته شده بود، به دست آورد (دربارهٔ این روش، در بند ۴ صحبت خواهیم کرد)؛ این نتیجه‌گیری‌ها، به **چوداکف** امکان داد، در ضمن حدودی را که بتوان روی وجود دست کم یک عدد اول تاکید کرد، به میزان زیادی تقلیل دهد. پیشتر ثابت شده بود، اگر دنبالهٔ

$$۱^{۲۵۰}, ۲^{۲۵۰}, ۳^{۲۵۰}, \ldots, n^{۲۵۰}, (n+۱)^{۲۵۰}, \ldots, \qquad (۱۵)$$

را در نظر بگیریم، بین هر دو جملهٔ متوالی آن، یعنی بین $n^{۲۵۰}$ و $(n+۱)^{۲۵۰}$، برای $n>n_۰$، دست کم یک عدد اول وجود دارد.

یادآوری می‌کنیم، همان‌طور که از دوجمله‌ای **نیوتن** برمی‌آید

$$(n+۱)^{۲۵۰} - n^{۲۵۰} > ۲۵۰n^{۲۴۹}$$

این تفاضل بسیار بزرگ است. **چوداکف** موفق شد دنبالهٔ (۱۵) را با دنبالهٔ

$$۱^{۴}, ۲^{۴}, ۳^{۴}, \ldots, n^{۴}, (n+۱)^{۴}, \ldots, \qquad (۱۶)$$

عوض کند، که جمله‌های آن نسبت به دنبالهٔ (۱۵) خیلی به هم نزدیک‌ترند، با وجود این، بین هر دو جملهٔ متوالی آن، یعنی $n^{۴}$ و $(n+۱)^{۴}$، با آغاز از عددی مثل $n=n_۰$، دست کم یک عدد اول وجود دارد. بعد از این نتیجه‌گیری، او باز هم موفق شد که توان‌های چهار را، به توان‌های سه، تبدیل کند.

اگر k و l نسبت به هم اول باشند، یعنی بخشیاب مشترکی به‌جز واحد نداشته باشند،

آن‌گاه، تصاعد حسابی با جملهٔ عمومی $kt+l$ شامل مجموعه‌ای بی‌پایان از عددهای اول است. این حکم، که تعمیم نتیجه‌گیری ***اقلیدس*** است، در سدهٔ نوزدهم و به وسیلهٔ ***دیریکله*** ثابت شد. این پرسش پیش می‌آید: کدام حد را می‌توان معین کرد که کوچکترین عدد اولی که در تصاعد $kt+l$ وجود دارد، از آن حد تجاوز نمی‌کند؟ ***یو. و. لینیک***، ریاضی‌دان لنینگرادی ثابت کرد، مقدار C وجود دارد، به نحوی که در هر تصاعد $kt+l$ (k و l نسبت به هم اول‌اند)، دست کم یک عدد اول پیدا می‌شود که از k^c کوچکتر باشد. ***لینیک***، در واقع از نظر اصولی، مسألهٔ مربوط به کوچکترین عدد اول در تصاعد حسابی را، سال‌ها قبل حل کرده بود و در سال‌های بعد، تنها به کوچکتر کردن مقدار ثابت C مشغول بود. ***لینیک***، بررسی‌های بسیار مهمی هم دربارهٔ مسألهٔ صفرهای تابع $\zeta(s)$ و تابع‌های کلی‌تر هم انجام داده است.

همان‌طور که گفتیم، بهترین نتیجه دربارهٔ توزیع عددهای اول، با به کار بردن روش تخمین مجموع‌های مثلثاتی ***وینوگرادوف*** به دست آمد.

مجموع مثلثاتی، به مجموعی به صورت

$$\sum_{A<x<B} e^{2\pi i f(x)}$$

گفته می‌شود که در آن، $f(x)$ عبارت است از تابعی حقیقی از x، در ضمن x می‌تواند همهٔ عددهای درست بین A و B و یا بخش مشخصی از این مقدارها مثل عددهای اول واقع در بین A و B را قبول کند. چون قدرمطلق $e^{2\pi iz}$ به ازای مقدارهای حقیقی z برابر واحد است، و قدرمطلق چند جمله از مجموع قدرمطلق‌های این جمله‌ها تجاوز نمی‌کند، داریم:

$$\left| \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)} \right| \leq P \qquad (۱۷)$$

این تخمین را می‌توان بهتر کرد، که گام‌های تعیین‌کنندهٔ مربوط به آن را ***ای. م. وینوگرادوف*** برداشت. برای مشخص بودن وضع، $f(x)$ را یک چندجمله‌ای می‌گیریم:

$$f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

اگر همهٔ αها، عددهایی درست باشند، به ازای مقدارهای درست x داریم: $e^{2\pi i f(x)} = 1$، و در این حالت، دیگر نمی‌توان تخمین (۱۷) را بهتر کرد. ولی اگر همهٔ α ها، عددهایی

درست نباشند، همان‌طور که **وینوگرادوف** ثابت کرده است، می‌توان تخمین (۱۷) را با استفاده از تقریب هر کدام از این ضریب‌ها به وسیلهٔ کسر گویایی با مخرجی که بزرگتر از حدی نباشد، بهتر کرد (می‌توان ثابت کرد هر α، که بین ۰ و ۱ واقع باشد، به صورت $\alpha=\frac{a}{q}+z$ است، که در آن a و q عددهایی درست و نسبت به هم اول‌اند، $q\leq\tau$ ، $|z|\leq\frac{1}{q\tau}$ و τ، عدد درستی که از قبل داده شده و بزرگتر از واحد است).

وینوگرادوف، با ساختن روش مجموع‌های مثلثاتی، توانست یک رشته از مسأله‌های دشوار نظریهٔ عددها را حل کند. از جمله در سال ۱۹۳۷، مسألهٔ مشهور **گُولدباخ** را حل و ثابت کرد، هر عدد فرد به اندازهٔ کافی بزرگ N را، می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت:

$$N=p_1+p_2+p_3 \tag{18}$$

این مسأله، ضمن نامه‌ای که **اولر** در سال ۱۷۴۲ برای دوستش **گولدباخ**، عضو فرهنگستان علوم روسیه، نوشته بود، مطرح شد و در جریان قریب دو سده، با وجود تلاش بسیاری از ریاضی‌دانان نامی، بدون حل باقی مانده بود.

همان‌طور که پیش از این دیدیم، بنابر رابطهٔ (۴)، عددهای اول در تبدیل عددهای درست به صورت ضرب، نقشی اساسی دارند، و حالا، رابطهٔ (۱۸)، تصور عددهای فرد را به صورت مجموع عددهای اول به ما می‌دهد. به سادگی و از (۱۸) می‌توان نتیجه گرفت، هر عدد زوج را می‌توان به مجموعی از عددهای اول، که تعداد آن‌ها از چهار تجاوز نکند، نشان داد*. به این ترتیب، قضیهٔ **وینوگرادوف ـ گولدباخ**، رابطه‌ای جدی بین ویژگی‌های جمعی و ضربی عددها، برقرار می‌کند[1].

اهمیت روش مجموع‌های مثلثاتی **وینوگرادوف**، تنها به نظریهٔ عددها ختم نمی‌شود. این

---

* این حدس **اولر**، که هر عدد زوج را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت، هنوز ثابت نشده است.

۱. در سال ۱۷۴۲، گولدباخ در نامه‌ای به اولر این حدس را مطرح کرد که هر عدد درست بزرگتر از ۵ را می‌توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت. اولر به او جواب داد که این حدس معادل با نوشتن هر عدد زوج بزرگتر از ۲ به صورت مجموع دو عدد اول است. اغلب این حدس آخر را حدس گولدباخ گویند. این حدس هنوز اثبات نشده، ولی پاره‌ای نتایج درباره آن به دست آمده است. در سال ۱۹۶۶، چن *(Ching - jun Chen)* ریاضیدان چینی ثابت کرد هر عدد زوج حاصل جمع یک عدد اول و یک عدد درست دیگری است به نحوی که این عدد دوم یا اول و یا حاصل‌ضرب دو عدد اول است. همچنین ثابت شده است هر عدد زوج حاصل جمع حداکثر ۶ عدد اول است. تا سال ۱۹۹۸ درستی حدس گولدباخ برای عددهای زوج کمتر از ۴×۱۰^{۱۴}، به وسیلهٔ رایانه، ثابت شده است (ویراستار).

روش، به خصوص به نظریهٔ تابع‌ها و در نظریهٔ احتمال، نقش مهمی به عهده دارد. با بعضی از جنبه‌های روش **وینوگرادوف** در بند ۴ همین بخش، آشنا خواهیم شد.

کسانی که بخواهند با این نظریه، به تفصیل آشنا شوند، می‌توانند به کتاب‌های «روش مجموع‌های مثلثاتی در نظریهٔ عددها» و «مبانی نظریهٔ عددها»، تالیف **وینوگرادوف**، مراجعه کنند.

۳. دربارهٔ روش چبیشف

تابع چبیشف θ و ارزیابی آن. اکنون، طرح ساده‌ای از روش **چبیشف** را، برای محاسبهٔ عددهای اول واقع در محدودهٔ مفروض، می‌آوریم. برای این‌که کار نوشتن ساده‌تر باشد، نشانه‌های زیر را می‌پذیریم: اگر B متغیر مثبتی باشد که می‌تواند به طور نامحدود بزرگ شود، و A کمیت دیگری، به نحوی که $|A|$ «نه سریع‌تر» از CB نمو می‌کند، که در آن C عدد مثبت ثابتی است (دقیق‌تر، اگر عدد ثابت $C>0$ وجود داشته باشد، به نحوی که با آغاز از جایی، همیشه داشته باشیم: $\frac{|A|}{B} \leq C$)، در این صورت می‌نویسیم:

$$A = O(B)$$

که اغلب این طور خوانده می‌شود: «A کمیتی است در ردیف (یا از مرتبهٔ) B»، مثل

$$\sin x = O(1)$$

زیرا همیشه داریم:

$$\frac{|\sin x|}{1} \leq 1$$

درست به همین ترتیب

$$5x^3 \cos 2x = O(x^3)$$

همچنین، بخش درست عدد x را به $[x]$ نشان می‌دهیم، یعنی $[x]$ عبارت است از بزرگترین عدد درستی که از x تجاوز نکند، مثل

$$[\pi] = 3 \;,\; [5] = 5 \;,\; [-1{,}5] = -2 \;,\; [0{,}999] = 0$$

حالا این پرسش را مطرح می‌کنیم: pرا عددی اول، nرا عددی طبیعی و $n!$را، همان‌طور که معمول است، حاصل‌ضرب

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$$

در نظر می‌گیریم (یادآوری می‌کنیم، با بزرگ شدن n ، مقدار $n!$با سرعت خیلی بیشتری بزرگ می‌شود). بزرگترین توان aاز عدد اول p، که $n!$برآن بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

بین عددهای ۱ ، ۲ ، ... ، n ، درست $\left[\frac{n}{p}\right]$ عدد وجود دارد که بر pبخش‌پذیر است؛ تعدادی از این عددها که در ضمن بر p^2 هم بخش‌پذیر باشند، برابر است با $\left[\frac{n}{p^2}\right]$؛ به همین ترتیب، $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ عدد، بر p^3بخش‌پذیر است و غیره. از آنجا به سادگی به دست می‌آید:

$$a = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

(این رشته به‌خودی خود قطع می‌شود، زیرا تنها وقتی نابرابری $\left[\frac{n}{p^s}\right] > 0$ برقرار است که داشته باشیم: $n \geq p^s$). در واقع، دراین مجموع، هر عاملی از حاصل‌ضرب $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ که بر p^mبخش‌پذیر باشد، mمرتبه به حساب آمده است (هم به عنوان مضرب p، هم به عنوان مضرب p^2، ... و سرانجام به عنوان مضرب p^m).

با توجه به این نتیجه، و با در نظر گرفتن هر عدد طبیعی به صورت (۴) نتیجه می‌شود که $n!$عبارت است از حاصل‌ضرب توان‌هایی به صورت

$$p^{\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots}$$

که برای همهٔ عددهای اول $p \leq n$در نظر گرفته شده باشد. بنابراین $\ln(n!)$ برابر است با مجموع لگاریتم‌های این توان‌ها، که به طور خلاصه می‌توان به این صورت نوشت:

$$\ln(n!) = \sum_{p \leq n} \left(\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots \right) \ln p \qquad (19)$$

برابری (۱۹) را ساده می‌کنیم. چون تابع $y = \ln x$، صعودی است، بنابراین

$$\ln m = \ln m \int_m^{m+1} dx < \int_m^{m+1} \ln x\, dx < \ln (m+1) \int_m^{m+1} dx = \ln (m+1)$$

(درستی این مطلب، به خصوص روی شکل ۱ دیده می‌شود). بنابراین

$$\ln(n!) = \ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n$$

$$< \int_1^2 \ln x\, dx + \int_2^3 \ln x\, dx + \cdots + \int_{n-1}^{n} \ln x\, dx + \ln n$$

$$= \int_1^n \ln x\, dx + \ln n$$

از طرف دیگر

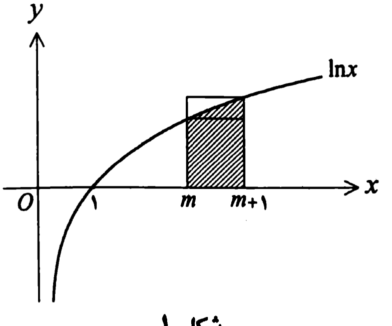
$$\ln (n!) > \ln 1 + \int_1^2 \ln x\, dx + \cdots + \int_{n-2}^{n-1} \ln x\, dx + \int_{n-1}^{n} \ln x\, dx = \int_1^n \ln x\, dx$$

با استفاده از دستور انتگرال جزء به جزء، به دست می‌آید:

$$\int_1^n \ln x dx = [x . \ln x]_1^n - \int_1^n x \frac{1}{x} \cdot dx = n \ln n - (n-1)$$

به این ترتیب

$$n \ln n - n + 1 < \ln(n!) < n \ln n - n + 1 + \ln n$$



شکل ۱

و از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$\ln(n!) = n\ln n + O(n) \qquad (۲۰)$$

یادآوری می‌کنیم که $\ln n = O(n)$؛ به‌جز آن، وقتی $n\to\infty$ ، $\ln n$ کندتر از هر توان مـثبت n صعودی است، یعنی به ازای هر مقدار ثابت $\alpha>0$ داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}} = 0 \qquad (۲۱)$$

زیرا، بنابرقانون رفع ابهام (بخش دوم، جلداول را ببینید):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\alpha n^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} = 0$$

سپس به دست می‌آید:

$$\sum_{p\le n}\left(\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots\right)\ln p \le \sum_{p\le n}\left(\frac{n}{p^2}+\frac{n}{p^3}+\cdots\right)\ln p =$$

$$=\sum_{p\le n}\frac{n\ln p}{p^2\left(1-\frac{1}{p}\right)} < 2n\sum_{p\le n}\frac{\ln p}{p^2} < 2n\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln m}{m^2} = 2nC_0 = O(n) \qquad (۲۲)$$

که در آن، C_0 عبارت است از مجموع رشته هم‌گرای $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\ln m}{m^2}$. هم‌گرایی مطلق این رشته با استفاده از (۲۱)، و به وسیلهٔ روش‌های عادی، ثابت می‌شود (بخش دوم، جلد اول، بند ۱۴ را ببینید). با توجه به (۲۰) و (۲۲)، برابری (۱۹) را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\sum_{p\le n}\left[\frac{n}{p}\right]\ln p = n\ln n + O(n) \qquad (۲۳)$$

اکنون به بررسی تابع **چبیشف** می‌پردازیم:

$$\theta(n) = \sum_{p\le n}\ln p \qquad (۲۴)$$

(لگاریتم حاصلضرب همهٔ عددهای اولی که از n تجاوز نکنند).

برابری (۲۳) را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\theta\left(\frac{n}{1}\right) + \theta\left(\frac{n}{2}\right) + \theta\left(\frac{n}{3}\right) + \theta\left(\frac{n}{4}\right) + \cdots = n\ln n + O(n) \qquad (25)$$

در واقع، هر $\ln p$ مفروض در همهٔ این مجموع‌های به صورت $\theta\left(\frac{n}{s}\right)$ وارد شده است، که در آن $p \le \frac{n}{s}$، یعنی $s \le \frac{n}{p}$. تعداد مجموع‌های به صورت $\theta\left(\frac{n}{s}\right)$ هم برابر است با $\left[\frac{n}{p}\right]$.

برابری (۲۵) برای عددهای غیرصحیح n هم برقرار است. برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که این برابری برای همهٔ مقدارهای x، با شرط $n < x < n+1$، صدق می‌کند؛ و در این باره هم کافی است ثابت کنیم، باتبدیل n به x، سمت چپ (۲۵) تغییر نمی‌کند، و جملهٔ اول سمت راست هم می‌تواند تنها به اندازهٔ $O(n)$ افزایش یابد. ولی حکم اول از این‌جا ناشی می‌شود که با چنین تغییری، هیچ‌کدام از جمله‌های سمت چپ بزرگ نمی‌شوند (حالت عکس وقتی پیش می‌آید که دست کم یک واحد به n اضافه شود)، و البته، کوچک هم نمی‌شوند. حکم دوم از این‌جا نتیجه می‌شود که بنابر دستور نمو تابع‌ها (بخش دوم، جلد اول را ببینید)

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi) \qquad (a < \xi < x)$$

داریم:

$$x\ln x - n\ln n = (x-n)\cdot(\ln\xi + 1) \qquad (n < \xi < x)$$

در ضمن، سمت راست برابری اخیر، از $\ln(n+1) + 1 = O(n)$، کوچکتر است، زیرا $0 < x - n < 1$. اگر در برابری (۲۵)، n را به $\frac{n}{2}$ تبدیل کنیم و سپس دو طرف آن را در ۲ ضرب کنیم و سپس برابری به دست آمده را از (۲۵) کم کنیم، به دست می‌آید:

$$\theta\left(\frac{n}{1}\right) + \theta\left(\frac{n}{2}\right) + \theta\left(\frac{n}{3}\right) + \theta\left(\frac{n}{4}\right) + \cdots = n\ln n + O(n)$$

$$2\theta\left(\frac{n}{2}\right) + 2\theta\left(\frac{n}{4}\right) + \cdots = 2\cdot\frac{n}{2}\cdot\ln\frac{n}{2} + O(n)$$

$$\theta\left(\frac{n}{1}\right) - \theta\left(\frac{n}{2}\right) + \theta\left(\frac{n}{3}\right) - \theta\left(\frac{n}{4}\right) + \cdots = n\ln 2 + O(n) < C_1 n$$

که در آن C_1 عبارت است از عدد مثبت ثابتی. ولی $\theta\left(\frac{n}{1}\right) - \theta\left(\frac{n}{2}\right)$ از همهٔ سمت چپ بزرگتر نیست، زیرا تفاضل‌های $\theta\left(\frac{n}{3}\right) - \theta\left(\frac{n}{4}\right)$، $\theta\left(\frac{n}{5}\right) - \theta\left(\frac{n}{6}\right)$، ...، نمی‌توانند منفی باشند.

بنابراین، از نابرابری اخیر نتیجه می‌شود:

$$\theta\left(\frac{n}{۱}\right)-\theta\left(\frac{n}{۲}\right)<C_{۱}n$$

که اگر در این‌جا به جای n، عددهای $\frac{n}{۲}$ ، $\frac{n}{۴}$، ...، را قرار دهیم، به دست می‌آید:

$$\theta\left(\frac{n}{۲}\right)-\theta\left(\frac{n}{۴}\right)<C_{۱}\frac{n}{۲}$$

$$\theta\left(\frac{n}{۴}\right)-\theta\left(\frac{n}{۸}\right)<C_{۱}\frac{n}{۴}$$

....

از آن‌جا، با توجه به این‌که اگر k به اندازهٔ کافی بزرگ باشد (وقتی $۲>\frac{n}{۲^k}$) داریم: $\theta\left(\frac{n}{۲^k}\right)=۰$، با جمع این نابرابری‌ها، به دست می‌آید:

$$\theta(n)<C_{۱}\left(n+\frac{n}{۲}+\frac{n}{۴}+\ldots\right)=۲C_{۱}n \tag{۲۶}$$

که سرانجام، با مراجعه به برابری (۲۳)، نتیجه می‌شود:

$$۰\leq\sum_{p\leq n}\frac{n}{p}\ln p-\sum_{p\leq n}\left[\frac{n}{p}\right]\ln p\leq\sum_{p\leq n}\ln p=\theta(n)\leq ۲C_{۱}n=O(n)$$

و با توجه به آن، از برابری (۲۳) به دست می‌آید

$$\sum_{p\leq n}\frac{n}{p}\ln p=n\ln n+O(n)$$

$$\sum_{p\leq n}\frac{\ln p}{p}=\ln n+\theta C \tag{۲۷}$$

که در آن، C مقدار ثابت بزرگتر از صفر، و θ عددی که به n بستگی دارد و در هر حال $|\theta|\leq ۱$.

تخمین مقدار عددهای اولی که در یک فاصلهٔ معین قرار دارند. حالا، ثابت می‌کنیم، وقتی n به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، می‌توان مقدار ثابت M را طوری انتخاب کرد که بین n و Mn، به هر تعداد

دل‌خواه از عددهای اول p، وجود داشته باشد. یعنی، می‌توانیم به تعداد T از عددهای اول p داشته باشیم که در نابرابری $n<p\leq Mn$ صدق کند. روشن است که

$$\sum_{n<p\leq Mn}\frac{\ln p}{p}=\sum_{p\leq Mn}\frac{\ln p}{p}-\sum_{p\leq n}\frac{\ln p}{p} \tag{۲۸}$$

از برابری (۲۷)، با تبدیل n و Mn، به دست می‌آید:

$$\sum_{p\leq Mn}\frac{\ln p}{p}=\ln(Mn)+\theta' C=\ln M+\ln n+\theta' C \tag{۲۹}$$

که در آن $|\theta'|\leq 1$، بنابراین، با توجه به برابری‌های (۲۸)، (۲۹) و (۲۷)

$$\sum_{p\leq Mn}\frac{\ln p}{p}=\ln M+\theta' C-\theta C=\ln M+2\theta_{\circ} C$$

که در آن $|\theta'_{\circ}|\leq 1$، یعنی

$$\ln M-2C\leq\sum_{n<p\leq Mn}\frac{\ln p}{p}\leq\ln M+2C \tag{۳۰}$$

ولی، از طرف دیگر، از آن‌جا که به ازای $x>e$، تابع $y=\frac{\ln x}{x}$ نزولی است (زیرا، وقتی $x>e$، یعنی $\ln x>1$ باشد، داریم: $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$)، برای $n\geq 3$ خواهیم داشت:

$$T\frac{\ln Mn}{Mn}\leq\sum_{n<p\leq Mn}\frac{\ln p}{p}\leq T\frac{\ln n}{n}$$

از آن‌جا، با توجه به (۳۰)، نتیجه می‌شود که

$$T\frac{\ln n}{n}>\ln M-2C \tag{۳۱}$$

و

$$T\frac{\ln(Mn)}{Mn}<\ln M+2C \tag{۳۲}$$

اکنون مقدار ثابت M را طوری انتخاب می‌کنیم که سمت راست (۳۱)، برابر واحد شود:

$$\ln M - ۲C = ۱ \Rightarrow M = e^{۲C+۱}$$

و فرض می‌کنیم:

$$L = M(\ln M + ۲C)$$

در این صورت، برای T، یعنی عددهای اولی که بین n و Mn قرار گرفته‌اند، این نابرابری‌ها را با توجه به (۳۱) و (۳۲)، به دست می‌آوریم:

$$\frac{n}{\ln n} < T < L\frac{n}{\ln n} \qquad (۳۳)$$

وقتی n به سمت بی‌نهایت برود، $\frac{n}{\ln n} \to \infty$ و بنابراین $T \to \infty$.

۴. روش وینوگرادوف

روش وینوگرادوف در حل مسألهٔ گولدباخ. در این بند کوشش می‌کنیم تصوری از روش ***وینوگرادوف***، درحالت خاصی که برای حل مسألهٔ ***گولدباخ*** (تبدیل یک عدد فرد به مجموع سه عدد اول) به کار می‌رود، به دست بدهیم.

بیان تعداد تبدیل‌های N به مجموع سه عدد اول، به صورت انتگرال. N را عددی فرد و به اندازهٔ کافی بزرگ می‌گیریم. تعداد تبدیل‌های N به صورت مجموع سه عدد اول، یعنی تعداد جواب‌های معادلهٔ

$$N = p_۱ + p_۲ + p_۳ \qquad (۳۴)$$

را ($p_۱$، $p_۲$، $p_۳$، عددهایی اول‌اند)، به $I(N)$ نشان می‌دهیم.

مسألهٔ ***گولدباخ*** به شرطی حل خواهد شد که ثابت کنیم: $I(N) > ۰$. با روش ***وینوگرادوف***، نه تنها می‌توان این حکم را ثابت کرد (برای مقدارهای به اندازهٔ کافی بزرگ N)، بلکه در ضمن بیانی تقریبی برای $I(N)$ هم به دست آورد.

$I(N)$ را می‌توان به این‌صورت نوشت:

$$I(N) = \sum_{p_۱ \le N} \sum_{p_۲ \le N} \sum_{p_۳ \le N} \int_۰^۱ e^{۲\pi i(p_۱ + p_۲ + p_۳ - N)\alpha} d\alpha \qquad (۳۵)$$

در واقع، به ازای مقدارهای درست $n\neq 0$ داریم:

$$\int_0^1 e^{2\pi n i\alpha}d\alpha=\frac{1}{2\pi ni}\left[e^{2\pi n i\alpha}\right]_0^1=\frac{1}{2\pi ni}(e^{2\pi ni}-e^0)=0$$

زیرا

$$e^{2\pi ni}=\cos(2\pi n)+i\sin(2\pi n)=1$$

و اگر داشته باشیم $n=0$، در این‌صورت

$$\int_0^1 e^{2\pi n i\alpha}d\alpha=\int_0^1 d\alpha=1$$

به این ترتیب، هر وقت مجموع عددهای اول p_1، p_2، p_3 برابر N باشد، انتگرالی که زیر علامت‌های مجموع قرار گرفته است، برابر واحد می‌شود، و وقتی $p_1+p_2+p_3\neq N$، این انتگرال برابر صفر می‌شود و بنابراین درستی برابری (۳۵) ثابت می‌شود.

چون $e^{2\pi i a}.e^{2\pi i b}=e^{2\pi i(a+b)}$، و انتگرال مجموع چند جمله برابر است با مجموع انتگرال‌های این جمله‌ها، بنابراین از برابری (۳۵) نتیجه می‌شود:

$$I(N)=\int_0^1\left(\sum_{p\leq N}e^{2\pi i\alpha p}\right)^3 e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha$$

که اگر فرض کنیم:

$$T_\alpha=\sum_{p\leq N}e^{2\pi i\alpha p} \tag{۳۶}$$

در این‌صورت، خواهیم داشت:

$$I(N)=\int_0^1 T_\alpha^3 e^{-2\pi i\alpha N}d\alpha \tag{۳۷}$$

تقسیم فاصلهٔ انتگرال‌گیری روی پاره‌خط‌های اصلی و فرعی. فرض کنید h را به طریق مناسبی وابسته به N، طوری انتخاب کرده باشیم که همراه با N به‌سمت بی‌نهایت صعودی، ولی همیشه کوچکتر از N و حتی کوچکتر از $\sqrt[3]{\frac{N}{2}}$ باشد، و فرض کنید $\tau=\frac{N}{h}$. چون تابع زیر انتگرال در (۳۷)، دوره‌ای برابر واحد دارد، می‌توان پاره خط انتگرال‌گیری را در (۳۷)، به پاره‌خط از

$-\frac{1}{\tau}$ تا $1-\frac{1}{\tau}$ تغییر داد. به این ترتیب

$$I(N)=\int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} T_{\alpha}^{3}\, e^{-2\pi i\alpha N}\, d\alpha \qquad (۳۸)$$

حالا، همهٔ کسرهای کوچکتر از واحد $\frac{a}{q}$ (a و q نسبت به هم اول) با مخرج‌هایی که از h تجاوز نمی‌کنند، در نظر می‌گیریم، و از پاره‌خط $-\frac{1}{\tau}\le\alpha\le 1-\frac{1}{\tau}$، پاره‌خط‌های «اصلی» متناظر با این کسرها را جدا می‌کنیم:

$$\frac{a}{q}-\frac{1}{\tau}\le\alpha\le\frac{a}{q}+\frac{1}{\tau} \qquad (۳۹)$$

مـی‌توان ثابت کرد، اگر N به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، این پاره‌خط‌ها، نقطهٔ مشترکی ندارند. به این ترتیب، پاره‌خط $-\frac{1}{\tau}\le\alpha\le 1-\frac{1}{\tau}$ به پـاره‌خط‌های «اصـلی» و «فـرعی» تـقسیم می‌شود[1].

$I(N)$ را به مجموع دو جمله تبدیل می‌کنیم:

$$I(N)=I_1(N)+I_2(N) \qquad (۴۰)$$

که در آن، $I_1(N)$ عبارت است از مجموع انتگرال‌ها روی پاره‌خط اصلی، و $I_2(N)$، مجموع انتگرال‌ها روی پاره‌خط فرعی. همان‌طور که خواهیم دید، وقتی عدد فرد N به طور نامحدود صعودی باشد، $I_1(N)$ هم به طور نامحدود صعودی می‌شود، ضمن

---

۱. اگر دو پاره‌خط از این‌گونه که شامل نقطه‌های $\frac{a_1}{q_1}$ و $\frac{a_2}{q_2}$ هستند مـتقاطع بـاشند، در ایـن‌صورت در یکـی از نقطه‌های مشترک، این تساوی برقرار است.

$$\frac{a_1}{q_1}+\frac{\theta_1}{\tau}=\frac{a_2}{q_2}+\frac{\theta_2}{\tau} \quad (|\theta_1|\le 1,\ \ |\theta_2|\le 1)$$

و یا به زبان دیگر

$$\frac{a_1q_2-a_2q_1}{q_1q_2}=\frac{\theta_1-\theta_2}{\tau}$$

ولی سمت چپ برابری اخیر، از لحاظ قدرمطلق، کمتر از $\frac{1}{q_1q_2}$ نیست، یعنی از $\frac{1}{h^2}$ بزرگتر است؛ همچنین سمت راست آن بزرگتر از $\frac{2}{\tau}$ نیست، یعنی از $\frac{2h}{N}$ کوچکتر است. در نتیجه، اگر برابری اخیر بـرقرار بـاشد، نـابرابـری $\frac{2h}{N}>\frac{1}{h^2}$ به دست می‌آید که با نوع انتخاب h متناقض است.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{I_{۲}(N)}{I_{۱}(N)} = ۰ \qquad (۴۱)$$

به این ترتیب، با توجه به (۴۰)، تعداد تبدیل‌های عدد فرد N به صورت مجموع سه عدد اول، همراه N، به طور نامحدود صعودی است، که در حالت خاص، فرض ***گولدباخ*** را هم، برای عددهای فرد به اندازهٔ کافی بزرگ N، ثابت می‌کند.

بیان انتگرال روی پاره‌خط اصلی. فرض کنید α متعلق به یکی از پاره‌خط‌های اصلی باشد؛ بنابر (۳۹)، $\alpha = \frac{a}{q} + z$، که در آن $۱ \le q \le h$ و $|z| \le \frac{۱}{\tau}$. مجموع (۳۸)

$$T_\alpha = \sum_{p\le N} e^{۲\pi i p\alpha} = \sum_{p\le N} e^{۲\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)p}$$

که در آن p عددی اول کوچکتر از N است، را، به مجموع‌های جزئی $T_{\alpha, M}$، به صورت

$$T_{\alpha, M} = \sum_{M\le p<M'} e^{۲\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)p}$$

تقسیم می‌کنیم، که در آن M' طوری انتخاب شده است که $e^{۲\pi izp}$ «تفاوت کمی» با $e^{۲\pi izM}$ داشته باشد (یادآوری می‌کنیم، ما تنها مفهومی از روش ***وینوگرادوف*** را می‌آوریم و نه اثبات قضیهٔ ***گولدباخ ـ وینوگرادوف*** را. ما نه در این‌جا و نه بعد معنای دقیق «تفاوت کم» را نیاورده‌ایم، در حالی که در اثبات ***وینوگرادوف***، گفت‌وگو از نابرابری‌های مشخص دقیقی است که با محاسبه‌های طولانی به دست می‌آیند). بنابراین

$$T_{\alpha, M} \approx e^{۲\pi iMz} \sum_{M\le p<M'} e^{۲\pi i\frac{a}{q}p} = e^{۲\pi iMz}\, T_{\frac{a}{q}, M} \qquad (۴۲)$$

در این‌جا، علامت $\approx$ به این معناست که سمت چپ رابطهٔ اخیر «تفاوت کمی» با عبارت وسط دارد.

سپس هر کدام از مجموع‌های

$$T_{\frac{a}{q}, M} = \sum_{M\le p<M'} e^{۲\pi i\frac{a}{q}p} \qquad (۴۳)$$

را به مجموع‌های $T_{\frac{a}{q}, M', l}$ تقسیم می‌کنیم، که در آن عددهای اول p_l در رابطهٔ $M \le p_l < M'$

صدق می‌کنند و به تصاعد حسابی $qx+l$ تعلق دارند، که در آن، l همهٔ مقدارهای از ۰ تا $q-1$ را، که نسبت به q اول‌اند، قبول می‌کند. ولی

$$e^{2\pi i \frac{a}{q} pl} = e^{2\pi i x + 2\pi i \frac{a}{q} l} = e^{2\pi i \frac{a}{q} l}$$

و بنابراین

$$T_{\frac{a}{q}, M'l} = e^{2\pi i \frac{a}{q} l} . \pi(M , M' ,l) \tag{۴۴}$$

که در آن $\pi(M , M' , l)$ عبارت است از تعداد عددهای اولی که در شرط $M \leq p < M'$ صدق می‌کنند و در ضمن به تصاعد حسابی $qx+l$ تعلق دارند. در تکامل دستور (۱۴) برای تعداد $\pi(x)$ عددهای اولی که از x تجاوز نکنند، معلوم شده بود که $\pi(M , M' , l)$ ـ به ازای مقدارهایی از q که نسبت به تفاضل $M'-M$ «کوچک» باشند ـ با $\frac{1}{\varphi(q)} \int_M^{M'} \frac{dx}{\ln x}$ اختلاف کمی خواهد داشت، که در آن $\varphi(q)$ عبارت است از ***تابع اولر***. این یک ***تابع حسابی*** است (یعنی تابعی که برای عددهای طبیعی q معین است)، که تعداد عددهای درست و مثبتی را که از q تجاوز نمی‌کنند و نسبت به q اول‌اند، مشخص می‌کند. بنابراین، با توجه به (۴۴) می‌توان به دست آورد که

$$T_{\frac{a}{q}, M'l} \approx e^{2\pi i \frac{a}{q} l} \cdot \frac{1}{\varphi(q)} \int_M^{M'} \frac{dx}{\ln x} \tag{۴۵}$$

در عبارتی که سمت راست برابری (۴۵) قرار دارد، تنها عامل اول به l، یعنی به نوع انتخاب تصاعد حسابی $qx+l$ بستگی دارد (در این جا q را مقدار ثابتی به حساب آورده‌ایم). از (۴۵) به دست می‌آید

$$T_{\frac{a}{q}, M} \approx \frac{1}{\varphi(q)} \int_M^{M'} \frac{dx}{\ln x} \sum_l e^{2\pi i \frac{a}{q} l}$$

و سپس، با توجه به (۴۲):

$$T_{\alpha, M} \approx e^{2\pi i M z} \cdot \frac{1}{\varphi(q)} \int_M^{M'} \frac{dx}{\ln x} \sum_l e^{2\pi i \frac{a}{q} l} \tag{۴۶}$$

در ضمن

$$e^{2\pi iMz}\int_M^{M'}\frac{dx}{\ln x}\approx\int_M^{M'}\frac{e^{2\pi izx}}{\ln x}dx$$

که به کمک آن می‌توان (۴۶) را به این ترتیب، تغییر داد:

$$T_{\alpha,M}\approx\int_M^{M'}\frac{e^{2\pi izx}}{\ln x}dx\cdot\frac{1}{\varphi(q)}\sum_l e^{2\pi i\frac{a}{q}l} \tag{۴۷}$$

که از آن به دست می‌آید:

$$T_\alpha\approx\int_2^N\frac{e^{2\pi izx}}{\ln x}dx\cdot\frac{1}{\varphi(q)}\sum_l e^{2\pi i\frac{a}{q}l} \tag{۴۸}$$

مجموعی که در سمت راست رابطهٔ (۴۸) قرار دارد

$$\sum_l e^{2\pi i\frac{a}{q}l}$$

و مجموعی است نسبت به عددهای طبیعی l که از q تجاوز نمی‌کنند و نسبت به آن اول هستند، برحسب تابع حسابی $\mu(q)$ بیان می‌شود. تابع $\mu(q)$ به این ترتیب تعریف می‌شود: $\mu(q)=0$ به شرطی که q بر مربع عدد درست بزرگتر از واحد، بخش‌پذیر باشد؛ $\mu(1)=1$ و $\mu(q)=(-1)^n$، به شرطی که داشته باشیم $q=p_1p_2\cdots p_n$ که در آن p_1 ، p_2 ، ... ، p_n عددهای اول مختلفی هستند. بنابراین، برای a و q (که نسبت به هم اول‌اند)

$$\sum_l e^{2\pi i\frac{a}{q}l}=\mu(q) \tag{۴۹}$$

به این ترتیب، معادلهٔ (۴۸) را می‌توان به صورت

$$T_\alpha\approx\frac{\mu(q)}{\varphi(q)}\int_2^N\frac{e^{2\pi izx}}{\ln x}dx$$

نوشت، و با توجه به این‌که $\mu^3(q)=\mu(q)$

$$T_\alpha^3\approx\frac{\mu(q)}{[\varphi(q)]^3}\left(\int_2^N\frac{e^{2\pi izx}}{\ln x}dx\right)^3 \tag{۵۰}$$

با توجه به تعریف $I_1(N)$ داریم:

$$I_1(N) = \sum_{1\le q<h} \sum_{a} \int_{\frac{a}{q}-\frac{1}{\tau}}^{\frac{a}{q}+\frac{1}{\tau}} T_\alpha^3 e^{-2\pi i\alpha N}\, d\alpha \qquad (۵۱)$$

که با مفروض بودن q، مجموع شامل همهٔ aهای غیرمنفی کوچکتر از q می‌شود. چون $\alpha=\frac{a}{q}+z$، در نتیجهٔ (۵۰)

$$I_1(N) \approx \sum_{1\le q<h} \frac{\mu(q)}{[\varphi(q)]^3} \sum_{a} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\int_2^N \frac{e^{2\pi izx}}{\ln x}dx\right) e^{-2\pi izN}\, dz \qquad (۵۲)$$

فرض می‌کنیم:

$$R(N) = \int_{-\frac{1}{\tau}}^{\frac{1}{\tau}} \left(\int_2^N \frac{e^{2\pi izx}}{\ln x}dx\right)^3 e^{-2\pi izN}\, dz \qquad (۵۳)$$

از رابطهٔ (۵۲) نتیجه می‌شود که

$$I_1(N) \approx R(N) \sum_{1\le q<h} \frac{\mu(q)}{[\varphi(q)]^3} \sum_{a} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} \qquad (۵۴)$$

باید به این نکته توجه داشت که $R(N)$ عبارت است از یک بیان تحلیلی که می‌تواند به تقریب محاسبه شود؛ برای نمونه می‌توان نوشت:

$$R(N) \approx \frac{N^2}{2(\ln N)^3} \qquad (۵۵)$$

عبارتی که در سمت راست رابطهٔ (۵۴) با عامل $R(N)$ وجود دارد، با مجموع این رشتهٔ بی‌پایان، اختلاف «کمی» دارد:

$$S(N) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mu(q)}{[\varphi(q)]^3} \sum_{a} e^{-2\pi i\frac{a}{q}N} \qquad (۵۶)$$

و لذا، بنابر (۵۴) و (۵۵)، می‌توان ثابت کرد:

$$I_1(N) \approx \frac{N^2}{2(\ln N)^3} S(N) \qquad (۵۷)$$

و یا، به زبان دقیق‌تر

$$I_{۱}(N) = \frac{N^{۲}}{۲(\ln N)^{۳}} (S(N) + \gamma_{۱}(N)) \tag{۵۸}$$

که در آن

$$\underset{N \to \infty}{\text{حد}} \ \gamma_{۱}(N) = ۰ \tag{۵۹}$$

یادآوری می‌کنیم که بیان حسابی $S(N)$ را می‌توان به این صورت داد:

$$S(N) = C \prod_{p} \left(۱ - \frac{۱}{p^{۲} - ۳p + ۳} \right) \tag{۶۰}$$

که در آن، C عبارت است از مقداری ثابت، و حاصل‌ضرب مربوط به همهٔ عددهای اولی است که بخشیابی از N باشند، در ضمن ثابت کرده‌اند که

$$S(N) > ۰/۶ \tag{۶۱}$$

تخمین انتگرال روی خط فرعی. حالا به تخمین مجموع $I_{۲}$ انتگرال‌ها روی پاره‌خط‌های فرعی می‌پردازیم، از آن‌جا که قدر مطلق (مدول) انتگرال، از انتگرال قدر مطلق تابع زیر انتگرال، تجاوز نمی‌کند، و وقتی که αN حقیقی باشد داریم $|e^{-۲\pi i\alpha N}| = ۱$، بنابراین

$$|I_{۲}| < \max |T_{\alpha}| \cdot \int_{-\frac{۱}{\tau}}^{۱-\frac{۱}{\tau}} |T_{\alpha}|^{۲} \, d\alpha \tag{۶۲}$$

که در آن، $\max|T_{\alpha}|$ عبارت است از بیشترین مقدار $|T_{\alpha}|$ به ازای αهایی که متعلق به پاره‌خط فرعی باشند (ما، با ضرب $\max|T_{\alpha}|$ در انتگرالی که در تمامی پاره‌خط $-\frac{۱}{\tau} \le \alpha \le ۱ - \frac{۱}{\tau}$ گسترده است، نابرابری را، تقویت کرده‌ایم).

ولی، مجذور قدرمطلق (مدول) عدد مختلط، برابر است با حاصل‌ضرب این عدد در عدد مختلط مزدوج آن، بنابراین

$$|T_{\alpha}|^{۲} = T_{\alpha} \cdot \overline{T}_{\alpha}$$

که با توجه به (۳۶)

$$\overline{T}_\alpha = \sum_{p\le N} e^{-2\pi i\alpha p}$$

زیرا $e^{-2\pi i\alpha p} = \cos 2\pi\alpha p - i\sin 2\pi\alpha p$. به این ترتیب، نابرابری (۶۲) را می‌توان به این صورت نوشت

$$|I_2| < \max|T_\alpha| \cdot \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} \sum_{p\le N} e^{2\pi i\alpha p} \sum_{p_1\le N} e^{-2\pi i\alpha p_1} d\alpha$$

و یا به صورت

$$|I_2| < \max|T_\alpha| \cdot \int_{-\frac{1}{\tau}}^{1-\frac{1}{\tau}} \sum_{p\le N}\sum_{p_1\le N} e^{2\pi i\alpha(p-p_1)} d\alpha \qquad (۶۳)$$

ولی، انتگرالی که در نابرابری (۶۳) وجود دارد، بنابرآنچه در ابتدای این بند گفتیم، عبارت است از تعداد U، جواب‌های اول p و p_1 در معادلهٔ $p-p_1=0$، که از N بزرگتر نباشند و یا به طور ساده، تعداد عددهای اولی که از N تجاوز نکنند، یعنی $\pi(N)$. با توجه به نتیجه‌گیری (۱۲) **چبیشف**

$$\pi(N) < B\cdot\frac{N}{\ln N}$$

که در آن، B مقدار ثابتی است. به این ترتیب

$$|I_2| < B\cdot\frac{N}{\ln N}\cdot\max|T_\alpha| \qquad (۶۴)$$

دوباره تکرار می‌کنیم $\max|T_\alpha|$ عبارت است از حداکثر مقدار $|T_\alpha|$ روی پاره‌خط‌های فرعی. با توجه به (۵۸) و (۵۹) برای اثبات ***قضیهٔ گولدباخ ـ وینوگرادوف***، این می‌ماند که ثابت کنیم $\max|T_\alpha|$، مرتبه‌ای کوچکتر از $\frac{N}{(\ln N)^2}$ دارد؛ ولی اثبات این حکم، بسیار دشوار است و هستهٔ مرکزی تمامی اثبات این قضیه را تشکیل می‌دهد.

هر α، که متعلق به یکی از پاره‌خط‌های اضافی باشد، به صورت $\alpha=\frac{a}{q}+z$ نشان داده می‌شود که در آن $h<q\le\tau$ و $|z|\le\frac{1}{q\tau}$. به این ترتیب، مسأله، منجر به تخمین قدر مطلق مجموع مثلثاتی زیر (با توجه به شرط‌های مفروض) می‌شود:

$$T_\alpha = \sum_{p \leq N} e^{2\pi i\left(\frac{a}{q}+z\right)p}$$

وینوگرادوف، به‌ویژه ثابت کرد که

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\max T_\alpha}{\frac{N}{(\ln N)^3}} = 0 \qquad (65)$$

برای این منظور، او از اتحادی که به تابع $\mu(n)$ مربوط است (ما با این تابع آشنا هستیم)، استفاده کرده است.

متاسفانه نمی‌توانیم اثبات برابری (۶۵) را بیاوریم؛ خوانندگانی که علاقه‌مند به آشنایی با این اثبات باشند، می‌توانند به بخش دهم کتاب **وینوگرادوف**، به نام «روش مجموع‌های مثلثاتی در نظریهٔ عددها» مراجعه کنند.

از (۶۵) و (۶۴) هم، نتیجه می‌شود:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{I_2(N)}{I_1(N)} = 0$$

به این ترتیب، با توجه به (۴۰)، (۵۸) و (۵۹) داریم:

$$I(N) = \frac{N^2}{2(\ln N)^3}\,(S(N) + \gamma(N)) \qquad (66)$$

که در آن $\lim_{N\to\infty} \gamma(N) = 0$ و $S(N)$ به معنای (۶۰) است و در ضمن با توجه به (۶۱) داریم: $S(N) > 0{,}6$. و به این ترتیب، اثبات قضیه کامل می‌شود.

۵. تبدیل عددهای درست به مجموع دو مربع. عددهای درست مختلط

اهمیت مطالعهٔ عددهای اول تا حد زیادی مربوط به نقشی است که در بیشتر نظریه‌های مربوط به قانون‌مندی‌های عددی دارد. مسأله‌های بسیاری وجود دارد که در برخورد اول، به کلی دور از نظریهٔ بخش‌پذیری به نظر می‌رسد، ولی بعد از بررسی دقیق‌تر، معلوم می‌شود

که به طور جدی به نظریهٔ عددهای اول مربوط می‌شوند. این موضوع را، با مثالی روشن می‌کنیم.

یکی از مسأله‌های نظریهٔ عددها این است که کدام عددهای طبیعی را می‌توان به مجموع مربع‌های دو عدد درست تبدیل کرد (لزومی ندارد این عددهای درست، مخالف صفر باشند).

با مراجعه مستقیم به رشته عددهایی که مجموع دو مربع کامل باشند، نمی‌توان قانونی پیدا کرد؛ در مثل، بین عددهای درست از ۱ تا ۵۰، این عددها قابل تبدیل به مجموع دو مربع‌اند:

۱، ۲، ۴، ۵، ۸، ۹، ۱۰، ۱۳، ۱۶، ۱۸، ۲۰، ۲۵

۲۶، ۲۹، ۳۲، ۳۴، ۳۶، ۳۷، ۴۰، ۴۱، ۴۵، ۴۹، ۵۰

دنباله‌ای که به نظر می‌رسد از هیچ قانونی پیروی نمی‌کند.

فرما، ریاضی‌دان فرانسوی سدهٔ هفدهم، یادآور می‌شود که تمامی موضوع در این‌جاست که عدد مورد نظر به چه ترتیب قابل تجزیه به عامل‌های اول است، یعنی این مسأله، به نظریهٔ عددهای اول بستگی دارد.

عددهای اول، به‌جز $p = ۲$، فرد هستند و بنابراین، ضمن تقسیم بر ۴ یا به باقی‌ماندهٔ ۱ (عددهای اول به صورت $۴n + ۱$) و یا به باقی‌ماندهٔ ۳ (عددهای اول به صورت $۴n + ۳$) می‌رسند.

۱) عدد اول p، وقتی و تنها وقتی قابل تبدیل به مجموع دو مربع است که به صورت $p = ۴n + ۱$ باشد.

اثبات این‌که عدد به صورت $۴n + ۳$ قابل تبدیل به مجموع دو مربع نیست، کم و بیش روشن است: در واقع، مجموع مربع‌های دو عدد زوج بر ۴ بخش‌پذیر است، مجموع مربع‌های دو عدد فرد ضمن تقسیم بر ۴ به باقی‌ماندهٔ ۲ می‌رسد و سرانجام، مجموع مربع‌های یک عدد زوج و یک عدد فرد در تقسیم بر ۴ به باقی‌ماندهٔ برابر ۱ می‌رسد.

به چند ویژگی از عددهای اول می‌پردازیم و به خصوص ثابت می‌کنیم، اگر p عددی اول باشد، $(p - ۱)! + ۱$ بر p بخش‌پذیر است. عددی که بر p بخش‌پذیر نباشد، ضمن تقسیم بر p، به‌یکی از باقی‌مانده‌های $۱، ۲، ۳، ...، p - ۱$ می‌رسد. عدد درست r را با شرط $۱ \leq r \leq p - ۱$ انتخاب می‌کنیم؛ اگر r را در عددهای $۱، ۲، ...، p - ۱$ ضرب کنیم و سپس بر p تقسیم کنیم، باز هم به همان باقی‌مانده‌ها، منتهی به ردیف دیگری می‌رسیم. به‌ویژه بین باقی‌مانده‌ها

واحد وجود دارد، یعنی برای هر r، عددی مثل r_1 پیدا می‌شود، به نحوی که داشته باشیم: $r.r_1 = 1 + kp$. یادآوری می‌کنیم $r = r_1$، تنها وقتی است که $r = 1$ یا $r = p - 1$ باشد. در واقع، اگر $r^2 = 1 + kp$، در این صورت $(r - 1)(r + 1)$ بر p بخش‌پذیر است؛ و برای عددهای $1 \le r \le p - 1$، این وضع تنها در حالت $r = 1$ و $r = p - 1$ پیش می‌آید. باقی‌ماندهٔ تقسیم $(p - 1)! = 1 \times 2 \times \dots \times (p - 1)$ را بر p پیدا می‌کنیم. در این حاصل‌ضرب، برای هر عامل r، به‌جز ۱ و $p - 1$، عددی مثل r_1 مخالف r پیدا می‌شود، به نحوی که $r.r_1$ در تقسیم بر p باقی‌مانده‌ای برابر ۱ داشته باشد. بنابراین $(p - 1)!$ در تقسیم بر p، به همان باقی‌مانده‌ای می‌رسد که حاصل‌ضرب ۱ در $p - 1$ در تقسیم بر p به آن می‌رسید، یعنی $p - 1$. به این ترتیب $(p - 1)! + 1$ بر p بخش‌پذیر است.

اکنون، فرض کنید $p = 4n + 1$. می‌نویسیم:

$$(p-1)! + 1 = \left\{1 \times 2 \times \dots \times \frac{p-1}{2}\right\} \times \left\{\left(p - \frac{p-1}{2}\right) \cdots (p-2)(p-1)\right\} + 1$$

عبارتی که در آکولاد دوم قرار دارد، ضمن تقسیم بر p به باقی‌ماندهٔ $(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ می‌رسد؛ ولی $\frac{p-1}{2} = 2n$، عددی است زوج، بنابراین $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 + 1$، در این حالت هم بر p بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $\left(\frac{p-1}{2}\right)!$ بر p را به A نشان می‌دهیم. روشن است که $A^2 + 1$ بر p بخش‌پذیر است.

عبارت $x - Ay$ را در نظر می‌گیریم که در آن x و y، بدون ارتباط با هم، عددهای 0، 1، ...، $[\sqrt{p}]$ را قبول می‌کنند ($[x]$، یعنی بزرگترین عدد درستی که از x تجاوز نکند). در این صورت $\left([\sqrt{p}] + 1\right)^2 \ge p + 1$ مقدار عددی $x - Ay$ به‌دست می‌آید (که مختلف یا گاهی بر هم منطبق‌اند). چون باقی‌مانده‌های مختلف در تقسیم بر p، تنها می‌تواند p عدد مختلف باشد (0، 1، 2،...،$p - 1$)، در حالی که $p + 1$ مقدار عددی وجود دارد، دو جفت متفاوت (x_1, y_1) و (x_2, y_2)، پیدا می‌شود، به نحوی که $x_1 - Ay_1$ و $x_2 - Ay_2$ در تقسیم بر p به یک باقی‌مانده می‌رسند، یعنی $(x_1 - x_2) - A(y_1 - y_2)$ بر p بخش‌پذیر است. فرض می‌کنیم $x_0 = x_1 - x_2$ و $y_0 = y_1 - y_2$. روشن است که $|x_0| < \sqrt{p}$ و $|y_0| < \sqrt{p}$. حالا که $A^2 + 1$ بر p بخش‌پذیر است، $(Ay_0)^2 + y_0^2 = y_0^2(A_0^2 + 1)$ بر p بخش‌پذیر است؛ ولی از آنجا که $x_0 - Ay_0$ بر p بخش‌پذیر است، عدد $x_0^2 - (Ay_0)^2 = (x_0 - Ay_0)(x_0 + Ay_0)$ هم بر p بخش‌پذیر است. به این ترتیب، مقدار $x_0^2 + y_0^2$، که برابر است با

$(x_\circ^2-(Ay_\circ)^2+(Ay_\circ)^2+y_\circ^2)$، بر p بخش‌پذیر است. ولی $|x_\circ|<\sqrt{p}$ و $|y_\circ|<\sqrt{p}$. از این‌جا نتیجه می‌گیریم، یا $x_\circ^2+y_\circ^2=\circ$ و یا $x_\circ^2+y_\circ^2=p$. حالت اول ممکن نیست، زیرا زوج‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) مختلف‌اند. به این ترتیب، عدد اول به صورت $4n+1$ به صورت مجموع دو مربع در می‌آید.

۲) حالا به تبدیل یک عدد درست دل‌خواه به صورت مجموع دو مربع می‌پردازیم. درستی این اتحاد به سادگی قابل تحقیق است:

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

این اتحاد نشان می‌دهد، اگر دو عدد قابل تبدیل به مجموع دو مربع باشند، حاصل‌ضرب آن‌ها هم به مجموع دو مربع قابل تبدیل است. از اینجا نتیجه می‌شود که حاصل‌ضرب هر توانی از عددهای اول به صورت $4n+1$ و ۲، برابر با مجموع دو مربع است. از آنجا که از حاصل‌ضرب مجموع دو مربع در یک مربع، مجموع دو مربع به دست می‌آید، بنابراین، هر عددی که در آن، عامل‌های اول به صورت $4n+3$ به توان زوج رسیده باشند، قابل تبدیل به مجموع دو مربع است.

۳) ثابت می‌کنیم، اگر عدد اول به صورت $4n+3$ در تجزیهٔ عددی با توان فرد ظاهر شده باشد، این عدد نمی‌تواند به مجموع دو مربع تبدیل شود. با این اثبات، پاسخ پرسش اصلی ما هم به طور کامل داده می‌شود.

عدد مختلط به صورت $a+bi$ را در نظر می‌گیریم. که در آن a و b، عددهایی درست و حقیقی هستند. چنین عددهای مختلطی را، **عددهای مختلط درست** گویند. وقتی که عدد درست N قابل تبدیل به مجموع دو مربع باشد: $N=a^2+b^2$، می‌توان نوشت: $N=(a+bi)(a-bi)=\alpha.\overline{\alpha}$ (منظور $\overline{\alpha}$، مزدوج عدد مختلط α است)، یعنی عدد N در حوزهٔ عددهای مختلط درست، قابل تجزیه به دو عامل مزدوج مختلط است.

در حوزهٔ عددهای مختلط درست هم، می‌توان نظریهٔ بخش‌پذیری را، درست شبیه نظریهٔ بخش‌پذیری در حوزهٔ عددهای درست حقیقی، ساخت. عدد مختلط و درست α را بر عدد مختلط درست β بخش‌پذیر گوییم به شرطی که $\frac{\alpha}{\beta}$ هم به نوبهٔ خود، عدد مختلط درستی باشد. تنها چها عدد مختلط درست α وجود دارد که می‌توانند عدد ۱ را بشمارند: ۱، ۱−، i، $-i$. عدد مختلط درست α را اول گوییم به شرطی که بخشیاب دیگری به‌جز ۱، ۱−، i، $-i$، α، $-\alpha$، αi، $-\alpha i$ نداشته باشد. حالا، به مفهوم تازه‌ای از مسأله‌ای

می‌رسیم که در شماره ۱) همین بند حل کردیم: روشن می‌شود که عددهای اول به صورت $4n + 1$ و عدد ۲، خاصیت اول بودن خود را در حوزهٔ عددهای مختلط درست، از دست می‌دهند. ولی، به سادگی می‌توان ثابت کرد عددهای اول به صورت $4n + 3$، باز هم اول باقی می‌مانند. در واقع، اگر داشته باشیم $p = \alpha\beta$، خواهیم داشت: $p = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}$ و $p^2 = \alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}$. ولی $\alpha\overline{\alpha}$ و $\beta\overline{\beta}$، عددهای درست و مثبت معمولی هستند، $p \neq \alpha\overline{\alpha}$، زیرا عددهای اول به صورت $4n + 3$ نمی‌توانند برابر با مجموع دو مربع باشند. بنابراین $\alpha\overline{\alpha} = 1$، یعنی α می‌تواند یا ± 1 و یا $\pm i$ باشد؛ به این ترتیب، p عددی اول می‌شود.

دربارهٔ عددهای مختلط درست هم، قضیهٔ مربوط به منحصر به فرد بودن تجزیه به عامل‌های اول، به قوت خود باقی است. البته، این منحصر بودن به شرطی است که از ردیف عامل‌ها و ترکیب‌های آن‌ها با عددهای ۱، ۱−، i، $-i$، صرفنظر کنیم.

فرض کنید که N برابر دو مربع باشد: $N = \alpha\overline{\alpha}$. حال p را، عدد اولی به‌صورت $4n + 3$ در نظر بگیرید. حساب می‌کنیم، چه توانی از p در عدد N وارد شده است. از آن‌جا که p در حوزهٔ عددهای مختلط درست هم، اول باقی می‌ماند، کافی است معلوم کنیم، چه توانی از p در α و در $\overline{\alpha}$ وارد شده است. ولی، این توان‌ها برابرند و بنابراین، بدون تردید، توان p در N، برابر با عددی زوج است و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

این کشف که مضمون نظریهٔ بخش‌پذیری، تنها مربوط به حوزهٔ عدد درست حقیقی نیست (همان‌طور که دیدیم، این نظریه در حوزهٔ عددهای مختلط درست هم صادق است)، به وسیلهٔ ریاضی‌دانان سدهٔ نوزدهم گسترش یافت؛ و به این مناسبت، مفهوم‌های کلی تازه‌ای وارد در ریاضیات شد (مثل مفهوم‌های حلقه و ایده‌آل). با اهمیتی که این مفهوم‌ها در زمان ما پیدا کرده است، محدودهٔ نظریهٔ عددها، به میزان بسیار زیادی گسترش یافته است[1].

---

۱. مسأله‌های مربوط به عددهای اول همچنان توجه ریاضی‌دانان را به خود جلب می‌کنند. بعضی از این مسأله‌های باز را، که اکنون مورد توجه ریاضی‌دانان قرار گرفته‌اند، در اینجا می‌آوریم. در مورد هر کدام بعضی نتیجه‌ها به دست آمده است، ولی هیچ‌کدام به طور کامل حل نشده‌اند.

الف) آیا، از نظر محاسباتی، تجزیه یک عدد درست به عامل‌های اول مشکل‌تر از **تعیین *اول* بودن یک عدد درست مفروض** است؟ در حال حاضر (اوایل سال ۲۰۰۰)، با کمک رایانه‌ها، می‌توان تعیین کرد که آیا عددی با ۳۰۰۰ رقم اول هست و یا نه. در حالی که عددهایی را که نزدیک به ۱۵۵ رقم دارند می‌توان با اطمینان تجزیه کرد. به تقریب تمام روش‌هایی که برای امنیت شبکه اینترنت وجود دارند متکی به تفاوت محاسبه‌ای

←

⟵

تعیین عددهای اول و تجزیه به عامل‌های اول هستند.

ب) آیا تعداد عددهای اول از نوع $n^۲+۱$ بی‌نهایت است؟

ج) بعد از اثبات قضیهٔ آخر فرما، با استفاده از روش‌های هندسه جبری، حدسی مشهور به حدس ABC در دستور کار ریاضیدانان قرار گرفته است. n را عددی صحیح بگیرید و $\mathrm{rad}(n)$ را برابر حاصل ضرب عددهای اولی در نظر بگیرید که n را می‌شمارند. برای مثال، $\mathrm{rad}(۲۴)=۶$ و $\mathrm{rad}(۱۵۰)=۳۰$. اگر A، B و C سه عدد درست مثبت باشند، آنگاه $P(A , B , C)$ را به نحو زیر تعریف می‌کنیم:

$$P(A,B,C) = \frac{\log \max(|A|, |B|,|C|)}{\log \mathrm{rad}(ABC)}$$

حال می‌توانیم حدس ABC را بیان کنیم:

حدس ABC: برای هر عدد حقیقی $v>۱$ فقط تعداد محدودی سه‌تایی (A, B, C) وجود دارد که در شرط‌های زیر صدق کند:

i. A ، B ، و C عددهای درست غیرصفر و نسبت به هم اول هستند، و

ii. $A+B+C=۰$ ، و

iii. $P(A , B , C) \geq v$.

یکی از دلایل اهمیت این حدس این است که از آن می‌توان قضیه آخر فرما را به راحتی یکسری نتیجه گرفت (ویراستار).

بخش یازدهم

نظریهٔ احتمال

آ.ن. کولموگوروف

۱. قانون‌مندی‌های احتمالی

قانون‌مندی‌های ساده‌ای که در دانش‌های طبیعی وجود دارد، متکی به شرط‌هایی هستند که به ازای آن‌ها حادثهٔ مربوط یا اتفاق می‌افتد و یا اتفاق نمی‌افتد، یعنی این شرط‌ها می‌توانند با یکی از دو طرح زیر بیان شوند:

۱) اگر مجموعهٔ شرط‌های S برقرار باشد، پیش‌آمد A به درستی رخ می‌دهد!

۲) اگر مجموعهٔ شرط‌های S برقرار باشد، پیش‌آمد A نمی‌تواند رخ بدهد.

پیش‌آمد A را، با توجه به مجموعهٔ شرط‌های S، در حالت اول، پیش‌آمدی «حتمی» یا «لازم» و در حالت دوم پیش‌آمدی «ناممکن» گویند. برای نمونه در فشار جو و درجهٔ حرارت $0° < t < 100°$ (مجموعهٔ شرط‌های S)، ناچار آب در حالت مایع است (پیش‌آمد لازم A_1) و به حالت گاز یا جامد نمی‌تواند باشد (پیش‌آمدهای ناممکن A_2 و A_3).

اگر پیش‌آمد A، به ازای مجموعهٔ شرط‌های S، گاهی اتفاق بیفتد و گاهی پیش نیاید، نسبت به این مجموعهٔ شرط‌ها، پیش‌آمد *احتمالی* نامیده می‌شود. پرسشی پیش می‌آید: آیا احتمالی بودن پیش‌آمد به معنای آن است که هیچ گونه رابطه‌ای بین مجموعهٔ شرط‌های S و حادثهٔ A وجود ندارد؟ از جمله، فرض کنید نوع معینی از لامپ، که محصول کارخانهٔ معینی است (شرط‌های S)، گاهی بیش از ۲۰۰۰ ساعت روشن بماند (پیش‌آمد A) و گاهی پیش از پایان این مدت بسوزد و از کار بیفتد. آیا با وجود این، می‌توان به عنوان کیفیت لامپ محصول این کارخانه، دوام ۲۰۰۰ ساعت را در نظر گرفت؟ یا باید خود را به زمانی (و در مثل ۵۰۰ ساعت) که در جریان آن، در عمل همهٔ لامپ‌ها بی‌وقفهٔ کار می‌کنند، و زمانی که بعد از گذشت آن، هیچ لامپی سالم نمی‌ماند (و از جمله ۱۰۰۰۰ ساعت) محدود کرد؟ روشن است، اگر کیفیت کار لامپ‌ها، تنها با نابرابری‌های $500 \le T \le 10000$، مشخص شود، خیلی

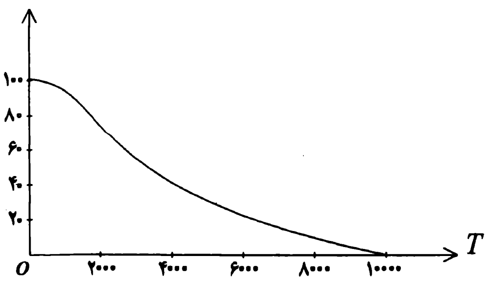
کم می‌تواند مشتری را راضی کند. ولی، اگر به خریدار گفته شود به تقریب در ۸۰٪ حالت‌ها، این لامپ‌ها کمتر از ۲۰۰۰ ساعت دوام می‌آورند، آگاهی کامل‌تر و بیشتری در اختیار خواهد داشت. و اگر بتوانیم برای هر طول زمان T، درصد $\nu(T)$ لامپ‌ها را، که دست کم T ساعت دوام می‌آورند، مشخص کنیم (ولو به صورت گرافی که در شکل ۱ نشان داده‌ایم)، باز هم بیشتر توانسته‌ایم کیفیت لامپ‌ها را نشان دهیم.

منحنی $\nu(T)$ به کمک آزمایش روی تعدادی به اندازهٔ کافی زیاد لامپ (۱۰۰-۲۰۰) به دست آمده است. البته، منحنی که به این ترتیب پیدا می‌شود، به شرطی می‌تواند به درستی منعکس‌کنندهٔ قانون‌مندی واقعی باشد که علاوه بر لامپ‌های وارد در آزمایش، دربارهٔ همهٔ لامپ‌هایی که با همان کیفیت و در همان کارخانه ساخته شده‌اند، صادق باشد. یعنی اگر با گروه دیگری از لامپ‌هایی که همان شرط‌های گروه اول را دارند، آزمایش کنیم، به نتیجه‌ای نزدیک به نتیجهٔ اول برسیم (یعنی به منحنی از $\nu(T)$ برسیم که با منحنی به دست آمده از آزمایش گروه اول لامپ‌ها، اختلاف کمی داشته باشد). و این، به معنای آن است که قانون‌مندی *آماری*، که بوسیلهٔ منحنی $\nu(T)$ و در نتیجهٔ انتخاب یک گروه نمونه‌ای به دست آمده است، تنها، منعکس کننده قانون‌مندی *احتمالی* است که بین زمان دوام لامپ‌ها با نوع مصالحی که در آن‌ها به کار رفته است و تکنیک تولید آن‌ها، برقرار می‌کند.

این قانون‌مندی احتمالی، به کمک تابعی مثل $\mathbf{P}(T)$ داده می‌شود، که در آن $\mathbf{P}(T)$ عبارت است از احتمال دوام یک لامپ (که محصول کارخانهٔ معینی است)، برای زمان T ساعت.

وقتی حکم می‌کنیم که احتمال معین

$$\mathbf{P}(A/S) = p$$



شکل ۱

برای پیش‌آمد A به ازای شرط‌های S، وجود دارد، به این معناست که در آزمایش‌های متعدد و متفاوت (یعنی اجرای مجموعهٔ شرط‌های S) بسامد (یا فراوانی) وقوع پیش‌آمد A

$$\nu_r = \frac{\mu_r}{n_r}$$

(که در آن n_r عبارت است ازتعداد آزمایش‌های گروه rام و μ_r تعداد آن آزمایش‌هایی از این گروه، که ضمن آن، پیش‌آمد A رخ داده است)، به تقریب یکی و نزدیک به p باشد.

فرض مربوط به وجود این عدد ثابت $p = \mathbf{P}(A/S)$ (که رابطهٔ بین مجموعهٔ شرط‌های S و پیش‌آمد A را به طور عینی و با خصلت شرطی، معین می‌کند)، به نحوی که، بسامد ν هر چه تعداد آزمایش n بیشتر باشد، به p نزدیک‌تر شود، به خوبی در عمل برای گروه گسترده‌ای از پدیده‌ها، دیده می‌شود. طبیعی است، چنین پدیده‌هایی ***پیش‌آمدهای تصادفی یا احتمالی*** نامیده شوند.

مثالی که در بالا آوردیم، مربوط به قانون‌مندی احتمالی تولید به مقدار زیاد است. فایدهٔ عملی چنین قانون‌مندی‌هایی بر هیچ کس پوشیده نیست. روش نظارت و بازبینی انتخابی و آماری تولید (وقتی به مقدار بسیار زیاد باشد)، و در زندگی و عمل اهمیت بسیار زیادی دارد، براساس همین‌گونه قانون‌مندی‌ها قرار دارد. قانون‌های احتمالی پراکندگی گلوله‌ها هم ــ که در نظریهٔ تیراندازی اهمیت زیادی دارد ــ به همین روش تشکیل قانون‌مندی‌های احتمالی، نزدیک است. از آن‌جا که از نظر تاریخی، همین قانون‌های احتمالی پراکندگی گلوله‌ها، از نخستین نمونه‌های کاربرد عملی روش‌های نظریهٔ احتمال در مسأله‌های تکنیکی به شمار می‌رود، ما هم در این بخش به بعضی مسأله‌های سادهٔ نظریهٔ تیراندازی پرداخته‌ایم.

آن‌چه دربارهٔ «نزدیکی» احتمال p و بسامد ν به ازای تعداد زیاد آزمایش‌های n گفتیم، تا حدی مبهم است؛ ما چیزی در این باره نگفتیم، که برای این یا آن مقدار n، تفاوت $\nu - p$ تا چه اندازه، کوچک است. دربارهٔ تخمین عددی نزدیکی ν و p در بند ۳ گفت‌وگو خواهیم کرد. باید یادآوری کنیم که نمی‌توان همهٔ ابهام را در این باره به طور کامل برطرف کرد. خود حکم مربوط به نزدیکی ν و p، همان‌طور که ضمن دقیق‌تر کردن موضوع کشف می‌شود، تنها یک خصلت احتمالی دارد.

۲. اصل‌ها و رابطه‌های اساسی نظریهٔ مقدماتی احتمال

به خاطر مسلم بودن نقش زیاد قانون‌مندی‌های آماری، موضوع روش‌های مطالعهٔ آن‌ها مطرح می‌شود. قبل از همه، این فکر پیش می‌آید که آیا می‌توان این بررسی‌ها را با تجربهٔ خالص انجام داد. از آن‌جا که قانون‌مندی احتمالی در مجموعهٔ روندهایی به تعداد خیلی زیاد، ظاهر می‌شود، به طور طبیعی گمان می‌رود که برای کشف آن باید به تعداد زیادی آزمایش دست زد.

ولی، این گمان، فقط تا اندازه‌ای درست است. وقتی به کمک آزمایش، بعضی از قانون‌مندی‌های احتمالی برقرار شود، می‌توان با منطق و محاسبه و به کمک بعضی فرض‌های کلی، قانون‌مندی‌های احتمالی تازه‌ای به دست آورد. قبل از این‌که نشان دهیم این کار را چگونه می‌توان انجام داد، باید بعضی از تعریف‌ها و رابطه‌های نظریهٔ احتمالی را، برشمریم.

از تصور مربوط به احتمال، مثل معنای عادی بسامد $\nu=\frac{m}{n}$، که در آن $۰\le m\le n$ ، و بنابراین $۰\le\nu\le ۱$ ، برمی‌آید که احتمال $\mathrm{P}(A)$ مربوط به هر پیش‌آمد A، باید به طور طبیعی بین صفر و واحد قرار گرفته باشد[۱].

$$۰ \le \mathrm{P}(A) \le ۱ \qquad (۱)$$

دو ***پیش‌آمد*** را ***ناسازگار*** گویند، به شرطی که (با توجه به مجموعهٔ شرط‌های S) نتوانند با هم اتفاق بیفتد. از جمله، ضمن انداختن مکعب بازی، افتادن تعداد زوج خال‌ها، با افتادن خال سه، ناسازگار است. پیش‌آمد A را ***اجتماع*** پیش‌آمدهای $A_۱$ و $A_۲$ گویند، به شرطی که پیش‌آمد A، به معنای اتفاق دست کم یکی از پیش‌آمدهای $A_۱$ و $A_۲$ باشد. از جمله، ضمن انداختن‌های مکعب بازی، پیش‌آمد A، که از افتادن ۱، ۲ یا ۳ تشکیل شده باشد، اجتماع پیش‌آمدهای $A_۱$ و $A_۲$ است، که در آن $A_۱$ عبارت است از افتادن ۱ یا ۲، و $A_۲$ افتادن ۲ یا ۳. به سادگی دیده می‌شود که برای $m_۱$ ، $m_۲$ و m، که تعداد دفعات وقوع دو پیش‌آمد ناسازگار $A_۱$ و $A_۲$ و اجتماع آن‌ها $A=A_۱\cup A_۲$ هستند، برابری $m=m_۱+m_۲$ برقرار است، که برای بسامد متناظر آن‌ها می‌دهد:

$$\nu=\nu_۱+\nu_۲$$

۱. ما برای سادگی کار، $\mathrm{P}(A/S)$ را به $P(A)$ نشان می‌دهیم.

و این دلیل طبیعی بودن اصل جمع در احتمال‌هاست:

$$\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) \qquad (۲)$$

به شرطی که A_1 و A_2 ناسازگار و $A_1 \cup A_2$ به معنی اجتماع آن‌ها باشد.

سپس، طبیعی است که برای پیش‌آمد حتمی U، قبول کنیم:

$$\mathbf{P}(U) = 1 \qquad (۳)$$

تمامی نظریهٔ ریاضی احتمال، براساس اصل‌های ساده‌ای از نوع (۱)، (۲) و (۳) ساخته می‌شود. از دیدگاه ریاضیات خالص، ***احتمال*** عبارت است از تابعی عددی از «پیش‌آمد» که دارای یک رشته ویژگی‌های اصل موضوعی تثبیت شده است. ویژگی‌هایی از احتمال، که با رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) بیان شده است، به عنوان مبانی اصلی ساختمان نظریهٔ مقدماتی احتمال کافی است، به شرطی که روی این مطلب اصرار نداشته باشیم که در اصل موضوعی کردن، به خود مفهوم‌های «پیش‌آمد» ، «اجتماع پیش‌آمدها» و «اشتراک پیش‌آمدها» (که در زیر تعریف خواهیم کرد) نیازمندیم. ما اصطلاح‌های «پیش‌آمد» و «احتمال» را با همان مفهوم عینی آن‌ها قبول می‌کنیم، ولی بهتر است بدانیم، اگر معنای واقعی این مفهوم‌ها را به طور صوری مطرح نمی‌کنیم، هیچ اثری در روشنی صوری اصل موضوعی کردن طرح خالص ریاضی نظریهٔ احتمال ندارد.

پیش‌آمد A را اجتماع پیش‌آمدهای A_1 ، A_2 ، ... ، A_s گوییم، به شرطی که پیش‌آمد A متضمن وقوع دست‌کم یکی از این پیش‌آمدها باشد. در این صورت، از اصل جمع، برای هر تعداد پیش‌آمدهای A_1 ، A_2 ، ... ، A_s ، که دو به دو باهم ناسازگارند، و اجتماع آن‌ها، حادثهٔ A ، به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_s)$$

(قضیهٔ جمع احتمال‌ها).

اگر اجتماع این پیش‌آمدها، پیش‌آمد مطمئنی باشد (یعنی با هر اجرای مجموعهٔ شرط‌های S، یکی از پیش‌آمدهای A_k پیش آید)، آنگاه

$$\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) + \cdots + \mathbf{P}(A_s) = 1$$

در چنین صورتی، دستگاه پیش‌آمد A_1 ، ... ، A_s را، ***دستگاه کامل*** پیش‌آمد گویند.

حالا، دو پیش‌آمد A و B را در نظر می‌گیریم. پیش‌آمد C را اشتراک پیش‌آمدهای A و B (می‌نویسیم $C=AB$) گوییم، وقتی که وقوع پیش‌آمد C، منوط به وقوع هر دو پیش‌آمد A و B باشد[۱].

برای نمونه، اگر پیش‌آمد A، این باشد که تعداد خال‌های مکعب بازی، ضمن انداختن آن، زوج، و پیش‌آمد B، این باشد که تعداد خال‌ها مضربی از سه باشد، پیش‌آمد C عبارت از این است که تعداد خال‌ها برابر شش باشد.

فرض کنید به ازای تعداد زیادی آزمایش‌های تکراری (n)، پیش‌آمد A، m بار ظاهر شود؛ ولی پیش‌آمد B، l بار ظاهر شود که در ضمن k بار آن همراه با پیش‌آمد A است. طبیعی است، نسبت $\frac{k}{m}$ را بسامد شرطی پیش‌آمد B به ازای شرط‌های A بنامیم. بستگی بین بسامدهای $\frac{k}{m}$، $\frac{m}{n}$ و $\frac{k}{n}$ با رابطهٔ

$$\frac{k}{m}=\frac{k}{n}:\frac{m}{n}$$

با تعریف زیر تطبیق می‌کند:

احتمال شرطی $\mathbf{P}(B/A)$ از پیش‌آمد B به ازای شرط‌های A، به این رابطه گفته می‌شود:

$$\mathbf{P}(B/A)=\frac{P(A/B)}{P(A)}$$

که البته، در این‌جا فرض براین است که $\mathbf{P}(A)\neq 0$.

اگر پیش‌آمدهای A و B، در واقع هیچ رابطه‌ای با هم نداشته باشند، طبیعی است فرض کنیم که پیش‌آمد B نباید به ازای فرارسیدن پیش‌آمد A، کمتر یا بیشتر ظاهر شود، یعنی به تقریب داریم: $\frac{k}{m}\sim\frac{l}{n}$ یا

$$\frac{k}{n}=\frac{k}{m}\cdot\frac{m}{n}\sim\frac{l}{n}\cdot\frac{m}{n}$$

در برابری تقریبی اخیر $\nu_A=\frac{m}{n}$، بسامد پیش‌آمد A و $\nu_B=\frac{l}{n}$، بسامد پیش‌آمد B و سرانجام $\nu_{AB}=\frac{k}{n}$، بسامد اشتراک پیش‌آمدهای A و B است.

می‌بینیم، این بسامدها، با رابطهٔ

$$\nu_{AB}\sim\nu_A\nu_B$$

۱. به همین ترتیب، اگر C اشتراک هر تعداد پیش‌آمد، A_1، A_2، ...، A_s باشد، به معنای آن است که پیش‌آمد C بستگی به فرا رسیدن همهٔ این پیش‌آمدها دارد.

به هم مربوط‌اند، به این مناسبت طبیعی است، برای احتمال‌های A ، B و AB ، برابری دقیق متناظر آن را قبول کنیم.

$$\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \tag{۴}$$

برابری (۴) به عنوان تعریف ***استقلال*** و عدم وابستگی دو پیش‌آمد A و B ، به کار می‌رود.

به همین ترتیب می‌توان استقلال هر تعدادی از پیش‌آمدها را، تعریف کرد. به‌جز این، می‌توان استقلال هر تعداد آزمایش را هم، تعریف کرد (این مطلب، در واقع منجر به این می‌شود که نتیجهٔ بخشی از این آزمایش‌ها، به هیچ وجه بر نتیجهٔ بقیه، تاثیر نمی‌کند)[۱].

حالا به محاسبهٔ احتمال P_k، که مربوط به‌ظهور k مرتبه از پیش‌آمد A در n آزمایش مستقل است، می‌پردازیم؛ در ضمن، احتمال p، ظهور این پیش‌آمد، در هر کدام از این آزمایش‌ها، یکی است. پیش‌آمدی که به معنای عدم ظهور پیش‌آمد A باشد، به $\bar{A}$ نشان می‌دهیم. روشن است که

$$\mathbf{P}(\bar{A}) = ۱ - \mathbf{P}(A) = ۱ - p$$

از تعریف آزمایش‌های مستقل به سادگی دیده می‌شود، احتمال دنبالهٔ معینی، که از k مرتبه ظهور A و $n - k$ مرتبه عدم ظهور A تشکیل شده باشد، برابر است با

$$p^k\,(۱ - p)^{n-k} \tag{۵}$$

برای نمونه، به‌ازای $n = ۵$ و $k = ۲$، احتمال به‌دست‌آوردن دنبالهٔ $A\bar{A}A\bar{A}\bar{A}$ چنین است:

$$p\,(۱ - p)\,p\,(۱ - p)\,(۱ - p) = p^۲\,(۱ - p)^۳$$

بنا بر قضیهٔ جمع، احتمال P_k برابر است با مجموع احتمال‌های همهٔ دنباله‌های با k ظهور و $n - k$ عدم ظهور پیش‌آمد A ، یعنی، با توجه به (۵)، برابر است با حاصل‌ضرب تعداد این دنباله‌ها در $p^k(۱ - p)^{n-k}$. روشن است، تعداد این دنباله‌ها برابر است با تعداد ترکیب n

---

۱. استقلال آزمایش‌ها، به طور دقیق‌تر به این معناست: n آزمایش را به نحوی به دو گروه تقسیم می‌کنیم؛ فرض کنید پیش‌آمد A عبارت از این است که همهٔ آزمایش‌های گروه اول به نتیجه‌هایی که از قبل داده شده است، برسند؛ پیش‌آمد B هم عبارت از این است که همهٔ آزمایش‌های گروه دوم به نتیجه‌هایی برسند که باز هم از قبل داده شده است. آزمایش‌ها را ***مستقل*** گویند، به شرطی که به ازای هر افراز آزمایش‌ها به دو گروه A و B، و هرگونه نتیجهٔ مفروضی، پیش‌آمدهای A و B، بنا به مفهوم (۴) مستقل باشند.

ما باز هم در بند ۴، به بحث دربارهٔ معنای واقعی مفهوم استقلال، برمی‌گردیم.

شیء k به k، زیرا k نتیجهٔ مثبت را می‌توان در بین n آزمایش در k محل دل‌خواه انتخاب کرد. سرانجام به دست می‌آید (به اصطلاح: توزیع دوجمله‌ای):

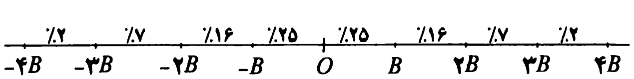
$$P_k = C_n^k p^k (۱ - p)^{n-k} \qquad (k = ۰, ۱, ۲, ..., n) \qquad (۶)$$

برای این‌که با روش کاربرد این تعریف‌ها و رابطه‌ها آشنا شویم، مثالی را که مربوط به نظریهٔ تیراندازی است، بررسی می‌کنیم.

فرض کنید، برای صدمه زدن به هدف، پنج حالت اصابت گلوله کافی باشد. این پرسش برای ما وجود دارد: آیا حق داریم گمان کنیم، این پنج حالت اصابت لازم، در نتیجهٔ ۴۰ تیر به دست می‌آید؟ حل این مسأله، با روش خالص آزمایشی، به این ترتیب است. با توجه به اندازه‌های هدف و فاصلهٔ مفروض تیراندازی، به انجام آزمایش تعداد زیادی (و مثلاً ۲۰۰ بار) تیراندازی و هربار ۴۰ تیر می‌پردازیم. تعداد آزمایش‌هایی را که در آن‌ها دست کم پنج تیر به هدف خورده است، یادداشت می‌کنیم. اگر برای مثال به نتیجهٔ ۱۹۵ بار موفقیت در ۲۰۰ آزمایش برسیم، احتمال p، به تقریب برابر است با

$$P = \frac{۱۹۵}{۲۰۰} = ۰٫۹۷۵$$

می‌بینیم، برای پیدا کردن دستور بررسی حل مسأله‌ای که بی‌اندازه اختصاصی است، با روش خالص آزمایشی، ناچاریم ۸۰۰۰ گلوله مصرف کنیم. ازاین هم بگذریم که اغلب در عمل، انجام چنین آزمایشی ممکن نیست. به جای این کار، به بررسی پراکندگی گلوله‌ها در فاصلهٔ مفروض تیراندازی، و بدون توجه به اندازه‌های هدف، می‌پردازیم. معلوم می‌شود، انحراف برد و انحراف‌های جانبی از قلب هدف، از قانونی پیروی می‌کند (که از روی آن می‌توان به انحراف‌های با اندازه‌های مختلف برخورد کرد) و در شکل ۲ نشان داده شده است. حرف B در این‌جا به معنای به اصطلاح انحراف احتمالی است. انحراف احتمالی، برای انحراف‌های برد و انحراف‌های جانبی، به طور کلی متفاوت است، و به‌جز آن، با افزایش فاصلهٔ تیراندازی، افزایش می‌یابد. انحراف‌های احتمالی را برای فاصله‌های



شکل ۲

مختلف، برای هر نوع توپ و گلوله به طریق تجربی و به کمک تیراندازی‌های آزمایشی روی میدان‌های تیر توپخانه، پیدا می‌کنند. به این ترتیب، بعد از آن، دیگر هر مسألهٔ ممکن خاصی از این نوع، به طریق محاسبه‌ای، حل می‌شود.

برای سادگی کار، فرض می‌کنیم، هدف به صورت مستطیلی باشد که یک ضلع آن در جهت خط تیراندازی و برابر دو انحراف احتمالی نسبت به بُرد، و ضلع دیگر، عمود برخط تیراندازی، برابر دو انحراف جانبی احتمالی باشد. سپس، فرض می‌کنیم، هدف به خوبی تنظیم شده باشد و مسیر پرواز گلوله‌ها، به طور متوسط از مرکز آن بگذرد (شکل ۳).

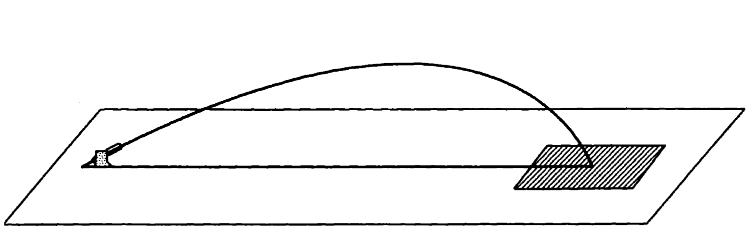
همچنین فرض می‌کنیم، انحراف جانبی و انحراف نسبت به برد، بستگی به هم نداشته باشند[1]. دراین‌صورت، برای این‌که گلولهٔ مفروض به هدف اصابت کند، لازم و کافی است که انحراف جانبی آن و انحراف آن نسبت به بُرد، از انحراف‌های احتمالی متناظر آن‌ها، تجاوز نکند. طبق شکل ۲، هرکدام از این پیش‌آمدها، به‌تقریب برای ۵۰ درصد گلوله‌های رها شده، یعنی احتمال $\frac{۱}{۲}$ دیده‌می‌شود. توأم هر دوی این‌پیش‌آمدها به‌تقریب برای ۲۵ درصد گلوله‌های رها شده اتفاق می‌افتد، یعنی احتمال برخورد گلولهٔ جداگانه به هدف، برابر است با

$$p = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۴}$$

و احتمال خطا، برای هر تیراندازی جداگانه، برابر است با

$$q = ۱ - p = ۱ - \frac{۱}{۴} = \frac{۳}{۴}$$

با این فرض که هر تیراندازی، پیش‌آمد مستقلی است، و با به کار بردن رابطهٔ دوجمله‌ای (۶)، معلوم می‌شود، احتمال این‌که در ۴۰ تیراندازی، درست در k حالت به هدف برخورد



شکل ۳

۱. این فرض‌های عدم بستگی، از راه تجربه تایید می‌شود.

کند، برابر است با:

$$P_k = C^k_{۴۰} p^k q^{۴۰-k} = \frac{۴۰ \times ۳۹ \times ... \times (۳۹ - k)}{۱ \times ۲ \times ... \times k} \left(\frac{۱}{۴}\right)^k \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۴۰-k}$$

احتمال مورد نظر ما، که دست کم در پنج حالت به هدف بخورد، با رابطهٔ $P = \sum_{k=۵}^{۴۰} P_k$ بیان می‌شود. ولی ساده‌تر است که از رابطهٔ $P = ۱ - Q$ و با آغاز از احتمال $Q = \sum_{k=۰}^{۴} P_k$، استفاده کنیم.

محاسبه می‌کنیم:

$$P_۰ = \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۴۰} \sim ۰٫۰۰۰۰۱$$

$$P_۱ = ۴۰ \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳۹} \left(\frac{۱}{۴}\right) \sim ۰٫۰۰۰۱۳$$

$$P_۲ = \frac{۴۰ \times ۳۹}{۲} \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳۸} \left(\frac{۱}{۴}\right)^۲ \sim ۰٫۰۰۰۸۷$$

$$P_۳ = \frac{۴۰ \times ۳۹ \times ۳۸}{۲ \times ۳} \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳۷} \left(\frac{۱}{۴}\right)^۳ \sim ۰٫۰۰۳۷$$

$$P_۴ = \frac{۴۰ \times ۳۹ \times ۳۸ \times ۳۷}{۲ \times ۳ \times ۴} \left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳۶} \left(\frac{۱}{۴}\right)^۴ \sim ۰٫۰۱۱۳$$

و از آنجا

$$Q = ۰٫۰۱۶ \qquad P = ۰٫۹۸۴$$

این احتمال P، حتی بیشتر از حد معمول که برای ضمانت انجام منظور مسأله، در نظریهٔ تیراندازی کافی است، به واحد نزدیک است؛ اغلب تعدادی گلوله که بتواند انجام مسأله را با احتمال ۰٫۹۵ تامین کند، کافی به حساب می‌آورند.

مثالی را که بررسی کردیم، تا حدی سطحی است و تنها طرحی از یک مسألهٔ واقعی به شمار می‌رود؛ با وجود این، به اندازهٔ کافی اهمیت محاسبه‌های احتمالی را نشان می‌دهد. از راه تجربه، بستگی انحراف‌های احتمالی، با فاصله‌های تیراندازی پیدا می‌شود ــ که برای آن کافی است، تعدادی (نه خیلی زیاد) تیراندازی در میدان انجام گیرد ــ و سپس به کمک محاسبه‌های ساده‌ای، پاسخ مسأله‌های به کلی متفاوتی به دست می‌آید. در همهٔ حالت‌های دیگری هم که نتیجهٔ مشترک تعداد زیادی عامل‌های تصادفی، منجر به قانون‌مندی آماری می‌شود، وضع به همین ترتیب است. با مشاهدهٔ مستقیم، ولو به تعداد بسیار زیاد، تنها ساده‌ترین این قانون‌مندی‌های آماری روشن می‌شود، یعنی تنها بعضی احتمال‌های مقدماتی

پیدا می‌شود و سپس، به کمک قانون‌های نظریهٔ احتمال، و بر معنای همین احتمال‌های مقدماتی، احتمال‌های پدیده‌های پیچیده‌تری محاسبه می‌شود و براساس این محاسبه‌ها، نتیجه‌هایی دربارهٔ قانون‌مندی‌های آماری به دست می‌آید که مربوط به پدیده‌های بغرنج‌تری است که به بررسی آن‌ها علاقه‌مندیم.

گاهی بدون جمع‌آوری مصالح زیاد آماری هم می‌توان عمل کرد، زیرا احتمال‌های مقدماتی را ممکن است بتوان از روی ملاحظه‌ها برای نمونه قانع‌کنندهٔ تقارن، معین کرد. برای نمونه، این نتیجه‌گیری که مکعب‌بازی، یعنی مکعبی که از مادهٔ متجانسی ساخته شده است، وقتی به ارتفاعی به اندازهٔ کافی انداخته شود، روی هر کدام از وجه‌های خود با احتمال $\frac{۱}{۶}$ می‌نشیند، بدون تردید و بدون این‌که نیازی به آزمایش‌های طولانی و مشاهدهٔ نتیجه‌های این آزمایش‌ها باشد، به دست می‌آید. آزمایش‌های منظم در این زمینه، در سده‌های هیجدهم تا بیستم و به طور عمده در کتاب‌های درسی مربوط به نظریهٔ احتمال، انجام شد، وقتی نظریهٔ احتمال به صورت یک دانش به رسمیت شناخته شده بود. نتیجهٔ این تحقیق‌ها، قانع‌کننده است، ولی گمان نمی‌رود، انجام چنین آزمایش‌هایی در حالت‌های مشابه لزومی داشته باشد. از جمله روشن است، کسی به این فکرنمی‌افتد که دربارهٔ یک دوازده وجهی منظم که از مادهٔ متجانسی ساخته شده باشد، به آزمایش‌های طولانی بپردازد؛ زیرا هیچ تردیدی نیست که اگر در مثل این دوازده وجهی منظم را ۱۲۰۰۰ بار بیندازیم، به تقریب روی هر کدام از وجه‌های خود، هزار بار خواهد نشست.

احتمال‌های مقدماتی که از تقارن یا تجانس به دست می‌آید، در بسیاری از مسأله‌های جدی دانش، نقش عمده‌ای دارند، از جمله همهٔ مسأله‌های مربوط به برخورد یا نزدیک شدن مولکول‌های گاز ــ که به طور نامنظم حرکت می‌کنند ــ و یا برخورد و نزدیک شدن ستاره‌های یک کهکشان، از این گونه مسأله‌ها هستند. البته در چنین حالت‌های حساسی، دست کم به طور غیرمستقیم، احتمال‌های فرضی را با نتیجه‌هایی که از راه تجربه به دست می‌آید، تحقیق می‌کنند.

۳. قانون عددهای بزرگ و قضیه‌های حدی

این موضوع طبیعی است که به دنبال دقیق کردن این حکم، از لحاظ کمّی، وقتی به رشته

آزمایش‌های زیادی بپردازیم، بسامد ظهور پیش‌آمد، به احتمال آن «نزدیک» می‌شود. باید به حساسیت این مسأله توجه کرد. در بیشتر حالت‌هایی که در نظریهٔ احتمال نمونه‌ای به شمار می‌روند، وضع از این قرار است که هر چه رشته آزمایش‌ها طولانی‌تر باشد، از لحاظ نظری امکان هر دو مقدار مرزی بسامد، ممکن می‌شود

$$\frac{\mu}{n}=\frac{n}{n}=۱\ ,\ \frac{\mu}{n}=\frac{۰}{n}=۰$$

به این ترتیب، تعداد آزمایش‌های n، هر قدر که باشد، نمی‌توان این اطمینان را داشت که، در مثل، نابرابری زیر برقرار است:

$$\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<\frac{۱}{۱۰}$$

برای نمونه، اگر پیش‌آمد A عبارت از این باشد که ضمن انداختن مکعب بازی، «شش» ظاهر شود، در این‌صورت، وقتی مکعب را n بار بیندازیم، با احتمال $\left(\frac{۱}{۶}\right)^n>۰$، هر بار «شش» ظاهر می‌شود، یعنی با احتمال $\left(\frac{۱}{۶}\right)^n$، بسامد ظهور «شش» برابر است با ***واحد***، و با احتمال $\left(۱-\frac{۱}{۶}\right)^n>۰$، در هیچ‌کدام از این حالت‌ها، «شش» ظاهر نمی‌شود، یعنی بسامد ظهور «شش» برابر است با ***صفر***.

در همهٔ مسأله‌های مشابه، هر تخمین واقعی از نزدیکی بین بسامد و احتمال، نه با صحت کامل، بلکه تنها با احتمالی که کمی از واحد کوچکتر است، عمل می‌کند. برای مثال می‌توان ثابت کرد که در حالت استقلال آزمایش‌ها[1] و در حالتی که احتمال ظهور هر پیش‌آمد مقدار ثابت p باشد، نابرابری

$$\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<۰٫۰۲ \qquad (۷)$$

برای بسامد $\frac{\mu}{n}$ به ازای $n=۱۰۰۰۰$ (و هر p) با احتمال زیر برقرار است:

$$P>۰٫۹۹۹۹ \qquad (۸)$$

در این‌جا باید روی این مطلب تأکید کرد که برای اینکه بتوان نزدیکی بسامد $\frac{\mu}{n}$ به احتمال p را تخمین کرد باید از احتمال تازه P صحبت شود.

---

۱. در یکی از زیرنویس‌های بند ۱ همین بخش، مفهوم استقلال را شرح داده‌ایم. اثبات تخمین (۸) در چند صفحهٔ بعد آمده است.

معنای واقعی تخمین (۸) چنین است: اگر N رشته و در هر کدام n بار آزمایش انجام دهیم، و M را تعداد رشته‌هایی بگیریم که دربارهٔ آن‌ها نابرابری (۷) برقرار باشد، به ازای مقدارهای بزرگ N، به تقریب خواهیم داشت:

$$\frac{M}{N} \approx P > ۰٫۹۹۹۹ \qquad (۹)$$

اگر بخواهیم رابطهٔ (۹) را، چه از لحاظ مرحلهٔ نزدیکی $\frac{M}{N}$ به P و چه از لحاظ اطمینان به تأیید این نزدیکی دقیق کنیم، از همان روشی استفاده می‌کنیم که درباره نزدیکی $\frac{\mu}{n}$ و p به کار بردیم، و به این ترتیب برای رابطهٔ (۹) هم، احتمال دیگری به دست می‌آید. این فکر را، اگر بخواهیم، می‌توان بی‌نهایت مرتبه تکرار کرد، ولی روشن است ادامهٔ این روش هرگز ما را از آخرین مرحلهٔ احتمال، نجات نخواهد داد و ناچاریم، احتمال آخری را به مفهوم مقدماتی آن بپذیریم.

نباید گمان کرد، دشواری‌هایی از این قبیل، مخصوص نظریهٔ احتمال است. ما همیشه برای مطالعهٔ ریاضی پدیده‌های واقعی، آن‌ها را به صورت ساده‌ای مطرح می‌کنیم. خود این انحراف پدیده‌های واقعی از طرح ریاضی آن‌ها را هم، می‌توان از نظر ریاضی مطالعهٔ کرد. ولی، برای این منظور، بایدخود این انحراف‌ها را در یک طرح ریاضی جا داد، و طرح اخیر هم ناچار خطایی دارد که دیگر بدون تحلیل فرمولی ریاضی، باید از آن استفاده کرد.

با وجود این، توجه کنیم، برای کاربرد واقعی تخمین[1]

$$\mathbf{P}\left[\left|\frac{\mu}{n}-p\right| < ۰٫۰۲\right] > ۰٫۹۹۹۹ \qquad (۱۰)$$

در یک رشته از n آزمایش، بر بعضی از ملاحظه‌های تقارنی هم تکیه می‌کنیم: نابرابری (۱۰) نشان می‌دهد، اگر تعداد Nـ رشته آزمایش‌ها ـ خیلی بزرگ باشد، رابطهٔ (۷) دست کم برای ۹۹٫۹۹ درصد حالت‌ها برقرار است؛ و بنابراین، چنین انتظاری طبیعی است که نابرابری (۷) در حالت خاص بررسی ما، یعنی برای رشتهٔ معینی شامل n آزمایش هم، برقرار باشد، زیرا این رشته آزمایش هیچ‌گونه تفاوت خاصی با رشته آزمایش‌های دیگر ندارد و نمی‌تواند موقعیتی غیر از دیگران داشته باشد.

احتمال‌هایی را که می‌توان از آن‌ها صرف‌نظر کرد، در حالت‌های عملی متفاوت،

---

۱. تخمین (۸) را برای احتمال نابرابری (۷)، به این ترتیب می‌نویسند.

مختلف‌اند. قبل از این دیدیم، ضمن محاسبهٔ تقریبی مصرف گلوله‌هایی که حل یک مسألهٔ مشخص را تضمین کند، معیاری به دست آوردیم که به ازای آن، مسألهٔ ما را با احتمال ۹۵ر۰ حل می‌کرد، یعنی از احتمالی که بیش از ۰۵ر۰ نباشد، صرف‌نظر کردیم. این مطلب از این‌جا روشن می‌شود که اگر برای نمونه، محاسبه را برمبنای صرف‌نظرکردن احتمال‌های کمتر از ۰۱ر۰ قرار دهیم، میزان مصرف گلوله‌ها خیلی افزایش می‌یابد، یعنی در عمل در بسیاری حالت‌ها منجر به ناممکن بودن کار می‌شود، زیرا در فاصلهٔ زمانی کوتاهی، از همه ذخیرهٔ گلوله‌ها استفاده می‌شود.

گاهی در بررسی‌های عملی هم تنها از روش‌های آماری استفاده می‌کنند، که برمبنای ناچیز شمردن احتمال‌های تا ۰۵ر۰ است. ولی از این روش، تنها وقتی باید استفاده کرد که گردآوری مصالح زیادتر، خیلی دشوار باشد. مسألهٔ زیر را، به عنوان نمونه‌ای از چنین حالت‌ها بررسی می‌کنیم. فرض کنیم، در شرایط معینی، دارویی که برای درمان یک بیماری به کار می‌رود، تا ۵۰ درصد یعنی با احتمال ۵ر۰، نتیجهٔ مثبت داشته باشد. داروی تازه‌ای پیدا می‌شود و برای این‌که موثرتربودن آن را نسبت به داروی کهنه آزمایش کنند، ده نفر از بیمارانی را انتخاب می‌کنند که اگر با داروی قبلی مداوا می‌شدند، احتمال بهبود آن‌ها تا ۵۰٪ بود. در ضمن سودمندی این دارو وقتی ثابت شده به حساب می‌آید که دست کم دربارهٔ هشت نفر از ده بیمار، نتیجهٔ مثبت بدهد. به سادگی می‌توان ثابت کرد، این جواب همراه است با صرف‌نظرکردن از ۰۵ر۰ احتمالی که ممکن است برای نتیجه نادرست وجود داشته باشد (یعنی نتیجه گرفته باشیم که داروی تازه سودمندتر است، در حالی که با داروی قدیمی هم‌ارزش و یا حتی از آن بدتر باشد). در واقع، اگر در هر کدام از ده آزمایش، احتمال نتیجهٔ مثبت برابر p باشد، احتمال این‌که در ده آزمایش، ۱۰، ۹ یا ۸ نتیجهٔ مثبت به دست آید، به ترتیب برابر است با

$$P_{۱۰} = p^{۱۰} \;,\; P_{۹} = ۱۰p^{۹}(۱-p) \;,\; P_{۸} = ۴۵p^{۸}(۱-p)^{۲}$$

در جمع، برای حالت $p = \frac{۱}{۲}$، به دست می‌آید

$$P = P_{۱۰} + P_{۹} + P_{۸} = \frac{۵۶}{۱۰۲۴} \sim ۰٫۰۵$$

بنابراین، احتمال این‌که اثر داروی تازه درست برابر داروی قبلی باشد، ولی ما دچار این نتیجه‌گیری اشتباه شده باشیم که داروی تازه بر داروی قدیمی برتری دارد، برابر ۰۵ر۰

است. اگر بخواهیم این احتمال اشتباه را به تقریب تا ۰٫۰۱ تقلیل دهیم (بدون این‌که به تعداد ۱۰ آزمایش اضافه کنیم) باید ضمن استفاده از داروی تازه، دست کم در ۹ حالت از ۱۰ حالت، به نتیجهٔ مثبت رسیده باشیم، ولی، اگر بخواهیم دربارهٔ اثربخشی داروی تازه به نتیجهٔ بهتری برسیم، باید تعداد آزمایش‌ها را زیاد کنیم: اگر ضمن $n = ۱۰۰$ آزمایش، معلوم شود داروی تازه روی $\mu > ۶۵$ نفر اثر مثبت داشته است، احتمال اشتباه دربارهٔ بهتر بودن داروی تازه، تنها $P \approx ۰٫۰۰۱۵$ خواهد بود.

اگر میزان ۰٫۰۵ برای بررسی‌های علمی نارساست، احتمال اشتباه در ۰٫۰۰۱ یا ۰٫۰۰۳ در بسیاری حالت‌ها و حتی در بررسی‌های جدی آکادمیک، مثل مشاهده‌های اخترشناسی، قابل صرف‌نظرکردن است. با همهٔ این‌ها، گاهی نتیجه‌گیری‌های علمی را براساس چنان قانون‌مندی‌های احتمالی بنا می‌کنند که در حد بسیار بالایی از اطمینان قرار داشته باشد (یعنی براساس صرف‌نظر کردن از احتمال‌های بسیار کوچکتری ساخته می‌شوند). دربارهٔ این گونه احتمال‌ها، صحبت خواهیم کرد.

در مثال‌هایی که بررسی کردیم، اغلب حالت‌های خاص دستور دوجمله‌ای (۶) را به کار بردیم:

$$P_m = C_n^m p^m (۱ - p)^{n-m}$$

این دستور، احتمال P_m را دربارهٔ m نتیجهٔ مثبت ضمن n آزمایش مستقل می‌دهد که در هر کدام از این آزمایش‌ها، احتمال نتیجهٔ مثبت برابر است با p. به کمک این دستور، مسأله‌ای را که در آغاز این بند دربارهٔ احتمال

$$P = \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \qquad (۱۱)$$

مطرح کردیم، بررسی می‌کنیم که در آن، μ عبارت است از تعداد واقعی نتیجه‌های مثبت[۱]. روشن است، این احتمال را می‌توان به صورت مجموع P_mهایی نوشت که برای آن‌ها، m در این نابرابری صدق می‌کند.

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon \qquad (۱۲)$$

۱. μ با احتمال P_m مقدارهای $m = ۰, ۱, \ldots, n$ را قبول می‌کند، یعنی $\mathbf{P}(\mu = m) = P_m$.

یعنی به صورت

$$P = \sum_{m=m_1}^{m_2} P_m \tag{۱۳}$$

که در آن m_1 عبارت است از کوچکترین مقدار m که در نابرابری (۱۲) صدق می‌کند و m_2، بزرگترین این‌گونه مقدارهای m است.

رابطهٔ (۱۳) به ازای مقدارهای بزرگ n، برای آزمایش‌های مستقیم، کم به درد می‌خورد. به همین مناسبت، کشف دستور مجانبی **مواور** (برای حالت $p=\frac{1}{2}$) و **لاپلاس** (برای هر p)، که به کمک آن می‌توان به سادگی رفتار احتمال P_m را به ازای مقدارهای بزرگ n پیدا و مطالعه کرد، اهمیت خیلی زیادی دارد. این دستور به این صورت است:

$$P_m \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}} \tag{۱۴}$$

اگر p خیلی نزدیک به صفر یا واحد نباشد، این دستور برای وقتی که n از ردیف ۱۰۰ هم باشد، کافی است، اگر فرض کنیم

$$t = \frac{m-np}{\sqrt{np(1-p)}} \tag{۱۵}$$

دستور (۱۴) به این صورت در می‌آید:

$$P_m \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{t^2}{2}} \tag{۱۶}$$

از (۱۳) و (۱۶) می‌توان تصوری تقریبی دربارهٔ احتمال (۱۱) به دست آورد:

$$P \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{T} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = F(T) \tag{۱۷}$$

که در آن

$$T = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \tag{۱۸}$$

تفاضل بین سمت چپ و سمت راست در (۱۷)، وقتی p مقدار ثابتی مخالف صفر و واحد باشد، به ازای $n\to\infty$، به طور یکنواخت نسبت به ε، به سمت صفر میل می‌کند. برای $F(T)$ جدول‌های مفصلی تشکیل داده‌اند؛ و این، تکهٔ کوتاهی از آنست:

T	۱	۲	۳	۴
F	۰٫۶۸۲۶۹	۰٫۹۵۴۵۰	۰٫۹۹۷۳۰	۰٫۹۹۹۹۳

وقتی $T\to\infty$، مقدار تابع $F(T)$ به سمت واحد میل می‌کند.

به کمک دستور (۱۷)، تخمین احتمال

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\mu}{n}-p\right|<۰٫۰۲\right\}$$

را به ازای $n=۱۰۰۰۰$ می‌دهیم. چون $T=\frac{۲}{\sqrt{p(۱-p)}}$، بنابراین

$$P\approx F\left(\frac{۲}{\sqrt{p(۱-p)}}\right)$$

چون تابع $F(T)$ وقتی T صعودی باشد، به طور یکنوا (مونوتون) صعودی است، برای تخمین از پایین Pــ که به p بستگی نداشته باشد ــ باید کمترین مقدارهای ممکن را (به ازای مقدارهای مختلف p) برای T انتخاب کرد. این کوچکترین مقدار، به ازای $p=\frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید و برابر است با ۴. بنابراین به تقریب

$$P\geq F(۴)=۰٫۹۹۹۹۳ \qquad (۱۹)$$

در نابرابری (۱۹)، اشتباهی که ناشی از خصلت تقریبی دستور (۱۷) است، به حساب نیامده است. اگر تخمین را با توجه به این خطای ممکن در نظر بگیریم، در هر حالتی می‌توان ثابت کرد $P>۰٫۹۹۹۹$.

با توجه به مثال کاربرد دستور (۱۷) باید توجه کرد که تخمین جملهٔ باقی‌مانده در دستور (۱۷)، که در نوشته‌های نظری مربوط به نظریهٔ احتمال داده می‌شد، خیلی کم قانع کننده بود. به همین مناسبت، کاربرد دستور (۱۷) و دستورهای مشابه آن، در حالتی که n خیلی بزرگ

نباشد، و یا دربارهٔ احتمال‌هایی از p، که به ۰ یا ۱ خیلی نزدیک باشند (و چنین احتمال‌هایی، در بسیاری حالت‌ها، خیلی اهمیت دارند)، تنها براساس تحقیق تجربی نتیجه‌گیری‌ها روی تعداد محدودی آزمایش انجام می‌شد، و نه بر پایهٔ تخمین درست و کامل خطاهای ممکن. علاوه بر این، بررسی‌های مفصل‌تر ثابت کرد از حالت‌هایی که اهمیت عملی دارد، نه تنها تخمین جملهٔ باقی‌مانده برای این دستور مجانبی لازم است، بلکه باید خود دستور را هم دقیق‌تر کرد (زیرا، اگر دستور را دقیق‌تر نکنیم، جملهٔ باقی‌مانده خیلی بزرگ است). **س. ن. برنشتین**، توانست نتیجه‌گیری‌های جالبی در هر دوی این زمینه‌ها، به دست آورد.

رابطه‌های (۱۱)، (۱۷) و (۱۸) را می‌توان به این صورت بازنویسی کرد:

$$\mathbf{P}\left\{ \left|\frac{\mu}{n}-p\right| < t\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right\} \sim F(t) \tag{۲۰}$$

برای مقدارهای به اندازهٔ کافی بزرگ t، سمت راست دستور (۲۰) ــ که شامل n نیست ــ هر قدر بخواهیم به واحد، یعنی به مقدار احتمالی که متناظر با اطمینان کامل است، نزدیک می‌شود. به این ترتیب، می‌بینیم، ***انحراف بسامد*** $\frac{\mu}{n}$ ***از احتمال*** p، ***مرتبه‌ای برابر*** $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ***دارد.*** چنین نسبتی، که برای ارزیابی درستی قانون‌مندی‌های احتمالی به کار می‌رود و به جذر تعداد مشاهده‌ها مربوط می‌شود، در بسیاری از مسأله‌های دیگر هم صدق می‌کند. حتی گاهی برای سادگی و عامه فهم بودن موضوع، دربارهٔ «قانون جذر n» به عنوان قانون اصلی نظریهٔ احتمال، صحبت می‌کنند. **پ. ل. چبیشف**، ریاضی‌دان بزرگ روس، با به کار بردن آگاهی‌هایی که از مسأله‌های مختلف احتمال به دست آمده در محاسبهٔ «امید ریاضی» و «پراکندگی» برای مجموع و واسطهٔ حسابی «مقدارهای تصادفی»، به این فکر، روشنی کاملی بخشید.

مقدار تصادفی (یا متغیر تصادفی) به مقداری گفته می‌شود که در شرایط مفروض s، بتواند مقدارهای مختلف را با احتمال‌های معینی قبول کند. برای ما کافی است به بررسی چنان مقدارهای تصادفی بپردازیم که تنها بتوانند تعداد محدودی مقدارهای مختلف را قبول کنند. برای این‌که، به اصطلاح ***توزیع احتمال*** را در حالتی از مقدار تصادفی ξ نشان دهیم، کافی است مقدارهای ممکن x_1، x_2، ...، x_s آن و احتمال

$$P_r = \mathbf{P}\ (\xi = x_r)$$

را نشان دهیم. این احتمال‌ها نسبت به تمامی مقدارهای مختلف ممکن کمیت ξ، همیشه در

مجموع برابر است با واحد:

$$\sum_{r=۱}^{s} P_r = ۱$$

عدد μ، یعنی نتیجه‌های مثبتی را که ضمن n آزمایش به دست می‌آید، می‌توان به عنوان نمونه‌ای از کمیت تصادفی در نظر گرفت.

امید ریاضی کمیت ξ به عبارت

$$\mathbf{M}(\xi) = \sum_{r=۱}^{s} P_r x_r$$

و ***پراکندگی*** (یا واریانس) کمیت ξ به امید ریاضی مجذور انحراف $\xi - \mathbf{M}(\xi)$، یعنی عبارت

$$\mathbf{D}(\xi) = \sum_{r=۱}^{s} P_r (x_r - \mathbf{M}(\xi))^۲$$

گفته می‌شود. ریشهٔ دوم پراکندگی

$$\sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{D}(\xi)}$$

انحراف معیار (یا ***انحراف مربعی میانگین***) نامیده می‌شود (انحراف کمیت از امید ریاضی $\mathbf{M}(\xi)$ آن).

مبنای ساده‌ترین کاربردهای پراکندگی و انحراف معیار، نابرابری مشهور **چبیشف** است:

$$\mathbf{P}\{\,|\xi - \mathbf{M}(\xi)| \leq t\sigma_\xi\} \geq ۱ - \frac{۱}{t^۲} \qquad (۲۱)$$

این نابرابری نشان می‌دهد، انحراف ξ از $\mathbf{M}(\xi)$، به مقدارهای بسیار بیشتر از σ_ξ، به ندرت پیش می‌آید.

اگر مجموع مقدارهای تصادفی را تشکیل دهیم:

$$\xi = \xi^{(۱)} + \xi^{(۲)} + \cdots + \xi^{(n)}$$

برای امید ریاضی آن‌ها، همیشه این برابری برقرار است.

$$\mathbf{M}(\xi) = \mathbf{M}(\xi^{(۱)}) + \mathbf{M}(\xi^{(۲)}) + \cdots + \mathbf{M}(\xi^{(n)}) \qquad (۲۲)$$

شبیه این برابری برای پراکندگی

$$\mathbf{D}(\xi) = \mathbf{D}(\xi^{(1)}) + \mathbf{D}(\xi^{(2)}) + \cdots + \mathbf{D}(\xi^{(n)}) \qquad (۲۳)$$

تنها با بعضی محدودیت‌ها برقرار است. برای درستی برابری (۲۳)، از جمله کافی است، مقداری $\xi^{(i)}$ و $\xi^{(j)}$ با شماره‌های متفاوت، به‌اصطلاح «هم‌بستهٔ»[1] یکدیگر نباشند، یعنی به ازای $i \neq j$ این برابری برقرار باشد.

$$\mathbf{M}\ \left\{(\xi^{(i)} - \mathbf{M}\ (\xi^{(i)}))(\xi^{(j)} - \mathbf{M}(\xi^{(j)}))\right\} = 0 \qquad (۲۴)$$

در حالت خاصی که کمیت‌های $\xi^{(i)}$ و $\xi^{(j)}$ مستقل از یکدیگر باشند، برابری (۲۴) برقرار است[2]. به این ترتیب برای جمله‌های مستقل از هم، همیشه برابری (۲۳) عمل می‌کند. برای میانگین‌های عددی

$$\zeta = \frac{1}{n}(\xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \ldots + \xi^{(n)})$$

از ۲۳ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{D}(\zeta) = \frac{1}{n^2}(\mathbf{D}(\xi^{(1)}) + \mathbf{D}(\xi^{(2)}) + \cdots + \mathbf{D}(\xi^{(n)})) \qquad (۲۵)$$

اکنون فرض می‌کنیم، برای همهٔ جمله‌ها، پراکندگی از مقدار ثابتی تجاوز نکند

---

۱. ضریب هم‌بستگی بین مقدارهای $\xi^{(i)}$ و $\xi^{(j)}$ به عبارت

$$R = \frac{\mathbf{M}\left\{(\xi^{(i)} - \mathbf{M}(\xi^{(i)}))(\xi^{(j)} - \mathbf{M}(\xi^{(j)}))\right\}}{\sigma_{\xi}(i)\sigma_{\xi}(j)}$$

گفته می‌شود. اگر $\sigma_{\xi}(i) > 0$ و $\sigma_{\xi}(i)\sigma_{\xi}(j) > 0$، آنگاه شرط (۲۴) هم‌ارز آن است که داشته باشیم: $R = 0$.

ضریب هم‌بستگی R درجهٔ بستگی بین کمیت‌های تصادفی را مشخص می‌کند. همیشه $|R| \leq 1$ و در ضمن تنها وقتی $R = \pm 1$، که رابطهٔ خطی

$$\eta = a\xi + b \quad (a \neq 0)$$

وجود داشته باشد. برای کمیت‌هایی که مستقل از یکدیگرند، داریم $R = 0$.

۲. استقلال دو کمیت تصادفی، که می‌توانند مقدارهای x_1، x_2، ⋯، x_m و y_1، y_2، …، y_n را قبول کنند، بنابر تعریف به این معناست که به ازای هر i و j پیش‌آمدهای

$$B_j = (\eta = y_j) \quad \text{و} \quad A_i = (\xi = x_i)$$

به مفهوم تعریفی که در بند ۲ دادیم، مستقل باشند.

$$\mathbf{D}\,(\xi^{(i)}) \leq C^{2}$$

در این صورت، با توجه به (۲۵)

$$\mathbf{D}\,(\zeta) \leq \frac{C^{2}}{n}$$

و بنابر نابرابری **چبیشف**، به ازای هر t

$$\mathbf{P}\left\{\,|\,\zeta - \mathbf{M}\,(\zeta)|\, \leq \frac{tC}{\sqrt{n}}\right\} \geq 1-\frac{1}{t^{2}} \qquad (۲۶)$$

نابرابری (۲۶) شامل به اصطلاح قانون عددهای بزرگ، به شکلی که **چبیشف** مطرح کرده است، می‌باشد: اگر مقدارهای $\xi^{(i)}$ مستقلِ از یکدیگر و دارای پراکندگی‌های محدودی باشند، با بزرگ شدن n، میانگین حسابی ζ آن‌ها، از امیدهای ریاضی $\mathbf{M}(\zeta)$ آن‌ها، کم و کمتر منحرف می‌شود.

به طور دقیق‌تر می‌گویند، **دنبالهٔ** مقدارهای

$$\xi^{(1)}\ ,\ \xi^{(2)}\ ,\ \ldots\ ,\ \xi^{(n)}\ ,\ \ldots$$

از قانون عددهای بزرگ پیروی می‌کند، به شرطی که برای میانگین‌های حسابی آن‌ها ζ و به ازای هر مقدار ثابت $\varepsilon > 0$ (وقتی $n \to \infty$) داشته باشیم:

$$\mathbf{P}\,\{\,|\,\zeta - \mathbf{M}(\zeta)\,|\, \leq \varepsilon\,\} \to 1 \qquad (۲۷)$$

برای این‌که از نابرابری (۲۶)، رابطهٔ حدی (۲۷) را به دست آوریم، کافی است فرض کنیم

$$t = \varepsilon\,\frac{\sqrt{n}}{C}$$

آ. آ. مارکوف، س. ن. برنشتین، آ. یا. خین‌چین و دیگران، بررسی‌های زیادی دربارهٔ افزایش شرط‌های کاربرد رابطهٔ حدی (۲۷)، یعنی شرط‌های کاربرد قانون عددهای بزرگ، انجام داده‌اند. این بررسی‌ها، اهمیت اصولی دارند. با وجود این، مهم‌تر از آن، بررسی دقیق توزیع احتمال انحراف $\zeta - \mathbf{M}(\zeta)$ است.

خدمت بزرگ مکتب رسمی روس در نظریهٔ احتمال، اثبات این حقیقت است که در

شرایط بسیار گستردهٔ مجانبی (یعنی، وقتی با بزرگ شدن n به طور نامحدود، به دقت زیاد و زیادتری می‌رسیم)، برابری زیر درست است:

$$\mathbf{P}\{t_1\sigma_\xi < \xi - \mathbf{M}(\xi) < t_2\sigma_\xi\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (۲۸)$$

چبیشف این دستور را برای حالتی که جمله‌ها محدود و مستقل باشند، کم و بیش به طور کامل اثبات کرد. ***مارکوف***، حلقهٔ ناقصی را که در استدلال **چبیشف** بود، تکمیل کرد و شرایط کاربُرد دستور (۲۸) را گسترش داد. ***لیاپونوف*** هم شرایط عمومی‌تری را مطرح کرد. مسألهٔ مربوط به استفادهٔ از دستور (۲۸) در مجموع جمله‌های غیرمستقل، به طور کامل به وسیلهٔ ***س.ن.برنشتین*** مطالعه شد.

دستور (۲۸)، مسأله‌های خاص را، به چنان تعداد زیادی در برمی‌گرفت که مدت‌ها، آن را قضیهٔ حدی مرکزی نظریهٔ احتمال می‌نامیدند. با وجودی که با پیشرفت‌های تازه‌تر نظریهٔ احتمال، این دستور هم در ردیف قانون‌مندی‌های کلی‌تر قرار گرفت، هنوز در زمان ما هم از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است.

اگر جمله‌ها مستقل و پراکندگی آن‌ها یکسان و برابر باشد:

$$\mathbf{D}\,(\xi^{(i)}) = \sigma^2$$

دستور (۲۸) را بهتر است، با توجه به رابطهٔ (۲۵)، به این صورت داد:

$$\mathbf{P}\left\{\frac{t_1\sigma}{\sqrt{n}} < \xi - \mathbf{M}(\xi) < \frac{t_2\sigma}{\sqrt{n}}\right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}dt \qquad (۲۹)$$

ثابت می‌کنیم، رابطهٔ (۲۹)، جواب مسألهٔ مربوط به انحراف‌های بسامد $\frac{\mu}{n}$ از احتمال p را ــ که پیش از این هم دربارهٔ آن صحبت کردیم ــ در درون خود دارد. برای این منظور، مقدارهای تصادفی $\xi^{(i)}$ را، که با شرط زیر تعریف شده‌اند، در نظر می‌گیریم:

$$\xi^{(i)} = \begin{cases} ۰ & \text{به شرطی که } i \text{امین آزمایش نتیجهٔ منفی داشته باشد} \\ ۱ & \text{به شرطی که } i \text{امین آزمایش نتیجهٔ مثبت داشته باشد} \end{cases}$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که در این صورت

$$\mu = \xi^{(1)} + \xi^{(2)} + \cdots + \xi^{(n)} , \ \frac{\mu}{n} = \zeta ,$$

$$\mathbf{M}(\xi^{(i)}) = p \ , \ \mathbf{D}(\xi^{(1)}) = p(1-p) \ , \ \mathbf{M}(\zeta) = p$$

و دستور (۲۹) می‌دهد

$$\mathbf{P}\left\{ t_1 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} < \frac{\mu}{n} - p < t_2 \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

که به ازای $t_1 = -t$ و $t_2 = t$، دوباره به دستور (۲۰) منجر می‌شود.

۴. ملاحظه‌های اضافی دربارهٔ مفهوم‌های اساسی نظریهٔ احتمال

وقتی در بند ۱ ضمن گفت‌وگو از پدیده‌های تصادفی، پایداری بسامدها، یعنی تمایلی که در بسامدها ضمن تکرار فراوان شرایط معینی پیش می‌آید و در حوالی **یک سطح عادی ــ** احتمال $\mathbf{P}(A/S)$ ــ گروه‌بندی می‌شوند، از دو جهت مرتکب عدم دقت در تنظیم مطلب شدیم. نخستین عدم دقت مربوط به این بود که نگفتیم رشته آزمایش‌های n ، از لحاظ عددی، تا چه اندازه باید بزرگ باشد، تا پایداری بسامدها، به ناچار ظاهر شود، و از جمله انحراف‌های قابل قبول بسامدهای $\frac{\mu_r}{n_r}$ از یکدیگر و از سطح عادی p، به ازای رشته آزمایش‌های جداگانهٔ n_1 ، n_2 ، ... ، n_s ، چگونه است. چنین عدم دقتی در نخستین گام تنظیم مفهوم یک دانش تازه، احترازناپذیر است. این عدم دقت از جمله مهم‌تر از ابهامی که برای مفهوم هندسی نقطه یا خط در ارتباط با درک فیزیکی آن‌ها وجود داشته است، نیست. این جنبهٔ کار را ما در بند ۳ روشن و دقیق کردیم.

ابهام دیگری که در تنظیم‌های ما وجود داشت، مربوط به روش تنظیم رشته‌هایی است که باید پایداری بسامدهای ظهور پیش‌آمد A را، در آن مشاهده کرد.

دیدیم، در بررسی‌ها، وقتی به روش آماری و احتمالی می‌پردازیم که پیش‌گویی دقیق جریان پیش‌آمد عملی نباشد. اما اگر بخواهیم به طور مصنوعی، دنباله‌ای تا حد امکان تصادفی از پدیده‌ها تشکیل دهیم، باید به ویژه مراقبت کنیم که با هیچ وسیلهٔ قابل فهمی، نشود از قبل حالت‌هایی را جدا کرد که در بارهٔ آن‌ها پدیدهٔ A بیشتر از بسامدی که برای آن

عادی است، تمایل به ظهور داشته باشد.

برای نمونه، قرعه‌کشی برگ‌های قرضهٔ دولتی به همین ترتیب تنظیم می‌شود. اگر در یک قرعه‌کشی که روی N برگ قرضه انجام می‌شود، M برگ، امکان بُرد داشته باشد، احتمال بُرد برای هر برگ جداگانه برابر است با $p=\frac{M}{N}$. و این به معنای آن است که اگر به نحوی، مجموعه‌ای از برگ‌های قرضه را قبل از قرعه‌کشی انتخاب کنیم که از لحاظ تعداد n، به اندازهٔ کافی زیاد باشد، می‌توانیم در عمل هم مطمئن شویم که نسبت $\frac{\mu}{n}$، یعنی نسبت تعداد μ برگ‌های برنده به تعداد n کل برگ‌ها در این مجموعه، به p نزدیک است. کسی که ترجیح داده است شماره‌های زوج برگ‌های قرضه را انتخاب کند، هیچ‌گونه برتری پایداری نسبت به کسی که شماره‌های فرد را انتخاب کرده است، نخواهد داشت؛ به همین ترتیب، کسی که گمان می‌کند بهتر است برگ‌های قرضه‌ای را انتخاب کند که شماره‌های آن‌ها قابل تجزیه به سه عامل اول باشد، یا برگ‌هایی با شماره‌هایی نزدیک به شماره‌های برندهٔ قبلی، هیچ مزیتی بر دیگران ندارد.

درست به‌همین ترتیب، ضمن شلیک از توپ سالمی که از نمونهٔ معینی انتخاب شده است، به وسیلهٔ شخصی که به خوبی آموزش دیده است و با انتخاب نمونه گلوله‌های بازرسی شده، انحراف از نقطهٔ میانگین سقوط، به‌تقریب در نیمی از حالت‌ها، کمتر از انحراف احتمالی B است، که از قبل معین شده است. این نسبت دررشته تیراندازی‌های متوالی حفظ می‌شود؛ در حالت‌هایی هم که تعداد انحراف‌هایی را که از B کمتر است، برای تیراندازی‌های ردیف زوج یا ردیف فرد به طور جداگانه حساب کنیم و یا به هر نحو دیگری، به همین نسبت تقریبی می‌رسیم. ولی امکان داشت، با انتخاب گلوله‌های یکسان (از لحاظ وزن و غیر آن) بتوانیم پراکندگی را تا حدی کم کنیم، یعنی رشته گلوله‌هایی به دست آوریم که برای آن، سهم انحرافی که از B بزرگتر است، در واقع کمتر از **نصف** باشد.

به این ترتیب، صحبت کردن در این باره که پیش‌آمد A یک «پیش‌آمد احتمالی» است و نوشتن آن به صورت احتمال معین

$$p=\mathbf{P}(A/S)$$

تنها وقتی ممکن است، که دسته روش‌های قابل قبول تنظیم رشته آزمایش‌ها را معین کرده باشیم. ما تعیین این دسته را به حساب مضمون شرط‌های S می‌گذاریم.

به ازای شرط‌های مفروض S، پیش‌آمد A، دارای ویژگی «پیش‌آمد احتمالی» است و

احتمالی برابر $p = \mathrm{P}(A/S)$ دارد که معرف خصلت عینی بستگی بین شرط‌های S و پیش‌آمد A است. به زبان دیگر، هیچ پیش‌آمدی به طور مطلق و مجرد، تصادفی نیست؛ پیش‌آمدها، بستگی به این‌که چگونه بررسی شوند، ممکن است تصادفی یا ضروری باشند؛ ولی وقتی شرط‌های معینی وجود داشته باشد، پیش‌آمد می‌تواند به طور عینی تصادفی باشد، و این خاصیت آن بستگی به چگونگی آگاهی‌های این و یا آن ناظر ندارد. اگر ناظری را تصور کنیم که می‌توانست بر جزء جزء خاصیت‌های مشخص و حالت‌های خاص پرواز گلوله‌ها مسلط باشد، و بنابراین می‌توانست انحراف‌های از مسیر میانگین را برای حالت جداگانه پیش‌بینی کند، وجود او مانع از این نمی‌شد که گلوله‌ها بنا بر قانون نظریهٔ احتمال، پراکنده شوند (البته به این شرط که تیراندازی با روش معمولی انجام شود، و نه با راهنمایی ناظر تصوری ما).

به این مناسبت یادآوری می‌کنیم، بحثی که دربارهٔ تنظیم رشته آزمایش‌ها کردیم و توضیح دادیم که در آن‌ها تمایل به سمت حالت بسامدها به معنای جمع شدن در اطراف مقدار عادی (احتمال) ظاهر می‌شود، در دنیای واقع، بدون ارتباط با مداخلهٔ ما اتفاق می‌افتد. برای نمونه، بنابر خصلت تصادفی ـ احتمالی حرکت مولکول‌ها در گاز، تعداد مولکول‌هایی که حتی در فاصلهٔ زمانی کوتاهی به سطح دیوارهٔ ظرف، یا سطحی که در گاز جا داده شده است، اصابت می‌کنند با دقت زیادی با مساحت این سطح و فاصلهٔ زمانی، متناسب است. انحراف از این تناسب هم، در حالت‌هایی که تعداد ضربه‌ها زیاد نیست، طبق قانون احتمال پیش می‌آید و پدیده‌ای از نوع حرکت براونی نامیده می‌شود که ما دربارهٔ آن صحبت خواهیم کرد.

به روشن کردن معنای واقعی مفهوم استقلال می‌پردازیم. به یاد می‌آوریم که احتمال مشروط پیش‌آمد A به ازای شرط‌های B، با این دستور معین می‌شد.

$$\mathrm{P}(A/B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} \qquad (۳۰)$$

همچنین به یاد می‌آوریم، دو حادثهٔ A و B را مستقل می‌گفتیم، وقتی که بنابر (۴)

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$$

از مستقل بودن دو حادثهٔ A و B و $\mathrm{P}(B) > 0$، نتیجه می‌شود:

$$\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(A)$$

همهٔ قضیه‌های نظریهٔ ریاضی احتمال را، که دربارهٔ پیش‌آمدهای مستقل گفت‌وگو می‌کنند، می‌توان دربارهٔ هر پیش‌آمدی که در شرط (۴) صدق می‌کند، و یا تعمیم یافتهٔ آن، در حالت استقلال چند حادثه نسبت به یکدیگر، به کار برد. با وجود این، اگر این تعریف با خاصیت‌های عملی پدیده‌های مستقل (به مفهوم سببی آن) ارتباط نداشته باشد، این قضیه‌ها خیلی کم به درد می‌خورد.

از جمله، معلوم است، احتمال این‌که نوزاد، پسر باشد، مقدار پایداری دارد: $\mathbf{P}(A) = \frac{۲۲}{۴۳}$. اگر B به معنای این شرط باشد که تولد در روز تقارن مشتری و مریخ اتفاق بیفتد، باتوجه به این‌که موضع سیاره‌ها با داوری‌های انفرادی افراد معین نمی‌شود، احتمال شرطی $\mathbf{P}(A/B)$، همان مقدار را خواهد داشت: $\mathbf{P}(A/B) = \frac{۲۲}{۴۳}$، یعنی برآورد بسامد تولد پسرها همراه با چنین شرط‌های اخترشناسی، منجر به بسامد $\frac{۲۲}{۴۳}$ می‌شود. با وجودی که به احتمالی کسی این برآورد را نکرده است، هیچ مبنایی برای تردید در نتیجهٔ آن وجود ندارد.

ما از مثالی استفاده کردیم که از لحاظ مضمون تا حدی کهنه است؛ ولی می‌خواستیم این مطلب را ثابت کنیم که پیشرفت درک و معرفت آدمی تنها مربوط به برقرار کردن بستگی‌های حقیقی بین پدیده‌ها نیست، بلکه مربوط به این هم هست که بتواند بستگی‌های خیالی را رد کند، یعنی بتواند استقلال دو گروه پدیده را در قضیه‌هایی که مطرح است، ثابت کند. افشا کردن تلاش‌های بی‌معنی فال‌بین‌ها و هواداران اخترشناسی (یا **تنجیم**)، که می‌خواهند بین دو گروه پدیده‌ای که هیچ ارتباطی به هم ندارند، رابطه‌ای پیدا کنند، یکی از این حالت‌ها است.

طبیعی است، دربارهٔ عدم وابستگی‌هایی از این قبیل، نباید به طور مجرد و مطلق فکر کرد. از جمله بنابرقانون جاذبهٔ عمومی، تردیدی نیست که حرکت انتقالی قمرهای مشتری، بر پرواز گلولهٔ توپ تاثیر می‌گذارد. ولی روشن است که در عمل می‌توانیم از این‌گونه تاثیرها صرف‌نظر کنیم. از نظر فلسفی، شاید بهتر باشد، به جای ***استقلال***، از ***بستگی غیراساسی*** در موقعیت مشخص مفروض، صحبت شود. ولی، هرطور که باشد، استقلال پیش‌آمد، به‌مفهومی که توضیح دادیم، و بنا به درکی که از این اصطلاح داریم، به هیچ‌وجه، اصل کلی ارتباط پدیده‌ها را نقض نمی‌کند، بلکه تنها به عنوان تکمیل ضروری آن به‌شمار می‌رود.

برآورد احتمال به وسیلهٔ دستور و با فرض مستقل بودن پیش‌آمدها، برای حالتی هم که پیش‌آمدها در ابتدا مستقل‌اند، ولی جریان خود پدیده‌ها، آن‌ها را به هم مربوط می‌کند، فایدهٔ

عملی دارد. از جمله می‌توان احتمال برخورد ذره‌های تشعشع کیهانی را با ذره‌های محیطی که در آن نفوذ کرده است، با این فرض محاسبه کرد که حرکت ذره‌های محیط تا قبل از ورود ذره‌های سریع تشعشع کیهانی در آن، ارتباطی با جابه‌جایی خود این ذره‌ها ندارد. می‌توان احتمال برخورد گلولهٔ دشمن را با پرهٔ ملخ هواپیما، با این فرض محاسبه کرد که موقعیت این پره نسبت به محور آن، بستگی به مسیر گلوله ندارد و غیره. از این گونه مثال‌ها، هر قدر که بخواهید می‌توان پیدا کرد.

حتی می‌توان گفت، در هر جایی که قانون‌مندی‌های احتمالی به روشنی ظاهر می‌شود، باز هم با تعداد بسیار زیادی عامل سروکار داریم، که اگر به‌کلی مستقل از یکدیگر نباشند، بستگی‌های ضعیفی با یکدیگر دارند.

این موضوع به‌هیچ‌وجه به‌این معنا نیست که همه جا می‌توانیم، بدون بحث انتقادی، به فرض استقلال و عدم وابستگی پدیده‌ها، متوسل شویم. برعکس، این موضوع ما را وا می‌دارد که با دقت تمام، محکی برای تحقیق در فرضیهٔ عدم وابستگی‌ها به دست آوریم، و هم با دقت تمام، حالت‌های مرزی را، که در آن‌جا دیگر لازم است بستگی بین عامل‌ها را به حساب آوریم، بررسی کنیم، ولی این بستگی چنان است که قانون‌مندی‌های احتمالی، هنوز می‌توانند به صورت متغیر و پیچیده‌ای ظاهر شوند. یادآوری کرده‌ایم که در مکتب رسمی روسی نظریهٔ احتمال، بررسی‌های ارزنده و زیادی دراین جهت دوم انجام گرفته است.

با پایان دادن بحث مربوط به استقلال و بی‌ارتباطی، متذکر می‌شویم که چه تعریف استقلال در پیش‌آمد با دستور (۴) و چه تعریف صوری استقلال چند کمیت تصادفی، به مراتب وسیع‌تر است از مفهوم استقلال واقعی به‌معنای علت‌یابی عدم‌بستگی گروه پدیده‌ها.

از جمله فرض می‌کنیم، نقطهٔ ξ بر پاره‌خط $[\circ\ ,\ ۱]$ به نحوی واقع باشد که به ازای

$$\circ \leq a < b \leq ۱$$

احتمال قرار گرفتن آن بر پاره‌خط $[a\ ,\ b]$ برابر با طول این پاره‌خط، یعنی $b-a$، باشد. به سادگی ثابت می‌شود که در این‌صورت در تبدیل

$$\xi = \frac{\alpha_۱}{۱\circ} + \frac{\alpha_۲}{۱\circ\circ} + \frac{\alpha_۳}{۱\circ\circ\circ} + \cdots$$

طول نقطهٔ ξ به کسر دهدهی، نشانه‌های α_k نسبت به هم مستقل‌اند، ولو این‌که به‌خاطر نحوهٔ تولیدشان به‌هم مربوط‌اند[1] (از این وضع، نتیجه‌های جالب بسیاری، چه در زمینهٔ نظری و چه در زمینهٔ عملی به دست می‌آید).

این نرمش و انعطاف‌پذیری تعریف صوری استقلال، نباید به معنای نارسایی آن گرفته شود؛ بلکه برعکس، میدان کاربرد قضیه‌ای را که با فرض‌هایی که دربارهٔ استقلال، ثابت شده است، گسترش می‌دهد. این قضیه‌ها، هم در حالت‌هایی که استقلال برمبنای فرض‌های عملی، لازم شمرده می‌شود و هم در حالت‌هایی که استقلال به کمک محاسبه و براساس فرض‌هایی به دست می‌آید که از قبل دربارهٔ توزیع احتمال در پیش‌آمدها و کمیت‌های تصادفی مورد بررسی قبول شده است، به طور یکسان به کار می‌رود.

به طور کلی، بررسی ساختمان صوری دستگاه ریاضی نظریهٔ احتمال، نتیجهٔ جالبی در بردارد. این دستگاه توانسته است مقام معین و ساده‌ای در مبانی رسمی موضوع‌های قابل مطالعهٔ ریاضیات امروزی به دست آورد.

ما دربارهٔ مفهوم اشتراک AB از دو پیش‌آمد و دربارهٔ مفهوم اجتماع $A\cup B$ از پیش‌آمدهای A و B، صحبت کرده‌ایم. به یاد می‌آوریم که دو پیش‌آمد را ناسازگار گفتیم که اشتراک آن‌ها ممکن نباشد، یعنی داشته باشیم $AB=N$، که در آن N عبارت است از پیش‌آمدی ناممکن.

اصل موضوع اساسی نظریهٔ احتمال، عبارت است از این قاعده (بند ۲ را ببینید) که با شرط $AB=N$ این برابری برقرار باشد:

$$\mathbf{P}(A\cup B)=\mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(B)$$

ویژگی‌های مفهوم‌های اساسی نظریهٔ احتمال ــ پیش‌آمدهای تصادفی و احتمال‌های آن‌ها ــ از جمله به خاصیت‌های شکل‌های مسطحه و مساحت‌های آن‌ها، شباهت دارد. کافی است AB را به معنای تقاطع (فصل مشترک) دو شکل، $A\cup B$ را به معنای اجتماع آن‌ها، N را یک شکل «تهی» و $\mathbf{P}(A)$ را مساحت شکل A بگیریم، تا شباهتی که می‌خواهیم، کامل شود.

---

۱. همین وضع به ازای هر مقدار n در تبدیل عدد بند به کسر

$$\xi=\frac{\alpha_1}{n}+\frac{\alpha_2}{n^2}+\frac{\alpha_3}{n^3}+\cdots$$

و برای نشانه‌های α_k وجود دارد.

حجم شکل‌های سه‌بعدی هم، دارای همین خاصیت‌ها هستند.

نظریه‌ای کلی از این نوع را، که به عنوان حالت خاص شامل نظریهٔ حجم‌ها و سطح‌ها هم می‌شود، امروزه ***نظریهٔ کلی اندازه‌ها*** می‌گویند، و آگاهی‌هایی دربارهٔ آن را می‌توانید در بخش پانزدهم (جلد سوم)، که به نظریهٔ تابع‌های با متغیر حقیقی اختصاص دارد، پیدا کنید.

تنها باید توجه داشت که در نظریهٔ احتمال، نسبت به نظریهٔ کلی اندازه‌ها و یا حالت خاص آن نظریهٔ سطح‌ها و حجم‌ها، بعضی مرزبندی‌ها وجود دارد: احتمال هرگز بزرگتر از واحد نمی‌شود، و این احتمال حداکثر، برای پیش‌آمد حتمی U برقرار است.

$$\mathbf{P}(U)= ۱$$

شباهت، سطحی نیست. معلوم می‌شود، تمامی نظریهٔ ریاضی احتمال را از جنبهٔ صوری آن می‌توان همچون نظریهٔ اندازه‌ها ساخت، تنها با این فرض که اندازهٔ (تمامی فضای) U را برابر واحد بگیریم[1].

این شیوهٔ عمل، نه تنها به جنبهٔ صوری نظریهٔ ریاضی احتمال، روشنی کاملی می‌بخشد، بلکه چه در زمینهٔ خود نظریهٔ احتمال و چه دربارهٔ جنبهٔ صوری نظریه‌های ریاضی نزدیک به آن، موجب پیشرفت‌های مشخصی شده است. در نظریهٔ احتمال توانسته‌اند از روش‌های ظریفی که در نظریهٔ متری تابع‌های با متغیر حقیقی به دست آمده است، با موفقیت استفاده کنند. در عین حال، روش‌های احتمالی هم نه «از روی شباهت»، بلکه از راه انتقال دقیق آن‌ها به رشته‌های تازه، در مسأله‌هایی از شاخه‌های نزدیک آن در ریاضیات، کاربردهای زیادی پیدا کرده است. هر جا بتوان اصل موضوع‌های نظریهٔ احتمال را برقرار کرد، می‌توان نتیجه‌هایی را هم که از این اصل موضوع‌ها به دست می‌آید، به کار برد، اگر چه رشتهٔ مفروض هیچ وجه مشترکی با تصادفی بودن واقعی نداشه باشد.

وجود نظریهٔ اصل موضوعی شده احتمال، ما را از این وسوسه نجات می‌دهد که احتمال را با روش‌هایی «تعریف کنیم» که گویا به طور مستقیم بر پیوند اقناع علمی با نظریهٔ ریاضی دقیقی که به طور صوری براساس این اقناع ساخته شده است، تکیه دارد. چنین تعریفی، کم‌وبیش شبیه آن است که در هندسه، نقطه را به این ترتیب «تعریف کنیم» که با بی‌نهایت بار

---

۱. با همهٔ این‌ها، مسأله‌هایی که در نظریهٔ احتمال حل می‌شود، آن را به عنوان رشتهٔ مستقلی از ریاضیات باقی نگه می‌دارد؛ نتیجه‌گیری‌های احتمالی، که برای این نظریه اساسی است (شبیه آن‌چه که در بند ۳ آمده است)، از دیدگاه نظریهٔ اندازه‌ها، غیرلازم و مصنوعی به نظر می‌رسد.

تقسیم یک جسم فیزیکی، که هربار قطر آن نصف شود، به دست می‌آید.

تعریف احتمال، به عنوان حد بسامدها، وقتی تعداد آزمایش‌ها به‌طور نامحدود زیاد شود، از این قبیل است. فرض دربارهٔ خصلت احتمالی آزمایش‌ها، یعنی تمایل بسامدها به جمع شدن در اطراف مقداری ثابت (همین طور، فرض دربارهٔ «تصادفی بودن» یک پدیده) تنها با در نظر داشتن بعضی شرط‌ها درست است؛ شرط‌هایی که نه به مدت نامحدود و نه با دقت نامحدود، نمی‌توانند باقی بمانند، بنابراین، عبور دقیق به حد

$$\frac{\mu}{n} \to p$$

نمی‌تواند معنای واقعی داشته باشد. تنظیم اصل پایداری بسامدها، ضمن به کار بردن چنین انتقال حدی، نیاز به تعریف روش‌های قابل قبولی برای جست‌وجوی دنباله‌هایی بی‌پایان از آزمایش‌ها دارد، و خود این، تنها می‌تواند یک سراب ریاضی باشد. همهٔ این انبوه مفهوم‌ها را تنها تا زمانی می‌توان به طور جدی بررسی کرد که نتوان از راه‌های دیگری که پایه‌های دقیق‌تری دارند، به نظریهٔ خاصی که از این راه به دست می‌آید، رسید. ولی ما می‌دانیم که می‌توان نظریهٔ احتمال را، به کمک نظریهٔ اندازه‌ها و تنها با اضافه کردن شرط سادهٔ

$$\mathbf{P}(U) = ۱$$

پایه‌گذاری کرد.

به طور کلی، برای تحلیل واقعی مفهوم احتمال، هیچ اجباری نداریم به سمت تعریف صوری آن تمایل پیدا کنیم. به ظاهر، وقتی از جنبهٔ خالص صوری به احتمال بنگریم، هیچ چیز بیش از این نمی‌توان گفت که: احتمال $\mathbf{P}(A/S)$ عبارت است از عددی که بسامدها (با توجه به شرط‌های S و روش‌هایی که برای تنظیم رشته‌ها پیش‌بینی شده است) تمایل به جمع شدن در اطراف آن را دارند؛ در ضمن این تمایل با زیاد شدن تعداد این رشته‌ها در مرز عاقلانه‌ای که تجانس شرط‌ها را به هم نزند، با روشنی و دقت بیشتری ظاهر می‌شود، تا این‌که به ازای تعداد ممکنی از رشته‌ها، به حالت مشخصی از اطمینان و دقت کافی برسد.

در واقع، هر مسأله‌ای به معنای تصریح صوری این تعریف نیست، بلکه به معنای امکان روشن‌تر کردن شرط‌هایی است که به ازای آن‌ها چنین پیش‌آمد احتمالی ممکن است ظاهر شود. باید به روشنی به این نکته توجه داشت که در واقع، فرضیهٔ مربوط به خصلت احتمالی یک پدیده، خیلی به ندرت می‌تواند براساس آزمایش مستقیم آماری پایه‌گذاری شود. تنها، وقتی برای نخستین‌بار، روش‌های احتمالی در شاخهٔ تازه‌ای نفوذ کند، اغلب کار را از این‌جا

آغاز می‌کنند که با روش آزمایشی، پایداری بسامدها را نشان دهند. در بند ۳ دیدیم، اگر بخواهیم پایداری بسامدها را با روش آماری با دقت تا ε کشف کنیم، باید از رشته‌هایی استفاده کنیم که به تقریب شامل $n=\frac{1}{\varepsilon^2}$ آزمایش باشند. برای نمونه برای این‌که ثابت کنیم موضوع مشخصی با احتمال به دقت تا ۰٫۰۰۰۱ معنا دارد، باید رشته آزمایش‌هایی را در نظر بگیریم که در هر کدام آن‌ها به تقریب ۱۰۰۰۰۰۰۰۰ آزمایش وجود داشته باشد.

اغلب حالت‌ها فرضیهٔ پیش‌آمد احتمالی براساس ملاحظه‌های تقارنی و یا براساس فرض استقلال عملی پدیده‌های جداگانه‌ای که با هم برخورد دارند و غیر آن، طرح‌ریزی می‌شود؛ و سپس، از راه غیرمستقیم مورد تحقیق قرار می‌گیرد. از جمله، به‌مناسبت این‌که تعداد مولکول‌های واقع در حجم محدودی از گاز با عددهای از نوع 10^{20} و بیشتر بیان می‌شود، عدد $\sqrt{n}$ هم که متناظر با نتیجهٔ احتمالی نظریهٔ سینتیک گازهاست، خیلی بزرگ می‌شود و بنابراین، بسیاری از این نتیجه‌ها با دقت زیادی، درست از آب در می‌آیند. به عنوان نمونه، فشاری که وارد بر دو طرف قطعه صفحه‌ای که در هوای آرام آویزان شده است (حتی اگر از نظر ما، یک قطعهٔ کوچک میکروسکپی باشد)، به طور کل یکنواخت است، ولو این‌که در موقعیت آزمایشی ما، میزان فشار بر یکی از دو طرف، به اندازهٔ یک‌هزارم درصد، بیشتر از فشار برطرف دیگر باشد.

۵. روندهای جبری و الزامی و روندهای تصادفی

قانون علت و معلولی پدیده‌ها، بیان ریاضی ساده‌ای پیدا می‌کند؛ این بیان ضمن روشی که برای مطالعهٔ روندهای واقعی به کار می‌رود و به کمک معادله‌های دیفرانسیلی، به دست می‌آید: ما با این روش ضمن مثال‌هایی در بند ۱ بخش پنجم، آشنا شده‌ایم.

فرض کنید، حالت دستگاه که در لحظهٔ زمانی t، بررسی می‌کنیم، به‌کمک nپارامتر معین می‌شود

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

همان‌طور که می‌دانیم، سرعت تغییر این پارامترها به‌یاری مشتق‌های آن‌ها، نسبت به زمان، معین می‌شود

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt}$$

اگر فرض کنیم، این سرعت‌ها، تابع‌هایی از مقدارهای پارامترها باشند، آن وقت دستگاهی از معادله‌های دیفرانسیلی به دست می‌آید:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$$

بخش عمده‌ای از قانون‌های طبیعت، که در دوران تولد طبیعت‌شناسی ریاضی، و با آغاز از قانون سقوط اجسام ***گالیله***، کشف شده است، به همین ترتیب بیان می‌شود. ***گالیله*** نمی‌توانست کشف خودش را به چنین لباسی بپوشاند، زیرا در زمان او، هنوز مفهوم‌های ریاضی لازم، پیدا نشده بود. این کار به وسیلهٔ **نیوتن** انجام گرفت.

در مکانیک و بسیاری از شاخه‌های دیگر فیزیک، به کار گرفتن معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ دوم، امری عادی است و این، از جهت اصولی، هیچ چیز تازه‌ای نیست، زیرا اگر سرعت‌های $\dot{x}_k$ را، با نشانه‌های تازهٔ

$$v_k = \dot{x}_k$$

نشان دهیم، برای مشتق‌های دوم کمیت x_k به بیان

$$\frac{d^2 x_k}{dt^2} = \dot{v}_k$$

می‌رسیم و معادلهٔ مرتبهٔ دوم برای n کمیت x_1 ، x_2 ، ... ، x_n، منجر به معادلهٔ مرتبهٔ اولی از $2n$ کمیت x_1 ، x_2 ، ... ، x_n ، v_1 ، v_2 ، ... ، v_n می‌شود.

به عنوان مثال، مسألهٔ سقوط جسم سنگین را در جو زمین در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم در بررسی ما، تنها ارتفاع‌های پایین بالای سطح زمین دخالت داشته باشد و به همین مناسبت، مقاومت محیط را تنها در بستگی با سرعت جسم، و نه ارتفاع آن، به حساب می‌آوریم. چگونگی دستگاهی که مطالعه می‌کنیم، با دو پارامتر مشخص می‌شود: فاصلهٔ جسم از سطح زمین (z) و سرعت آن (v). تغییر این دو کمیت در زمان، با دو معادلهٔ دیفرانسیلی معین می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -v \\ \dot{v} &= g - f(v) \end{aligned} \qquad (31)$$

که در آن، g عبارت است از شتاب نیروی ثقل و $f(v)$ نوعی «قانون مقاومت»، برای جسمی است که بررسی می‌کنیم.

اگر جسم به اندازهٔ کافی سنگین و با سرعت کم باشد، از جمله در حالت سقوط سنگی با اندازه‌های متوسط از ارتفاع چند متری، می‌توان مقاومت هوا را ناچیز شمرد و معادله‌های (۳۱) را به این صورت تبدیل کرد:

$$\dot{z} = -v$$
$$\dot{v} = g \qquad (۳۲)$$

اگر فرض کنیم، در لحظهٔ آغازی t_0 کمیت‌های z و v، مقدارهای z_0 و v_0 را داشته باشند، معادله‌های (۳۲) به سادگی حل می‌شوند و این دستور به دست می‌آید:

$$z = z_0 - v(t-t_0) - g\left(\frac{t-t_0}{2}\right)^2$$

که تمامی جریان سقوط را شرح می‌دهد. برای نمونه، با فرض $t_0 = 0$ و $v_0 = 0$، دستور

$$z = z_0 - \frac{gt^2}{2}$$

به دست می‌آید که به وسیلهٔ ***گالیله*** کشف شد.

در حالت کلی، انتگرال‌گیری از معادله‌های (۳۱) تا حدی پیچیده است، ولی نتیجهٔ اصولی (با محدودیت‌هایی که برای تابع $f(v)$ در نظر گرفته می‌شود) همان است: با معلوم بودن مقدارهای z_0 و v_0 در مبداء زمان t_0، مقدارهای z و v برای همهٔ لحظه‌های بعدی زمان t، تا زمانی که جسم بر سطح زمین سقوط کند، به دست می‌آید. می‌توان به طور ذهنی، محدودیت اخیر را هم برداشت و فرض کرد، سقوط برای مقدارهای منفی z هم ادامه داشته باشد. برای چنین مسأله‌ای، می‌توان نتیجه گرفت: اگر تابع $f(v)$ به ازای صعودی بودن v به طور یکنوا صعودی باشد و به ازای $v \to \infty$، به سمت بی‌نهایت میل کند، آن‌وقت با ادامه نامحدود سقوط، یعنی با بزرگ شدن زمان t به طور نامحدود، سرعت v به سمت حد ثابت مقدار c میل می‌کند، که ریشهٔ این معادله است:

$$g = f(c)$$

این نتیجهٔ آنالیز ریاضی را می‌توان به این ترتیب به طور عینی روشن کرد: سرعت سقوط، تا زمانی که شتاب نیروی ثقل هم‌ارز مقاومت هوا نشده است، زیاد می‌شود. ضمن پرش با

چتر نجات باز، خیلی زود، سرعت متعادل پنج متر در ثانیه برقرار می‌شود[۱]. ولی اگر پرش بدون باز کردن چتر نجات انجام گیرد، مقاومت هوا کمتر و سرعت ثابت c زیادتر می‌شود و تنها بعد از آنکه چترباز، مسافتی بسیار طولانی را طی کند، به این سرعت ثابت می‌رسد.

ضمن سقوط جسم سبک، مثل موقعی که پر یا پوست نازکی را در هوا رها کنیم، دورهٔ نخستین حرکت شتاب‌دار خیلی کم است و گاهی، دیده نمی‌شود. سرعت ثابت سقوط خیلی زود برقرار می‌شود و با تقریب معینی می‌توان همیشه قبول کرد که $v=c$. در این حالت، تنها یک معادلهٔ دیفرانسیلی باقی می‌ماند:

$$\dot{z}=-c$$

که خیلی ساده قابل انتگرال‌گیری است:

$$z=z_{\circ}-c(t-t_{\circ})$$

و پوست نازک هم در هوای آرام، به همین ترتیب سقوط می‌کند.

درک جبری و الزامی که به صورت کلی دربارهٔ آن در بالا صحبت کردیم، در نظریهٔ جدید دستگاه‌های دینامیکی بحث می‌شود که بسیاری از جنبه‌های آن به وسیلهٔ دانشمندان شوروی ــ ***ن.ن.بوگولیوبوف***، ***و.و.سته‌پانوف*** و دیگران ــ روشن شده است. این نظریهٔ کلی، آن‌چنان طرح‌های ریاضی پدیده‌های واقعی را هم به عنوان حالت خاصی در برمی‌گیرد، که درآن‌ها تشکیل دستگاه، نه با تعداد محدودی پارامتر، بلکه با یک یا چند تابع معین می‌شود، وضعی که از جمله دربارهٔ مکانیک محیط‌های پیوسته، وجود دارد. در چنین حالت‌هایی، قانون‌مندی‌های مقدماتی تغییر حالت‌ها در فاصلهٔ زمانی «بسیار کوچک» ، نه با معادله‌های دیفرانسیلی عادی، بلکه به وسیلهٔ معادله‌های با مشتق‌های جزئی و یا وسیله‌های دیگر داده می‌شود. ولی، آن‌چه در همهٔ طرح‌های ریاضی جبری و الزامی، کلی است، این است که چگونگی دستگاه مورد مطالعه به وسیلهٔ دستوری از یک موضوع ریاضی ω (دستگاه n عدد حقیقی، یک یا چند تابع و غیره)، به طور کامل و جامع معین به حساب می‌آید؛ و به‌جز آن مقدارهای بعدی برای لحظه‌های زمانی $t>t_{\circ}$، به صورت یک ارزشی و برحسب مقدار $\omega_{\circ}$ که متناظر با لحظهٔ اولیهٔ $t_{\circ}$ است، معین می‌شود:

$$\omega=F(t_{\circ}, \omega_{\circ}, t)$$

---

۱. این به این معنی است که در عمل مقدار v به سرعت به c نزدیک می‌شود.

همان‌طور که می‌دانیم در حالت جریان‌هایی که به وسیلهٔ معادله‌های دیفرانسیلی شرح داده می‌شوند، برای پیدا کردن تابع F، باید از این معادله‌های دیفرانسیلی، با شرط اولیهٔ $\omega = \omega_{\circ}$ به ازای $t = t_{\circ}$، انتگرال‌گیری کرد.

هواداران ماتریالیسم مکانیکی، گمان می‌کردند، طرح توصیفی، عبارت است از بیان دقیق و مستقیم جزمی بودن پدیده‌های واقعی (اصل فیزیک علیت). بنا بر اندیشهٔ **لاپلاس**، چگونگی جهان در لحظهٔ زمانی مفروض، با تعداد نامحدودی پارامتر معین می‌شود که از بی‌نهایت معادلهٔ دیفرانسیلی پیروی می‌کنند و اگر «عقل جامع‌الاطرافی» بتواندهمهٔ این معادله‌ها را بنویسد و از آن‌ها انتگرال‌گیری کند، به اعتقاد **لاپلاس**، خواهد توانست تمامی تغییرها و پیشرفت‌های جهان را در جریان بی‌پایان زمان، با دقت کامل پیش‌گویی کند.

ولی در واقع امر، بی‌پایان بودن جهان از لحاظ کمیت‌های ریاضی، در برابر بی‌پایانی کیفی جهان واقع، چیز قابل توجهی نیست. نه استفادهٔ از بی‌نهایت پارامتر و نه توضیح چگونگی محیط‌های پیوسته به کمک تابع‌ها، نمی‌تواند انعکاسی از پیچیدگی بی‌پایان پدیده‌های واقعی باشد.

همان‌طور که در بند ۳ بخش پنجم تاکید کردیم، بررسی پدیده‌های واقعی، همیشه در جهت اضافه کردن تعداد عامل‌هایی که در مسأله دخالت دارند، انجام نمی‌گیرد؛ به‌طور کلی، همیشه صلاح بر این نیست که خصلت ω را، که طرح ریاضی «چگونگی دستگاه» را معین می‌کند و برای محاسبهٔ پدیدهٔ مفروض به کار می‌رود، بغرنج‌تر کنیم. هنر بررسی بیشتر در این است که هر چه ممکن است، فضای مرحله‌ای Ω را (یعنی مجموعهٔ مقدارهای ω، یا به زبان دیگر، مجموعهٔ حالت‌های مختلف و ممکن دستگاه را)، ساده‌تر پیدا کنیم[۱]، به نحوی که با وجود این، با عوض کردن جریان واقعی با جریان جابه‌جایی جبری نقطهٔ ω در این فضا، همهٔ جنبه‌های اصلی پدیدهٔ واقعی را در بربگیرد.

ولی، وقتی از روندی واقعی، خط‌های اصلی آن را جدا کنیم، باقی‌مانده‌ای به دست می‌آید که بهتر است تصادفی به حساب آید. عامل‌های تصادفی، که بررسی نمی‌شوند، همیشه بر جریان روند، تاثیر می‌گذارند. به ندرت می‌توان به پدیده‌ای برخورد کرد که از نظر ریاضی مطالعه شده باشد و برای آن، ضمن مقایسهٔ نظریه با مشاهده، تأثیری از عامل‌های

---

۱. در مثالی که برای سقوط جسم آوردیم، فضای مرحله‌ای Ω عبارت است از دستگاه دو عدد (z, v) یعنی صفحه. برای آشنایی بیشتر با فضاهای مرحله‌ای، به بخش هفدهم و بخش هیجدهم بند ۳ مراجعه کنید.

تصادفی مطالعه نشده، دیده نشود. چنین موقعیتی، یا به تقریب چنین موقعیتی، دربارهٔ نظریهٔ حرکت سیاره‌ها، تحت تاثیر نیروی جاذبه، دیده می‌شود: فاصلهٔ بین سیاره‌ها، در مقایسه با اندازهٔ خود سیاره‌ها، چنان بزرگ است که به تقریب بدون هیچ تردیدی آن‌ها را به صورت نقطه‌های مادی در نظر می‌گیرند؛ فضایی که سیاره‌ها در آن حرکت می‌کنند، از چنان مادهٔ رقیق و پراکنده‌ای پر شده است که از مقاومت آن می‌توان صرف‌نظر کرد؛ جرم سیاره‌ها چنان عظیم است که فشار نور، ضمن حرکت آن‌ها به تقریب نقشی ندارد. این وضع، موجب شده است که حل ریاضی مسألهٔ مربوط به حرکت n نقطهٔ مادی، که «چگونگی» آن با $6n$ پارامتر[1]، توضیح داده می‌شود و تغییر چگونگی آن تنها به نیروی جاذبه بستگی دارد، به طور حیرت‌انگیزی با مشاهده‌های ما دربارهٔ حرکت سیاره‌ها، تطبیق می‌کند.

پرواز گلولهٔ توپ هم، با فرض دخالت مقاومت هوا در معادلهٔ حرکت آن، تا حدی به حالت حرکت سیاره‌ها نزدیک است. این هم یکی از زمینه‌های سنتی است که روش بررسی ریاضی به سادگی و به سرعت توانسته است پیروزی‌های بزرگی به دست آورد. ولی دراین‌جا، نقش عامل‌های تصادفی تغییردهنده، خیلی زیاد است و پراکندگی گلوله‌ها، یعنی انحراف آن‌ها از مسیر نظری، که برای تیراندازی مفروضی با توجه به شرط‌های نخستین و چگونگی میانگین جو در زمان تیراندازی درنظر گرفته شده است، ده‌ها و دربارهٔ فاصله‌های زیاد، صدها متر به دست می‌آید. این انحراف‌ها، قسمتی مربوط به انحراف‌های تصادفی از جهت اولیه و سرعت اولیه، قسمتی مربوط به انحراف‌های تصادفی از میزان معمولی جرم و ضریب مقاومت گلوله‌ها، قسمتی هم مربوط به ناموزونی و شدت ناگهانی باد و دیگر چگونگی‌های تصادفی مربوط به روال پیچیده و متغیری است که بر جو زمین حکومت می‌کند.

پراکندگی گلوله‌ها، با روش‌های نظریهٔ احتمال، به تفصیل بررسی می‌شود و نتیجه‌هایی که از این راه به دست می‌آید، در عمل و برای تیراندازی، بسیار مهم است.

حالا ببینیم، پدیده‌های تصادفی به چه معناست! به نظر می‌رسد، «باقی‌ماندهٔ» تصادفی که ضمن طرح‌ریزی پدیده به دست می‌آید، آن‌قدر بزرگ باشد که نتوان از آن صرف‌نظر کرد. چاره‌ای جز این نیست که توضیح پدیده را، با وارد کردن پارامترهای تازه‌ای، پیچیده‌تر کنیم و سپس بررسی پدیده را با این طرح بغرنج‌تر و با اساس همان طرح ریاضی پدیده‌های جزمی،

---

۱. سه مختص هر نقطه و سه مؤلفهٔ سرعت این نقطه.

مطالعه کنیم.

چنین راهی، در بسیاری حالت‌ها و در عمل، قابل اجرا نیست. از جمله اگر بخواهیم در بررسی سقوط نقطهٔ مادی در جو، ساختمان ناموزون و پرتغییر جریان باد (یا، به اصطلاح، ساختمان باد متلاطم) را وارد کنیم، به جای دو پارامتر z و v، به دستگاه ریاضی فوق‌العاده عظیمی نیاز داریم تا بتواند این ساختمان را توضیح دهد.

ولی در واقع، چنین مسیر بغرنجی، تنها در حالت‌هایی لازم است که ناچار باشیم، به هر قیمتی که شده، تاثیر عامل‌های «تصادفی» باقی‌مانده را در جریان روندی که مطالعه می‌کنیم و برای جزءجزء هر حالت جداگانهٔ آن، به حساب آوریم. ولی خوشبختانه، در عمل اغلب به چیز دیگری نیاز داریم: تنها باید اثر جمعی عامل‌های تصادفی را در فاصلهٔ زمانی بزرگ و یا در تعداد زیادی از تکرار روند پدیده‌ای که بررسی می‌کنیم، تخمین بزنیم.

به عنوان مثال، انتقال شن را، ضمن جریان آب رودخانه و یا یک دستگاه هیدروتکنیکی مصنوعی در نظر می‌گیریم. این انتقال به طور معمول به این ترتیب پیش می‌آید: سنگ‌ریزه‌های بسیاری در کف به آرامی قرار گرفته‌اند و تنها گاه به گاه، چرخش‌های نیرومندی در نزدیکی کف، شن‌های جداگانه‌ای را در برمی‌گیرد و ناگهان آن‌ها را تا فاصلهٔ قابل توجهی جابه‌جا می‌کند، تا این‌که دوباره در جای تازه‌ای، به طور ناگهانی متوقف شوند. حرکت هرکدام از این شن‌ها را می‌توان به صورت خالص نظری، بنابر قانون هیدرومکانیک، محاسبه کرد. ولی، برای این منظور باید از حالت اولیهٔ کف و جریان در تمامی بخش‌ها آگاهی داشته باشیم و آن را گام به‌گام به حساب آوریم، به لحظه‌هایی توجه کنیم که فشار بر سنگ‌ریزهٔ آرامی، برای به حرکت در آوردن آن کافی است، همچنین مراقب جابه‌جایی و حرکت سنگ‌ریزه‌ها تا لحظهٔ توقف آن‌ها باشیم. مهمل بودن چنین مسأله‌ای، برای یک بررسی علمی واقعی، روشن است. ولی با همهٔ این‌ها، به بررسی حرکت میانگین، و یا به اصطلاح قانون‌مندی آماری آبرفت‌های زمینه‌ای جریان‌های آبی، نیاز داریم.

از این نوع مثال‌ها، که به خاطر عمل تعداد زیادی عامل‌های تصادفی در آن‌ها، استناد به قانون‌مندی آماری روشن به نظر می‌رسد، کم نیست. یکی از جالب‌ترین نمونه‌ها از این قبیل، نظریهٔ سینتیک گازهاست که نشان می‌دهد چگونه عمل مشترک مجموعهٔ برخوردهای تصادفی مولکول‌ها، قانون‌های دقیقی به وجود می‌آورد که فشار گاز را، به عنوان یک مجموعهٔ واحد بر دیواره و انتشار یک گاز را در دیگری و غیر آن، معین می‌کند.

۶. روندهای تصادفی از نوع مارکوف

آ.آ. مارکوف، یک طرح احتمالی ساخت که به طور مستقیم به تعیمم طرح جزمی، که در بند ۵ به‌کمک معادلهٔ

$$\omega = F(t_{\circ}\,, \omega_{\circ}\,, t)$$

شرح دادیم، پرداخته است. *مارکوف* تنها حالتی را در نظر گرفته است که فضای مرحله‌ای دستگاه مورد مطالعه از تعداد محدودی تشکیل شده است: $\Omega = \{\omega_1\,,\ \omega_2\,,\ \cdots\,,\ \omega_n\}$، و تغییر حالت‌هایی از دستگاه را تنها، به ازای تقسیم زمان t به گام‌های منقطع مورد بررسی قراردهد. ولی درهمین مدل‌ساده، توانست یک‌رشته قانون‌مندی‌های اساسی به دست آورد.

مارکوف به جای تابع F، که حالت ω را در لحظهٔ $t>t_{\circ}$ نسبت به حالت $\omega_{\circ}$ در لحظهٔ $t_{\circ}$ به صورت یک ارزشی معین می‌کرد، احتمال‌های

$$(t_{\circ}\ ,\ \omega_i\ ;\ t\ ,\ \omega_j)$$

را وارد کرد، که احتمال به‌دست آوردن حالت ω_j را در لحظهٔ t، با این شرط که در لحظهٔ $t_{\circ}$ حالت ω_i وجود دارد، می‌دهد. احتمال‌های *مارکوف* برای هر سه لحظهٔ زمانی

$$t_{\circ} < t_1 < t_2$$

به‌هم مربوط هستند، که برای این ارتباط می‌توان معادلهٔ زیر را، که به معادلهٔ پایه‌ای روندهای *مارکوف* مشهور است، نوشت:

$$\mathbf{P}(t_{\circ}\,,\ \omega_i\ ;\ t_2\,,\ \omega_j) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(t_{\circ}, \omega_i\ ;\ t_1, \omega_k)\,\mathbf{P}\,(t_1, \omega_k\ ;\ t_2, \omega_j) \qquad (۳۳)$$

وقتی فضای مرحله‌ای خمینه‌ای پیوسته باشد، بهترین نمونه، حالت وجود ***چگالی احتمال*** $p(t_{\circ}\,,\ \omega_{\circ}\ ;\ t\ ,\ \omega)$ عبور از حالت $\omega_{\circ}$ به حالت ω در فاصلهٔ زمانی $(t_{\circ}\ ,\ t)$ است. در این حالت، احتمال عبور در فاصلهٔ زمانی بین لحظه‌های $t_{\circ}$ و t، از حالت $\omega_{\circ}$ به حالتی مثل ω، متعلق به حوزهٔ G از فضای مرحله‌ای، به این صورت نوشته می‌شود:

$$\mathbf{P}\,(t_{\circ}\,, \omega_{\circ}\ ;\ t\,,\ G) = \int_G p(t_{\circ}\ ,\ \omega_{\circ}\ ;\ t\,, \omega)\,d\omega \qquad (۳۴)$$

که در آن، $d\omega$ عبارت است از عنصرحجم در فضای مرحله‌ای[1]. برای تراکم احتمال

---

۱. برابری (۳۴) به عنوان تعریف چگالی احتمال به کار می‌رود. مقدار $pd\omega$ (با تقریب بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالا) برابر است با احتمال عبور از لحظهٔ زمانی $t_{\circ}$ تا t، از حالت $\omega_{\circ}$ به عنصر حجمی $d\omega$.

$p(t_{\circ}, \omega_{\circ} ; t, \omega)$، معادلهٔ پایه‌ای (۳۳) به این صورت در می‌آید:

$$p(t_{\circ}, \omega_{\circ} ; t_{۲}, \omega_{۲}) = \int_{\Omega} p(t_{\circ}, \omega_{\circ} ; t_{۱}, \omega) p(t_{۱}, \omega ; t_{۲}, \omega_{۲}) d\omega \qquad (۳۵)$$

حل معادلهٔ (۳۵) به اندازه کافی دشوار است، ولی با بعضی محدودیت‌ها می‌توان معادله‌های دیفرانسیلی با مشتق‌های جزئی از آن بیرون آورد که به سادگی قابل مطالعه باشند. بعضی از این معادله‌ها به وسیلهٔ فیزیک‌دانان **فوکر** و **پلانک** از بعضی ملاحظه‌های غیر دقیق فیزیکی، به دست آمده بود. نظریهٔ کامل این‌گونه معادله‌های دیفرانسیلی (که معادله‌های دیفرانسیلی تصادفی یا استوکاستیک نام دارند)، به وسیلهٔ ریاضی‌دانان شوروی ساخته شده است (***س.ن. برنشتین، آ. ن. کولموگوروف، ای. گ. پتروسکی، آن.ن. خین‌چین*** و دیگران)؛ ولی ما در این‌جا به شرح این معادله‌ها نمی‌پردازیم.

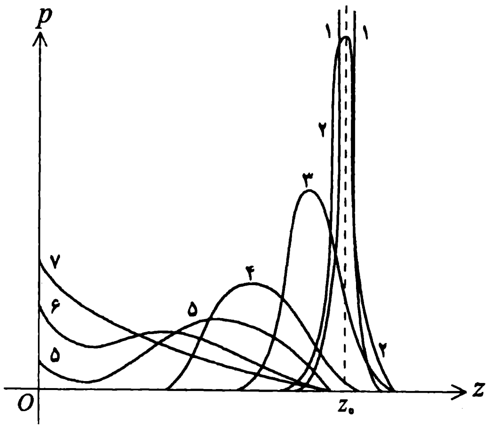
روش معادله‌های دیفرانسیلی تصادفی، اجازه می‌دهد که برای مثال بتوانیم به‌سادگی مسألهٔ مربوط به حرکت یک جسم بسیار کوچک را در جو آرام حل کنیم. برای چنین جسمی، سرعت میانگین سقوط، خیلی کمتر از سرعت «حرکت براونی» آن است، و این حرکت براونی از این‌جا ناشی می‌شود که به خاطر کوچکی اندازه‌های جسم، تکان‌های مولکول‌های هوا، در جهت‌های متفاوت آن متعادل نیست.

c را سرعت میانگین سقوط، و D را، به اصطلاح، ضریب پخش می‌گیریم. اگر فرض کنیم ذره در روی سطح زمین ($z = \circ$) معطل نماند و «منعکس شود»، یعنی تحت تأثیر نیروهای براونی دوباره آغاز به حرکت در جو کند، و فرض کنیم ذره، در لحظهٔ زمانی $t_{\circ}$، در ارتفاع $z_{\circ}$ قرار گرفته باشد، در این صورت چگالی احتمال $p(t_{\circ}, z_{\circ} ; t, z)$ آن در لحظهٔ زمانی t در ارتفاع z با این دستور بیان می‌شود:

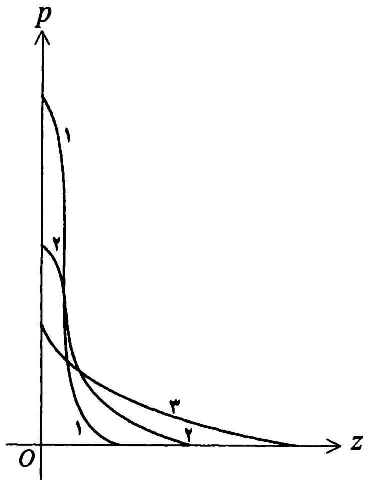
$$p(t_{\circ}, z_{\circ} ; t, z) = \frac{۱}{۲\sqrt{\pi D(t-t_{\circ})}} \left[e^{-\frac{(z-z_{\circ})^{۲}}{۴D(t-t_{\circ})}} + e^{-\frac{(z+z_{\circ})^{۲}}{۴D(t-t_{\circ})}} \right] \times$$

$$\times e^{-\frac{c(z-z_{\circ})}{۲D} - \frac{c^{۲}(t-t_{\circ})}{۴D}} + \frac{c}{D\sqrt{۵}} \times e^{-\frac{cz}{D}} \int_{\frac{z+z_{\circ}-c(t-t_{\circ})}{۲\sqrt{D(t-t_{\circ})}}}^{\infty} e^{-z^{۲}} dz$$

در شکل ۴ نشان داده شده است که چگونه منحنی‌های $p(t_{\circ}, z_{\circ} ; t, z)$ می‌توانند در



شکل ۴



شکل ۵

لحظه‌های متوالی زمان t ، تغییر کنند.

می‌بینیم به طور متوسط، ارتفاع ذره پایین می‌آید، و موقعیت آن بیشتر و بیشتر نامعین می‌شود (بیشتر حالت «تصادفی» به خود می‌گیرد). جالب‌ترین نتیجه‌گیری در این است که برای هر t_0 و z_0 و وقتی که $t\to\infty$، داریم:

$$p(t_0, z_0 \,; t, z) \to \frac{c}{D}\, e^{-\frac{cz}{D}} \tag{۳۶}$$

یعنی برای ارتفاع ذره‌ها یک توزیع حدی وجود دارد، و امید ریاضی ارتفاع استقرار ذره‌ها، با زیاد شدن t به سمت حد مثبت زیر میل می‌کند:

$$z^* = \frac{c}{D}\int_0^\infty z e^{-\frac{cz}{D}} dz = \frac{D}{c} \tag{۳۷}$$

به این ترتیب، با وجودی که ذره، روی سطح زمین قرار گرفته است و همیشه به خاطر نیروی ثقل، میل به سقوط دارد، ضمن ادامهٔ بی‌پایان این روند (سرگردانی در جو)، به طور متوسط در ارتفاع مثبت معینی، قرار می‌گیرد. اگر z_0 اولیه را کمتر از z^* بگیریم، معلوم می‌شود، بعد از گذشتن از فاصلهٔ زمانی به اندازهٔ کافی بزرگی، وضع متوسط ذره، بالاتر از وضع اولیهٔ خود خواهد بود، همان‌طور که در شکل ۵ برای $z_0 = 0$، نشان داده شده است.

وقتی دربارهٔ ذره‌های منفرد صحبت می‌کنیم، این مقدار متوسط z^* تنها یک امید ریاضی است، ولی بنابرقانون عددهای بزرگ، وقتی با تعداد زیادی ذره سروکار داشته باشیم، در واقع امر هم به وقوع خواهد پیوست: تراکم استقرار ذره‌ها در این ارتفاع، از قانون یاد شده پیروی می‌کند، و به‌خصوص بعد از گذشت فاصلهٔ زمانی به اندازهٔ کافی بزرگ، طبق دستور (۳۶) تثبیت می‌شود.

همهٔ آن‌چه را که گفتیم، به‌طور مستقیم و تنها در حالتی که گاز، دود و غیر آن با تراکم کم در هوا مخلوط شده باشد، قابل استفاده است، زیرا مقدارهای c و D از قبل و با مفروض بودن حالت جو، معین فرض شده است. با وجود این، اگر نظریه را کمی بغرنج‌تر کنیم، برای تداخل متقابل گازهایی هم که جو را تشکیل داده‌اند و تراکمی که در اثر این تداخل در ارتفاع‌ها، به وجود می‌آید، می‌تواند به کار رود.

با بزرگ شدن اندازه‌های ذره، نسبت $\frac{c}{D}$ هم بزرگ می‌شود، و در نتیجه، روند جابه‌جایی آن‌ها، به جای خصلت تداخلی، طبق قانونی که در بند ۵ دیدیم، به‌حالت سقوط در می‌آید. به کمک این نظریه، می‌توان همهٔ حالت‌های انتقالی بین حرکت تداخلی خالص و حالت سقوط را بررسی کرد.

مسألهٔ حرکت ذره‌های وزن‌دار در جو زیر تاثیر عمل به هم زدن متلاطم، پیچیده‌تر است، ولی در آن‌جا هم به‌طور اساسی همین نوع روش احتمالی دنبال می‌شود.

بخش دوازدهم

تابع‌های تقریبی

س. م. نیکولسکی

۱. مقدمه

در زندگی عملی همیشه لازم می‌شود عددهایی را به عددهایی دیگر نزدیک کنیم. کافی است بگوییم اندازه‌گیری کمیت‌های مشخصی چون طول، مساحت، درجهٔ حرارت و غیره، منجر به عددهایی می‌شود که تنها به تقریب بیان‌کنندهٔ این کمیت‌ها هستند. در عمل، ما تنها از عددهای گویا استفاده می‌کنیم، یعنی عددهایی به صورت $\frac{p}{q}$، که در آن p و q $(q\neq ۰)$ عددهایی درست‌اند. ولی به‌جز عددهای گویا، عددهای گنگ هم وجود دارند و اگر ضمن اندازه‌گیری‌ها به آن‌ها برخورد نمی‌کنیم، بحث‌های نظری ما همیشه منجر به آن‌ها می‌شود برای نمونه، می‌دانیم طول محیط دایرهٔ به شعاع $r=\frac{۱}{۲}$، برابر است با عدد گنگ π، و طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ضلع‌های مجاور به زاویهٔ قائمه‌اش برابر واحد باشد، برابر است با $\sqrt{۲}$. در محاسبه‌ها، ضمن عمل با عددهای گنگ، قبل از همه، آن‌ها را با دقت لازم به عددهای گویای متناظرشان تبدیل می‌کنند، و به طور معمول به کسرهای دهدهی با پایان.

دربارهٔ تابع‌ها هم، وضع به همین ترتیب است. قانونمندی‌های کمیتی طبیعت، نه با دقت تمام، بلکه به تقریب و با دقت معینی، در ریاضیات و به وسیلهٔ تابع‌ها، منعکس می‌شوند. به‌جز این، در حالت‌های بسیار زیادی و به منظور محاسبهٔ تابع‌ها در عمل، لازم می‌شود تابع‌هایی را با دقت معینی به تابع‌های دیگری نزدیک کنیم، یعنی تابع‌های مفروض را به تابع‌های دیگری که با تقریب معینی با آن‌ها هم‌ارز است، تبدیل کنیم.

ولی، همهٔ مطلب مربوط به محاسبه نیست. مسألهٔ مربوط به تصور تقریبی تابع‌ها به کمک تابع‌های دیگر، اهمیت نظری زیادی دارد. این موضوع را می‌توان در چند کلمه روشن کرد. در روند تکاملی آنالیز ریاضی، گروه‌های بسیار مهمی از تابع‌های تقریبی کشف و مطالعه شد، یعنی تابع‌هایی که با شرط‌های معینی، می‌توانند وسیله‌ای طبیعی برای تقریب دیگر

تابع‌ها باشند. به عنوان این گروه‌ها، قبل از همه باید از چندجمله‌ای‌های جبری و مثلثاتی، و همچنین تعمیم‌های مختلف آن‌ها نام برد. از روی ویژگی‌های تابع مفروض، و با شرط‌های معینی، می‌توان دربارهٔ خصلت انحراف تابع تقریبی نسبت به آن داوری کرد. برعکس، با آگاهی از خصلت این انحراف، مثل مقدار انحراف تابع مفروض نسبت به تابعی که بـه آن نزدیک است، می‌توان به ویژگی‌های این تابع پی برد. در این مسیر است که نظریهٔ تابع‌ها، مبتنی بر تصور تقریبی آن‌ها به کمک گروهی از تابع‌های تقریبی، ساخته شده است. شبیه همین نظریه در نظریهٔ عددها هم وجود دارد. در نظریهٔ عددها، ویژگی‌های عددهای گنگ، براساس تقریب‌های آن‌ها به کمک عددهای گویا، بررسی می‌شود.

در بخش دوم (جلد اول)، با یکی از مهمترین روش‌های تقریب، یعنی دستور **تیلور**، آشنا شده‌ایم. به کمک این دستور، یک تابع ــ اگر در شرط معینی صدق می‌کرد ــ نزدیک به تابع دیگری به صورت $P(x) = a_{\circ}+a_{1}x + \cdots + a_n x^n$ می‌شد که چندجمله‌ای جبری نام داشت. در اینجا، a_k عدد ثابتی است که به x بستگی ندارد.

چندجمله‌ای جبری، ساده‌ترین شکل تشکیل یک تابع است؛ برای محاسبهٔ چنین تابعی، وقتی ضریب‌های a_k و مقدار x معلوم باشد، تنها سه عمل حساب لازم است (جمع، تفریق و ضرب). سادگی محاسبه، در کارهای عملی، فوق‌العاده اهمیت دارد؛ و همین موضوع یکی از علت‌هایی است که چندجمله‌ای جبری پرمصرف‌ترین وسیله برای تقریب تابع‌ها شده است (دربارهٔ علت‌های مهم دیگر آن صحبت خواهیم کرد). کافی است به این نکته اشاره کنیم که، به ویژه در سال‌های اخیر، برای محاسبه‌های فنی، به طور عمده از شمارگرها (ماشین‌های محاسبه‌ای) استفاده می‌شود. شمارگرهای کامل امروزی و رایانه‌ها، خیلی سریع و به طور خستگی‌ناپذیر کار می‌کنند. ولی، ساختمان ماشین طوری است که تنها از عهدهٔ عمل‌های کم و بیش ساده برمی‌آید. ماشین را می‌توان واداشت، عمل‌های حسابی را با عددهای خیلی بزرگ انجام دهد، ولی در مثل نمی‌شود از ماشین خواست روند بی‌پایان عبور یک کمیت متغیر را به مقدار حدی آن، به پایان برساند. برای نمونه، ماشین نمی‌تواند مقدار $\log x$ را، با دقت محاسبه کند. ولی، می‌توان مقدار تقریبی $\log x$ را با دقت لازم، به صورت چندجمله‌ای $P(x)$ نوشت و سپس به کمک ماشین، چندجمله‌ای را محاسبه کرد.

به‌جز دستور تیلور، روش‌های دیگری هم برای تقریب تابع‌ها به صورت چندجمله‌ای‌های جبری وجود دارد که در عمل ارزش زیادی دارند. در این زمینه، قبل از همه، روش‌های مختلف درون‌یابی (انترپولاسیون) وجود دارد که به طور گسترده‌ای، به

ویژه، در محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌ها و همچنین مسأله‌های مربوط به انتگرال‌گیری تقریبی معادله‌های دیفرانسیلی، به کار می‌رود. روش تقریب با استفاده از میانگین مربع خطاها هم، چه دربارهٔ چندجمله‌ای‌های جبری و چه در حالت‌های دیگر، کاربرد وسیعی پیدا کرده است. بهترین تقریب یکنواخت یا تقریب **چبیشف** هم در رشته‌های خاصی از عمل، اهمیت زیادی پیدا کرده است. این روش منسوب به ***پ.ل.چبیشف***، ریاضی‌دان روس است و همان‌طور که بعداً خواهیم دید ضمن حل مسأله مربوط به طرح و محاسبهٔ مکانیسم‌ها، به وجود آمده است.

سعی می‌کنیم تصوری دربارهٔ این روش‌ها بدهیم و تا حد امکان، شرط‌هایی را که به ازای آن‌ها یکی از این روش‌ها بر دیگران برتری دارد، مشخص کنیم. در هر اوضاع و احوال معین، ممکن است یکی از این روش‌ها، بهتر از دیگران باشد. وقتی برای نمونه، گفت‌وگو از حل یک مسألهٔ فیزیکی است، خود ماهیت مسأله، یا به اصطلاح ملاحظه‌های فیزیکی آن، روش تقریبی لازم را به‌ما تلقین می‌کند.

همچنین خواهیم دید که در موقعیت‌های معینی، ممکن است یک روش تقریبی قابل استفاده و دیگری غیرقابل استفاده باشد.

هرکدام از این روش‌ها، به موقع خود به وجود آمده است و نظریه و تاریخی خاص خودش دارد. حتی **نیوتن** هم دستوری برای درون‌یابی می‌دانست و بیان آن را برحسب اصطلاح «نسبت تفاضل‌ها» داد که کار محاسبه را در عمل، بسیار ساده می‌کند. روش تقریب به مفهوم میانگین مربع بیش از ۱۵۰ سال قدمت دارد. ولی، این روش‌ها تا مدت‌ها به صورت یک نظریه به هم مربوط نبودند، و تنها راه‌های عملی جداگانه‌ای برای تقریب تابع‌ها به شمار می‌رفتند، در ضمن مرز کاربرد این روش‌ها هم، مشخص نبود.

نظریهٔ امروزی تقریب تابع‌ها، بعد از کارهای ***پ.ل.*** **چبیشف** به وجود آمد که مفهوم مهم بهترین تقریب را در علم وارد کرد، و به خصوص، بهترین تقریب یکنواخت، کاربرد منظم خود را پیدا کرد و پایه‌های اصلی نظریه را بنیان گذاشت. بهترین تقریب، چنان مفهوم اساسی است که نظریهٔ امروزی تقریب‌ها، بر آن تکیه کرده است. بعد از **چبیشف**، اندیشه‌های او، به وسیلهٔ شاگردانش ***ا. ای. زولوتارف***، ***آ. ن.کورکین*** و برادران ***آ.آ.*** و ***و.آ.مارکوف***، تکامل یافت.

در دوران پیشرفت نظریهٔ تقریب تابع‌ها به وسیلهٔ **چبیشف** و شاگردان او، به‌جز ورود مفهوم‌های اساسی، روش‌های اصلی به دست آوردن بهترین تقریب‌ها برای تابع‌های مشخص جداگانه هم، مطرح شد، روش‌هایی که امروز هم به طور گسترده‌ای به کار می‌رود؛

به‌جز آن مبانی بررسی گروه‌های تقریبی، و قبل از همه چندجمله‌ای‌های جبری و مثلثاتی هم، از دید نیازی که در تقریب تابع‌ها وجود داشت، مطرح شد.

در پیشرفت بعدی نظریهٔ تقریب تابع‌ها، بیش از همه، کشف مهمی که ***وایرشتراس***، ریاضی‌دان آلمانی در ریاضیات کرد، تاثیر داشت. او با دقت تمام نشان داد که امکان تقریب هر تابع دل‌خواه پیوسته با هر دقت دل‌خواهی، به وسیلهٔ چندجمله‌ای جبری، به طور اصولی وجود دارد. و این موقعیت، دلیل دیگری بر این است که چندجمله‌ای‌های جبری، وسیلهٔ عمومی تقریب تابع‌ها، به شمار می‌روند. تنها سادگی ساختمان چندجمله‌ای جبری کافی نبود که آن را به صورت چنین وسیله‌ای در آورد! هنوز باید امکان اصولی محاسبهٔ تقریبی تابع‌های پیوسته هم به وسیلهٔ چندجمله‌ای، با اشتباهی که از قبل معلوم شده است، به‌دست آید. و این امکان هم به وسیلهٔ ***وایرشتراس*** ثابت شد.

اندیشهٔ ژرف **چبیشف** دربارهٔ بهترین تقریب، و قضیهٔ ***وایرشتراس*** (از آغاز سدهٔ بیستم)، مبنایی برای جهت‌گیری تازه در نظریهٔ تقریب تابع‌ها شدند. در این راه، بیش از همه ***س.ن. برنشتین***، ***بُورل***، **جکسون**، ***لِه‌بگ و واله‌پوسن***، کار کردند. این جهت‌گیری را می‌توان به طورخلاصه به صورت زیر مشخص کرد: اگر در دوران **چبیشف** (پیش از آغاز سدهٔ بیستم)، اساس کار بر بررسی تقریب تابع‌های منفرد بود، در دوران معاصر، مسألهٔ تقریب تابع‌ها، به وسیلهٔ چندجمله‌ای‌ها و یا به وسیلهٔ تابع‌های دیگری مطرح شد که دیگر در آن‌ها، موضوع تقریب یک تابع مشخص در نظر گرفته نمی‌شود، بلکه هر تابع دل‌خواهی که متعلق به گروه گسترده‌ای از تابع‌ها (مثل تابع‌های تحلیلی، تابع‌های قابل دیفرانسیل‌گیری و غیره) بود، بررسی می‌شود.

چه مکتب ریاضی روس، و چه مکتب ریاضی شوروی، نقش پیشرو را در زمینه نظریهٔ تقریب تابع‌ها داشته است. هم‌میهنان ما ***س.ن.برنشتین***، ***آ.ن.کولموگوروف***، ***م.آ. لاونتیف*** و شاگردان آن‌ها، سهم زیادی در این راه دارند. این نظریه در زمان ما، در واقع به صورت رشتهٔ مستقلی از نظریهٔ تابع‌ها، همچنان تکامل می‌یابد.

به‌جز چندجمله‌ای‌های جبری، چندجمله‌ای‌های مثلثاتی هم، یکی از وسیله‌های مهم دیگر تقریب به شمار می‌رود ***چندجمله‌ای مثلثاتی*** از مرتبهٔ n، به تابعی به صورت

$$u_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \alpha_2 \cos 2x + \beta_2 \sin 2x + \cdots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx$$

و یا به طور خلاصه

$$u_n(x) = \alpha_\circ + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

گفته می‌شود، که در آن α_k و β_k، مقدارهای ثابت‌اند.

روش‌های خاص گوناگونی از تقریب به وسیلهٔ چندجمله‌ای‌های مثلثاتی وجود دارد؛ این روش‌ها، به صورت ساده‌ای، به روش‌های متناظر تقریب به کمک چندجمله‌ای‌های جبری، مربوط‌اند. در میان این روش‌ها، به خصوص، تبدیل تابع‌ها به رشتهٔ مثلثاتی *فوریه*، اهمیت زیادی دارد (در بند ۷ دربارهٔ روش *فوریه*، صحبت کرده‌ایم). این رشته به نام *فوریه* ریاضی‌دان فرانسوی نامیده می‌شود، که در ابتدای سدهٔ نوزدهم در ارتباط با آن، در زمینهٔ نظریهٔ پخش حرارت، نتیجه‌های نظری مهمی به دست آورد. ولی باید توجه داشت که در میانه‌های سدهٔ هجدهم هم، رشته‌های مثلثاتی به وسیلهٔ ریاضی‌دانان بزرگی چون *لئونارد اولر* و *دانیل برنولی*، بررسی شده بود. *اولر*، ضمن بررسی‌های نجومی، و *برنولی*، ضمن بررسی‌های نوسانهای سیم، این رشته‌ها را به دست آورده بودند. یادآوری این مطلب ضروری است که *اولر* و *برنولی* این مسألهٔ اصولی را طرح کردند که کم و بیش هر تابع دل‌خواه را می‌توان به‌وسیلهٔ رشته‌های مثلثاتی نشان داد، مسأله‌ای که تنها در میانه‌های سدهٔ نوزدهم به طور کامل حل شد. جواب مثبت این مسأله، که از آن صحبت خواهیم کرد، به وسیلهٔ *دانیل برنولی* پیش‌بینی شده بود.

رشته‌های *فوریه*، اهمیت زیادی در فیزیک دارند، ولی ما به این جنبهٔ آن توجه نمی‌کنیم، زیرا دربارهٔ آن در بخش ششم، صحبت شده است. در همان‌جا، خواننده می‌تواند با مسأله‌هایی از فیزیک آشنا شود که به طور طبیعی، لزوم تبدیل یک تابع مفروض به رشته‌هایی احساس می‌شود که با رشته‌های مثلثاتی متفاوتند، ولی، شباهت زیادی به آن‌ها دارند.

رشته‌های *فوریه* تاریخی دارد که دو سده ادامه پیدا کرده است. به همین مناسبت، تعجبی ندارد که در زمان ما رشته‌های *فوریه* به صورت نظریهٔ گسترده و عمیقی که خود شاخهٔ مستقلی از ریاضیات را تشکیل می‌دهد، در آمده باشد. ریاضی‌دانان شوروی، در این نظریه، و دربارهٔ مسأله‌های اساسی آن، موفقیت‌های چشمگیری داشته‌اند. در این‌باره، به خصوص مکتب مسکوی نظریهٔ تابع‌های با متغیر حقیقی، نقش اساسی داشته‌اند (*ن. ن. لوزان*، *آ. ن. کولموگوروف*، *د. ا. منشوف* و دیگران).

باید یادآوری کرد، اهمیت چندجمله‌ای‌های مثلثاتی در ریاضیات امروزی، منحصر به

نقش آن‌ها، به عنوان وسیله‌ای برای تقریب، نیست. به عنوان نمونه، در بخش دهم دیدیم که ***ای.ام. وینوگرادوف*** توانست به یاری همین مجموعه‌های مثلثاتی، نتیجه‌گیری‌های عمیقی در زمینهٔ نظریهٔ عددها به دست آورد.

۲. چندجمله‌ای‌های درون‌یاب

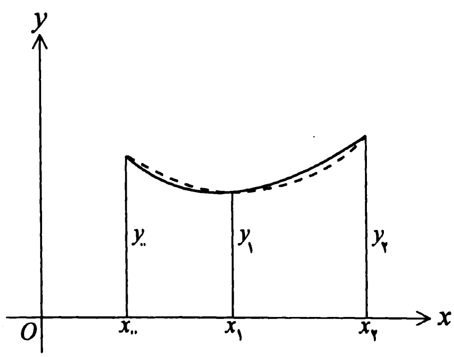
حالت‌های خاص ساختن چندجمله‌ای‌های درون‌یاب. روش‌های درون‌یابی تقریب تابع‌ها، در محاسبه‌های عملی، به طور گسترده‌ای به کار می‌رود. برای این‌که خواننده در جریان این روش‌ها قرار گیرد، به بررسی یک مسألهٔ مقدماتی می‌پردازیم.

تابع $y=f(x)$ را در فاصلهٔ $[x_0\ ,\ x_2]$ در نظر می‌گیریم که منحنی نمایش تغییر آن در شکل ۱ داده شده است. شکل این منحنی، قطعه‌ای از یک سهمی را به خاطر می‌آورد. بنابراین، اگر بخواهیم تابع خود را به کمک تابع ساده‌ای به تقریب بیان کنیم، طبیعی است به عنوان تابع تقریبی ساده، یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم انتخاب کنیم:

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \qquad (1)$$

که منحنی آن، یک سهمی را نشان می‌دهد.

روش درون‌یابی چنین است. در داخل پاره‌خط $[x_0\ ,\ x_2]$، نقطهٔ داخلی x_1 را در نظر می‌گیریم. نقطه‌های x_0، x_1 و x_2، متناظر با مقدارهایی از تابع ما هستند:



شکل ۱

$$y_0=f(x_0),\ y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2)$$

چندجمله‌ای (۱) را طوری می‌سازیم که در نقطه‌های x_0 ، x_1 و x_2 ، برتابع مورد بررسی منطبق باشد (منحنی آن را روی شکل ۱، به صورت خط‌چین داده‌ایم). به عبارت دیگر، باید ضریب‌های a_0 ، a_1 و a_2 ، را در چندجمله‌ای (۱) طوری پیدا کرد که برابری‌های زیر برقرار باشد.

$$P(x_0)=y_0\ ,\ P(x_1)=y_1\ ,\ P(x_2)=y_2 \tag{۲}$$

یادآوری می‌کنیم، تابع $f(x)$ ممکن است از ابتدا به وسیلهٔ دستور بیان نشده باشد، از جمله ممکن است با توجه به یک بستگی تجربی، منحنی شکل ۱ رسم شده باشد. وقتی مسأله را با روش درون‌یابی حل کنیم، برای تابع مورد بررسی، یک تابع تقریبی، به صورت تابع تحلیلی ــ چندجمله‌ای $P(x)$ ــ به دست می‌آید. اگر دقت تقریب ما را راضی کند، این چندجمله‌ای بر تابعی که تقریب آن را می‌خواهیم، این برتری را دارد که می‌توان آن را برای مقدارهای بینابینی x هم محاسبه کرد.

مسأله‌ای که مطرح کردیم، می‌توان این‌طور حل کرد. سه معادله تشکیل می‌دهیم:

$$y_0=a_0+a_1x_0+a_2x_0^2$$
$$y_1=a_0+a_1x_1+a_2x_1^2$$
$$y_2=a_0+a_1x_2+a_2x_2^2$$

از این سه معادله، مقدارهای a_0 ، a_1 و a_2 را به دست می‌آوریم و به جای ضریب‌ها در برابری (۱) می‌گذاریم. ولی ما به نحو دیگری حل می‌کنیم. ابتدا چندجمله‌ای $Q_0(x)$ را از درجهٔ دوم طوری می‌سازیم که در سه شرط $Q_0(x_0)=1$ ، $Q_0(x_1)=0$ ، $Q_0(x_2)=0$ صدق کند. از دو شرط آخر نتیجه می‌شود که این چندجمله‌ای باید به صورت $A(x-x_1)(x-x_2)$ باشد واز شرط اول معلوم می‌شود که $A=\frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$. به‌این ترتیب، چندجمله‌ای مورد نظر به این صورت است.

$$Q_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

به همین ترتیب، چندجمله‌ای‌های

$$Q_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\quad,\quad Q_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

را می‌توان به دست آورد که در شرط‌های زیر صدق کنند:

$$Q_1(x_0) = Q_1(x_2) = 0 \quad , \quad Q_1(x_1) = 1$$
$$Q_2(x_0) = Q_2(x_1) = 0 \quad , \quad Q_2(x_2) = 1$$

حالا روشن است که چندجمله‌ای $y_0 Q_0(x)$ به ازای $x = x_0$ برابر y_0 و به ازای $x = x_1$ و $x = x_2$ برابر صفر می‌شود. شبیه همین ویژگی‌ها را چندجمله‌ای‌های $y_1 Q_1(x)$ و $y_2 Q_2(x)$ هم دارند.

از این‌جا نتیجه می‌شود که چندجمله‌ای درون‌یاب درجه دوم لازم، که با شرط‌های (۲) بسازد، با این دستور بیان می‌شود:

$$P(x) = y_0 Q_0(x) + y_1 Q_1(x) + y_2 Q_2(x) = \tag{۳}$$

$$y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

یادآوری می‌کنیم، این چندجمله‌ای، تنها چندجمله‌ای درجهٔ دومی است، که به مسألهٔ درون‌یابی طرح شده، پاسخ می‌دهد. در واقع، اگر فرض کنیم چندجمله‌ای درجهٔ دوم دیگر $P_1(x)$ هم، مسألهٔ ما را حل می‌کند، آن‌وقت تفاضل $P_1(x) - P(x)$ هم چندجمله‌ای درجهٔ دومی خواهد بود که در سه نقطهٔ $x = x_0 \ , \ x_1 \ , \ x_2$ برابر صفر می‌شود. ولی از جبر می‌دانیم، اگر یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم، به ازای سه مقدار x برابر صفر شود، خود چندجمله‌ای متحد با صفر است، و بنابراین چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $P_1(x)$، متحد با یکدیگرند.

روشن است، این چندجمله‌ای، در حالت کلی، تنها در نقطه‌های x_0 ، x_1 ، x_2 بر تابع مفروض منطبق است و برای مقدارهای دیگر x با آن متفاوت است.

اگر نقطهٔ x_1 را در وسط پاره‌خط $[x_0 \ , \ x_2]$ انتخاب کنیم، به دست می‌آید:

$$x_2 - x_1 = x_1 - x_0 = h$$

و دستور (۳) کمی ساده‌تر می‌شود:

$$P(x) = \frac{1}{2h^2} [y_0 (x - x_1)(x - x_2) - 2y_1 (x - x_0)(x - x_2) + y_2 (x - x_0)(x - x_1)]$$

به عنوان مثال، سینوسوئید $y = \sin x$ (شکل ۲) را به کمک چندجمله‌ای درجه دومی که در نقطه‌های $x = 0 \ , \ \frac{\pi}{2} \ , \ \pi$ بر آن منطبق باشد، درون‌یابی می‌کنیم. روشن است،

چندجمله‌ای لازم چنین است:

$$P(x)=\frac{۴}{\pi^{۲}}\,x\,(\pi-x)\approx \sin x$$

$\sin x$ و $P(x)$ را در دو نقطهٔ بینابینی، مقایسه می‌کنیم:

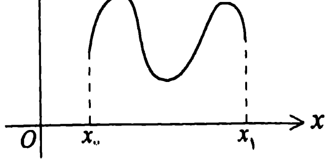
$$P\left(\frac{\pi}{۴}\right)=۰٫۷۵\;\;;\;\;\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\approx ۰٫۷۱$$

$$P\left(\frac{\pi}{۶}\right)=\frac{۱۰}{۱۸}\;\;;\;\;\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۹}{۱۸}$$

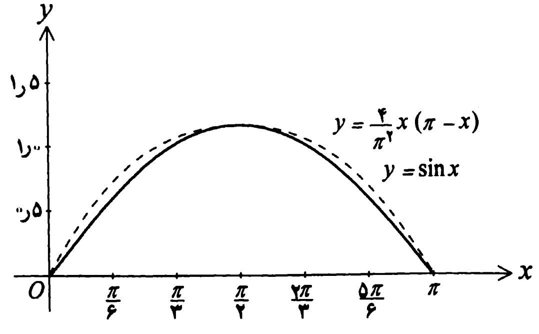
به این ترتیب روی پاره‌خط $[۰\,,\,\pi]$، تقریبی از $\sin x$ به تقریب دقت تا ۰٫۰۵ به دست آورده‌ایم[۱]. از طرف دیگر، اگر $\sin x$ را در حوالی نقطهٔ $\frac{\pi}{۲}$، به رشتهٔ **تیلور** تبدیل کنیم، به دست می‌آید:

$$\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)=۱-\frac{\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)^{۲}}{۲!}+\frac{\left(\frac{\pi}{۲}-x\right)^{۴}}{۴!}+\cdots$$

که اگر در جملهٔ دوم تبدیل متوقف شویم، در نقطهٔ $x=۰$ به تقریب به دست می‌آید: $\sin ۰\approx ۱-\frac{\pi^{۲}}{۸}$ ۰٫۲۳۴، یعنی با اشتباهی بزرگتر از ۰٫۲.



شکل ۳



شکل ۲

---

۱. با وجود این، برای این‌که اطمینان کامل به این حکم داشته باشیم، باید ثابت کنیم، تفاضل $\sin x-\frac{۴x}{\pi^{۲}}(\pi-x)$، نه‌تنها برای $x=\frac{\pi}{۴}$ و $x=\frac{\pi}{۶}$، بلکه برای هر مقداری از x که در فاصلهٔ $[۰\,,\,\pi]$ قرار گرفته باشد، از ۰٫۰۵ تجاوز نمی‌کند؛ ولی ما به این اثبات نمی‌پردازیم.

می‌بینیم با روش درون‌یابی، تقریب $\sin x$ در تمامی فاصلهٔ $[0 \ , \ \pi]$ به کمک یک یا چندجمله‌ای درجه دوم، خیلی راضی کننده‌تر از حالتی به دست می‌آید که با تبدیل تابع $\sin x$ در حوالی نقطهٔ $x = \frac{\pi}{2}$، بنابر دستور *تیلور*، به یک چندجمله‌ای با همان درجه برسیم. ولی، این مطلب را نباید فراموش کرد که دستور *تیلور* در فاصله‌ای کوچک نزدیک به $\frac{\pi}{2}$، تقریبی خیلی دقیق‌تر از حالتی می‌دهد که بخواهیم تقریب در همین فاصله را با روش درون‌یابی به دست آوریم.

حل کلی‌تر مسأله. روشن است، اگر با تابع بغرنج‌تری که در شکل ۳ نشان داده شده است، سروکار داشته باشیم، به زحمت ممکن است کسی پیدا شود که تصمیم بگیرد آن را به کمک یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم، درون‌یابی کند. اگر کسی، چنین تصمیمی داشته باشد، به تقریب بسیار بدی خواهد رسید. هیچ سهمی درجه دومی نمی‌تواند تمامی انحنای منحنی $y = f(x)$ را تعقیب کند. طبیعی است، در این حالت، باید کوشش کنیم تابع را به یاری چندجمله‌ای از درجهٔ بالاتر (که کمتر از درجهٔ چهارم نباشد)، درون‌یابی کنیم.

مسألهٔ کلی درون‌یابی مربوط به این است که باید چندجمله‌ای

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

از درجهٔ n را بسازیم، به نحوی که در $n + 1$ نقطهٔ x_0 ، x_1 ، x_2 ، ... ، x_n بر تابع مفروض منطبق باشد، یعنی دربارهٔ آن $n + 1$ برابری $P(x_0) = f(x_0)$، $P(x_1) = f(x_1)$، ... ، $P(x_n) = f(x_n)$ برقرار باشد. نقطه‌هایی که در آن‌جا، باید تابع مفروض بر چندجمله‌ای تقریبی متناظر آن منطبق باشد، ***گره‌های درون‌یابی*** نامیده می‌شود.

اگر شبیه آن‌چه دربارهٔ چندجمله‌ای درجه دوم گفتیم، داوری کنیم، به سادگی ثابت می‌شود چندجمله‌ای را می‌توان به این صورت نوشت:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\dots(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)\dots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\dots(x_k - x_n)} \times f(x_k) \quad (4)$$

در ضمن این چندجمله‌ای درجهٔ n، منحصر به فرد است. این دستور را دستور ***لاگرانژ*** گویند. این دستور را می‌توان به صورت‌های مختلف دیگری هم نوشت: برای نمونه، دستور نسبت تفاضل‌های *نیوتن* در عمل، کاربرد بسیار دارد.

انحراف چندجمله‌ای درون‌یاب از تابع اصلی. روش درون‌یابی، عمومی‌ترین وسیلهٔ تقریب تابع‌هاست. برای تابعی که می‌خواهیم آن را درون‌یابی کنیم، هیچ ویژگی خاصی لازم نیست، از جمله اجباری ندارد در تمامی امتداد، پاره‌خط تقریب، دارای مشتق باشد. از این بابت، روش درون‌یابی، بر دستور ***تیلور*** برتری دارد. این مطلب جالب است، حتی حالت‌هایی وجود دارد که تابع مفروض در فاصله‌ای تحلیلی است، ولی از دستور ***تیلور***، به عنوان وسیلهٔ تقریبی، نمی‌توان برای آن استفاده کرد. به عنوان نمونه، فرض کنید بخواهیم تقریب به اندازهٔ کافی خوبی از تابع $\frac{۱}{۱+x^۲}$ را در فاصلهٔ $[-۲ , ۲]$، به وسیلهٔ یک چندجمله‌ای جبری بدهیم. طبیعی است در برخورد اول، به نظرمان برسد که کوشش کنیم برای این منظور، این تابع را در حوالی نقطهٔ $x=۰$ به رشتهٔ ***تیلور*** تبدیل کنیم:

$$\frac{۱}{۱+x^۲} = ۱ - x^۲ + x^۴ - x^۶ + \dots$$

ولی به سادگی متوجه می‌شویم که این رشته، تنها در فاصلهٔ $-۱<x<۱$، همگرا است. در خارج پاره‌خط $[-۱ , ۱]$ واگرا است و تقریبی کردن $\frac{۱}{۱+x^۲}$ در تمامی فاصلهٔ بستهٔ $[-۲ , ۲]$ ممکن نیست. در عین حال، روش درون‌یابی را در اینجا می‌توان به خوبی به کار برد.

البته، هربار این مسأله در برابر ما قرار می‌گیرد که تعداد گره‌ها و جای آن‌ها را چگونه انتخاب کنیم تا اشتباه تقریب، بیش از اندازهٔ لازم نباشد. دربارهٔ پرسش مربوط به امکان اشتباه تقریب در حالتی که تابع مفروض دارای مشتق از مرتبهٔ به اندازهٔ کافی بالا باشد، نتیجه‌گیری سنتی زیر، که ما آن را بدون اثبات می‌آوریم، پاسخ می‌دهد.

اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[x_۰ , x_n]$، مشتق پیوستهٔ از مرتبهٔ $n+۱$ داشته باشد، برای هر مقدار بینابینی x از این فاصله، انحراف از چندجمله‌ای درون‌یاب ***لاگرانژ*** $P(x)$ با گره‌های $x_۰<x_۱<\dots<x_n$، به وسیلهٔ دستور

$$f(x)-P(x) = \frac{(x-x_۰)(x-x_۱)\dots(x-x_n)}{n!}\, f^{(n+۱)}(c)$$

بیان می‌شود که در آن، c عبارت است از یک نقطهٔ بینابینی که بین $x_۰$ و x_n قرار گرفته است. این دستور، دستور متناظر مربوط به جملهٔ باقی‌ماندهٔ بسط به رشتهٔ ***تیلور*** را به خاطر می‌آورد، و در واقع هم تعمیم همان دستور است. بنابراین، اگر بدانیم مشتق $f^{(n+۱)}(x)$، از مرتبهٔ $(n+۱)$ام در فاصلهٔ $[x_۰ , x_n]$، همه جا از لحاظ قدر مطلق از عدد M تجاوز نکند،

اشتباه تقریب برای هر مقدار x از این فاصله، با تخمین زیر معین می‌شود:

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{|x - x_۰| \cdots |x - x_n|}{n!} M$$

نظریهٔ امروزی تقریب، امکان‌های دیگری هم برای پیدا کردن تخمین، ضمن درون‌یابی، در اختیار دارد. این موضوع، امروز به اندازهٔ کافی مطالعه شده است؛ در ضمن حقایق جالب و غیرمنتظره‌ای هم به دست آمده است.

از جمله تابع هموار $y=f(x)$ را، که در فاصلهٔ $[-۱ , ۱]$ داده شده است در نظر می‌گیریم، یعنی تابعی که منحنی آن پیوسته و دارای مشتق پیوسته باشد. این موقعیت که دو انتهای فاصله را مقدارهای ۱− و ۱ گرفته‌ایم، نقش خاصی ندارد: آن‌چه خواهیم گفت، دربارهٔ هر فاصلهٔ دل‌خواه $[a , b]$ هم، با تفاوت‌های بی‌اهمیتی، صادق است.

حالا فرض می‌کنیم، درفاصلهٔ $[-۱ , ۱]$، دستگاهی از $n+۱$ نقطهٔ مفروض باشد، سپس

$$-۱ \leq x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n \leq ۱ \qquad (۵)$$

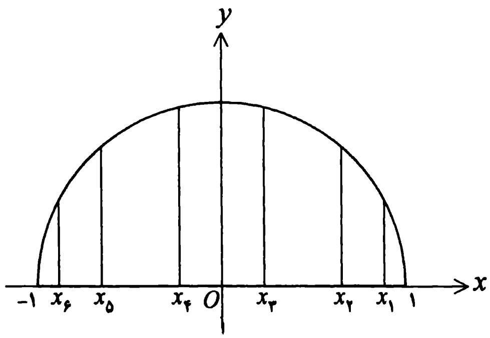
چندجمله‌ای $P(x) = a_۰ + a_۱ x + \cdots + a_n x^n$ از درجهٔ n را طوری می‌سازیم که در این نقطه‌ها، بر $f(x)$ منطبق باشد. فرض می‌کنیم، نقطه‌های مجاور در دستگاه (۵)، به فاصله‌های برابر از یکدیگر باشند. هرچه n بزرگتر باشد، چندجمله‌ای درون‌یاب $P_n(x)$، در نقطه‌های بیشتری بر $f(x)$ منطبق خواهد شد، و می‌توان گمان کرد، وقتی $n \to \infty$ در نقطه‌های بینابینی x که متعلق به دستگاه (۵) نباشند، اختلاف $f(x) - P_n(x)$ به سمت صفر میل می‌کند. در پایان سدهٔ نوزدهم هم، چنین عقیده‌ای داشتند، ولی بعدها کشف شد به هیچ وجه این‌طور نیست. معلوم شد برای بسیاری از تابع‌های هموار $f(x)$ (که حتی تحلیلی هم باشند)، در حالتی که گره‌های x_k با فاصله‌ای برابر باشند، به هیچ وجه به ازای $n \to \infty$ چندجمله‌ای درون‌یاب $P_n(x)$ به سمت $f(x)$ میل نمی‌کند. منحنی چندجمله‌ای درون‌یاب، اگرچه در گره‌های مفروض بر $f(x)$ منطبق است، ممکن است به ازای مقدارهای بزرگ n، برای مقدارهایی از x که در فاصلهٔ گره‌ها قرار گرفته‌اند، به شدت از منحنی $f(x)$ منحرف شود، و در ضمن با بزرگ شدن n، این انحراف هم زیادتر شود. بررسی‌های بعدی نشان داد از چنین پدیده‌ای، دست کم برای تابع‌های هموار، می‌توان فرار کرد، به شرطی که گره‌های درون‌یاب، چنان باشند که در وسط فاصله، نادرتر و در نزدیکی انتها، تنگ‌تر قرار گرفته باشند. به ویژه معلوم شد بهترین

نوع توزیع گره‌ها، چنان توزیعی است که گره x_k بر صفرهای[۱] چندجمله‌ای چبیشف $\cos[(n+1)\times \arccos x]$ منطبق باشد. این x_kها را می‌توان با این دستور معین کرد:

$$x_k = \cos \frac{2k+1}{2(n+1)}\pi \qquad (k = 0,\ 1,\ \dots,\ n)$$

چندجمله‌ای درون‌یابی که متناظر با این گره‌هاست، و به نام **چبیشف** نامیده می‌شود، دارای این ویژگی است که وقتی n به طور نامحدود بزرگ شود، این چندجمله‌ای به سمت تابع اصلی که آن را به وجود آورده است، هم‌گرا می‌شود، یعنی تابعی که نه تنها خودش پیوسته است، بلکه به‌جز آن، دارای مشتق اول پیوسته هم می‌باشد. منحنی این تابع پیوسته است و خط مماس هم در روی آن به طور پیوسته تغییر می‌کند. در شکل ۴ توزیع صفرهای چندجمله‌ای **چبیشف**، در حالت $n = 5$ داده شده است.

دربارهٔ تابع‌های پیوستهٔ ناهموار، وضع بدتر است: در حالت کلی، چنین دنباله‌ای از گره‌ها وجود ندارد، که روند درون‌یابی متناظر با آن، به ازای هر تابع پیوسته‌ای، هم‌گرا باشد (*قضیهٔ فابر*). به عبارت دیگر، به هر نحوی که پاره‌خط $[-1,\ 1]$ را تقسیم کنیم و از این راه تعدادی گره که به طور نامحدود فزاینده است به دست آوریم، باز هم روی پاره‌خط، چنان تابع $f(x)$ پیدا می‌شود که چندجمله‌ای‌های درون‌یاب متناظر آن در این گره‌ها، به سمت آن هم‌گرا نباشد. اگر این حقیقت برای ریاضی‌دانان سدهٔ نوزدهم روشن بود، می‌توانست جنبهٔ



شکل ۴

---

۱. صفر تابع $f(x)$، به هر مقدار x_k گفته می‌شود که به ازای آن داشته باشیم: $f(x_k) = 0$ دربارهٔ چندجمله‌ای‌های **چبیشف**، بند ۵ را ببینید.

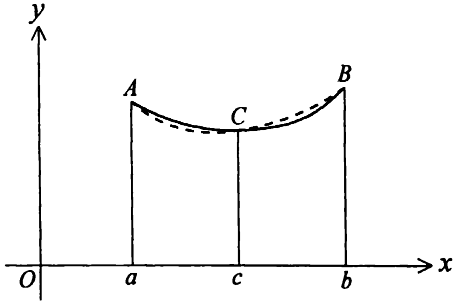
معمایی پیدا کند. مطلب بر سر این است که بین تابع‌های ناهموار پیوسته، تابع‌های «بدی» وجود دارد که از جمله برای هیچ کدام از نقطه‌های واقع در فاصله‌ای که تابع داده شده است، مشتق ندارند. و در میان همین‌گونه تابع‌هاست که می‌توان نمونه‌هایی را پیدا کرد که برای آن‌ها روند درون‌یابی، واگرا باشد. با همهٔ این‌ها، برای این‌گونه تابع‌ها هم می‌توان روش‌های مؤثری برای تقریب آن‌ها، و به کمک چندجمله‌ای‌هایی که طرح آن‌ها با روش درون‌یابی مذکور تا حدی متفاوت است، پیدا کرد، ولی ما به بحث دربارهٔ آن‌ها نمی‌پردازیم.

در پایان یادآوری می‌کنیم، برای درون‌یابی تابع‌ها، ناچار نیستیم از چندجمله‌ای‌های جبری استفاده کنیم. از جمله روش درون‌یابی با چندجمله‌ای‌های مثلثاتی وجود دارد، که چه از لحاظ عملی و چه از لحاظ نظری، توانسته‌اند به خوبی قابل استفاده باشند.

۳. تقریب انتگرال‌های معین

درون‌یابی تابع‌ها، به طور گسترده‌ای در محاسبهٔ تقریبی انتگرال‌ها استفاده شده است. به عنوان نمونه، دستور **سیمپسون** را می‌آوریم که برای بیان تقریبی انتگرال معین به کار می‌رود و به خصوص در آنالیز عملی، کاربرد گسترده‌ای پیدا کرده است.

فرض کنید، بخواهیم مقدار انتگرال معین تابع $f(x)$ را در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ به تقریب محاسبه کنیم. منحنی این تابع در شکل ۵ داده شده است. مقدار دقیق این انتگرال برابر است با مساحت ذوزنقهٔ منحنی‌الخط $aABb$. C را نقطه‌ای از این منحنی می‌گیریم که طول آن



شکل ۵

برابر $c=\frac{a+b}{۲}$ باشد. از نقطه‌های A ، B و C، سهمی درجه دومی می‌گذرانیم. همان‌طور که در بند قبل دیدیم، این سهمی عبارت است از منحنی چندجمله‌ای درجهٔ دومی که با این برابری معین می‌شود:

$$P(x) = \frac{۱}{۲h^۲}\left[(x-c)(x-b)y_۰ - ۲(x-a)(x-b)y_۱ + (x-a)(x-c)y_۲\right]$$

که در آن داریم:

$$h = \frac{b-a}{۲} \qquad y_۰ = f(a)\ ,\ \ y_۱ = f(c)\ ,\ \ y_۲ = f(b)$$

اگر از اصطلاح‌هایی که در بند قبل به کار بردیم، استفاده کنیم، می‌توان گفت که چندجمله‌ای درجه دوم $P(x)$، تابع $f(x)$ را در نقطه‌های به طول‌های a ، c و b، درون‌یابی می‌کند، اگر منحنی تابع $f(x)$ روی پاره‌خط $[a\ ,\ b]$ تغییر زیادی نکند، و خود پاره‌خط خیلی بزرگ نباشد، چندجمله‌ای $P(x)$ همه جا، مختصری با $f(x)$ تفاوت خواهد داشت؛ و این به نوبهٔ خود به معنای آن است که انتگرال‌های آن‌ها هم در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$، مختصری اختلاف دارند. براین اساس، می‌توان این انتگرال‌ها را به تقریب، برابر گرفت:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

و یا، آن‌طور که می‌گویند، انتگرال دوم عبارت است از مقدار تقریبی انتگرال اول. با محاسبه‌های ساده‌ای، که به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم، ثابت می‌شود که

$$\int_a^b (x-c)(x-b)\,dx = \frac{۲}{۳}h^۳,\ -\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = \frac{۴}{۳}h^۳,\ \int_a^b (x-a)(x-c)\,dx = \frac{۲}{۳}h^۳$$

از آن‌جا

$$\int_a^b P(x)dx = \frac{h}{۳}\left[f(a) + ۴f(c) + f(b)\right]$$

به این ترتیب، انتگرال معین ما، می‌تواند با دستور تقریبی زیر محاسبه شود:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{۳}\left[f(a) + ۴f(c) + f(b)\right]$$

و این، همان دستور **سیمپسون** است.

به عنوان مثال، انتگرال $\sin x$ را در فاصلهٔ $[۰, \pi]$، از روی این دستور، محاسبه می‌کنیم. داریم:

$$h = \frac{\pi}{۲}\ ,\ f(a) = \sin ۰ = ۰\ ,\ f(c) = \sin\frac{\pi}{۲} = ۱\ ,\ f(b) = \sin \pi = ۰$$

و بنابراین $\frac{h}{۳}\left[f(a) + ۴f(c) + f(b)\right] = \frac{۲}{۳}\pi = ۲{,}۰۹...$. از طرف دیگر، همین انتگرال را با دقت هم می‌توان پیدا کرد:

$$\int_{۰}^{\pi} \sin x\, dx = -\cos x \Big|_{۰}^{\pi} = ۲$$

اشتباه از ۱ر۰ تجاوز نمی‌کند.

اگر فاصلهٔ $[۰ , \pi]$ را به دو بخش برابر تقسیم کنیم و برای هر کدام از آن‌ها، دستور **سیمپسون** را به کار بریم، به دست می‌آید:

$$\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \sin x\, dx \approx \frac{\pi}{۱۲}\left[\sin ۰ + ۴\sin\frac{\pi}{۴} + \sin\frac{\pi}{۲}\right] = \frac{\pi}{۱۲}\left(۴\frac{\sqrt{۲}}{۲} + ۱\right) \approx ۱{,}۰۰۱$$

$$\int_{\frac{\pi}{۲}}^{\pi} \sin x\, dx \approx ۱{,}۰۰۱$$

و به این ترتیب

$$\int_{۰}^{\pi} \sin x dx \approx ۲{,}۰۰۲$$

و در این‌جا، اشتباه خیلی کمتر است: نزدیک به ۰ر۰۰۲.

در عمل برای محاسبهٔ تقریبی انتگرال معین از تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a , b]$ این فاصله را به وسیلهٔ نقطه‌های $a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b$ تقسیم می‌کنند (n عددی است زوج) و دستور **سیمپسون** را پشت سرهم، در فاصلهٔ $[x_۰ , x_۲]$، سپس در فاصلهٔ $[x_۲ , x_۴]$ و غیره به کار می‌برند. در نتیجه، دستور کلی **سیمپسون** به دست می‌آید:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \frac{b-a}{۳n}\left[f(x_۰) + ۴f(x_۱) + ۲f(x_۲) + ۴f(x_۳) + \cdots + f(x_n)\right] \qquad (۶)$$

این دستور را ارزیابی می‌کنیم. اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a , b]$ دارای مشتق چهارمی باشد که در نابرابری $|f^{IV}(x)| \le M$ صدق کند، تخمین زیر وجود خواهد داشت:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - L(f) \right| \le \frac{M(b-a)^5}{180 n^4} \qquad (7)$$

در این‌جا، مقدار سمت راست دستور (۶) را به $L(f)$ نشان داده‌ایم. در این حالت، اشتباه از مرتبهٔ n^{-4} خواهد بود[1].

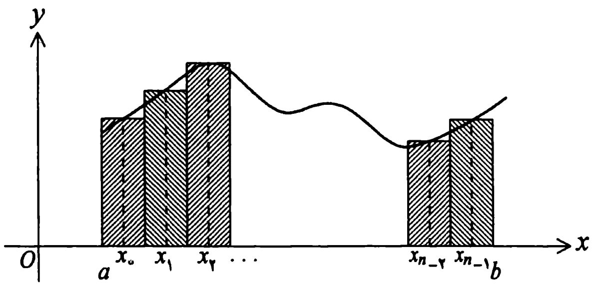
می‌توانستیم فاصلهٔ $[a, b]$ را به n بخش برابر تقسیم کنیم، و مجموع مساحت‌های مستطیل‌هایی را که در شکل ۶ هاشور زده‌ایم، به عنوان انتگرال معین، بحساب آوریم. در این‌صورت، دستور تقریبی مستطیل‌ها به دست می‌آید[2].

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})] \qquad (8)$$

می‌توان ثابت کرد که در این‌جا، مرتبهٔ اشتباه برابر n^{-2} است، تنها به این شرط که تابع در فاصلهٔ $[a, b]$ مشتق دوم محدودی داشته باشد. همچنین می‌توان مجموع مساحت‌های ذوزنقه‌هایی که در شکل ۷ هاشور خورده است، به عنوان مقدار تقریبی در نظر گرفت، و دستور ذوزنقه‌ها

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \qquad (9)$$

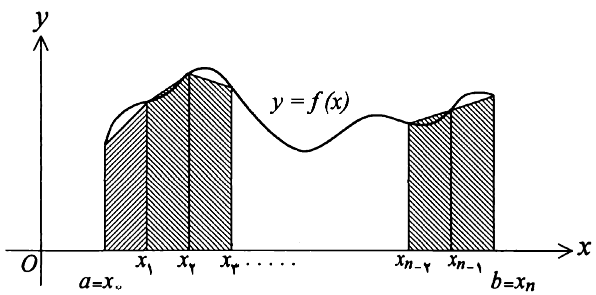
را، با مرتبهٔ اشتباه n^{-2} به دست آورد، به شرطی که تابع دارای مشتق دوم محدودی باشد!



شکل ۶

۱. اگر کمیتی مثل α_n که به $n = 1, 2, \ldots$ بستگی دارد، در نابرابری $|\alpha_n| < \frac{C}{n^k}$ صدق کند (C مقدار ثابتی است، مستقل از n)، در آن‌صورت گویند این کمیت از مرتبهٔ n^{-k} است.

۲. در این حالت x_0 ، x_1 ، ... ، x_{n-1} عبارت‌اند از وسط قسمت‌های برابر در فاصلهٔ $[a, b]$، و نه نقطه‌های تقسیم (آن‌طور که در دستورهای (۶) و (۹) بود).



شکل ۷

معمولاً می‌گویند دستور **سیمپسون** از دستورهای ذوزنقه‌ها و مستطیل‌ها، دقیق‌تر است.این حکم، نیاز به توضیح دارد، والا درست نیست. اگر تنها ازاین مطلب آگاه باشیم که تابع دارای مشتق مرتبهٔ اول است، در این صورت مرتبهٔ تضمین شدهٔ تقریب، برای هر سه دستور یکی است و برابر است با n^{-1}؛ در این حالت، دستور **سیمپسون** در برابر دستورهای ذوزنقه‌ها و مستطیل‌ها، هیچ برتری ندارد. در حالتی که تابع داری مشتق مرتبهٔ دوم باشد، می‌توان تقریب را تا مرتبه n^{-2}به وسیلهٔ دستورهای **سیمپسون** و ذوزنقه‌ها، تضمین کرد. ولی، اگر تابعی دارای مشتق‌های مرتبهٔ سوم و چهارم باشد، مرتبهٔ اشتباه برای دستورهای مستطیل‌ها و ذوزنقه‌ها برابر n^{-2}و برای دستور **سیمپسون** به ترتیب n^{-3}و n^{-4}است. ولی، مرتبهٔ n^{-4}برای دستور **سیمپسون** هم یک مرتبهٔ حدی است، یعنی، برای تابع‌هایی هم که دارای مشتق‌های بالاتر از مرتبهٔ چهارم باشند، مرتبهٔ اشتباه همان n^{-4}خواهد بود. بنابراین، اگر با تابعی سروکار داشته باشیم که دارای مشتق مرتبهٔ پنجم باشد و بخواهیم تقریبی از مرتبهٔ n^{-5} به دست آوریم، باید روش دیگری، غیر از دستور **سیمپسون** برای تعیین انتگرال تقریبی آن پیدا کنیم. در این باره، توضیح بیشتری می‌دهیم.

به سادگی معلوم می‌شود دستورهای ذوزنقه‌ها و مستطیل‌ها، برای چند جمله‌ای‌های درجهٔ اول دقیق است: یعنی، اگر در دستور (۹)، تابع $A+Bx$ را قرار دهیم (Aو B مقدارهایی ثابت‌اند)، به برابری دقیقی می‌رسیم. به همین مفهوم، دستور **سیمپسون** هم برای چندجمله‌ای‌های درجه سوم $A+Bx+Cx^2+Dx^3$، دقیق است. فرض می‌کنیم پاره‌خط $[a\ ,\ b]$ را به n بخش برابر تقسیم کرده باشیم و برای هر کدام از بخش‌ها، یکی ، و تنها یکی از روش‌های تقریبی انتگرال‌گیری را به‌کار برده باشیم. اگر این روش تقریبی برای چندجمله‌ای $A+Bx+\cdots+Fx^{m-1}$ ، از درجهٔ $m-1$ جواب دقیق

بدهد، در این صورت، اشتباه تقریب برای هر تابعی که دارای مشتق مرتبهٔ mام محدودی باشد، از مرتبهٔ n^{-m} خواهد بود، و اگراین تابع، چندجمله‌ای درجهٔ $m-۱$ نباشد، این مرتبه حتی برای تابع‌هایی که دارای مشتق‌های مرتبهٔ بالاتری هم هستند، نمی‌تواند تجاوز کند.

ما روی اهمیت این مسأله تاکید کردیم که چگونه می‌توان روش‌های تقریبی انتگرال‌گیری را، که برای چندجمله‌ای‌های درجهٔ بالا دقیق باشد، تا آن‌جا که ممکن است ساده‌تر کنیم. این مسأله، که در زمان ما کتاب‌های زیادی به آن تخصیص داده شده است، نظر ریاضی‌دانان را از گذشتهٔ دوری به خود جلب کرده بود و ما در این‌جا، تنها به بعضی از نتیجه‌گیری‌های سنتی‌تر آن می‌پردازیم.

تابع $p(x)$ را در نظر می‌گیریم. این پرسش را مطرح می‌کنیم که نقطه‌های گرهی $x_۱$، ...، x_m را روی پاره‌خط $[-۱ , ۱]$ چگونه بگیریم و عدد K را چطور انتخاب کنیم که این برابری برقرار باشد:

$$\int_{-۱}^{۱} f(x)p(x)dx = K\sum_{۱}^{m} f(x_i)$$

که در آن، $f(x)$ یک چندجمله‌ای دل‌خواه از درجهٔ mاست.

روشن است به ازای $p(x) = (۱ - x^۲)^{-\frac{۱}{۲}}$، وقتی مسأله دارای جواب مثبت است که $K=\frac{\pi}{m}$ و x_iصفرهای چندجمله‌ای $\cos m \arccos x$، که به نام **چبیشف** نامیده می‌شود (بند ۵ را ببینید)، باشد.

برای $p(x) = ۱$، **چبیشف** حل مسأله را به ازای $m = ۱ , ۲ , ... , ۷$ داد. به ازای $m = ۸$، این مسأله جواب ندارد؛ گره‌ها را می‌توان پیدا کرد، ولی مختلط‌اند. به ازای $m = ۹$ دوباره جواب دارد. ولی، همان‌طور که *س. ن.* **برنشتین** ثابت کرد، به ازای هر مقدار $m>۹$ مسأله جواب ندارد (گره‌ها در خارج پاره‌خط $[-۱ , +۱]$ قرار می‌گیرند).

دستوری را که برای چندجمله‌ای درجهٔ n دقیق باشد، می‌توان به سادگی و به کمک دستور **لاگرانژ**(۴) به دست آورد. اگر سمت چپ و سمت راست آن را روی پاره‌خط $[a , b]$ انتگره کنیم، به دست می‌آید:

$$\int_{a}^{b} P_n(x)dx = \sum_{k=۰}^{n} p_k f(x_k) \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$p_k=\int_a^b \frac{(x-x_\circ)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_\circ)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}\,dx \qquad (k=\circ,1,\dots,n)$$

به این ترتیب، برابری (۱۰) برای همهٔ چندجمله‌ای‌های درجهٔ n برقرار است، و بنابراین، دستور

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_\circ^n p_k f(x_k)$$

برای همهٔ چندجمله‌ای‌های درجهٔ n دقیق است.

در حالتی که داشته باشیم:

$$x_\circ=a \ , \ x_1=\frac{a+b}{2} \ , \ x_2=b$$

همان‌طور که می‌دانیم، این دستور به سمت دستور **سیمپسون** میل می‌کند.

می‌توانیم وضع استقرار گره‌های $x_k(k=\circ, 1, \dots, n)$ را در محدودهٔ پاره‌خط $[a, b]$، تغییر دهیم. هر وضع استقراری از گره‌ها، متناظر با دستوری مربوط به خودش خواهد بود.

گوس (ریاضی‌دان بزرگ سدهٔ نوزدهم) ثابت کرد گره‌های x_k را می‌توان به نحوی تنظیم کرد که دستور، نه تنها برای چندجمله‌ای درجهٔ n، بلکه در ضمن برای چندجمله‌ای درجهٔ $2n+1$، دقیق باشد.

چندجمله‌ای

$$A_{n+1}(x)=(x-x_\circ)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

از درجهٔ $n+1$، که به کمک گره‌های **گوس** ساخته شده است، ویژگی جالبی دارد. برای چندجمله‌ای $P(x)$، که درجه‌ای کمتر از $n+1$ دارد، این برابری برقرار است:

$$\int_a^b A_{n+1}(x)P(x)\,dx=\circ$$

به این ترتیب، چندجمله‌ای $A_{n+1}(x)$، روی پاره‌خط $[a, b]$، بر همهٔ چندجمله‌ای‌هایی که درجه‌ای بالاتر از n ندارند، متعامد (یا اورتوگونال) است. چندجمله‌ای $A_{n+1}(x)$ را ***چندجمله‌ای لژاندر*** (متناظر با پاره‌خط $[a, b]$) گویند.

۴. اندیشه‌های چبیشف دربارهٔ بهترین تقریب‌های موزون

طرح مسأله. **پ. *ل.* چبیشف**، ضمن حل مسأله‌های عملی، به اندیشهٔ بهترین تقریب یکنواخت رسید. **چبیشف**، علاوه بر آن‌که یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان سدهٔ ۱۹ بود و مبانی بسیاری از شاخه‌های ریاضیات را، که در زمان ما پیشرفت‌های گسترده‌ای کرده‌اند، گذاشته است، یک مهندس پیشرو هم بود. **چبیشف**، به‌ویژه به مسأله‌های مربوط به ساختمان دستگاه‌هایی که به خط سیرهای مختلف حرکت‌ها ارتباط پیدا می‌کرد، علاقه‌مند بود. در این باره، توضیح بیشتری می‌دهیم.

فرض کنید، منحنی $y=f(x)$ در فاصلهٔ $a \le x \le b$ داده شده باشد. می‌خواهیم دستگاه مکانیکی مشخصی بسازیم که وقتی به کار می‌افتد، نقطه‌ای از آن، این منحنی را با دقتی هر چه بیشتر رسم کند. **چبیشف**، این مسأله را، به این ترتیب حل می‌کند: ابتدا مثل یک مهندس عمل می‌کند؛ دستگاهی می‌سازد که به کمک آن بتوان مسیر حرکت لازم را با تقریبی، که البته خیلی خوب نیست، رسم کند. به این ترتیب، نقطهٔ A از دستگاه ــ که البته هنوز ساختمان آن به پایان نرسیده است ــ با عمل خود، منحنی

$$y=\varphi(x) \qquad (۱۱)$$

را رسم می‌کند که تنها در خط‌های کلی خود، به منحنی $y=f(x)$ شباهت دارد. این دستگاه از بخش‌های جداگانه‌ای، مثل چرخ‌دنده‌های کوچک، اهرم‌های مختلف و غیره، تشکیل شده است. این بخش‌ها، اندازه‌های معینی دارند:

$$\alpha_۰\ ,\ \alpha_۱\ ,\ \alpha_۲\ ,\ \dots\ ,\alpha_m \qquad (۱۲)$$

که دستگاه و بنابراین منحنی (۱۱) را مشخص می‌کنند. این‌ها، پارامترهای دستگاه و منحنی (۱۱) هستند[۱]. به این ترتیب، منحنی (۱۱)، نه تنها به آوند x، بلکه به پارامترهای (۱۲) هم بستگی دارد. وقتی دستگاهی به وسیلهٔ پارامترهایی داده شده باشد، متناظر با منحنی معینی است که معادلهٔ آن را بهتر است به این صورت بنویسیم:

$$y=\varphi(x\ ;\alpha_۰\ ,\alpha_۱\ ,\ \dots\ ,\alpha_m) \qquad (۱۳)$$

---

۱. کسانی که بخواهند با چنین دستگاه‌هایی به تفصیل آشنا شوند، می‌توانند به رسالهٔ «ارثیهٔ علمی **پ.*ل.* چبیشف**» مراجعه کنند (از انتشارات فرهنگستان علوم شوروی ــ ۱۹۴۵).

در این‌گونه حالت‌ها بهتر است گفته شود که خانواده‌ای از تابع‌های (۱۲) را داریم که در فاصلهٔ $a \leq x \leq b$ داده شده و به $m + 1$ پارامتر (۱۱) بستگی دارد.

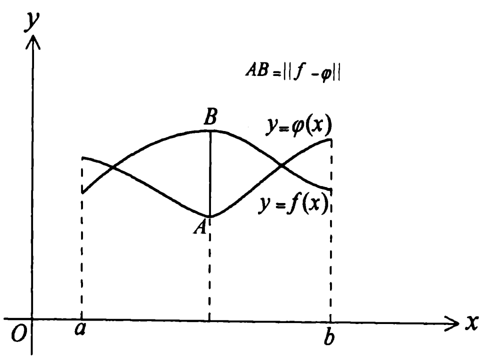
از این به بعد دیگر **چبیشف** همچون یک ریاضی‌دان خالص عمل می‌کند. او خیلی طبیعی، برای انحراف تابع $f(x)$ از مقدار تقریبی آن، یعنی تابع $\varphi(x\ ;\ \alpha_0\ ,\ \alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_m)$، در فاصلهٔ $a \leq x \leq b$، مقدار

$$\|f - \varphi\| = \max |f(x) - \varphi(x\ ;\ \alpha_0\ ,\ \alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_m)| \qquad a \leq x \leq b \qquad (14)$$

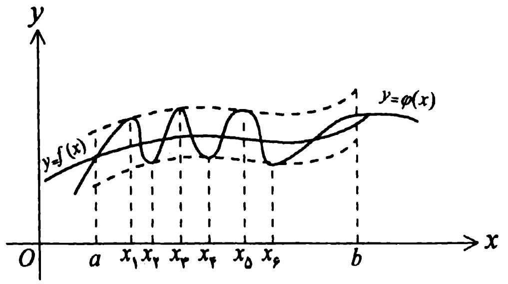
را درنظر می‌گیرد، که برابر است با ماکزیمم قدر مطلق تفاضل $f(x) - \varphi(x\ ;\ \alpha_0\ ,\ \alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_m)$ در فاصلهٔ $a \leq x \leq b$ (شکل ۸). و روشن است این مقدار، تابعی است مثل

$$\|f - \varphi\| = F(\alpha_0\ ,\ \alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_m) \qquad (15)$$

از پارامترهای α_0 ، α_1 ، ... ، α_m . حالا این مسأله در برابر ماست که پارامترها را طوری پیدا کنیم که به ازای آن‌ها، تابع (۱۵) به کمترین مقدار خود برسد. این مقدارها تابع φ را به نحوی معین می‌کند که از بین همهٔ تابع‌های ممکن خانوادهٔ (۱۱) به بهترین وضعی به تابع مفروض $y = f(x)$ نزدیک است. مقدار $F(\alpha_0\ ,\ \alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_m)$ را به ازای این مقدارها، ***بهترین تقریب یکنواخت تابع*** $f(x)$ در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ به کمک تابع φ از خانوادهٔ (۱۳) گویند و آن را با علامت $E_m(f)$ نشان می‌دهند. در بعضی از کتاب‌ها، به ویژه در کتاب‌های غیرروسی، به جای اصطلاح «یکنواخت»، اصطلاح «چبیشفی» را به کار می‌برند. هر دوی این اصطلاح‌ها، به معنای تأکیدی بر خصلت معین نزدیکی تابع‌ها می‌باشد. روش‌های دیگری هم وجود



شکل ۸



شکل ۹

دارد، از جمله می‌توان دربارهٔ تابعی از یک خانواده صحبت کرد که به مفهوم میانگین مربعی، به بهترین صورتی به $f(x)$ نزدیک باشد. در این باره در بند ۸ صحبت خواهیم کرد.

چبیشف نخستین کسی بود که توانست قانون‌مندی‌هایی را که حاکم بر این مسأله است، کشف کند و روشن کند تابع φ، در حالی که به بهترین صورتی به طور یکنواخت در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ به تابع f نزدیک می‌شود، دارای این ویژگی مهم است که برای آن، حداکثر (۱۵) ، یعنی حداکثر قدر مطلق تفاضل

$$f(x)-\varphi(x\ ;\ \alpha_0\ ,\alpha_1\ ,\ \dots\ ,\ \alpha_m)$$

دست کم در $m+2$ نقطهٔ فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ به دست می‌آید. برای نقطه‌های مذکور علامت تفاضل بالا یکی در میان مثبت و منفی است (شکل ۹).

در این‌جا فرصت آن نیست که به تنظیم دقیق شرط‌هایی بپردازیم که به ازای آن‌ها این حکم برقرار است، ولی کسانی که علاقه‌مند به آن باشند می‌توانند به مقالهٔ ***و.ل. گونچاروف*** به نام «نظریهٔ بهترین تقریب‌های تابع» در رسالهٔ «ارثیهٔ علمی **چبیشف**»، مراجعه کنند.

حالت مربوط به تقریب تابع‌های چندجمله‌ای. بررسی‌های **چبیشف**، به ویژه از جهت کار بررسی که در مسألهٔ مربوط به تقریب تابع دل‌خواه $f(x)$ در فاصلهٔ مفروض $[a\ ,\ b]$ به کمک چندجمله‌ای درجهٔ مفروض n، یعنی $P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ دارد، دارای اهمیت زیادی است. چندجمله‌ای $P_n(x)$، وقتی از درجه n باشد، خانواده‌ای از تابع‌ها را تشکیل می‌دهد که به $n+1$ پارامتر ــ ضریب‌های آن ــ بستگی دارد. می‌توان ثابت کرد، نظریه چبیشف را می‌توان به طور کامل دربارهٔ چندجمله‌ای به کار برد؛ به این ترتیب که اگر بخواهیم بدانیم، آیا

چندجمله‌ای مفروض $P_n(x)$ به بهترین شکلی به طور یکنواخت به تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ نزدیک می‌شود، باید بین چندجمله‌ای‌های ممکن با درجهٔ مفروض n، همهٔ مقدارهایی از x را در این فاصله پیدا کرد که برای آن‌ها تابع $|f(x) - P_n(x)|$ به ماکزیمم L خود در $[a\ ,\ b]$ برسد. اگر به این ترتیب، در بین این مقدارها، بتوان $n+۲$ مقدار $x_۱$ ، $x_۲$ ، ... ، $x_{n+۲}$ را نشان داد، به نحوی که در آن‌ها اختلاف $f(x) - P_n(x)$ پشت سر هم تغییر علامت بدهد:

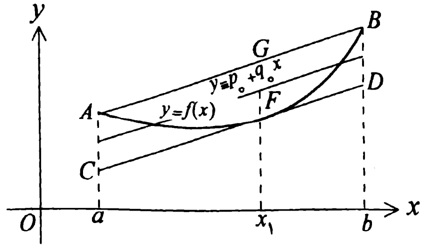
$$f(x_۱) - P_n(x_۱) = \pm L$$

$$f(x_۲) - P_n(x_۲) = \pm L$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_{n+۲}) - P_n(x_{n+۲}) = \pm(-۱)^{n+۱} L$$

در این صورت، $P_n(x)$ بهترین چندجمله‌ای است! در غیر این صورت $P_n(x)$، بهترین چندجمله‌ای نیست. برای نمونه، جواب مسألهٔ مربوط به بهترین تقریب موزون تابع $f(x)$ ، به کمک چندجمله‌ای درجهٔ اول $P_۱(x) = p + qx$ ، که در شکل ۱۰ نشان داده شده است، عبارت است از چندجمله‌ای $p_۰ + q_۰x$، که نمودار آن خط راستی است موازی با وتر AB و به یک فاصله از این وتر و مماس CD، مماسی بر منحنی $y = f(x)$ که موازی وتر AB باشد؛ زیرا روشن است که قدر مطلق تفاضل $f(x) - (p_۰ + q_۰x)$ به ازای مقدارهای $x_۰ = a$، $x_۱$ و $x_۲ = b$ به ماکزیمم خود می‌رسد، که در آن $x_۱$ عبارت است از طول نقطهٔ تماس F، در ضمن خود تفاضل هم برای این مقدارها، پشت سر هم تغییر علامت می‌دهد. یادآوری می‌کنیم، در این‌جا گفت‌وگو از منحنی محدبی است که تحدب آن به طرف پایین و در همهٔ نقطه‌های خودش دارای مماس است. در این مثال، $E_۱(f)$ برابر است با نصف طول پاره‌خط راست



شکل ۱۰

AC و یا پاره‌خط‌های برابر آن BD یا GF.

۵. چندجمله‌ای‌های چبیشف، که کمتر از همه نسبت به صفر انحراف دارند

این مسأله را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم چندجمله‌ای $P_{n-1}(x)$ از درجهٔ $n-1$ را پیدا کنیم که به بهترین صورتی در فاصلهٔ $[-1, 1]$ به طور یکنواخت به تابع x^n نزدیک شود.

معلوم می‌شود، چندجمله‌ای مفروض باید چنان باشد که در این برابری صدق کند:

$$x^n - P_{n-1}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x \qquad (16)$$

این حکم را می‌توان نتیجه‌ای از قضیهٔ **چبیشف** دانست و ثابت کرد که سمت راست برابری (۱۶)، یک چندجمله‌ای درجهٔ n است که ضریب x^n آن برابر است با واحد؛ از این گذشته قدر مطلق آن در فاصلهٔ مفروض $[-1, 1]$ در $n+1$ نقطهٔ $x_k = \cos \frac{k\pi}{n}$ $(k=0, 1, \dots, n)$ به ماکزیمم برابر $L = \frac{1}{2^{n-1}}$ می‌رسد؛ و سرانجام خود آن در این نقطه‌ها پشت سر هم تغییر علامت می‌دهد.

این‌که سمت راست برابری (۱۶)، چندجمله‌ای است از درجه n با ضریب x^n برابر واحد، می‌تواند با استدلال زیر روشن شود.

فرض می‌کنیم، برابری‌های زیر، برای عدد طبیعی و مفروض n برقرار باشد:

$$\cos n \arccos x = 2^{n-1} [x^n - Q_{n-1}(x)]$$

$$-\sqrt{1-x^2} \sin n \arccos x = 2^{n-1} [x^{n+1} - Q_n(x)]$$

که در آن‌ها Q_{n-1} و Q_n چندجمله‌ای‌هایی جبری به ترتیب از درجهٔ $n-1$ و n باشند. در چنین صورتی برابری‌های مشابهی برای $n+1$ هم برقرار خواهد بود. این مطلب با ملاحظهٔ دستور زیر، روشن می‌شود:

$$\cos (n+1) \arccos x = x \cos n \arccos x - \sqrt{1-x^2} \sin n \arccos x,$$

$$-\sqrt{1-x^2} \sin (n+1) \arccos x = -x\sqrt{1-x^2} \sin n \arccos x + (x^2-1) \cos n \arccos x$$

ولی برابری ما به ازای $n = ۱$ درست است، زیرا

$$\cos \operatorname{arc} \cos x = x$$
$$-\sqrt{۱ - x^۲}\ \sin \operatorname{arc} \cos x = x^۲ - ۱$$

و در نتیجه، همین برابری‌ها به ازای هر مقدار n هم، درست خواهند بود.

سمت راست برابری (۱۶)، ***چندجمله‌ای درجهٔ*** n***ام چبیشف، که کمتر از همه از صفر انحراف دارد***، نامیده می‌شود. این‌ها نخستینِ این چندجمله‌ای‌ها هستند:

$$T_۰(x) = ۱$$

$$T_۱(x) = x$$

$$T_۲(x) = \frac{۱}{۲}(۲x^۲ - ۱)$$

$$T_۳(x) = \frac{۱}{۴}(۴x^۳ - ۳x)$$

$$T_۴(x) = \frac{۱}{۸}(۸x^۴ - ۸x^۲ + ۱)$$

$$T_۵(x) = \frac{۱}{۱۶}(۱۶x^۵ - ۲۰x^۳ + ۵x)$$

ما دیگر به مرحلهٔ نقش جدی چندجمله‌ای‌های چبیشف در مسأله‌های درون‌یابی و روش‌های تقریبی انتگرال‌گیری رسیده‌ایم. به بهانهٔ مسألهٔ درون‌یابی، به‌جاست این توضیح را هم بدهیم.

از این مطلب که تفاضل $f(x) - P_n(x)$ بین تابع پیوسته و دل‌خواه $f(x)$ و بهترین چندجمله‌ای نزدیک به آن $P_n(x)$، در $n + ۲$ نقطه تغییر علامت می‌دهد. با توجه به پیوسته بودن تابع نتیجه می‌شود که $P_n(x)$ در $n + ۱$ نقطهٔ معین فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ بر $f(x)$ منطبق می‌شود، یعنی $P_n(x)$ عبارت است از چندجمله‌ای میان‌یاب درجهٔ n برای $f(x)$، به ازای انتخابی از گره‌ها.

به این ترتیب، مسألهٔ مربوط به بهترین تقریب یکنواخت تابع پیوستهٔ $f(x)$، منجر به این می‌شود که بتوانیم روی فاصلهٔ $[-۱\ ,\ ۱]$، دستگاه $x_۰$، $x_۱$، ...، x_n از گره‌های میان‌یاب را طوری انتخاب کنیم که چندجمله‌ای میان‌یاب درجهٔ n متناظر آن دارای کمترین انحراف $\|f - Q\| = \max |f(x) - Q(x)|$ در بین همه چندجمله‌ای‌های ممکن باشد. در عمل،

متأسفانه، پیداکردن گره‌های لازم اغلب به دشواری‌های زیادی برخورد می‌کند. بنابراین این مسأله را باید به تقریب حل کرد و در همین جاست که چندجمله‌ای **چبیشف**، نقش خاص خود را پیدا می‌کند. اگر به عنوان گره‌های میان‌یاب، صفرهای چندجمله‌ای $\cos(n+1)\arccos x$ را در نظر بگیریم (یعنی، نقطه‌هایی که در آن‌ها این چندجمله‌ای برابر صفر است)، آن‌وقت چندجمله‌ای میان‌یاب متناظر، دست کم برای مقدارهای بزرگ n، اختلاف یکنواختی از تابع (که به اندازهٔ کافی هموار باشد) خواهد داشت که با انحراف متناظر بهترین تقریب یکنواخت تابع از چندجمله‌ای، تفاوت کمی دارد. البته، این بیان مبهم «تفاوت کم» را می‌توان دقیق کرد و با ارزیابی‌های دقیق عددی مشخص کرد، ولی ما در این‌جا به آن نمی‌پردازیم!

به چندجمله‌ای **چبیشف** برگردیم. آن را به صورت

$$T_n(x) = M \cos n \arccos x \ (-1 \le x \le 1)$$

در نظر می‌گیریم، که در آن M عبارت است از عددی مثبت. روشن است این چندجمله‌ای در فاصلهٔ $[-1, 1]$ از لحاظ قدر مطلق از عدد M تجاوز نمی‌کند. مشتق آن برابر است با $T'_n(x) = \frac{nM \sin n \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ و بنابراین روی پاره‌خط $[-1, 1]$ در نابرابری $T'_n(x) \le \frac{nM}{\sqrt{1-x^2}}$ صدق می‌کند. می‌توان ثابت کرد، این نابرابری برای هر چندجمله‌ای $P_n(x)$ از درجهٔ n (که از لحاظ قدرمطلق در فاصلهٔ $[-1, 1]$ از M تجاوز نکند)، برقرار است، یعنی برای هر چندجمله‌ای دل‌خواهی از این قبیل در فاصلهٔ $[-1, 1]$، این نابرابری صدق می‌کند:

$$|P'_n(x)| \le \frac{nM}{\sqrt{1-x^2}}$$

این نابرابری را باید به حساب *آ.آ.* **مارکوف** گذاشت، زیرا می‌توان آن را در نتیجه‌گیری‌های او به دست آورد. خود **مارکوف**، آن‌ها را در ارتباط با مسأله‌ای که *د. ای.* **مندلیف** به او داده بود، پیدا کرد.

بعدها، در سال ۱۹۱۲، *س. ن.* **برنشتین**، نابرابری مشابهی (که به نام خود او معروف است)، برای چندجمله‌ای‌های مثلثاتی پیدا کرد و به کمک این نابرابری‌ها برای نخستین بار، امکان یافتن ویژگی‌های دیفرانسیلی تابع‌هایی را که در آن‌ها نظم کاهش بهترین تقریب‌های

آن‌ها معلوم باشد، کشف کرد. دربارهٔ نتیجه‌هایی از این قبیل، که مربوط به تابع‌های قابل دیفرانسیل‌گیری است، در بند ۶ و بند ۷ گفت‌وگو شده است.

۶. قضیهٔ وایرشتراس. بهترین تقریب تابع و طبیعت دیفرانسیلی آن

قضیهٔ وایرشتراس. اگر تعریف کلی بهترین تقریب تابع را، که در بند ۴ داده شده است، برای حالتی که به چندجمله‌ای جبری درجهٔ n نزدیک می‌شود، به کار بریم، به‌این تعریف می‌رسیم: بهترین تقریب یکنواخت تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ به کمک چندجمله‌ای درجهٔ n، وقتی به دست می‌آید که عدد غیرمنفی $E_n(f)$ برابر با می‌نیمم عبارت زیر باشد:

$$\max_{a\le x\le b} |f(x)-P_n(x)| = \|f-P_n\|$$

که در آن $P_n(x)$ همهٔ چندجمله‌ای‌های ممکن از درجهٔ n است.

خارج از این‌که بتوانیم یا نتوانیم بیان دقیق چندجمله‌ای را که به بهترین وجه به تابع مفروض $f(x)$ نزدیک است، پیدا کنیم، کشش عملی و نظری زیادی دربارهٔ امکان تقریب دقیق‌تر $E_n(f)$ وجود دارد. در واقع، اگر بخواهیم تابع f را با دقت مقدار مفروض δ به چندجمله‌ای نزدیک کنیم، و به زبان دیگر، اگر بخواهیم نابرابری

$$|f(x) - P_n(x)| \le \delta \tag{۱۷}$$

برای همهٔ مقدارهای x از فاصلهٔ مفروض برقرار باشد، هیچ معنایی ندارد که بخواهیم آن را بین چندجمله‌ای‌های درجهٔ n انتخاب کنیم که برای آن داریم: $E_n(f)>\delta$، زیرا به ازای این n در حالت کلی، چندجمله‌ای P_n وجود ندارد که برای آن نابرابری (۱۷) برقرار باشد. از طرف دیگر، اگر بدانیم $E_n(f)<\delta$، آن‌وقت این مطلب معنا دارد که به ازای این n، سعی کنیم چندجمله‌ای $P_n(x)$ را جست‌وجو کنیم که با دقت δ به $f(x)$ نزدیک شود، زیرا روشن است چندجمله‌ای‌هایی از این نوع وجود دارند.

ویژگی بهترین تقریب‌ها دربارهٔ تابع‌های کلاس‌های مختلف با دقیق‌ترین و عمیق‌ترین بررسی‌ها دنبال شده است. قبل از همه حقیقت زیر را یادآوری می‌کنیم.

اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ پیوسته باشد، آن‌وقت بهترین تقریب $E_n(f)$ وقتی n به طور

نامحدود بزرگ شود، به سمت صفر میل می‌کند.

این قضیه را ***وایرشتراس*** در پایان سدهٔ نوزدهم ثابت کرد. این قضیه، اهمیت زیادی دارد، زیرا حاکی از امکان اصولی نزدیک کردن تابع پیوستهٔ دل‌خواه به یک چندجمله‌ای با هر دقت دل‌خواهی که از قبل تعیین شده است، می‌باشد. با توجه به این موقعیت می‌توان گفت که مجموعهٔ همهٔ چندجمله‌ای‌ها از هر درجه‌ای، تا اندازه‌ای، به مجموعهٔ همهٔ تابع‌های پیوسته‌ای که روی یک پاره‌خط داده شده‌اند، مربوط می‌شود، درست مثل مجموعهٔ R عددهای گویا که به مجموعهٔ H همهٔ عددهای حقیقی (گویا و گنگ) مربوط‌اند. در واقع، عدد گنگ α هر چه باشد، و عدد مثبت ε را هر قدر کوچک بگیریم، همیشه می‌توان عدد گویایی مثل r طوری انتخاب کرد که نابرابری $|\alpha - r| < \varepsilon$ برقرار باشد. از طرف دیگر، اگر $f(x)$ تابعی پیوسته در فاصلهٔ $[a , b]$ و ε مثبت کوچک دل‌خواهی باشد، از قضیهٔ ***وایرشتراس*** معلوم می‌شود چندجمله‌ای جبری $P_n(x)$ وجود دارد، به نحوی که برای هر مقدار x از فاصلهٔ $[a , b]$ ، نابرابری $|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ برقرار باشد؛ زیرا بنابراین قضیه، بهترین تقریب $E_n(f)$ تابع پیوسته به ازای $n \to \infty$، به سمت صفر میل خواهد کرد.

می‌توان قضیهٔ ***وایرشتراس*** را روشن‌تر کرد. فرض کنید منحنی نمودار نمایش تابع پیوسته و دل‌خواه $f(x)$، که در فاصلهٔ $[a , b]$ معین است، داده شده باشد (شکل ۹ را ببینید). عدد مثبت کوچک ε را در نظر می‌گیریم و منحنی خود را در نواری به پهنای 2ε محاط می‌کنیم، به نحوی که منحنی ما از وسط نوار بگذرد. آن‌وقت، همیشه می‌توان چندجمله‌ای جبری

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

را از درجه‌ای به اندازهٔ کافی بالا، طوری انتخاب کرد که منحنی آن همه جا در داخل نوار انتخاب شده، قرار گیرد.

یک یادآوری لازم است. فرض کنید $f(x)$ مثل سابق، تابعی پیوسته در فاصلهٔ $[a , b]$ و $P_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$، چندجمله‌ای‌های بهترین تقریب‌های یکنواخت آن باشد. به سادگی دیده می‌شود، می‌توان تابع $f(x)$ را به صورت رشتهٔ

$$f(x) = P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + [P_3(x) - P_2(x)] + \cdots$$

نوشت که در فاصلهٔ $[a , b]$ به طور یکنواخت به سمت آن هم‌گرا است. این مطلب از این‌جا نتیجه می‌شود که مجموع n جملهٔ اول رشته برابر است با $P_n(x)$ در ضمن

$\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)-P_n(x)|=E_n(f)$ و به ازای $n\to\infty$ داریم: $E_n(f)\to 0$.

به این ترتیب، به طرح تازه‌ای از ***قضیهٔ وایرشتراس*** می‌رسیم:

هر تابعی را که در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ پیوسته باشد، می‌توان به صورت رشته‌ای از چندجمله‌ای‌های جبری نشان داد که به طور یکنواخت به سمت تابع ما میل می‌کند.

این نتیجه، اهمیت اساسی زیادی دارد. از این جا، این امکان به دست می‌آید که هر تابع دل‌خواه را، به هر صورتی که داده شده باشد (و از جمله به کمک منحنی)، با بیان تحلیلی عرضه کنیم (منظور ما از عبارت تحلیلی عبارت است از هر تابع مقدماتی، یا تابعی که از راه عبور حدی و با روش‌های مقدماتی به دست می‌آید). از لحاظ تاریخی، این نتیجه‌گیری سرانجام منجر به از بین رفتن تصور مربوط به عبارت تحلیلی بود که تا نیمه‌های سدهٔ نوزدهم مورد قبول ریاضی‌دانان بود. این‌که می‌گوییم «سرانجام»، به این مناسبت است که قبل از قضیهٔ *وایرشتراس*، نتیجه‌گیری‌های کلی دیگری از این قبیل به دست آمده بود. این نتایج به طور عمده مربوط به رشتهٔ *فوریه* است. تا قبل از این نتیجه‌گیری‌ها، گمان می‌کردند، عبارت تحلیلی، قانونمندی‌های خوبی را که اختصاص به تابع‌های تحلیلی است، معین می‌کند. از جمله این موضوع بدیهی به نظر می‌آمد که عبارت تحلیلی بی‌نهایت بار قابل دیفرانسیل‌گیری و حتی قابل تبدیل به رشتهٔ توانی است. چنین نتیجه‌گیری‌هایی، بی‌پایه از آب درآمد. ممکن است تابعی وجود داشته باشد که در طول تمامی پاره‌خط دارای مشتق نباشد، با وجود این، قابل بیان به صورت یک عبارت تحلیلی باشد.

از دیدگاه روش‌شناسی، اهمیت این کشف‌ها در این است که با روشنی تمام نشان می‌دهند، ریاضیات این امکان را دارد که با روش‌های خود چنان قانونمندی‌های گسترده‌ای را که به جنبه‌های بسیار گوناگون مربوط می‌شود، بررسی کند که پیش از آن حتی فکر آن‌ها را هم نمی‌شد کرد.

امروز راه‌حل‌های مختلفی برای اثبات قضیهٔ *وایرشتراس* شناخته شده است. بیشتر این راه حل‌ها بر این روش متکی است که نسبت به تابع پیوسته و مفروض f، دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌ها را در نظر می‌گیرند که ضمن بالا بردن درجهٔ آن‌ها، به طور یکنواخت به f نزدیک می‌شوند. چندجمله‌ای

$$B_n(x)=\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k\,(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

یکی از ساده‌ترین آن‌هاست که می‌تواند برای تقریب تابع پیوستهٔ $f(x)$ در فاصلهٔ [۱ , ۰] به کار رود و چندجمله‌ای **برنشتین** نامیده می‌شود. وقتی n به طور نامحدود بزرگ شود، این چندجمله‌ای در فاصلهٔ [۱ , ۰] و به طور یکنواخت به طرف تابع پیوسته‌ای که آن را به وجود آورده است، هم‌گرا می‌شود[1]. در این‌جا C_n^k عبارت است از ترکیب k به k از n عنصر.

یادآوری می‌کنیم، شبیه قضیهٔ ***وایرشتراس*** در حوزهٔ مختلط هم وجود دارد که دربارهٔ آن ***م.آ.لاونتیف***، ***م. و. کلدیش*** و ***س.ن.مرگه‌لیان*** به نتیجه‌گیری‌های جدی و قطعی رسیدند.

بستگی بین مرتبهٔ بهترین تقریب یکنواخت تابع و ویژگی‌های دیفرانسیلی آن. به چند نتیجه‌گیری می‌پردازیم. اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ دارای مشتق $f^{(r)}(x)$ از مرتبهٔ r باشد، به نحوی که قدر مطلق آن از عدد K تجاوز نکند، در آن صورت بهترین تقریب $E_n(f)$ در این نابرابری صدق می‌کند:

$$E_n(f)\leq\frac{c_rK}{n^r} \tag{۱۸}$$

که در آن، c_r مقدار ثابتی است که تنها به r مربوط است (قضیهٔ ***جکسون***). از نابرابری (۱۸) دیده می‌شود، هرچه مرتبهٔ مشتق تابع f بالاتر باشد، $E_n(f)$، با بزرگ شدن n، سریع‌تر به سمت صفر میل می‌کند. به این ترتیب، هر چه تابع بهتر (هموارتر) باشد، بهترین تقریب آن سریع‌تر به سمت صفر می‌رود. ***س.ن.*** **برنشتین** ثابت کرد، به مفهوم معینی، عکس این حکم هم درست است.

بهترین تابع‌های قابل دیفرانسیل‌گیری، تابع‌های تحلیلی هستند. **برنشتین** ثابت کرد که بهترین تقریب $E_n(f)$ چنین تابع‌هایی، در نابرابری

$$E_n(f)\leq cq^n \tag{۱۹}$$

صدق می‌کند، که در آن c و q عبارت‌اند از ثابت‌هایی که به f بستگی دارند و در ضمن $0<q<1$، یعنی سریع‌تر از یک تصاعد هندسی نزولی به‌سمت صفر میل می‌کند. او همچنین ثابت کرد که برعکس، نابرابری (۱۹) منجر به یک تابع تحلیلی f در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ می‌شود.

---

۱. باید یادآوری کرد که چندجمله‌ای **برنشتین**، با وجود سادگی آن، کمتر به کار می‌رود. دلیل این موضوع این است که هم‌گرایی این چندجمله‌ای، حتی در حالت‌هایی که تابع خاصیت‌های دیفرانسیلی خوبی داشته باشد، خیلی به کندی است.

ما بعضی از نتیجه‌گیری‌های مهمی را که در آغاز سدهٔ بیستم به دست آمده است و تا حد زیادی مسیر نظریهٔ امروزی تقریب تابع‌ها را معین می‌کند، در اینجا آوردیم. اهمیت عملی این نتیجه‌گیری‌ها را می‌توان با مثال زیر روشن کرد.

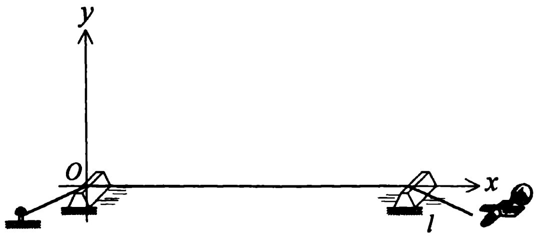
اگر $Q_n(x)$ چندجمله‌ای درجهٔ n باشد که تابع $f(x)$ را در فاصلهٔ $[-۱ , ۱]$ و در $(n + ۱)$ گرهی که منطبق بر صفرهای چندجمله‌ای **چبیشف** $\cos(n + ۱)\arccos x$ هستند، درون‌یابی می‌کند، آنوقت در این فاصله، نابرابری $|f(x) - Q_n(x)| \leq \ln n\, E_n(f)$ برقرار است، که در آن c عبارت است از مقدار ثابتی بدون رابطه با n و $E_n(f)$، بهترین تقریب تابع f در فاصلهٔ $[-۱ , ۱]$. در این نابرابری، می‌توان $E_n(f)$ را، با توجه به همواری تابع f، به کمک (۱۸) یا (۱۹) با مقدارهای بزرگتر از آن عوض کرد و تخمین خوبی از تقریب چندجمله‌ای درون‌یاب به دست آورد. از آن‌جا که $\ln n$، ضمن بزرگ شدن n، خیلی به کندی به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، مرتبهٔ تخمین در این حالت با مرتبهٔ میل $E_n(f)$ به سمت صفر، اختلاف کمی دارد. برتری تفسیر به وسیلهٔ گره چبیشفی در این است که به ازای گره‌های دیگر، ضریب $\ln n$ در نابرابری مربوط، با عبارتی که خیلی سریع‌تر رشد می‌کند جایگزین می‌شود. این به ویژه در حالتی که گره‌ها با فاصلهٔ برابر باشند، درست است.

۷. رشته‌های فوریه

پیدایش رشته‌های فوریه. رشته‌های فوریه در ارتباط با مطالعهٔ برخی پدیده‌های فیزیکی، و قبل از همه، پدیده‌های مربوط به نوسان‌های محیط‌های قابل ارتجاع به وجود آمد. نمونهٔ مشخص چنین نوسان‌هایی را می‌توان در نوسان‌های سیم‌های موسیقی مشاهده کرد. از لحاظ تاریخی، به ویژه بررسی همین نوسان‌های سیم‌ها، منجر به رشته‌های فوریه و تعیین مسیر نظریهٔ مربوط به آن‌ها شد.

سیمی را در نظر می‌گیریم (شکل ۱۱) که خوب کشیده و دو انتهای آن در نقطه‌های $x = ۰$ و $x = l$ از محور Ox محکم شده باشد. اگر سیم را از حالت تعادل خود خارج کنیم، آغاز به نوسان خواهد کرد.

نقطهٔ معینی از سیم را، به طول $x_۰$، دنبال می‌کنیم. نوسان این نقطه از حالت تعادل نسبت به قائم، تابعی است از زمان مثل $\varphi(t)$. همیشه می‌توان سیم را طوری از حالت تعادل خارج



شکل ۱۱

کرد و در لحظهٔ آغازی $t=0$ چنان سرعت‌هایی به نقطه داد که در نتیجه، نقطه‌ای را که دنبال می‌کنیم، نوسان‌های همساز (هارمونیک) در جهت قائم انجام دهد، به نحوی که به وسیلهٔ تابع

$$\varphi=\varphi(t)=A\cos\alpha kt+B\sin\alpha kt \qquad (۲۰)$$

معین شود. در این‌جا، α عبارت است از مقدار ثابتی که تنها به ویژگی‌های فیزیکی سیم (تراکم، قوهٔ انبساط، طول) مربوط است ، k - عدد طبیعی مفروض و A و B مقدارهای ثابت‌اند.

یادآوری می‌کنیم، استدلال‌های ما مربوط به حالتی است که سیم، دارای نوسان‌های کوچکی باشد. به همین مناسبت است که می‌توانیم فرض کنیم، هر نقطهٔ x. تنها در جهت قائم نوسان می‌کند و از نوسان‌های افقی که به آن مخلوط شده است، صرف‌نظر کنیم[۱]. همچنین، میزان اصطکاکی را که ضمن نوسان‌های سیم به وجود می‌آید، آن‌قدر کوچک به حساب می‌آوریم که بتوان از آن‌ها گذشت کرد. به این ترتیب، فرض ما بر این است که نوسان‌ها خاموش نمی‌شوند.

تابع (۲۰)، که متناظر با این و یا آن نوسان همساز است، یک تابع متناوب است با دورهٔ تناوبی برابر $\frac{2\pi}{\alpha k}$. البته، قانون‌هایی از نوسان که به وسیلهٔ این تابع‌ها معین می‌شود، نمی‌تواند

---

۱. بررسی در این باره، به طور مستقیم به معادلهٔ دیفرانسیلی نوسان‌های سیم، یعنی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \left(a=\frac{l}{\pi}\alpha\right)$$

مربوط می‌شود که دربارهٔ آن در بخش ششم، صحبت کرده‌ایم.

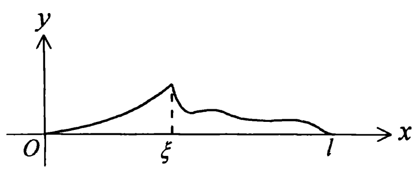
شامل همهٔ قانون‌های ممکنی باشد که نقطهٔ معین $x_{\circ}$ از سیم را به نوسان می‌آورد، ولی به هر حال این قانون‌ها شامل اساسی‌ترین آن‌ها می‌شود. هم تجربه و هم نظریهٔ همراه آن ثابت می‌کند که هر نوسان دل‌خواهی که برای نقطهٔ $x_{\circ}$ در نظر بگیریم، باید به عنوان نتیجه‌ای از ترکیب نوسان‌های مشخصی به صورت (۲۰) بررسی شود. قانون‌های کم و بیش ساده را می‌توان به عنوان مجموع چند نوسان از این نوع به دست آورد، یعنی آن‌ها را با تابع‌هایی به صورت

$$\varphi(t) = A_{\circ} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos\alpha k t + B_k \sin\alpha k t)$$

شرح داد، که در آن A_k و B_k عبارت‌اند از ثابت‌های متناظر. این تابع‌ها را، چندجمله‌ای‌های مثلثاتی گویند. در حالت پیچیده‌تر، قانون مفروض نوسان، به عنوان نتیجه‌ای از ترکیب بی‌نهایت نوسان به‌صورت (۲۰) بررسی می‌شود، که متناظر است با عددهای $k = 1, 2, 3, \ldots$ و ثابت‌های A_k و B_k که به وضع مناسبی انتخاب شده‌اند و به ردیف k مربوط‌اند. به این ترتیب، به نمایش تابع مفروض $\varphi(t)$ با دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{\alpha}$ نیاز پیدا می‌کنیم که معرف قانون نوسان نقطهٔ $x_{\circ}$ است و به صورت رشتهٔ زیر در می‌آید:

$$\varphi(t) = A_{\circ} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos \alpha k t + B_k \sin\alpha k t) \tag{21}$$

حالت‌های دیگری هم در فیزیک وجود دارد که رابطهٔ تابعی مفروض، براساس ملاحظه‌های فیزیکی، به طور طبیعی به صورت مجموع رشتهٔ بی‌پایان مثلثاتی، به صورت (۲۱) در می‌آید. چنین حالتی، از جمله، در همان مسألهٔ مربوط به سیمی که نوسان می‌کند، پیش می‌آید. قانون دقیق نوسان سیمی را که در ابتدای تجزیه، برای نمونه، به صورت شکل ۱۲ داده شده است، می‌توان به سادگی به دست آورد، به شرطی که تجزیهٔ تابع $f(x)$ را، که این شکل را معین کرده است، به صورت رشتهٔ مثلثاتی $f(x) = \sum_{1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{l} x$ بدانیم، که



شکل ۱۲

حالت خاصی از رشتهٔ (۲۱) است.

تجزیهٔ تابع به رشتهٔ مثلثاتی. در ارتباط با آن‌چه گفتیم، پرسشی اساسی و مهم پیش می‌آید: چه تابع‌هایی با دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{\alpha}$ را می‌توان به مجموع مثلثاتی به صورت (۲۱)، بسط داد. این پرسش در سدهٔ هجدهم و به وسیلهٔ *ل.اولر* و *د.برنولی*، در ارتباط با بررسی‌های *د. برنولی* روی سیم‌های نوسانی، طرح شد. *د.برنولی* تحت تاثیر ملاحظه‌های فیزیکی، به این اعتقاد رسیده بود که برای گروه وسیعی از تابع‌های پیوسته، و به خصوص تابع‌هایی که منحنی آن‌ها قابل رسم است، امکان بسط به رشته‌های مثلثاتی وجود دارد. این اعتقاد مواجه با اعتراض بسیاری از ریاضی‌دانان معاصر *برنولی* شد. آن‌ها به سختی به این اعتقاد زمان خود چسبیده بودن که اگر تابعی به صورت یک عبارت تحلیلی باشد (و از آن جمله رشتهٔ مثلثاتی)، باید دارای ویژگی‌های دیفرانسیلی خوبی باشد.ولی، تابعی که در شکل ۱۲ نشان داده شده است، در نقطهٔ ξ، حتی مشتق ندارد؛ در این صورت، آیا می‌توان آن را متناظر با عبارتی تحلیلی دانست که تابع را در تمام فاصلهٔ $[0\ ,\ l]$ معین کند؟

ولی امروز، می‌دانیم که *برنولی*، به‌ویژه از دیدگاه فیزیکی، حق داشته است. ولی برای این‌که، این طرز فکر به کرسی بنشیند، باید یک سدهٔ تمام به انتظار نشست، زیرا برای حل کامل این مسأله‌ها، قبل از هر چیز لازم بود مبانی مفهوم‌های آنالیز ریاضی، و از آن جمله مفهوم حد و مفهوم مجموع یک رشته (که به همان مفهوم حد مربوط می‌شود) دقیق و روشن شود.

با همهٔ این‌ها بررسی‌های عمیق ریاضی، که از دیدگاه فیزیکی قابل تایید بود، براساس درک قدیمی مفهوم‌های اصلی آنالیز و به وسیلهٔ **فوریه**، ریاضی‌دان فرانسوی، در سال‌های ۱۸۰۷ تا ۱۸۲۲ انجام گرفت.

سرانجام **دیریکله**، ریاضی‌دان آلمانی، در سال ۱۸۲۹ با دقت تمام ثابت کرد، هر تابع پیوستهٔ با دورهٔ تناوب $\frac{2\pi}{\alpha}$[1]، که در هر دورهٔ تناوب، تعداد محدودی ماکزیمم و می‌نیمم داشته باشد، به صورت منحصری قابل بسط به رشته مثلثاتی **فوریه** است، رشته‌ای که به طور یکنواخت به سمت این تابع، هم‌گرا باشد[2].

تابعی که در شکل ۱۳ نشان داده شده است، با شرط **دیریکله** می‌سازد. این، یک تابع

---

۱. ω را دوره تناوب تابع $f(x)$ گویند، به شرطی که برابری $f(x+\omega)=f(x)$ برقرار باشد.

۲. در واقع قضیهٔ **دیریکله** دربارهٔ بعضی از گروه تابع‌های ناپیوسته هم صدق می‌کند (تابع‌های به اصطلاح با تغییرهای محدود).البته برای تابع‌های ناپیوسته، هم‌گرایی رشتهٔ مربوط یکنواخت نیست.

پیوستهٔ با دورهٔ تناوبی برابر $\text{۲}\pi$ است، و در هر دورهٔ تناوب $\circ \leq x < \text{۲}\pi$ دارای یک نقطهٔ ماکزیمم و یک نقطهٔ می‌نیمم است.

ضریب‌های فوریه. از این به بعد، تابع‌های با دوره تناوب $\text{۲}\pi$ را درنظر می‌گیریم که کار محاسبه را تا حدی ساده‌تر کرده باشیم. تابع پیوستهٔ $f(x)$ را با دورهٔ تناوب $\text{۲}\pi$ انتخاب می‌کنیم که در شرط **دیریکله** صدق کند. بنابر قضیهٔ **دیریکله**، این تابع را می‌توان به یک رشتهٔ مثلثاتی که به طور یکنواخت به سمت آن هم‌گرا است، بسط داد.

$$f(x) = \frac{a_\circ}{\text{۲}} + \sum_{k=\text{۱}}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (\text{۲۲})$$

این‌که جملهٔ اول رشته را به صورت $\frac{a_\circ}{\text{۲}}$، و نه $a_\circ$، نشان داده‌ایم، اهمیت اساسی ندارد، ولی همان‌طور که خواهیم دید، کار محاسبه را ساده‌تر می‌کند.

مسأله‌ای در نظر می‌گیریم: ضریب‌های a_k و b_k از رشتهٔ مثلثاتی را، دربارهٔ تابع $f(x)$ پیدا کنید. برای این منظور توجه می‌کنیم برابری‌های زیر برقرار است:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \circ \quad (k \neq l; k, l = \circ, \text{۱}, \ldots)$$

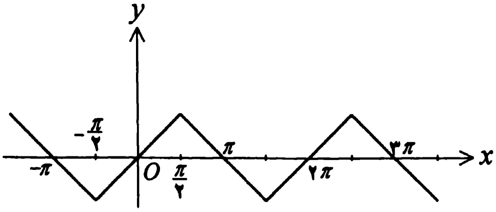
$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin lx \, dx = \circ \quad (k \neq l; k, l = \circ, \text{۱}, \ldots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos lx \, dx = \circ \quad (k, l = \circ, \text{۱}, \text{۲}, \ldots) \qquad (\text{۲۳})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^{\text{۲}} kx \, dx = \pi \quad (k = \text{۱}, \text{۲}, \ldots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^{\text{۲}} kx \, dx = \pi \quad (k = \text{۱}, \text{۲}, \ldots)$$

که تحقیق درستی آن‌ها را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم (این انتگرال‌ها را می‌توان به سادگی محاسبه کرد: حاصل‌ضرب تابع‌های مختلف مثلثاتی را به مجموع یا تفاضل آن‌ها، و مربع آن‌ها را به تابع‌هایی با کمان دو برابر تبدیل می‌کنیم). این برابری‌ها نشان می‌دهند که انتگرال حاصل ضرب هر دو تابع مختلف از دنبالهٔ ۱ ، $\cos x$ ، $\sin x$ ، $\cos \text{۲}x$ ، $\sin \text{۲}x$، در یک دورهٔ



شکل ۱۳

تناوب برابر است با صفر (این ویژگی را، ویژگی تعامد تابع‌های مثلثاتی گویند).از طرف دیگر، انتگرال مربع هرکدام از تابع‌های این دنباله، برابر است با π. در این باره، تنها نخستین تابع (که متحد با واحد است) استثناست و انتگرال مربع آن در یک دورهٔ تناوب، برابر است با 2π. همین موقعیت، انتخاب $\frac{a}{2}$ را به عنوان نخستین عدد رشتهٔ (۲۲) توجیه می‌کند.

اکنون دیگر می‌توانیم این مسأله را به سادگی حل کنیم. برای محاسبهٔ ضریب a_m، سمت چپ وهر کدام از جمله‌های سمت راست رشته (۲۲) را در $\cos mx$ ضرب و جمله به جمله از سمت چپ و سمت راست در فاصلهٔ 2π، انتگرال می‌گیریم. این عمل درست است، زیرا بعد از ضرب در $\cos mx$ به رشته‌ای می‌رسیم که به طور یکنواخت هم‌گرا است. بنابر برابری‌های (۲۳)، همه انتگرال‌هایی که در سمت راست قرار گرفته‌اند، به استثنای انتگرال متناظر با $\cos mx$، برابر با صفر می‌شوند، بنابراین روشن است که

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_m \pi$$

و از آن‌جا

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \tag{۲۴}$$

به همین ترتیب، اگر دو طرف (۲۲) را در $\sin mx$ ضرب و در یک دورهٔ تناوب، انتگرال بگیریم، به دست می‌آید:

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin mx\,dx \qquad (m=1,\ 2,\ \ldots) \tag{۲۵}$$

و به این ترتیب، مسألهٔ ما حل می‌شود. عددهای a_m و b_m که با رابطه‌های (۲۴) و (۲۵) به دست می‌آیند، ***ضریب‌های فوریه*** از تابع $f(x)$ نامیده می‌شوند.

به عنوان نمونه، تابع $f(x)$ را با دورهٔ تناوب 2π، که در شکل ۱۳ نشان داده شده

است، در نظر می‌گیریم. روشن است که این تابع، پیوسته است و در شرط **دیریکله** صدق می‌کند، بنابراین رشتهٔ **فوریهٔ** متناظر آن، به طور یکنواخت به سمت آن هم‌گرا می‌شود.

به سادگی دیده می‌شود، این تابع در شرط $f(-x) = -f(x)$ صدق می‌کند. روشن است که همین شرط دربارهٔ تابع $F_۱(x) = f(x)\cos mx$ هم صدق می‌کند. این شرط نشان می‌دهد، نمودار $F_۱(x)$ نسبت به مبداء مختصات متقارن است. از ملاحظه‌های هندسی، به سادگی معلوم می‌شود که $\int_{-\pi}^{\pi} F_۱(x)\,dx = ۰$ و از آنجا به دست می‌آید $a_m = ۰$ $(m = ۰, ۱, ۲, \ldots)$ سپس، به سادگی روشن می‌شود، نمودار تابع $F_۲(x) = f(x)\sin mx$ نسبت به محور Oy متقارن است و بنابراین

$$b_m = \frac{۱}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_۲(x)\,dx = \frac{۲}{\pi}\int_{۰}^{\pi} F_۲(x)\,dx$$

ولی، به‌جز این، وقتی m عددی زوج باشد، این نمودار نسبت به $\frac{\pi}{۲}$، وسط پاره‌خط $[۰, \pi]$ از محور Ox، متقارن است و بنابراین به ازای مقدارهای زوج m داریم: $b_m = ۰$. وقتی m عددی فرد باشد: $m = ۲l + ۱$ $(l = ۰, ۱, ۲, \ldots)$، نمودار $F_۲(x)$ نسبت به خط $x = \frac{\pi}{۲}$ متقارن است و بنابراین

$$b_{۲l+۱} = \frac{۴}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} F_۲(x)\,dx$$

ولی، همان‌طور که از شکل دیده می‌شود، در فاصلهٔ $\left[۰, \frac{\pi}{۲}\right]$ داریم: $f(x) = x$ و بنابراین، با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به جزء به دست می‌آید:

$$b_{۲l+۱} = \frac{۴}{\pi}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} x\sin(۲l+۱)x\,dx = \frac{۴(-۱)^l}{\pi(۲l+۱)^۲}$$

و در نتیجه

$$f(x) = \frac{۴}{\pi}\sum_{l=۱}^{\infty}\frac{(-۱)^l\sin(۲l+۱)x}{(۲l+۱)^۲}$$

و به این ترتیب، بسط تابع ما به رشتهٔ **فوریه**، به دست می‌آید.

تقارب مجموعه‌های جزئی فوریه به سمت تابعی که آن‌ها را به وجود آورده است. در عمل معمول است، به

عنوان تقریب تابع $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2π، مجموع

$$S_n = \frac{a_\circ}{۲} + \sum_{۱}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

را در نظر می‌گیرند، که عبارت است از n جملهٔ نخست رشتهٔ فوریهٔ آن؛ و در نتیجهٔ مسألهٔ مربوط به اشتباه این تقریب پیش می‌آید. اگر تابع $f(x)$ با دورهٔ تناوب 2π، برای همهٔ مقدارهای x، دارای مشتق $f^{(r)}(x)$ از مرتبهٔ r، باشد و این مشتق در نابرابری $|f^{(r)}(x)| \le K$ صدق کند، اشتباه تقریب، با تخمین زیر بیان می‌شود:

$$|f(x) - S_n(x)| \le \frac{c_r K \ln n}{n^r}$$

که در آن، c_r مقدار ثابتی است که تنها به r بستگی دارد. می‌بینیم که با بزرگ شدن n، این اشتباه به سمت صفر میل می‌کند؛ در ضمن، هر چه تابع مشتق‌های از مرتبهٔ بالاتری داشته باشد، این میل به سمت صفر، سریع می‌شود.

برای تابع‌هایی که روی تمامی محور حقیقی تحلیلی باشند، این تخمین باز هم بهتر است و با نابرابری

$$|f(x) - S_n(x)| < cq^n \tag{۲۶}$$

بیان می‌شود، که در آن c و q مقدارهای ثابتی هستند که به f مربوط‌اند و در ضمن $q < ۱$. مهم این است که برعکس، اگر نابرابری (۲۶) برای تابعی برقرار باشد، به معنای تحلیلی بودن این تابع است. این حقیقت، که کشف آن یکی از موفقیت‌های سدهٔ بیستم است، به مفهوم معینی، اختلاف نظر بین برنولی و هم‌عصران او را از بین برد ودیدگاه‌های آن‌ها را به هم نزدیک کرد. حالا دیگر می‌توان گفت، اگر تابعی قابل بسط به رشتهٔ فوریه‌ای باشد که به سمت آن همگرا است، نمی‌توان این نتیجه را گرفت که این تابع تحلیلی است؛ ولی اگر انحراف آن از مجموع n جملهٔ اول رشتهٔ فوریه سریع‌تر از جمله‌های یک تصاعد نزولی، کوچک شود، آن وقت بدون تردید، یک تابع تحلیلی ا ست.

مقایسهٔ ارزیابی تقریبی که به وسیلهٔ مجموعه‌های فوریه داده شده است در مقایسه با ارزیابی بهترین تقریب این تابع‌ها به کمک چندجمله‌ای‌های مثلثاتی، نشان می‌دهد که مجموعه‌های فوریه دربارهٔ تابع‌های هموار، تقریب بسیار خوبی می‌دهند که به بهترین تقریب

نزدیک است. ولی در حالت تابع‌های پیوستهٔ ناهموار، وضع به این خوبی نیست؛ در بین این تابع‌ها، نمونه‌هایی وجود دارد که رشتهٔ **فوریه** مربوط به آن‌ها در مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های گویای آن‌ها واگرا است.

باید یادآوری کنیم، در نظریهٔ رشته‌های **فوریه**، مسأله‌ای وجود دارد که تا امروز حل نشده است؛ این مسأله، چنین است. باید به این پرسش، پاسخ روشنی داد: آیا تابع پیوسته و متناوب $f(x)$ وجود دارد که مجموع متناظر **فوریه** آن، به ازای $n\to\infty$، برای هیچ کدام از نقطه‌های، x به سمت این تابع میل نکند. بهترین نتیجه را در این زمینه، **م.ن. کولموگوروف** گرفت؛ او در سال ۱۹۲۶ ثابت کرد، تابع متناوبی وجود دارد که قابل انتگرال‌گیری به مفهوم **له‌بگ** باشد و مجموع **فوریهٔ** آن در هیچ نقطه‌ای به سمت آن هم‌گرا نباشد. ولی تابع قابل انتگرال‌گیری ممکن است ناپیوسته باشد (از جمله، تابعی که مورد نظر **کولموگوروف** بود) و بنابراین، این مسأله هنوز منتظر راه حل قطعی خود می‌باشد[۱].

امروز، برای تضمین تقریب برای هر تابع پیوستهٔ متناوب به وسیلهٔ چندجمله‌ای‌های مثلثاتی، از روش‌های به اصطلاح جمع‌بندی رشته‌های **فوریه** استفاده می‌کنند. به جای مجموع‌های **فوریه** به عنوان تابع‌های تقریبی چندجمله‌ای‌های مثلثاتی، نوعی تغییر شکل یافتهٔ آن‌ها را به کار می‌برند. ساده‌ترین این روش‌ها، متعلق به **فه‌یر**، ریاضی‌دان مجارستانی است. بنابراین روش، برای تابع متناوب پیوسته، رشتهٔ **فوریهٔ** مربوط به آن را به طور صوری به دست می‌آورند، که ممکن است واگرا هم باشد، و سپس میانگین عددی n مجموع جزئی اول این رشته را تشکیل می‌دهند:

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1} \qquad (۲۷)$$

---

۱. این مسأله در سال‌های دهه شصت حل شد. p را عددی درست و با شرط $1\le p<\infty$ می‌گیریم. مجموعهٔ تابع‌های متناوبی (با دورهٔ تناوب 2π) را درنظر بگیرید که توان pام قدر مطلق آن‌ها در فاصلهٔ $[0, 2\pi]$ دارای انتگرال به مفهوم له‌بگ (Lebesgue) باشد. مجموعهٔ این گونه تابع‌ها را با $L^p(T)$ نشان می‌دهیم (برای منظور ما این تعریف کافی است، ولی معمولاً نماد $L^p(T)$ به رده‌های هم‌ارز از تابع‌های یاد شده اطلاق می‌شود. دو چنین تابعی را هم‌ارز گویند اگر به تقریب همه‌جا باهم برابر باشند). توجه کنید، مجموعهٔ تابع‌های پیوسته متناوب زیرمجموعه‌ای از $L^p(T)$ است. همان‌طور که در متن اصلی آمده است، کولموگوروف ثابت کرده است تابعی در $L^1(T)$ وجود دارد که رشته فوریه آن در همه‌جا واگرا است. در سال ۱۹۶۶، کارلسون (Carleson) ثابت کرد، چنین تابعی در مجموعهٔ $L^2(T)$ وجود ندارد. در واقع رشتهٔ فوریهٔ همه تابع‌های این مجموعه (و از جمله رشتهٔ فوریهٔ هر تابع پیوسته) به تقریب همه‌جا همگرا است. در سال ۱۹۶۸، هانت (Hunt) قضیهٔ کارلسون را به همهٔ مجموعه‌های $L^p(T)$ برای $p>1$ تعمیم داد (ویراستار).

و آن را **مجموع فه‌یر از مرتبهٔ** nام، که متناظر با تابع مفروض $f(x)$ است، می‌نامند. **فه‌یر** ثابت کرد که $S_n(x)$، وقتی که $n\to\infty$، به طور یکنواخت به سمت $f(x)$ هم‌گرا می‌شود.

۸. تقریب به مفهوم میانگین مربعی

به مسألهٔ مربوط به نوسان‌های سیم برمی‌گردیم. شکل سیم را در لحظه‌ای مثل t، به صورت $y=f(x)$ می‌گیریم. می‌توان ثابت کرد، انرژی پتانسیلی آن W ، یعنی کاری که ضمن انتقال حالت تحریکی به حالت تعادل، آزاد می‌شود (به ازای انحراف‌های کوچک سیم) دست کم با تقریب تا عامل ثابت، برابر است با انتگرال $W=\int_۰^l f'^۲(x)\,dx$. فرض می‌کنیم که تابع $f(x)$ را به تابع دیگر $\varphi(x)$ نزدیک کنیم. در کنار سیم خود، سیم دیگری را که با تابع $\varphi(x)$ معین شود و همچنین سیم سومی را که با تابع $f(x)-\varphi(x)$ معین شود، در نظر می‌گیریم. می‌توان ثابت کرد اگر انرژی

$$\int_۰^l \left[f'^۲(x) \ -\varphi'(x)\right]^۲ dx \qquad (۲۸)$$

از سیم سوم، کوچک باشد، در آن صورت تفاضل انرژی‌های دو سیم اول، باز هم کوچکتر خواهد بود[۱]. بنابراین، اگر قرار باشد انرژی سیم دوم از انرژی سیم اول، اختلاف کمی داشته باشد، باید تابعی مثل $\varphi'(x)$ پیدا کنیم که دربارهٔ آن، انتگرال (۲۸) تا حد ممکن کوچک باشد. ما به طور طبیعی به مسألهٔ مربوط به تقریب تابع (و در این حالت $f'(x)$). به مفهوم میانگین

۱. در واقع اگر

$$\int_۰^l f'^۲\,dx \le M^۲\,,\quad \int_۰^l \varphi'^۲\,dx \le M^۲$$

در آن صورت

$$\left|\int_۰^l f'^۲\,dx-\int_۰^l \varphi'^۲\,dx\right| \le \left(\sqrt{\int_۰^l f'^۲\,dx}+\sqrt{\int_۰^l \varphi'^۲\,dx}\right)\times$$

$$\left|\sqrt{\int_۰^l f'^۲\,dx}-\sqrt{\int_۰^l \varphi'^۲\,dx}\right| \le ۲M\sqrt{\int_۰^l (f'-\varphi')^۲\,dx}$$

(می‌توانید برای نمونه، در کتاب ن. ن. آخیدزر به نام «بحثی دربارهٔ نظریهٔ تقریب» بخش اول، نابرابری مینکوسکی را پیدا کنید).

مربعی می‌رسیم.

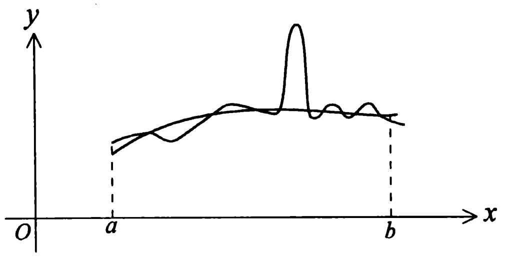
طرح کلی این مسأله، چنین است. در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$، تابع $F(x)$ و به‌جز آن، تابع

$$\Phi(x\,;\alpha_۰\,,\ \alpha_۱\,,\ ...,\ \alpha_n) \tag{۲۹}$$

داده شده است، به نحوی که تابع اخیر نه تنها به x، بلکه در ضمن به پارامترهای $\alpha_۰$، $\alpha_۱$، ... ، α_n بستگی دارد. باید در بین همهٔ پارامترهایی که می‌توان در نظر گرفت، آن‌هایی را انتخاب کرد که به ازای آن‌ها انتگرال

$$\int_a^b [F(x) - \Phi(x\,;\alpha_۰\,,\alpha_۱\,,\,...\,,\alpha_n)]^۲\,dx \tag{۳۰}$$

در میان تمام حالت‌های ممکن آن، کوچکترین باشد. این مسأله، شباهت زیادی به مسألهٔ **چبیشف** دارد. در اینجا هم، صحبت از بهترین تقریب تابع $F(x)$ به کمک تابع‌های خانوادهٔ (۲۹) است، ولی در این‌جا به مفهوم میانگین مربعی. حالا دیگر برای ما مهم نیست که تفاضل $F - \Phi$ برای همهٔ مقدارهای x در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ کوچک باشد؛ در طول بخش کوچکی از آن، تفاضل $F - \Phi$ می‌تواند بزرگ باشد. آنچه مهم است تنها همین مطلب است که انتگرال (۳۰) کوچک شود، همان طور که در مثل، برای دو منحنی شکل ۱۴، همین وضع وجود دارد. کوچک بودن مقدار (۳۰)، دراین باره صحبت می‌کند که بخش‌های بینابینی تابع‌های F و Φ به طور متوسط به هم نزدیک‌اند[1]. در عمل، انتخاب این و یا آن روش، به هدفی که تعقیب می‌کنیم، بستگی پیدا می‌کند. در مثالی که هم اکنون دربارهٔ سیم بررسی



شکل ۱۴

۱. در بخش نوزدهم (جلد سوم) خواهیم دید که بین‌نزدیکی تابع‌ها به مفهوم میانگین مربعی، و فاصلهٔ نقطه‌ها در فضای معمولی، شباهت زیادی وجود دارد.

کردیم، به طور طبیعی تقریب $f'(x)$ به مفهوم میانگین مربعی به دست می‌آید. از طرف دیگر، روش میانگین مربعی نمی‌تواند برای حل مسألهٔ **چبیشف**، که به سازوکارهای ساختمانی او مربوط می‌شود، به کار رود، زیرا اگر سطح اجزای طرح شدهٔ ماشین، ولو در قطعهٔ کوچکی از آن، از محدودهٔ مجاز خارج شود، این قطعه به درد نمی‌خورد: یک چنین برآمدگی، تمامی ماشین را خراب می‌کند. بنابراین، **چبیشف** باید روش ریاضی تازه‌ای برای مسألهٔ علمی خود پیدا می‌کرد.

باید گفت، روش میانگین مربعی، از دیدگاه محاسبه‌ای، قابل دسترس‌تر است، زیرا منجر به کاربرد روش‌های حاضر و آمادهٔ آنالیز عمومی می‌شود.

برای نمونه، مسأله‌ای را بررسی می‌کنیم.

می‌خواهیم بهترین تقریب تابع پیوستهٔ $f(x)$را به کمک مجموعی به صورت

$$\sum_{۱}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$$

به مفهوم میانگین مربعی در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ به دست آوریم، که در آن a_k عددی است ثابت و تابع‌های $\varphi_k(x)$، پیوسته‌اند و دستگاه متعامد و نرمالی را تشکیل می‌دهند.

شرط اخیر به این معناست که این برابری‌ها را داریم:

$$\int_a^b \varphi_k \varphi_l \, dx = ۰ \qquad k \neq l \qquad (k\ ,\ l = ۱\ ,\ ۲\ ,\ ...\ ,\ n)$$

$$\int_a^b \varphi_k^۲ \, dx = ۱ \qquad (k = ۱\ ,\ ۲\ ,\ ...\ ,\ n)$$

عدد a_k را وارد می‌کنیم:

$$a_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) \, dx \qquad (k = ۱\ ,\ ...\ ,\ n)$$

عدد a_k ضریب فوریهٔ تابع f به φ_k گویند.

برای ضریب‌های دل‌خواه α_k براساس ویژگی‌های متعامد بودن و نرمال بودن φ_k، این برابری‌ها برقرار است:

$$\int_a^b \Big(f - \sum_{۱}^{n} \alpha_k \varphi_k\Big)^۲ dx = \int_a^b f^۲ dx + \sum_{۱}^{n} \alpha_k^۲ - ۲\sum_{۱}^{n} \alpha_k a_k = \left[\int_a^b f^۲ dx - \sum_{۱}^{n} a_k^۲\right] + \sum_{۱}^{n} (\alpha_k - a_k)^۲$$

جملهٔاول سمت‌راست این برابری به‌عدد α_k بستگی‌ندارد. بنابراین، سمت‌راست برابری به ازای مقدارهایی از α_kکه جملهٔ دوم را به حداقل خود برساند، می‌نیمم می‌شود، و روشن است به این وضع وقتی می‌توان رسید که عددهای α_kبرابر با ضریب متناظر فوریهٔ a_k باشد.

به این ترتیب، به این نتیجهٔ مهم می‌رسیم: اگر تابع‌های φ_kدر فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ ، خانواده‌ای متعامد و نرمال تشکیل دهند، آن‌وقت مجموع $\sum_{1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x)$ ، وقتی و تنها وقتی، به مفهوم میانگین مربعی، به بهترین صورتی تقریب تابع $f(x)$ را در این فاصله می‌دهد که عددهای α_k ضریب‌های فوریهٔ تابع f نسبت به $\varphi_k(x)$ باشند.

با توجه به برابری‌های (۲۳)، معلوم می‌شود، تابع‌های

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}\ ,\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}\ ,\ \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}\ \ldots$$

خانوادهٔ متعامد و نرمالی در فاصلهٔ $[2\pi\ ,\ 0]$ تشکیل می‌دهند. بنابراین حکم مذکور برای تابع مثلثاتی به این صورت در می‌آید:

مجموع فوریه $S_n(x)$، که برای تابع پیوستهٔ مفروض $f(x)$ با دوره تناوب 2π محاسبه شود، بین چندجمله‌ای‌های مثلثاتی از درجه n، یعنی

$$t_n(x) = \alpha_0 + \sum_{1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

به بهترین صورتی به مفهوم میانگین مربعی، تقریب تابع $f(x)$را در فاصلهٔ $[2\pi\ ,\ 0]$ ، معین می‌کند.

از این نتیجه و قضیه فه‌یر، که در بند ۷ از آن صحبت کردیم، به حقیقت مهم دیگری هم می‌رسیم.

فرض کنید $f(x)$تابعی پیوسته با دورهٔ تناوب 2π و $\sigma_n(x)$ ، مجموع فه‌یر مرتبهٔ nام آن، به نحوی که در بند ۷ و به وسیلهٔ برابری (۲۷) تعریف شد، باشد.

فرض می‌کنیم

$$\max |f(x) - \sigma_n(x)| = \eta_n$$

چون مجموع‌های فوریهٔ $S_k(x)$ $(k = 0\ ,1\ ,\ \ldots\ ,\ n)$، عبارت‌اند از چند جمله‌ای‌های مثلثاتی از مرتبه $k \le n$، روشن است که $\sigma_n(x)$، چندجمله‌ای مثلثاتی ازمرتبهٔ n خواهد بود. بنابراین، با

توجه به آن‌چه دربارهٔ ویژگی حداقل مجموع‌های $S_n(x)$ گفته‌ایم، این نابرابری برقرار است:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^۲ \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \sigma_n(x)]^۲ \, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} \eta_n^۲ \, dx = ۲\pi \, \eta_n^۲$$

از آن‌جاکه بنا بر قضیهٔ فه‌یر، مقدار η_n، وقتی $n \to \infty$، به سمت صفر میل می‌کند، به این نتیجهٔ مهم می‌رسیم.

برای هر تابع پیوستهٔ با دورهٔ تناوب ۲π، این برابری برقرار است:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^۲ \, dx = ۰$$

در این حالت می‌گویند، مجموع فوریهٔ مرتبهٔ nام از تابع پیوستهٔ $f(x)$، وقتی nبه طور نامحدود صعودی باشد، و به مفهوم میانگین مربعی، به سمت $f(x)$ میل می‌کند.

باوجود این، این حکم برای گروه گسترده‌تری از تابع‌ها، که همراه با مجذور خودشان، دارای انتگرال به مفهوم *له‌بگ* هستند، صدق می‌کند.

ما در همین جا متوقف می‌شویم و به حقیقت‌های جالب دیگری که در نظریهٔ رشته‌های فوریه و تابع‌های متعامد، بر پایهٔ تقریب به مفهوم میانگین مربعی وجود دارد، نمی‌پردازیم. خواننده در بخش ششم، با نمونه‌های فیزیکی مهمی از خانواده‌های تابع‌های متعامد، آشنا شده است. سرانجام یادآور می‌شویم، در بخش نوزدهم (جلد سوم)، تا حدی به نحو دیگری، دوباره به همین مسأله برخواهیم گشت.

بخش سیزدهم

روش‌های تقریبی و فن محاسبه

و. ای. کریلوف

۱. روش‌های تقریبی و عددی

ویژگی‌های خاص روش‌های تقریبی. در بسیاری حالت‌ها، کاربرد ریاضیات در مطالعهٔ پدیده‌های دنیای خارج، براین اساس قرار دارد که قانون‌هایی که این پدیده‌ها را اداره می‌کنند، دارای خصلت کمیتی هستند و می‌توان آن‌ها را به صورت فرمول‌ها، معادله‌ها و یا نامعادله‌ها بیان کرد. این امر به ما امکان می‌دهد، خود پدیده‌ها را از راه‌های عددی دنبال کنیم و تا آنجا که برای عمل لازم است، به محاسبه بپردازیم.

وقتی قانون کمیتی پیدا شد، می‌توان از روش‌های خالص بررسی‌های ریاضی، استفاده کرد. برای این‌که وضع مشخصی داشته باشیم، قانون‌هایی را در نظر می‌گیریم که به شکل معادله بیان شده باشند. این قانون می‌تواند قانون حرکت جسم در مکانیک نیوتنی باشد، یا قانون پراکنده شدن حرارت یا پخش نوسان‌های الکترومغناطیسی و از این قبیل باشد. دربارهٔ این معادله‌ها، در بخش‌های پنجم و ششم، به تفصیل گفت‌وگو کرده‌ایم. معمول است، هر معادله‌ای با شرط‌های اضافی همراه باشد (در بخش‌های پنجم و ششم، این شرط‌ها، عبارت بود از شرط‌های حدی و شرط‌های اولیه)، که با معلوم بودن آن‌ها، جواب مشخص هر معادلهٔ مفروض، معین می‌شود.

در این‌جا، اولین و اساسی‌ترین مسأله‌های ریاضی از این قرارند:

۱) قابل حل بودن مسأله ثابت شود. حتی اگر قابل حل بودن مسأله از دیدگاه فیزیکی روشن باشد، اثبات ریاضی آن، می‌تواند گواه بر این باشد که طرح ریاضی مسأله به درستی انجام گرفته است. این اثبات در حالت‌های بسیاری عملی است.

۲) کوشش شود تا بیان روشنی به صورت دستور *(فرمول)* برای کمیت‌هایی که مربوط به پدیدهٔ کامل بررسی است، پیدا شود. چنین بیانی، کم‌وبیش دربارهٔ ساده‌ترین حالت‌ها داده

می‌شود. در ضمن اغلب معلوم می‌شود که بیان روشن جواب، آنقدر پیچیده است که استفادهٔ از آن برای بررسی پدیده و پیدا کردن ویژگی‌های عددی لازم دربارهٔ آن، بسیار دشوار و حتی گاهی ناممکن می‌شود.

۳) تعیین روندی که به کمک آن به یک دستور **تقریبی** رسید که قادر باشد جواب را با هر دقت دل‌خواهی که لازم باشد، به ما بدهد. پیدا کردن چنین دستوری، در بسیاری حالت‌ها ممکن است.

۴) اغلب این امکان هم وجود دارد که یک یا چند روش برای پیدا کردن جواب لازم مسأله، به طریق عددی، پیدا کنیم.

پیشرفت روش‌های عددی، و تا حدی روش‌های تقریبی حل مسأله‌های دانش‌های طبیعی و صنعت، شاخهٔ خاصی از ریاضیات را به وجود آورد که امروز اغلب به آن ریاضیات محاسبه‌ای گویند.

روشن است، روش‌های ریاضیات محاسبه‌ای، روش‌های تقریبی است، زیرا به کمک محاسبه می‌توانیم هر مقداری را تنها با دقت معینی پیدا کنیم، و برای نمونه، تا پنج یا شش رقم دهدهی و یا بیشتر.

در عمل، همین تقریب کافی است، زیرا در بیشتر حالت‌ها، به مقدار دقیق یک کمیت نیازی نداریم. از جمله در صنعت، اغلب کمیت‌های مجهول عبارت‌اند از اندازه‌ها و دیگر عامل‌های محصولی که باید تهیه کرد، همهٔ تولیدهای صنعتی هم با تقریب معینی به دست می‌آیند و بنابراین روشن است، دقت کامل محاسبه، برای آن‌ها، نمی‌تواند معنایی داشته باشد.

به این ترتیب، محاسبه به دستوری با دقت کامل، نیاز ندارد، و برای پیدا کردن کمیت‌های لازم، نیازی به حل معادله‌های با دقت مطلق نیست. می‌توان به جای دستورها و معادله‌های دقیق، از دستورها و معادله‌هایی استفاده کرد که دقت مطلق ندارند، ولی به آن نزدیک‌اند و اشتباهی که از این عدم دقت ناشی می‌شود، از مرز معینی تجاوز نکند.

ما بعد به این مسأله، یعنی امکان تبدیل بعضی مسأله‌ها، به مسأله‌های دیگر، می‌پردازیم. در این‌جا می‌خواهیم روی نخستین ویژگی روش‌های محاسبه‌ای تاکید کنیم: این روش‌ها، بنا بر خصلت خود می‌توانند تنها به نتیجه‌گیری‌های تقریبی بپردازند، و تنها به چنان نتیجه‌هایی که در عمل لازم است.

به ویژگی دیگری هم از روش‌های محاسبه‌ای ریاضیات، توجه کنیم. در هر محاسبه‌ای

می‌توان تنها روی تعداد محدودی عدد، عمل کرد و بعد از محاسبه هم باید تنها به تعداد محدودی نتیجه برسیم. بنابراین، هر مسأله‌ای که برای حل با روش محاسبه‌ای در برابر ما قرار می‌گیرد، باید به چنان صورتی باشد که بتوان همه نتیجه‌های مربوط به آن را بعد از انجام تعداد محدود عمل‌های حسابی، به دست آورد. وقتی عمل محاسبه را روی یک دستور انجام می‌دهیم، باید دستور را از قبل به صورتی در آورد که در آن تعداد محدودی جمله و تعداد محدودی پارامتر باقی مانده باشد. برای نمونه، می‌دانیم بسیاری از تابع‌ها را می‌توان به صورت مجموع یک رشتهٔ توانی نشان داد.

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \qquad (1)$$

از جمله تابع $\sin x$ را، اگر x برحسب رادیان باشد، می‌توان به رشتهٔ توانی تبدیل کرد:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

اگر بخواهیم مقدار دقیق $f(x)$ را پیدا کنیم، باید مجموع «همهٔ» جمله‌های رشتهٔ (۱) را به دست آوریم، که در حالت کلی ممکن نیست. ولی برای این‌که $f(x)$ را به تقریب پیدا کنیم، کافی است تنها تعداد محدودی از جمله‌های رشته را انتخاب کنیم. از جمله می‌توان ثابت کرد، برای محاسبهٔ $\sin x$ با دقت 10^{-5}، برای زاویه‌های از صفر تا ۴۵ درجه، کافی است رشتهٔ توانی را تنها تا جملهٔ x^5 در نظر بگیریم و $\sin x$ را به مقدار تقریبی آن، چندجمله‌ای $\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ تبدیل کنیم.

برای حل عددی مسأله‌های آنالیز ریاضی، که در آن‌ها باید یک تابع را پیدا کرد، باید با روشی، این مسأله را به مسالهٔ دیگری تبدیل کرد که موضوع آن یافتن چند پارامتر باشد، پارامترهایی که با معلوم بودن آن‌ها بتوان تابع مجهول را به تقریب به دست آورد. مثالی در این‌باره می‌آوریم.

فرض کنید بخواهیم در فاصلهٔ $a \le x \le b$، معادلهٔ دیفرانسیلی

$$L(y) - f(x) = y'' + p(x)\, y' + q(x) y - f(x) = 0 \qquad (2)$$

را با شرط‌های حدی $y(a) = 0$ و $y(b) = 0$، حل کنیم. یکی از روش‌های ممکن حل این است که بنا بر روش **گالرکین** از یک دستگاه مستقل خطی تابع‌های مجهول $\omega_1(x)$، $\omega_2(x)$، ... آغاز کنیم که با شرط‌های حدی بسازند (بخش ششم، بند ۵). چنین دستگاهی را به این

مفهوم «کامل» انتخاب می‌کنند که بین تابع‌های قابل انتگرال‌گیری در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$، ω_kها تنها تابع‌هایی بر همهٔ ω_k $(k=1,2,\dots)$ متعامد هستند که در همهٔ نقطه‌ها (یا دقیق‌تر: «به تقریب در همهٔ نقطه‌ها») برابر صفر باشند. این شرط که $y(x)$ در معادلهٔ دیفرانسیلی (۲) صدق کند، می‌تواند به این صورت نوشته شود:

$$\int_a^b [L(y)-f]\,\omega_k\,dx = 0 \qquad (k=1,\ 2,\ \dots) \tag{۳}$$

فرض می‌کنیم، بتوان جواب مسأله را به صورت رشته‌ای برحسب ω_k بسط داد:

$$y(x)=a_1\omega_1(x)+a_2\omega_2(x)+\cdots \tag{۴}$$

در اینجا باید ضریب‌های a_k را به دست آورد. به ازای هر مقدار a_k مجموع رشتهٔ (۴) با شرط حدی سازگار است. تنها این می‌ماند که مقدارهای a_k را طوری انتخاب کنیم که برابری (۳) برقرار باشد. ضریب‌های a_k یک مجموعهٔ بی‌پایان را تشکیل می‌دهند و محاسبهٔ همه آن‌ها، در حالت کلی، ممکن نیست. برای ساده کردن کار، تنها تعداد محدودی از جمله‌های سمت راست برابری (۴) را در نظر می‌گیریم و به تقریب فرض می‌کنیم:

$$y(x)\approx a_1\omega_1(x)+\cdots+a_n\omega_n(x) \tag{۵}$$

برابری (۳) را نمی‌توانیم برای همهٔ ω_kها $(k=1,2,\dots)$ برقرار کنیم، زیرا تنها n پارامتر a_k $(k=1,2,\dots,n)$ را در نظر گرفته‌ایم. بنابراین ناچاریم از حل دقیق معادلهٔ دیفرانسیلی (۲)، صرف‌نظر کنیم. ولی باید انتظار داشت، اگر n را به اندازهٔ کافی بزرگ بگیریم و شرط (۳) برای n تابع اول ω_k برقرار باشد، مجموع (۵) با خطای کوچکی در این معادلهٔ دیفرانسیلی صدق کند. و این منجر به معادله‌ای می‌شود که با روش ***گالرکین*** تنظیم شده است:

$$\int_a^b \left[L\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k\right)-f\right]\omega_i\,dx = 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \dots,\ n)$$

و با به‌دست آوردن a_k از این معادله‌ها، توانسته‌ایم بیان تقریبی تابع (۵) را پیدا کنیم.

به همین ترتیب، می‌توان دستورهای مربوط به حل مسأله‌های وردشی را طبق روش **ریتس** و بسیاری از مسأله‌های دیگر را ساده کرد.

باز هم مثال دیگری از ساده کردن معادله‌ها را می‌آوریم. فرض کنید می‌خواهیم تابع y را،

از یک یا چند آوند، از طریق حل یک معادلهٔ تابعی، و از جمله دیفرانسیلی یا انتگرالی، به دست آوریم. به عنوان پارامترهایی که تابع yرا معین می‌کنند، می‌توان مجموعهٔ مقدارهای $y_۱$ ، $y_۲$ ، ... ، y_n آن را، در یک دستگاه نقطه (در یک شبکه)، در نظر گرفت.

باید معادلهٔ تابعی را به دستگاهی از معادله‌های عددی نسبت به n مقدار مجهول $y_k(k = ۱ , ... , n)$، تبدیل کنیم. همان‌طور که معلوم است، این تبدیل را با روش‌های مختلف می‌توان انجام داد. در ضمن، همیشه باید مراقب این وضع بود که جواب دستگاه عددی، نسبت به جواب معادلهٔ تابعی، اختلافی به اندازهٔ کافی کوچک داشته باشد.

چند نمونه از این‌گونه تبدیل‌ها را می‌آوریم. وقتی معادلهٔ دیفرانسیلی درجهٔ اول $y' = f(x , y)$ را با روش *اولر* حل می‌کنیم، آن را به یک طرح عددی برگشتی تبدیل می‌کنیم که به کمک آن می‌توان هر مقدار تابع مجهول را، به تقریب برحسب مقدار قبلی آن به دست آورد (بخش پنجم، بند ۵):

$$y_{n+۱} = y_n + (x_{n+۱} - x_n) f(x_n , y_n)$$

برای حل تقریبی معادله لاپلاس $\Delta u = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$ با روش شبکه‌ها، این معادله را به یک دستگاه جبری خطی، تبدیل می‌کنیم (بخش ششم، ۵):

$$u(x + h , y) + u(x , y + h) + u(x - h , y) + u(x , y - h) - ۴u(x , y) = ۰$$

باز هم مثالی از همین نمونه می‌آوریم. فرض کنید بخواهیم این معادلهٔ انتگرالی را به صورت عددی حل کنیم:

$$y(x) = f(x) + \int_a^b K(x,s) y(s) ds \qquad (۶)$$

نقطه‌هایی را که می‌خواهیم مقدارهای تابع مجهول $y(x)$را در آن‌ها پیدا کنیم به $x_۱$، $x_۲$، ... ، x_n نشان می‌دهیم. برای تشکیل دستگاه معادله‌های عددی، به عنوان جانشین (۶)، باید این برابری را، نه برای همهٔ مقدارهای x در فاصلهٔ $a \le x \le b$، بلکه تنها برای مقدارهای $x_i(i = ۱ , ... , n)$ در نظر گرفت:

$$y(x_i) = f(x_i) + \int_a^b K(x_i , s) y(s) ds$$

بعد این انتگرال را (به وسیلهٔ دستور ذوزنقه‌ها یا دستور *سیمپسون* و یا دستور دیگری[۱]) با

---

۱. بخش دوازدهم، بند ۳ را ببینید.

مجموع تقریبی آن در نقطه‌های گرهی x_1، ...، x_n عوض می‌کنیم:

$$\int_a^b K(x_i\ ,\ s)\,y(s)\,ds \approx \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\,K(x_i\ ,\ x_j)\,y(x_j)$$

برای تعیین مقدارهای مجهول $y(x_i)$ دستگاه معادله‌های جبری خطی را به دست می‌آوریم:

$$y(x_i) = f(x_i) + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\ \ K(x_i\ ,\ y_j)\,y(x_j) \quad (i = 1,\ 2,\ \dots,\ n) \tag{7}$$

یادآوری می‌کنیم، در همهٔ روش‌هایی که برای جست‌وجوی تابع مجهول وجود دارد، پیدا کردن تابع منجر به جست‌وجوی پارامترهایی می‌شود که با معلوم بودن آن‌ها می‌توان خود تابع را به تقریب معین کرد. بنابراین، دقت این روش‌ها مربوط به این است که تابع مفروض تا چه حد می‌تواند به وسیلهٔ این پارامترها به خوبی معین شود، برای نمونه، تابع ما تا چه اندازه می‌تواند به عبارتی به صورت (۷) نزدیک باشد و یا در چه دستگاهی از نقطه‌ها می‌تواند به وسیلهٔ مقدارهای به دست آمده، مشخص شود. این‌گونه پرسش‌ها، مربوط به شاخه‌ای از ریاضیات می‌شود که به نام نظریهٔ تقریب تابع‌ها معروف است (بخش دوازدهم را ببینید). از آن‌چه گفتیم، اهمیت بی‌اندازهٔ نظریهٔ تقریب برای ریاضیات عملی، روشن می‌شود.

هم‌گرایی روش تقریبی و ارزیابی خطاها. حالا با تفصیل بیشتری به شرح حالت‌های لازمی می‌پردازیم که از دیدگاه محاسبه، به روش تقریبی مربوط می‌شود. ساده‌ترین و در عین‌حال اساسی‌ترین موضوع، به امکان پیدا کردن مقدار مجهول، با دقت لازم، مربوط می‌شود.

دقت محاسبه، می‌تواند در مسأله‌های مختلف، به کلی متفاوت با هم باشد. برای بعضی از مسأله‌های صنعتی، تا دقت دو یا سه رقم بعد از ممیز، کافی است. بیشتر محاسبه‌های مهندسی تا سه یا چهار رقم بعد از ممیز، انجام می‌گیرد. دقت‌های بیشتر از این، برای محاسبه‌های علمی لازم است. به طور کلی، در جریان زمان و با پیشرفت دانش، نیاز به دقت، بیشتر می‌شود.

بنابراین، چنان روش‌ها و روندهای تقریبی اهمیت اساسی دارند که به کمک آن‌ها بتوانیم نتیجه‌گیری‌های مربوط را با هر دقتی که لازم داریم، به دست آوریم. چنین روش‌هایی را، روش‌های هم‌گرا گویند. از آن‌جا که در محاسبه‌های عملی، بیش از همه به چنین روش‌هایی

برخورد می‌کنیم، ما هم از این به بعد، همین روش‌ها را در نظر می‌گیریم.

فرض کنید x مقدار دقیق کمیت مجهول باشد. بنا بر هر کدام از این روش‌ها، می‌توان دنبالهٔ تقریب‌های x_1، x_2، ...، x_n، ... را برای جواب x ساخت.

بعد از آن‌که روش ساختن تقریب‌ها معین شد، نخستین مسالهٔ نظریهٔ این روش عبارت است از روشن کردن هم‌گرایی به سمت جواب $x_n \to x$، و اگر این هم‌گرایی همیشه وجود ندارد، مشخص کردن شرط‌هایی که به ازای آن‌ها این هم‌گرایی برقرار است.

وقتی وجود هم‌گرایی ثابت شد، دشوارترین و مهم‌ترین موضوع، یعنی ارزیابی سرعت هم‌گرایی مطرح می‌شود: باید معلوم شود وقتی $n \to \infty$، x_n با چه سرعتی به سمت جواب x میل می‌کند. هر روش هم‌گرا، از نظر اصولی دارای این امکان است که می‌توان به کمک آن، مقدار جواب را با هر دقت دل‌خواه پیدا کرد، به شرطی که مقدار تقریبی x_n را به ازای مقداری از n که به اندازهٔ کافی بزرگ باشد، در نظر بگیریم. ولی روشن است که هر چه n بزرگتر باشد، برای پیدا کردن x_n باید نیروی بیشتری صرف کرد. بنابراین، اگر x_n به کندی به سمت x میل کند، برای رسیدن به دقت لازم، باید به کار محاسبه‌ای عظیم‌تری تن در دهیم.

در ریاضیات، و به‌ویژه در کاربردهای آن، حالت‌های زیادی وجود دارد که برای پیدا کردن جواب x می‌توان روند هم‌گرایی را پیدا کرد، ولی برای رسیدن به نتیجهٔ عملی، به چنان کار محاسبه‌ای عظیمی نیازمند است که انجام آن حتی از عهدهٔ ماشین‌های تندکار امروزی هم بر نمی‌آید[1].

---

۱. چند نمونهٔ ساده از روندهای محاسبه‌ای را که به کندی به سمت جواب میل می‌کنند، می‌آوریم. می‌دانیم رشتهٔ $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ هم‌گرا، و مجموع آن برابر است با لگاریتم طبیعی عدد ۲. می‌توانیم $\ln 2$ را به کمک این رشته و با محاسبهٔ مجموع $S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \cdots \pm \frac{1}{n}$، یعنی مجموع n جملهٔ اول آن و با انتخاب عدد به اندازهٔ کافی بزرگی برای n، محاسبه کنیم. ولی می‌توان روشن کرد که برای محاسبه $\ln 2$ با خطایی کمتر از نصف پنجمین رقم معنی‌دار، باید بیش از ۱۰۰۰۰۰ جمله از رشته را انتخاب کرد. و پیدا کردن چنین مجموعی، اگر بخواهیم تنها از ماشین‌های حساب رومیزی استفاده کنیم، بسیار دشوار است. همچنین، این رشته را می‌شناسید:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2 \times 1!} + \frac{1 \times 3}{2^2 \times 2!} - \frac{1 \times 3 \times 5}{2^3 \times 3!} + \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7}{2^4 \times 4!} - \cdots$$

هم‌گرایی این رشته به قدری کند است که اگر بخواهیم $\frac{1}{\sqrt{2}}$ را به کمک آن با دقت 10^{-5} محاسبه کنیم، باید به تقریب 10^{10} جمله از آن را انتخاب کنیم، که انجام آن، حتی با ماشین‌های تندکار حساب هم، با دشواری روبه‌رو می‌شود.

سرعت ناکافی هم‌گرایی، یکی از حالت‌های مربوط به نارسایی روش است. برای نارسائی روش، نشانه‌های دیگری هم وجود دارد؛ برای مقایسهٔ روش‌ها با یکدیگر، باید به جنبه‌های زیادی توجه کرد که یکی از مهم‌ترین آن‌ها، راحتی انجام محاسبه به کمک ماشین است. از میان دو روش، گاهی روشی برتری دارد که گرچه دارای هم‌گرایی کندتری است، ولی محاسبه‌های مربوط به آن را می‌توان به ماشین‌های حساب سپرد.

خطایی که ضمن تبدیل x به مقدار تقریبی x_n به دست می‌آید، برابر است با تفاضل $x-x_n$. مقدار دقیق آن معلوم نیست و برای این‌که دربارهٔ سرعت هم‌گرایی داوری کنند، قدر مطلق این تفاضل را از بالا ارزیابی می‌کنند، یعنی مقدار A_n را طوری در نظر می‌گیرند که داشته باشیم:

$$|x-x_n| \leq A_n$$

و آن را ***ارزیابی خطا*** می‌نامند. نمونه‌هایی از ارزیابی A_n را می‌آوریم. اغلب دربارهٔ سرعت هم‌گرایی x_n به x، از روی سرعت نزول A_n داوری می‌کنند. برای این‌که ارزیابی ما، مرتبهٔ واقعی نزدیکی x_n به x را منعکس کند، باید A_n با $|x-x_n|$ اختلاف کمی داشته باشد. علاوه بر این، ارزیابی A_n باید واقعی باشد، یعنی بتوان آن را در واقع به دست آورد، درغیراین صورت، نمی‌تواند قابل استفاده باشد.

x را کمیت عددی متغیری می‌گیریم که باید مقدار آن را از معادله‌ای به دست آورد. فرض کنیم که این معادله را به صورت

$$x=\varphi(x) \tag{۸}$$

به ما داده باشند. برای حل این معادله، از ***روش تکرار*** استفاده می‌کنیم. این روش را اغلب، ***روش تقریب‌های متوالی*** هم می‌گویند. برای آشنا شدن با خود روش و ارزیابی مربوط به آن، حالت یک معادلهٔ عددی را در نظر می‌گیریم (از این روش در دستگاه معادله‌های عددی و معادله‌های دیفرانسیلی و انتگرالی و بسیاری حالت‌های دیگر هم می‌توان استفاده کرد. دربارهٔ کاربرد این روش در معادلهٔ دیفرانسیلی عادی، می‌توانید به بخش پنجم، بند ۵ مراجعه کنید).

فرض می‌کنیم، به وسیله‌ای، مقدار تقریبی x_0 را برای ریشهٔ معادله پیدا کرده باشیم. اگر x_0 جواب دقیق معادلهٔ (۸) باشد، بعد از قرار دادن آن در $\varphi(x)$، باید نتیجه‌ای برابر با x_0 به دست آید. ولی، از آن‌جا که در حالت کلی، x_0 با جواب دقیق تطبیق نمی‌کند، مقدار $\varphi(x_0)$ با x_0

تفاوت دارد. آن را به $x_1 = \varphi(x_0)$ نشان می‌دهیم.

برای این‌که ببینیم در چه حالتی x_1 نسبت به x_0 به جواب دقیق نزدیک‌تر است، به مضمون هندسی مسأله‌مان مراجعه می‌کنیم. این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$y = \varphi(x) \tag{۹}$$

محور عددی را در نظر می‌گیریم و x و y را نقطه‌هایی از این محور می‌گیریم. معادلهٔ (۹)، هر نقطهٔ x از محور را بانقطهٔ دیگری از همین محور متناظر می‌کند؛ و می‌توان آن را به عنوان نگاشت نقطه‌های یک محور بر خودش در نظر گرفت.

روی محور عددی، پاره‌خط $[x_1 , x_2]$ را در نظر می‌گیریم: ضمن تبدیل (۹)، نقطه‌های x_1 و x_2، منجر به این نقطه‌ها می‌شوند:

$$y_1 = \varphi(x_1) \ , \ y_2 = \varphi(x_2)$$

پاره‌خط $[x_1 , x_2]$ به پاره‌خط $[y_1 , y_2]$ تبدیل می‌شود. نسبت

$$K = \frac{|y_2 - y_1|}{|x_2 - x_1|}$$

«ضریب اتساع» پاره‌خط، ضمن تبدیل است. اگر $K < 1$ باشد، با انقباض پاره‌خط سروکار داریم.

به معادلهٔ (۸) برمی‌گردیم. این معادله می‌گوید، نقطهٔ لازم x، باید بعد از تبدیل (۹) به خودش منجر شود. به این ترتیب، حل معادلهٔ (۸)، هم‌ارز است با پیدا کردن نقطه‌هایی از محور عددی که ضمن تبدیل (۹) به خودش منجر شود، یعنی ثابت و بدون حرکت باقی بماند.

حالا، پاره‌خط $[x , x_0]$ را در نظر می‌گیریم که یک سر آن در نقطهٔ ثابت x و سر دیگر آن، در نقطهٔ x_0 است. ضمن تبدیل، x_0 به x_1، پاره‌خط $[x , x_0]$ به پاره‌خط $[x , x_1]$، منجر می‌شود. اگر تابع φ طوری باشد که ضمن تبدیل (۹) همهٔ پاره‌خط‌ها منقبض شوند، آنوقت نقطهٔ x_1 هم در واقع نسبت به نقطهٔ x_0، به ریشهٔ معادلهٔ (۸) نزدیکتر است.

وقتی بخواهیم تقریب‌هایی را به دست آوریم که به سمت جواب (۸) همگرا باشند، باید در سمت راست معادلهٔ (۸)، تبدیل‌ها را تکرار کنیم و دنبالهٔ عددهای

$$x_1 = \varphi(x_0) \ , \ x_2 = \varphi(x_1) \ , \ldots \ , \ x_{n+1} = \varphi(x_n) \ , \ \ldots \tag{۱۰}$$

را بسازیم. حالا به اثبات قضیهٔ مربوط به هم‌گرایی دنبالهٔ تقریب‌های (۱۰) می‌پردازیم[۱].

فرض می‌کنیم، تابع $\varphi(x)$ در فاصله‌ای مثل $[a\ ,\ b]$ تعریف شده باشد و برابری (۹) هم تبدیل $[a\ ,\ b]$ را بر خودش بدهد، یعنی به ازای هر مقدار x از فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$، $y=\varphi(x)$ هم متعلق به $[a\ ,\ b]$ باشد. همچنین فرض می‌کنیم، تقریب اولیهٔ $x_{\circ}$ را روی $[a\ ,\ b]$ انتخاب کرده باشیم، در این صورت، تقریب‌های متوالی (۱۰) هم روی پاره‌خط $[a\ ,\ b]$ قرار می‌گیرد. با این شرط‌ها، قضیهٔ زیر درست است. اگر $\varphi(x)$ دارای مشتق φ' باشد که در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ در شرط

$$|\varphi'|\leq q<۱$$

صدق کند، حکم زیر برقرار است. معادلهٔ (۸)، دارای ریشهٔ x^* در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ است. دنبالهٔ (۱۰) به سمت این ریشه هم‌گرا است و سرعت هم‌گرایی آن با این نابرابری ارزیابی می‌شود:

$$|x^*-x_n|\leq\frac{m}{۱-q}q^n$$

که در آن $m=|x_{\circ}-\varphi(x_{\circ})|=|x_{\circ}-x_۱|$. معادلهٔ (۸) در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ دارای ریشهٔ منحصر به‌فرد است.

برای این‌که این حکم را ثابت کنیم، تفاضل $x_۲-x_۱$ را ارزیابی می‌کنیم. با استفاده از دستور **تیلور** [بخش دوم (جلد اول)، بند ۹، (۲۶)] و با فرض $n=\circ$ در آن، به دست می‌آوریم:

$$x_۲-x_۱=\varphi(x_۱)-\varphi(x_{\circ})=\varphi'(\xi_{\circ})\,(x_۱-x_{\circ})$$

نقطهٔ $\xi_{\circ}$ بین $x_۱$ و $x_{\circ}$ قرار گرفته است و متعلق به پاره‌خط $[a\ ,\ b]$ است. به این ترتیب $|\varphi'(\xi_{\circ})|\leq q$ و

$$|x_۲-x_۱|\leq q\ |x_۱-x_{\circ}|=mq$$

به همین ترتیب

$$|x_۳-x_۲|=|\varphi(x_۲)-\varphi(x_۱)|=|\varphi'(\xi_۱)(x_۲-x_۱)|\leq q\ |x_۲-x_۱|\leq mq^۲$$

---

۱. این قضیه و قضیه‌های شبیه آن را در ریاضیات، به مناسبت مفهوم هندسی آن‌ها که در بالا هم دربارهٔ آن‌ها صحبت کردیم، اغلب قضیه‌های انقباض می‌گویند.

اگر این ارزیابی‌ها را ادامه دهیم، معلوم می‌شود، به ازای هر مقدار n این نابرابری برقرار است:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq mq^n \qquad (11)$$

اکنون، هم‌گرایی دنبالهٔ x_n را ثابت می‌کنیم. برای این منظور، رشتهٔ کمکی

$$x_0 + (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \cdots \qquad (12)$$

را در نظر می‌گیریم. مجموع جزئی $(n+1)$ جملهٔ اول آن برابر است با

$$S_{n+1} = x_0 + (x_1 - x_0) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n$$

بنابراین $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1}$ و وجود حد محدود برای x_n، هم‌ارز با هم‌گرایی رشتهٔ (۱۲) می‌شود. رشتهٔ (۱۲) را با رشتهٔ

$$|x_0| + m + mq + \cdots + mq^{n-1} + \cdots$$

مقایسه می‌کنیم.

بنابر ارزیابی (۱۱)، جمله‌های رشتهٔ (۱۲) از لحاظ قدر مطلق، بزرگتر از جمله‌های متناظر رشتهٔ اخیر نیستند. ولی این رشته، اگر جملهٔ $|x_0|$ را از آن حذف کنیم، یک تصاعد هندسی با قدر نسبت q است، و چون $q < 1$، بنابراین رشته هم‌گرا است. در نتیجه، رشتهٔ (۱۲) هم هم‌گرا است و دنبالهٔ (۱۰) به سمت حد x^* هم‌گرا است.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$$

روشن است x^* متعلق به فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ است، زیرا هر x_n به این فاصله تعلق دارد.

اگر برابری $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ را در حالت حدی و به ازای $n\to\infty$ در نظر بگیریم، در حد به برابری $x^* = \varphi(x^*)$ می‌رسیم، که در واقع معرف این است که x^* در معادلهٔ (۸) صدق می‌کند. حالا، نزدیکی x_n به x^* را ارزیابی می‌کنیم. x_n و یکی از تقریب‌های بعدی، مثل x_{n+p}، را انتخاب می‌کنیم.

$$|x_{n+p} - x_n| = |(x_{n+p} - x_{n+p-1}) + (x_{n+p-1} - x_{n+p-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)|$$

$$\leq mq^{n+p-۱}+mq^{n+p-۲}+\dots+mq^{n}=\frac{mq^{n}-mq^{p+n}}{۱-q}$$

از آن‌جا به ازای $p\to\infty$، با در نظر گرفتن $x_{n+p}\to x^*$ و $q^{n+p}\to ۰$، نتیجه می‌شود:

$$|x^*-x_n|\leq\frac{m}{۱-q}q^{n}$$

اکنون این می‌ماند که حکم مربوط به منحصر به فرد بودن را ثابت کنیم. فرض کنید x' ریشه دیگری از معادله در فاصلهٔ $[a\ ,\ b]$ باشد. تفاضل $x'-x^*$ را ارزیابی می‌کنیم:

$$|x'-x^*|=|\varphi(x')-\varphi(x^*)|=|\varphi'(\xi)(x'-x^*)|\leq q|x'-x^*|$$

از آن‌جا

$$(۱-q)\ |x'-x^*|\leq ۰$$

چون $۱-q>۰$، نابرابری اخیر تنها وقتی ممکن است که $|x'-x^*|=۰$. یعنی جواب x' بر x^* منطبق است.

قضیه‌ای را که ثابت کردیم، نه تنها شرط‌های کافی برای هم‌گرایی روش نشان می‌دهد، بلکه در ضمن امکان می‌دهد، تعداد گام‌های لازم برای انجام عمل‌ها را هم ارزیابی کنیم؛ یعنی از اثبات این قضیه معلوم می‌شود، n را چگونه باید انتخاب کرد تا وقتی که به جای جواب دقیق x^*، مقدار x_n را می‌گیریم، به دقت لازم برسیم. این ارزیابی عملی است، زیرا مقدارهای m و q را که در نابرابری $|x^*-x_n|\leq\frac{m}{۱-q}q^{n}$ وارد شده‌اند، می‌توان به کمک بررسی تابع φ به دست آورد.

به عنوان مثال، معادلهٔ $x=k\tan x$ را در نظر می‌گیریم که در بسیاری از حالت‌های عملی کاربرد دارد. برای مشخص بودن وضع به حالت $k=۰/۵$ می‌پردازیم. فرض کنید بخواهیم کوچکترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x=\frac{۱}{۲}\tan x$ را پیدا کنیم. اگر از یک جدول و یا منحنی تابع $\tan x$ استفاده کنیم، معلوم می‌شود، این ریشه نزدیک به ۱ و کمی بزرگتر از آن است.

برای این‌که شرط $|\varphi'|\leq q<۱$، که در نظریهٔ مربوط به هم‌گرایی روش تکرار وجود دارد، تامین می‌کنیم، تابع وارون $\tan x$ را به دست می‌آوریم و معادله را به صورت $x=\arctan ۲x$ می‌نویسیم که با معادلهٔ مفروض هم‌ارز است.

نتیجهٔ محاسبه‌ها را می‌آوریم. به عنوان تقریب آغازی، $x_0 = 1$ می‌گیریم. به کمک جدول تابع $\arctan x$، می‌توانیم به ترتیب مقدارهای زیر را به دست آوریم:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \text{arc tan}\,2 &&= 1.10715\\
x_2 &= \text{arc tan}\,2.21430 &&= 1.14660\\
x_3 &= \text{arc tan}\,2.29320 &&= 1.15959\\
x_4 &= \text{arc tan}\,2.31918 &&= 1.16370\\
x_5 &= \text{arc tan}\,2.32740 &&= 1.16498\\
x_6 &= \text{arc tan}\,2.32996 &&= 1.16538\\
x_7 &= \text{arc tan}\,2.33076 &&= 1.16550\\
x_8 &= \text{arc tan}\,2.33100 &&= 1.16554\\
x_9 &= \text{arc tan}\,2.33108 &&= 1.16555\\
x_{10} &= \text{arc tan}\,2.33110 &&= 1.16556\\
x_{11} &= \text{arc tan}\,2.33112 &&= 1.16556
\end{aligned}
$$

محاسبه را در این‌جا قطع می‌کنیم، زیرا در عمل‌های بعدی همین رقم‌ها تکرار می‌شوند:

$$x^* = 1.16556$$

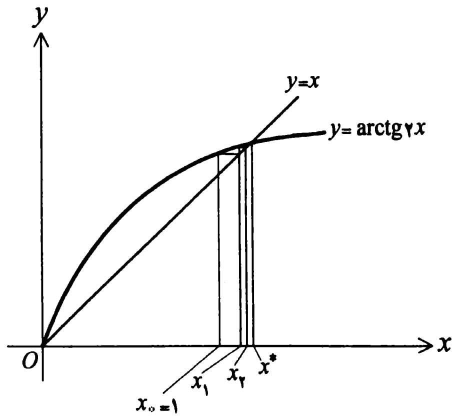
طرح هندسی نزدیک شدن به ریشه را در شکل ۱ نشان داده‌ایم. میل x_n به سمت x^* چنان سریع است که در روی شکل x_4 بر x^* منطبق می‌شود.

مثال دیگری هم از روش تکرار می‌دهیم. معادلهٔ انتگرالی

$$y(x) = \frac{1}{6}\int_0^1 e^{xt}y(t)\,dt + e^x - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x+1}\left(e^{x+1} - 1\right) \qquad (13)$$

را به‌صورت عددی حل می‌کنیم. جواب دقیق آن $y = e^x$ است.

قبل از همه، معادلهٔ انتگرالی را با دستگاه جبری خطی عوض می‌کنیم. برای این منظور، فاصلهٔ انتگرال‌گیری $[0, 1]$ را، به وسیلهٔ نقطه‌های $t = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$، به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنیم. مقدارهای تابع مجهول y را در این نقطه‌ها به ترتیب y_0، y_1، y_2، y_3 و y_4 می‌نامیم. اگر بخواهیم معادله به ازای $x_0 = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$ برقرار باشد و انتگرال را برای چهار انتگرال جزئی به مجموع مربعی سیمپسون تغییر دهیم [بخش دوازدهم، بند ۳،



شکل ۱

دستور (۶)]، در آن صورت برای پیدا کردن y_k، این دستگاه معادله‌ها به دست می‌آید:

$$y_0 = \frac{1}{6}[0.083333\, y_0 + 0.333333\, y_1 + 0.166667\, y_2 + 0.333333\, y_3 + 0.083333\, y_4] + 0.713619$$

$$y_1 = \frac{1}{6}[0.083333\, y_0 + 0.354831\, y_1 + 0.188858\, y_2 + 0.402077\, y_3 + 0.107002\, y_4] + 0.951980$$

$$y_2 = \frac{1}{6}[0.083333\, y_0 + 0.377716\, y_1 + 0.214004\, y_2 + 0.484997\, y_3 + 0.137393\, y_4] + 1.261867$$

$$y_3 = \frac{1}{6}[0.083333\, y_0 + 0.402077\, y_1 + 0.242499\, y_2 + 0.585018\, y_3 + 0.176417\, y_4] + 1.664181$$

$$y_4 = \frac{1}{6}[0.083333\, y_0 + 0.428008\, y_1 + 0.274787\, y_2 + 0.705667\, y_3 + 0.226523\, y_4] + 2.185861$$

دستگاه با روش‌تکرار حل شده‌است. به‌عنوان‌تقریب‌های‌اولیه برای $y_k (k=0, 1, 2, 3, 4)$، جمله‌های ثابت معادله‌ها به ترتیب $y_0^{(0)} = 0.713619$، $y_1^{(0)} = 0.951980$، ... در نظر گرفته شده است. مقدارهای به دست آمدهٔ تقریب‌های بعدی در جدول ۱ داده شده است.

در انتهای جدول ۱، به منظور مقایسه، مقدارهای دقیق جواب‌ها داده شده است. تقریب‌های بعدی، مقدارهایی را که برای y_k به دست آمده است، بهتر نمی‌کند. انحرافی که

جدول ۱

شمارهٔ تقریب	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
۱	۰ر۹۳۴۲۸	۱ر۲۰۸۴۱	۱ر۵۶۱۲۹	۲ر۰۱۵۴۲	۲ر۵۹۹۷۲
۲	۰ر۹۸۵۱۷	۱ر۲۶۶۹۹	۱ر۶۲۹۰۵	۲ر۰۹۴۱۹	۲ر۶۹۱۷۳
۳	۰ر۹۹۶۶۷	۱ر۲۸۰۲۱	۱ر۶۴۴۳۳	۲ر۱۱۱۹۴	۲ر۷۱۲۴۵
۴	۰ر۹۹۹۲۶	۱ر۲۸۳۱۹	۱ر۶۴۷۷۸	۲ر۱۱۵۹۵	۲ر۷۱۷۱۳
۵	۰ر۹۹۹۸۵	۱ر۲۸۳۸۶	۱ر۶۴۸۵۶	۲ر۱۱۶۸۵	۲ر۷۱۸۱۸
۶	۰ر۹۹۹۹۸	۱ر۲۸۴۰۲	۱ر۶۴۸۷۳	۲ر۱۱۷۰۵	۲ر۷۱۸۴۲
۷	۱ر۰۰۰۰۱	۱ر۲۸۴۰۵	۱ر۶۴۸۷۷	۲ر۱۱۷۱۰	۲ر۷۱۸۴۷
مقدارهای دقیق جواب	۱ر۰۰۰۰۰	۱ر۲۸۴۰۳	۱ر۶۴۸۷۲	۲ر۱۱۷۰۰	۲ر۷۱۸۲۸

در رقم‌های آخر y_kدیده می‌شود، مربوط به تاثیر خطای ناشی از تبدیل انتگرال به مجموع سیمپسون است.

پایداری روش. خواستهای محاسبه‌های عملی نشان می‌دهد که روش تقریبی باید شرطی را، که اهمیت زیادی دارد، بپذیرد. این شرط، عبارت است از ***پایداری*** روند محاسبه‌ای. اهمیت این موضوع را می‌توان به این ترتیب توضیح داد: هر روش تقریبی، به یک طرح محاسبه‌ای منجر می‌شود. اغلب معلوم می‌شود، برای به دست آوردن همهٔ عددهای لازم، باید از یک مسیر طولانی محاسبه‌ای در این طرح، عبور کرد. محاسبه‌ای که در هرگام انجام می‌شود، دقیق نیست و تنها تا تعداد معینی از رقم‌های بعد از ممیز به‌دست می‌آید، بنابراین در هر گام دچار خطای کوچکی می‌شویم. همهٔ این گونه خطاها، در نتیجه‌گیری‌های بعدی اثر می‌گذارد.

طرحی که برای محاسبه انتخاب کرده‌ایم، ممکن است چنان نارسا باشد که اشتباه‌های کوچکی که در همان گام نخست به وجود آمده است، در نتیجه‌گیری‌های بعدی نیرومندتر شود و سرآخر به انحراف زیادی از مقدارهای دقیق منجر شود.

فرض کنید می‌خواهیم، معادلهٔ دیفرانسیلی

$$y' = f(x , y)$$

را، با شرط اولیهٔ $y(x_0) = y_0$، حل کنیم، و فرض کنید بخواهیم مقدارهای $y(x)$را به ازای

$x_k = x_{\circ} + kh$ $(k = \circ , ١ , ...)$ به دست آوریم.

فرض می‌کنیم محاسبه‌ها را تا گام nام انجام و به این جدول برسیم:

x	y	$y' = f$
$x_{\circ}$	$y_{\circ}$	$y'_{\circ}$
$x_{١}$	$y_{١}$	$y'_{١}$
...	...	...
$x'_{n-١}$	$y_{n-١}$	$y'_{n-١}$
x_n	y_n	y'_n

باید $y_{n+١}$ را پیدا کنیم. در روش خط‌های شکستهٔ *اولر*، به تقریب فرض می‌کنند.

$$y_{n+١} = y_n + hy'_n \qquad (١۴)$$

در این‌جا $y_{n+١}$، تنها برحسب عددهای y_n و y'_n که در سطر آخر جدول قرار دارند، به دست می‌آید. می‌توان این دستور را، با استفاده از دو سطر آخر جدول مفروض، دقیق‌تر کرد. در این‌صورت، می‌توان دستور محاسبه‌ای زیر را ساخت:

$$y_{n+١} = -۴y_n + ۵y_{n-١} + h(۴y'_n + ۲y'_{n-١}) \qquad (١۵)$$

یادآوری می‌کنیم، اگر به طور دقیق، یعنی تا بی‌نهایت رقم دهدهی محاسبه کنیم، دستور (١۴) وقتی نتیجهٔ درست می‌دهد که تابع y یک چندجمله‌ای خطی باشد، همچنین دستور (١۵) برای هر چندجمله‌ای تا درجهٔ سوم، درست است. در نظر اول گمان می‌رود، نتیجه‌ای که با استفاده از دستور (١۵) به دست می‌آید، باید دقیق‌تر از نتیجه‌ای باشد که طبق روش خط شکسته پیدا می‌شود. ولی به سادگی معلوم می‌شود که دستور (١۵)، برای محاسبه مفید نیست، زیرا به کار بردن آن می‌تواند خطایی به وجود آورد که به سرعت رشد کند.

مقدارهای مشتق‌های y'_n و $y'_{n-١}$ شامل عامل کوچک h هستند، و بنابراین خطاهایی که در این مقدارها به وجود می‌آید، کمتر از تأثیر خطاها در y_n و $y_{n-١}$ است. برای سادگی کار مقدارهای y' را دقیق به حساب می‌آوریم و در خطای کلی، آن‌ها را در نظر نمی‌گیریم. فرض کنیم برای پیدا کردن $y_{n-١}$، مرتکب اشتباهی به اندازهٔ $+\varepsilon$ و برای پیدا کردن y_n، اشتباهی به

اندازهٔ ε− شده باشیم. در چنین صورتی، همان‌طور که از برابری (۱۵) دیده می‌شود، در y_{n+1} اشتباهی به اندازهٔ 9ε پیش می‌آید. این اشتباه در y_{n+2} به اندازهٔ 41ε− خواهد شد و همین‌طور برای محاسبه‌های بعدی به سرعت افزایش می‌یابد. دستور (۱۵)، منجر به روندی محاسبه‌ای می‌شود که از لحاظ خطای ناشی از آن، ناپایدار است و باید به کنار گذاشته شود.

مثالی که در این‌جا می‌آوریم، از این بابت قانع‌کننده است که ناپایداری طرح محاسبه‌ای تا چه‌حد ممکن‌است منجر به‌انحراف‌های جدی بشود. می‌خواهیم معادلهٔ دیفرانسیلی $y'=y$ را با شرط اولیهٔ $y_0 = 1$ حل کنیم. جواب دقیق معادله $y=e^x$ است. برای حل عددی، فاصلهٔ متغیر مجهول x را با گام $h = 0{,}01$، یعنی $x_k = 0{,}01k$ در نظر می‌گیریم. جواب‌های تقریبی به دو طریق محاسبه می‌شوند: بنابر روش خط‌های شکستهٔ (۱۴) و بنابر دستور (۱۵). در جدول ۲ به منظور مقایسه، مقدارهای جواب دقیق را تا هفت رقم دهدهی داده‌ایم (جدول ۲).

مقدارهای تقریبی جواب که بنابر دستور (۱۵) به دست آمده است، تا چند گام نخست،

جدول ۲

x	مقدارهای جواب دقیق	مقدارهای جواب‌های تقریبی، با روش محاسبه‌ای طبق فرمول (۱۴)	طبق فرمول (۱۵)
۰ر۰۰	۱ر۰۰۰۰۰۰۰	۱ر۰۰۰۰۰۰۰	۱ر۰۰۰۰۰۰۰
۰ر۰۱	۱ر۰۱۰۰۵۰۲	۱ر۰۱۰۰۰۰۰	۱ر۰۱۰۰۵۰۲
۰ر۰۲	۱ر۰۲۰۲۰۱۳	۱ر۰۲۰۱۰۰۰	۱ر۰۲۰۲۰۱۲
۰ر۰۳	۱ر۰۳۰۴۵۴۵	۱ر۰۳۰۳۰۱۰	۱ر۰۳۰۴۵۵۳
۰ر۰۴	۱ر۰۴۰۸۱۰۸	۱ر۰۴۰۶۰۴۰	۱ر۰۴۰۸۰۷۰
۰ر۰۵	۱ر۰۵۱۲۷۱۱	۱ر۰۵۱۰۱۰۰	۱ر۰۵۱۲۸۹۹
۰ر۰۶	۱ر۰۶۱۸۳۶۵	۱ر۰۶۱۵۲۰۱	۱ر۰۶۱۷۴۳۱
۰ر۰۷	۱ر۰۷۲۵۰۸۲	۱ر۰۷۲۱۳۵۳	۱ر۰۷۲۹۷۲۶
۰ر۰۸	۱ر۰۸۳۲۸۷۱	۱ر۰۸۲۸۵۶۷	۱ر۰۸۰۹۷۸۹
۰ر۰۹	۱ر۰۹۴۱۷۴۳	۱ر۰۹۳۶۸۵۳	۱ر۱۰۵۶۴۶۰
۰ر۱۰	۱ر۱۰۵۱۷۰۹	۱ر۱۰۴۶۲۲۲	۱ر۰۴۸۱۵۵۹
۰ر۱۱	۱ر۱۱۶۲۷۸۱	۱ر۱۱۵۶۶۸۴	۱ر۳۹۹۶۴۵۶
۰ر۱۲	۱ر۱۲۷۴۹۶۹	۱ر۱۲۶۸۲۵۰	−۰ر۲۸۰۸۵۴۰

نسبت به روش خط‌های شکسته، جواب‌های دقیق‌تری می‌دهد. ولی ناپایداری دستور (۱۵) باعث می‌شود که بعد از چند گام، مقدارهای تقریبی y_k منجر به عددهایی می‌شود که به‌کلی از مقدارهای واقعی y_k انحراف پیدا کرده است.

انتخاب روش محاسبه‌ای. هر محاسبه‌ای، سرآخر می‌تواند منجر به چهار عمل حسابی ــ جمع، تفریق، ضرب و تقسیم ــ شود. تعیین روش محاسبه، یعنی نشان دادن این‌که چه فرض‌های اولیه‌ای برای آغاز محاسبه لازم است و چه عمل‌هایی از حساب و با چه ردیفی باید انجام داد تا امکان رسیدن به نتیجهٔ لازم به دست آید. می‌خواهیم روی مثالی که محاسبه‌های بسیار ساده‌ای دارد، نشان دهیم که تنظیم محاسبه تا چه اندازه به تجربه و آگاهی ریاضی‌دانی که کار تهیهٔ محاسبه را به عهده دارد، مربوط می‌شود و اگر روش‌های خاصی که وجود دارد به طور مناسب انتخاب شود، به چه نتیجه‌هایی می‌توان دست یافت.

فرض کنید می‌خواهیم n معادلهٔ n مجهولی (با مجهول‌های $x_۱$ ، $x_۲$ ، ... ، x_n) را حل کنیم:

$$\begin{aligned} a_{۱۱}x_۱ + a_{۱۲}x_۲ + \cdots + a_{۱n}x_n &= b_۱ \\ a_{۲۱}x_۱ + a_{۲۲}x_۲ + \cdots + a_{۲n}x_n &= b_۲ \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots \\ a_{n۱}x_۱ + a_{n۲}x_۲ + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

در نظریهٔ دستگاه‌های حسابی (بخش شانزدهم، بند ۳) ، بیان روشنی از مقدارهای مجهول‌ها، برحسب دترمینان‌ها، داده شده است.

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j = ۱,\ ۲,\ \ldots,\ n) \tag{۱۶}$$

در این‌جا، Δ عبارت است از دترمینان ضریب‌ها، در دستگاه

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \ldots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \ldots & a_{۲n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

و Δ_j ، دترمینانی است که از Δ با تغییر jامین ستون آن با جمله‌های ثابت دستگاه، به دست می‌آید.

فرض کنیم بخواهیم با استفاده از دستورهای (۱۶)، جواب دستگاه را به دست آوریم و

از محاسبهٔ دترمینان‌ها براساس تعریف معمولی آن‌ها، و بدون تلاش برای پیدا کردن روش ساده شده‌ای، آغاز کنیم. چند عمل ضرب و تقسیم برای چنین منظوری لازم است؟ (عمل‌های جمع و تفریق را، به عنوان عمل‌های ساده‌تر به حساب نمی‌آوریم). باید $n+1$ دترمینان مرتبهٔ n را محاسبه کنیم. هر یک از دترمینان‌ها از $n!$ جمله تشکیل شده است در ضمن هر جمله به صورت حاصل ضرب n عامل است و برای محاسبهٔ آن $(n-1)$ عمل ضرب لازم است. برای محاسبهٔ همهٔ دترمینان‌ها باید $(n+1)n!(n-1)$ عمل ضرب انجام داد. تعداد کلی عمل‌های ضرب و تقسیمی که باید انجام شود، برابر است با $(n^{2}-1)n!+n$.

حالا از روش دیگری، یعنی روش حذفی، برای حل دستگاه استفاده می‌کنیم. طرح محاسبهٔ مربوط به این روش، به نام **گوس** مربوط است. x_1 را از معادلهٔ اول دستگاه پیدا می‌کنیم:

$$x_1=\frac{b_1}{a_{11}}-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\dots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

برای این منظور، انجام n تقسیم لازم است. x_1 را در هرکدام از $(n-1)$ معادلهٔ دیگر قرار می‌دهیم، که برای آن، n عمل ضرب لازم است. به این ترتیب، حذف x_1 و تشکیل دستگاهی از $(n-1)$ معادله با مجهول‌های x_2، x_3، ...، x_n، به n^{2} عمل ضرب و تقسیم نیاز دارد. اگر محاسبه را ادامه دهیم، معلوم می‌شود که برای به دست آوردن همهٔ مقدارهای $x_j(j=1,\ \dots,\ n)$ با روش حذفی، به $\frac{n}{6}(2n^{2}+9n-5)$ عمل ضرب و تقسیم نیاز داریم. این دو نتیجه را با هم مقایسه کنیم. برای حل یک دستگاه پنج معادله‌ای، با روش اول ۲۸۸۵ عمل ضرب و تقسیم و با روش دوم، تنها ۷۵ عمل لازم است.

برای یک دستگاه ده معادله‌ای، به ترتیب به

$$(10^{2}-1)\,10!+10\approx 360{,}000{,}000$$
$$\frac{10}{6}(2\times 10^{2}+9\times 10-5)=475$$

عمل نیاز داریم. به این ترتیب، حجم عمل‌ها، به انتخاب روش محاسبه، مربوط می‌شود. درتنظیم کارهای محاسبه‌ای، اغلب می‌توان راه و روشی را انتخاب کرد که حجم عمل‌ها را به طور قابل ملاحظه‌ای کم کند.

۲. ساده‌ترین وسیله کمکی محاسبه[۱]

جدول‌ها. قدیمی‌ترین وسیلهٔ کمکی محاسبه، عبارت است از جدول. خواننده بی‌تردید با ساده‌ترین جدول‌ها، مثل جدول ضرب، جدول لگاریتم عددها و مقدارهای تابع‌های مثلثاتی آشناست. دایرهٔ مسأله‌هایی که باید در فعالیت‌های عملی حل کرد، گسترش می‌یابد و مسأله‌های تازه، اغلب یا منجر به استفاده از دستورهای تازه‌ای می‌شود و یا به‌کشف دستورهای تازه‌ای می‌انجامد و بنابراین، تعداد جدول‌های لازم، زیاد و زیادتر می‌شود.

هر جدولی، بدون توجه به این‌که چگونه تنظیم شده باشد، شامل نتیجه‌هایی از محاسبه است که از قبل انجام شده و در واقع، نوعی حافظهٔ ریاضی است. جدول‌های چاپ شده و یا دست‌نویس برای استفاده، درست شده است، ولی می‌توان دربارهٔ جدول‌هایی هم صحبت کرد که به صورت‌های خاصی، و از جمله به‌صورت کارت‌های سوراخ‌دار، تنظیم شده‌اند. از این کارت‌ها در ماشین‌های حساب استفاده می‌کنند. به چنین جدول‌هایی به ندرت برخورد می‌کنیم و به همین مناسبت ما هم گفت‌وگویی درباره آن‌ها نخواهیم داشت.

جدول‌های مربوط به مقدارهای تابع‌ها، خیلی رایج است. اگر تابع y به یک آوند x بستگی داشته باشد، ساده‌ترین جدول مربوط به آن، به این صورت است:

(۱۷)

x	y
$x_۱$	$y_۱$
$x_۲$	$y_۲$
...	...
x_n	y_n

و به آن *جدول یک مدخلی* گویند[۲]. از این جدول، می‌توان به طور مستقیم مقدارهایی را پیدا کرد که متناظر با مقدارهایی از x که در جدول وجود دارد، باشند. برای مقدارهایی، که

---

۱. در این بند، از ساده‌ترین وسیله‌ها و ماشین‌های محاسبه‌ای، گفت‌وگو می‌کنیم. دربارهٔ شمارگرهای تندکار و رایانه‌ها در بخش چهاردهم صحبت می‌شود. به خاطر کمبود جا، از روش‌های نگاره‌ای محاسبه صحبتی نخواهیم کرد.

۲. ستون‌هایی که جدول را اشغال می‌کند، ممکن است درازتر باشند؛ موقع چاپ، ستون را به یک رشته قسمت‌های جزئی، تقسیم و سپس آن‌ها را به صورت‌های گوناگون گروه‌بندی می‌کنند. با وجود این، حتی در چنین حالت‌هایی هم، جدول را یک مدخلی گویند.

مقدار x متناظر آن‌ها در جدول وجود ندارد، از روش‌های مختلف دستورهای درون‌یابی استفاده می‌کنند که در بخش دوازدهم دربارهٔ آن‌ها صحبت شده است[1]. در جدول‌ها، اغلب در کنار مقدارهای تابع، مقدارهای کمکی دیگری هم وارد شده است که کار انجام درون‌یابی را ساده‌تر می‌کند. این مقدارها، اغلب نخستین یا دومین تفاضل‌هاست. در جدول‌های اختصاصی‌تر، که برای استفاده از دستورهای درون‌یابی خاصی تهیه شده‌اند، مقدارهایی هم که کار استفاده از این دستور را ساده‌تر کند، وارد شده است.

برای جدول‌بندی تابع با دو آوند $u=f(x, y)$، اغلب مقدارهای آن را در ***جدولی با دو مدخل*** (یا «ورودی») x و y وارد می‌کنند. طرح این جدول چنین است:

$x \backslash y$	y_1	y_2	…	y_m
x_1	u_{11}	u_{12}	…	u_{1m}
x_2	u_{21}	u_{22}	…	u_{2m}
…	…	…	…	…
x_n	u_{n1}	u_{n2}	…	u_{nm}

(۱۷′)

هر ستون این جدول، خود جدولی با یک مدخل است، و جدول (۱۷′) ترکیبی از چند جدول به صورت (۱۷) است. حجم جدول تابع دو آوندی، خیلی بیشتر از حجم جدول مربوط به تابع یک آوندی است (به شرطی که گام‌های مربوط به تغییر متغیرهای مستقل در دو جدول، یکی باشد). به همین مناسبت، تابع‌های دو آوندی، خیلی کمتر از تابع‌های یک آوندی، جدول‌بندی شده‌اند. به ترتیب زیر می‌توانیم متوجه شویم، وقتی تعداد آوندها زیاد می‌شود، حجم جدول با چه سرعتی افزایش می‌یابد. فرض کنید بخواهیم تابع چهار آوندی $f(x, y, z, t)$ را جدول‌بندی کنیم، در ضمن برای هر آوند، تنها ۱۰۰ مقدار در نظر می‌گیریم. فرض کنید دقت کمی برای تابع، و تنها تا سه رقم لازم باشد. اگر با این شرط‌ها،

---

۱. هر چه تعداد مقدارهای x_i موجود در جدول کمتر باشد، محاسبهٔ درون‌یابی بغرنج‌تر و هر چه مقدارهای x_i به‌هم نزدیکتر باشند، کار محاسبهٔ درون‌یابی ساده‌تر می‌شود. ولی سرعت در کار محاسبهٔ درون‌یابی، می‌تواند به طریقه‌های مختلف انجام گیرد. در جدول‌های درون‌یابی مربوط به تیراندازی، بهتر است که درون‌یابی، بلافاصله و «با یک نظر» انجام گیرد. در حالی که دربارهٔ جدول‌های دقیق‌تری که برای محاسبه‌های علمی تنظیم شده‌اند، لازم است درون‌یابی را با یک رشته عمل‌ها به نتیجه رساند.

یک تابع یک آوندی را جدول‌بندی کنیم، تنها به صد عدد سه رقمی نیاز داریم که می‌توان به سادگی در یک صفحهٔ کاغذ جا داد.

ولی در جدولی که چهار مدخل داشته باشد، به اندازهٔ ۱۰۰^۴ ترکیب از مقدارهای x ، y ، z و t، همین تعداد برای مقدارهای f خواهیم داشت. از این‌جا می‌توان به سادگی حساب کرد که برای چنین جدولی به بیش از ۳۰۰ جلد نیاز داریم.

به علت حجم عظیم جدول‌های مربوط به تابع‌های چند آوندی، جدول‌بندی آن‌ها به ندرت و در حالت‌های بسیار ساده انجام می‌گیرد. در سال‌های اخیر، بررسی‌های منظمی دربارهٔ رده‌های تابع‌های با چند متغیر آغاز شده است تا بتوانند برای آن‌ها جدول‌هایی تشکیل دهند که تعداد مدخل‌های آن‌ها کمتر از تعداد آوندهای تابع باشد. همراه با آن، تنظیم قانون‌هایی هم که بتواند ساده‌ترین ساختمان چنین جدول‌هایی را تشکیل دهد، آغاز شده است.

ساده‌ترین نمونهٔ این‌گونه تابع‌ها را می‌آوریم.

فرض کنید بخواهیم تابع u از سه آوند x ، y ، z را جدول‌بندی کنیم که ساختمان آن، به این صورت است:

$$u = f[\varphi(x , y) , z]$$

روشن است، در این‌جا می‌توان دو جدول با دو مدخل تنظیم کرد. برای این منظور، متغیر کمکی $t = \varphi(x , y)$ را وارد می‌کنیم و u را به صورت تابعی مرکب نشان می‌دهیم:

$$u = f(t , z)$$
$$t = \varphi(x , y)$$

برای این‌که بتوان از این دو جدول به صورت راحت‌تری استفاده کرد، می‌توان آن‌ها را یکی کرد. تابع $t = \varphi(x , y)$ را در نظر می‌گیریم و آن را نسبت به y حل می‌کنیم:

$$y = \Phi(x , t)$$

به‌طور اصولی، هیچ فرقی ندارد کدامیک از دو تابع $t = \varphi(x , y)$ و $y = \Phi(x , t)$ را جدول‌بندی کنیم، ولی در عمل ساده‌تر این است که به جدول‌بندی تابع دوم بپردازیم. دو جدول با دو مدخل برای تابع‌های $y = \Phi(x , t)$ و $u = f(t , z)$ می‌سازیم و آن‌ها را طبق طرح

زیر متحد می‌کنیم:

x_1	x_2	...	x_i	...	t	z_1	z_2	...	z_k	...
					t_1					
					t_2					
					.					
					.					
					.					
....	....	...	y_j	...	t_j	...	....	...	u_{jk}	...

برای پیدا کردن مقداری از u که متناظر با مقدارهای مفروض x_i ، y_i و z_k می‌باشد، به این ترتیب عمل می‌کنیم: ابتدا ستونی را پیدا می‌کنیم که مربوط به عدد x_i است، سپس در طول این ستون، مقدار y_j (یا مقدار نزدیک به آن) را جست‌وجو می‌کنیم. در روی سطر افقی، عدد y_i متناظر است با مقدار مربوط به t. اگر روی همین سطر افقی، تا ستون z_k جلو برویم، عدد لازم، یعنی $u = f(x_i\ ,\ y_j\ ,\ z_k)$ را پیدا خواهیم کرد.

در این مثال، به جای تشکیل جدولی با سه مدخل، توانستیم دو جدول با دو مدخل تشکیل دهیم و با روش ساده‌ای آن‌ها را به هم مربوط کنیم.

استفاده از امکان‌های مختلف برای ساده کردن جدول‌ها، باعث می‌شود که در بعضی حالت‌ها، حجم جدول را ده‌ها، صدها و حتی هزاران بار، نسبت به جدولی که تعداد مدخل‌های آن به اندازهٔ تعداد آوندهای مجهول است، کوچکتر کنیم.

ماشین‌های حساب رومیزی. دستگاه‌های محاسبه‌ای مختلف هم، به همان اندازهٔ جدول‌ها، قدمت دارند. حتی در یونان باستان هم، از چنین دستگاه‌هایی استفاده می‌کرده‌اند و امروز هم به طور گسترده‌ای از این‌گونه وسیله‌ها، استفاده می‌شود.

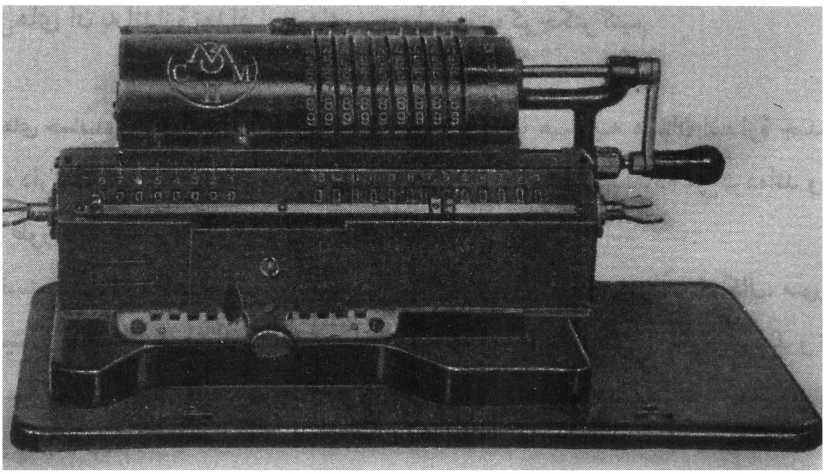
نخستین نمونهٔ ماشین‌های حساب، در سدهٔ شانزدهم و به وسیلهٔ ***پاسکال***، ***مورلاند*** و ***لایپ‌نیتس*** ساخته شد. از آن زمان به بعد، این ماشین‌ها به طور مرتب تغییر کردند و تکامل یافتند، به نحوی که در پایان سدهٔ ۱۹ و به خصوص از ابتدای سدهٔ بیستم، گسترش بسیار زیادی پیدا کردند.

ما تنها به بعضی از انواع این ماشین‌ها می‌پردازیم و کوشش می‌کنیم، امکان‌هایی را

که برای تندتر کردن محاسبه در آن‌ها وجود دارد، روشن کنیم. از ماشین حساب کوچک، یا به اصطلاح رومیزی، که همه جا وجود دارد، آغاز می‌کنیم. هر کدام از این ماشین‌ها، بدون توجه به نوع ساختمان آن‌ها، برای انجام چهار عمل اصلی حساب درست شده‌اند، در ضمن ضرب و تقسیم را هم از راه تکرار عمل‌های جمع و تفریق انجام می‌دهند.

نمونهٔ مشخص این گونه ماشین‌ها، حسابگر *اودنر* است که با چرخ‌هایی کار می‌کند (شکل ۲). برای انتخاب عدد در مکانیسم دستگاه، هر رقم در مرتبهٔ خودش روی بازوی عددها، به اندازه‌ای که لازم است، حرکت داده می‌شود. برای جمع، هر جمله در سازوکار دستگاه انتخاب می‌شود و سپس با یک چرخش دسته به کنتور منتقل می‌شود و در آن‌جا خودبه‌خود به عددی که پیش از آن منتقل شده است، اضافه می‌شود. تفریق با چرخش دسته در جهت عکس، انجام می‌گیرد. برای ضرب، یکی از عامل‌ها را در مکانیسم دستگاه وارد می‌کنند و سپس با تکرار عمل جمع، روی هر مرتبهٔ عامل دیگر، نتیجه را به دست می‌آورند. از جمله برای ضرب در ۴۵، ابتداد عدد مفروض را (که باید در ۴۵ ضرب شود)، پنج مرتبه با خودش جمع می‌کنند و سپس در مرتبهٔ بعدی (مرتبهٔ دهگان)، عمل جمع را چهار مرتبه دربارهٔ همان عدد مفروض انجام می‌دهند.

برای تقسیم، باید بخشی را به کنتور نتیجه‌ها فرستاد و سپس با تکرار تفریق بخشیاب از آن، خارج قسمت را به دست آورد. نتیجه را می‌توان از روی تعداد چرخش‌های دسته در هر

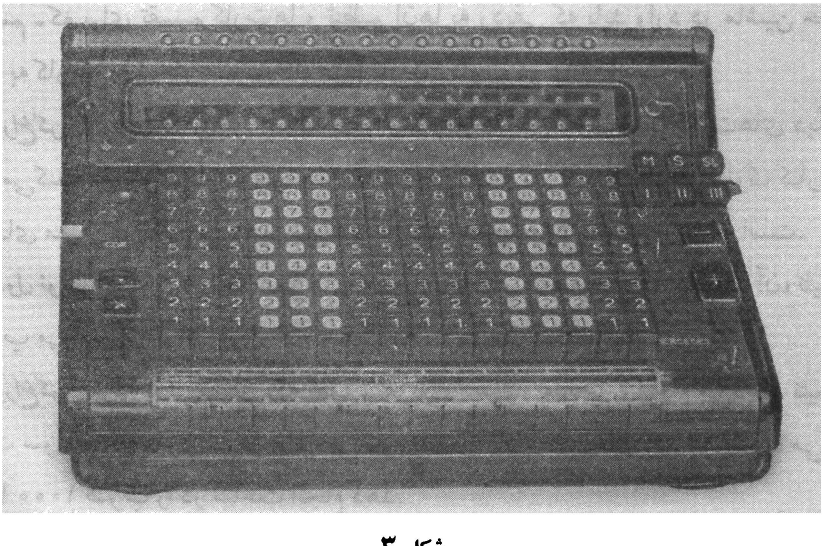


شکل ۲

مرتبه، و یا از روی کنتور که در ماشین تعبیه شده است، به دست آورد.

اگر روش محاسبه را در این ماشین‌های حساب به خاطر می‌آوریم، تنها به این دلیل است که بتوانیم جهت پیشرفت بعدی ماشین‌های امروزی را، روشن‌تر درک کنیم. بعضی از پیشرفت‌ها، به منظور راحت‌ترکردن ماشین و بدون تغییر اساسی در طرح ساختمان آن، انجام گرفته است. در این جهت، می‌توان برای نمونه از ساختن ماشین‌های حساب با دستگاه انتقال برقی نام برد که سرعت کار ماشین را زیادتر و محاسب را از چرخاندن دسته، آزاد می‌کند.

برای این که در انتخاب عددها و وارد کردن آن‌ها در دستگاه، سرعت و راحتی بیشتری داده شود، شستی‌هایی روی ماشین گذاشته شده است. انجام عمل روی عددها هم، به جای تکرار چرخاندن دسته در جهت معین، تنها با فشار روی شستی مربوط به نتیجه می‌رسد. ماشین‌های حساب خودکاری ساخته شده است که برای کار با آن‌ها، کافی است عددهایی را که باید عمل لازمی را با آن‌ها انجام دهیم، وارد دستگاه کنیم و سپس، یکی از چهار شستی را، که برای عمل نشانه‌گذاری شده است، فشار دهیم (شکل ۳)، بقیهٔ کار، بدون دخالت آدمی انجام می‌گیرد. سرعت کار ماشین‌های حساب رومیزی، ضمن تکامل آن‌ها به جایی رسیده است که می‌توانند نتیجهٔ ضرب را، کمتر از یک ثانیه بعد از به کار انداختن ماشین به دست آورند.



شکل ۳

ماشین‌های رقمی و ماشین‌های رله شده. ماشین‌های رقمی (*Digital*) به خاطر محاسبه‌های آماری و برای ارزیابی‌های مالی و صنعتی ساخته شده است. آن‌ها برای انجام محاسبه‌های طولانی،ولی ساده و شبیه به هم، در نظر گرفته شده است. این ماشین‌ها، برای انجام محاسبه‌های علمی و فنی خیلی کم به درد می‌خورند، زیرا «حافظه» آن‌ها خیلی کوچک است و امکان‌های برنامه‌ریزی بسیار محدودی دارند. با همهٔ این نارسایی‌ها، ماشین‌های رقمی، تا قبل از پیدایش ماشین‌های الکترونی تندکار (رایانه‌ها)، به طور وسیعی برای محاسبه‌های بغرنج و پرحجم (از جمله، برای تهیهٔ جدول‌ها)، قابل استفاده بود.

عددهایی که ماشین رقمی باید روی آن‌ها کار کند، روی کارت‌های مشبک وارد می‌شود (شکل ۴). عددها و علامت‌ها، با ایجاد سوراخ‌ها در جاهای معین، وارد در کارت می‌شود. کارت از راه دستگاه جاروبک‌ها وارد ماشین می‌شود. جاروبکی که کارت سوراخ شده زیر آن قرار می‌گیرد، مدار الکتریکی خاصی را وصل می‌کند و فازی از ماشین را به کار می‌اندازد.

ماشین‌های رقمی مختلف در رابطه باهم کار می‌کنند، در ضمن هر مجموعه، حداقل شامل ماشین‌های زیر است:

سوراخ‌کن ـ که برای سوراخ کردن کارت به کار می‌رود. ماشین دارای زبانه‌هایی است که با دست کار می‌کند و سرعتی مثل ماشین تحریر دارد.

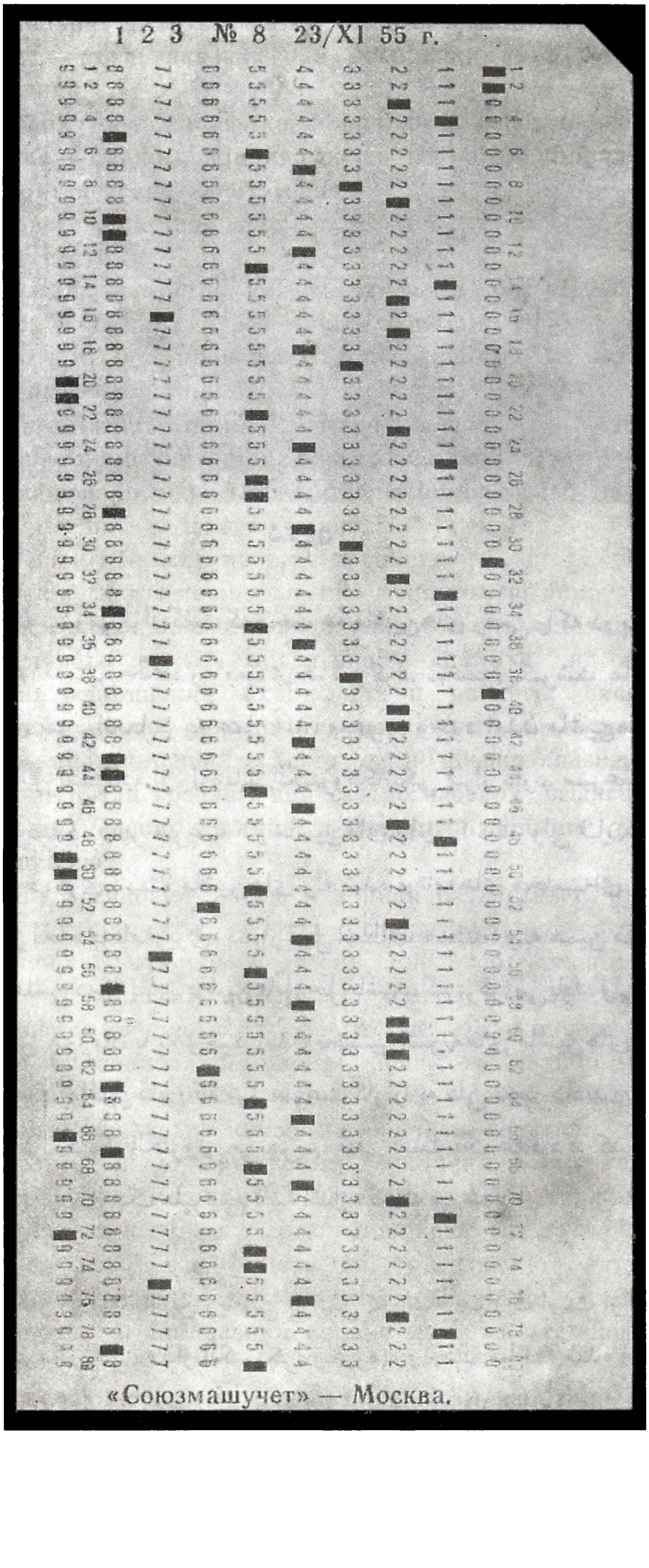
مقسم ـ که برای تقسیم کارت‌ها و تنظیم آن‌ها به ردیفی که باید وارد در ماشین حساب شوند، به کار می‌رود. سرعت کار آن ۴۵۰ تا ۶۵۰ کارت در دقیقه است.

سوراخ‌کن تکراری یا ***کپیه‌بردار*** ـ که سوراخ‌ها را از بعضی کارت‌ها به کارت‌های دیگری منتقل می‌کند، دو بلوک کارت را با هم مقایسه می‌کند و کار انتخاب از دو بلوک کارت با نشانه‌های معین را، انجام می‌دهد. سرعت کار آن، حدود ۱۰۰ کارت در دقیقه است.

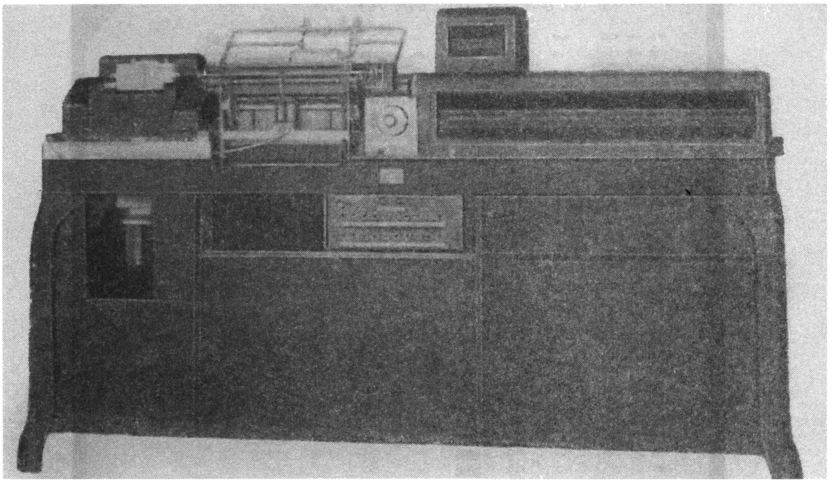
جدول نویس (شکل ۵) ـ که عمل‌های جمع و تفریق را انجام می‌دهد و به‌جز آن، نتیجه را هم چاپ می‌کند، می‌تواند روی ۶ تا ۹ هزار کارت در ساعت کار کند.

سوراخ‌کن ضربی یا ***فزون‌ساز*** ـ که جمع، تفریق و ضرب عددها را انجام می‌دهد. نتیجه به صورت سوراخ‌هایی روی کارت داده می‌شود. ضمن کار با عددهای ۶ تا ۷ رقمی، می‌تواند ۷۰۰ تا ۱۰۰۰ ضرب را در ساعت انجام دهد.

ماشین‌های رقمی به نسبت کند کار می‌کنند. اگر بخواهیم حجم کارهایی را که می‌توان



شکل ۴



شکل ۵

انجام داد، تخمین بزنیم، می‌توان گفت که مجموعهٔ ماشین‌های رقمی را که در بالا نام بردیم، می‌توان با ۱۲ تا ۱۸ ماشین خودکار رومیزی عوض کرد. نخستین کوشش‌هایی که برای ساختن ماشین‌های سریع‌العمل‌تر به عمل آمد، منجر به وجود آمدن ماشین‌های رله شده شد، که براساس استفاده از رله‌های الکترومکانیکی قرار دارد. سرعت کار چنین ماشین‌هایی به تقریب ده برابر سرعت کار ماشین‌های رقمی است. ولی فایدهٔ اصلی این ماشین‌ها از جهت دیگری است: ماشین‌های رله شده برنامه‌های محاسبه‌ای پیچیده‌ای را انجام می‌دهند و از لحاظ برنامه‌ریزی، بسیار قابل انعطاف هستند؛ و به همین مناسبت، دایرهٔ مسأله‌های فنی و علمی که به یاری ماشین قابل حل باشند، گسترش می‌یابد. ولی پیدایش این ماشین‌ها کم و بیش هم‌زمان با به وجود آمدن نخستین نمونه‌های ماشین‌های الکترونی با هدایت برنامه‌ای بود، ماشین‌هایی که مرز سرعت کار را به کلی تغییر دادند. برای این‌که به میزان سرعت کار در تکنیک الکترونی پی ببریم، کافی است یک عدد ذکر کنیم: زمان تغییر حالت لامپ الکتریکی، در یک ملیونیوم ثانیه اندازه گرفته می‌شود.

ماشین‌های ریاضی با عمل پیوسته. ماشین ریاضی با عمل پیوسته عبارت است از یک دستگاه فیزیکی (ساختمان مکانیکی، مدار الکتریکی و غیره)، و چنان ساخته شده است که بین پارامترهایی از دستگاه که به‌طور پیوسته تغییر می‌کنند (انتقال‌ها، زاویه‌های دوران، جریان‌ها، فشارها و غیره)، بستگی‌هایی شبیه آن‌چه بین کمیت‌های یک مسالهٔ ریاضی وجود

دارد، برقرار می‌کند. به این‌گونه ماشین‌ها، اغلب ***ماشین‌های شبیه‌ساز*** (یا قیاسی) می‌گویند.

هر ماشین با عمل پیوسته، وضعی خاص خود دارد و برای حل گروه محدودی از مسأله‌ها به کار می‌رود.

دقتی که ماشین برای پیدا کردن جواب دارد، به کیفیت عنصرها، سوار کردن ماشین، تنظیم و رگلاژ آن، خطاهای جبری که ضمن کار پیش می‌آید و غیره بستگی دارد. براساس تجربه‌های طولانی درکاربرد این ماشین‌ها، می‌توان گفت که می‌توانند جواب را تا ۲ یا ۳ رقم درست دهدهی بدهند؛ و از این بابت با ماشین‌هایی که می‌توانند دقت نامحدودی داشته باشند، خیلی فرق دارند.

اهمیت اصلی ماشین‌های با عمل پیوسته در راحتی آن‌ها، برای حل گروه بزرگی از مسأله‌های یک نوع است. علاوه بر این، اغلب می‌توانند، جواب را خیلی سریع‌تر از ماشین‌های حساب پیدا کنند. ویژگی مهم دیگر این ماشین‌ها در این است که در بسیاری حالت‌ها، فرض‌های اولیهٔ مسأله را خیلی راحت‌تر می‌توان در آن‌ها وارد کرد و نتیجه‌ها را هم به صورت‌های راحت‌تری به دست آورد.

گونه‌های متفاوتی از ماشین‌های طرح‌پذیر وجود دارد. آن‌ها مستعد پذیرش مسأله‌های زیادی هستند، در ضمن برای هر کدام آن‌ها می‌توان با روش‌های مختلفی طرح‌ریزی کرد (به کمک مکانیزم‌ها یا ساختمان‌های الکتریکی و غیره). می‌توان ماشین‌ها، یا قسمت‌هایی از ماشین‌ها، را طوری ساخت که برای عمل‌های خاصی از ریاضیات طرح‌ریزی شده باشند: جمع، ضرب، انتگرال‌گیری، دیفرانسیل‌گیری و غیره. می‌توان ماشین را برای فرمول‌های محاسبه‌ای خاصی، مثل محاسبهٔ مقدار چندجمله‌ای‌ها یا محاسبهٔ ضریب‌های فوریه در تجزیهٔ تحلیلی تابع، طرح ریزی کرد. همچنین می‌توان مدل‌هایی را ساخت که معادله‌های عددی یا معادله‌های تابعی تولید کند. بسیاری از مسأله‌های مشابه در رشته‌های متفاوت وجود دارد که منجر به یک نوع معادلهٔ دیفرانسیلی می‌شوند. یکسانی معادله‌ها، از جمله این امکان را به وجود می‌آورد که بتوانیم پدیده‌های گرمایی الکتریسته و مسأله‌های مربوط به گرما را از راه اندازه‌گیری الکتریکی حل کنیم که بی‌تردید کار را راحت‌تر می‌کند، زیرا اندازه‌گیری الکتریکی خیلی دقیق‌تر از اندازه‌گیری گرمایی است، و اجرای آن هم خیلی ساده‌تر است.

از آن‌جا که تعداد ماشین‌های طرح‌پذیر بسیار زیاد است، نه تنها شرح خود ماشین، بلکه حتی شرح اصول ساختمانی آن هم در چند سطر ممکن نیست. برای این‌که خواننده بتواند،

دست کم تصوری از این مطلب داشته باشد که چطور می‌توان مسأله‌های ریاضی را مدل‌بندی کرد، شرح کوتاهی از دو ماشین سادهٔ ریاضی می‌دهیم که یکی از آن‌ها برای انتگرال‌گیری تابع‌ها و دیگری برای حل تقریبی معادلهٔ **لاپلاس** در نظر گرفته شده است.

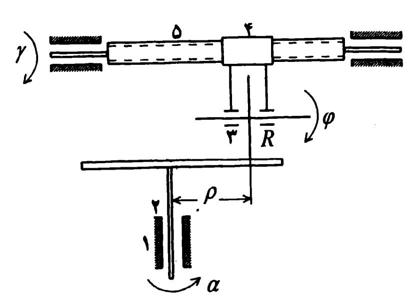
ماشین انتگرال‌گیری مالشی (شکل ۶). همان‌طور که از نامش پیداست، برای انتگرال‌گیری از تابع‌ها، ساخته شده است. این ماشین براساس مالش کار می‌کند. طرح اساسی ساختمان آن در شکل ۷ داده شده است، که در آن، ۱ـ عبارت است از بدنهٔ انتگرال‌گیر، ۲ـ صفحهٔ مالشی که به طور افقی قرار گرفته است با محور، ۳ـ غلتک مالشی، یعنی غلتکی که کنارهٔ صافی دارد و نه تنها می‌تواند روی صفحه بغلتد، بلکه روی صفحهٔ عمود بر صفحهٔ غلتش هم جابه‌جا شود. اجزای ۴ و ۵، مکانیزم دورگردی را تشکیل می‌دهند که مهرهٔ A را به نوردی که غلتک را حمل می‌کند، مربوط می‌کند. اگر پیشرفت پیچ را h بنامیم، به ازای دورانی که به اندازهٔ زاویهٔ γ می‌کند، غلتک به فاصله $\rho = h\gamma$ در صفحهٔ شکل، جابه‌جا می‌شود.

فرض کنید محور صفحه به اندازهٔ زاویهٔ $d\alpha$ بپیچد. در این‌صورت، نقطهٔ مماس غلتک به اندازهٔ کمان $\rho d\alpha$ جابه‌جا می‌شود. اگر غلتک در طول صفحه، بدون لغزش بغلتد، زاویه دوران غلتک برابر است با

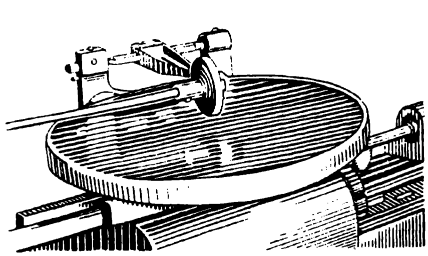
$$d\varphi = \frac{\rho}{R}\, d\alpha = \frac{h}{R}\ \gamma d\alpha$$

فرض می‌کنیم، دوران محور صفحه از زاویهٔ α_0 آغاز شود و زاویهٔ دوران اولیهٔ غلتک φ_0 باشد. با انتگرال‌گیری از برابری اخیر به دست می‌آید:

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{h}{R} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \gamma\, d\alpha$$



شکل ۷


شکل ۶

با انتخاب بستگی مناسب، بین زاویه‌های γ و α، می‌توانیم انتگرال را به کمک ماشین انتگرال‌گیر مالشی، در حالت‌های بسیار زیادی به دست آوریم؛ همچنین به کمک چنین ماشین‌هایی می‌توان بسیاری از معادله‌های دیفرانسیلی را هم به طور مکانیکی حل کرد.

به نمونهٔ دوم می‌پردازیم. فرض کنید حوزهٔ Ω، که به منحنی l محدود شده است، روی صفحه داده شده باشد. می‌خواهیم تابع u را چنان پیدا کنیم که در داخل حوزه در معادلهٔ **لاپلاس**

$$\Delta u = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲} + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲} = ۰$$

صدق کند و روی دورهٔ l، مقدارهای مفروض

$$u\Big|_l = f$$

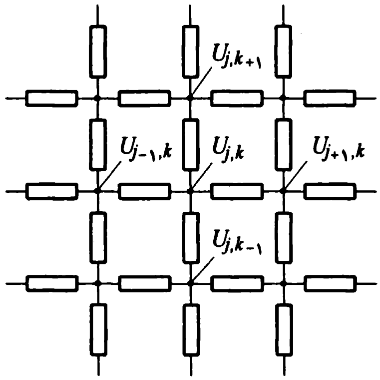
را قبول کند. شبکهٔ مربعی نقطه‌های

$$x_k = x_۰ + kh \ , \ y_k = y_۰ + kh \ , \ k = ۰ \ , \ \pm ۱ \ , \ \pm ۲ \ , \ \ldots$$

را وارد می‌کنیم و به جای حوزهٔ Ω، چندضلعی متناظر با مربع‌ها را در نظر می‌گیریم. در نتیجه، دورهٔ l، جای خود را به یک خط شکسته می‌دهد. مقدارهای حدی f و l را روی خط شکسته، منتقل می‌کنیم. مقدارهای تابع مجهول u را در گره $(x_j \ , \ y_k)$ به u_{jk} نشان می‌دهیم. اغلب، برای حل تقریبی معادلهٔ **لاپلاس** در Ω، آن را با دستگاه جبری عوض می‌کنند که باید در تمام نقطه‌های داخلی حوزه برقرار باشد:

$$u_{jk} = \frac{۱}{۴}[u_{j+۱,k} + u_{j,k+۱} + u_{j-۱,k} + u_{j,k-۱}]$$

برای این دستگاه جبری، می‌توان مدل الکتریکی زیر را ساخت. شبکه‌ای شبیه آنچه در شکل۸ نشان داده شده است، در صفحهٔ دوبعدی درنظر می‌گیریم. مقاومت بین مدارها را، یکسان به حساب می‌آوریم. فرض می‌کنیم، در مدار مرزی حوزهٔ شبکه‌ای، فشارهای الکتریکی برابر با مقدارهای u در این مدارها باشد. همچنین، آن‌ها موجب فشار الکتریکی در همهٔ مدارهای داخلی شبکه می‌شوند. فشار الکتریکی را در مقدار $(x_j \ , \ y_k)$ به $U_{j,k}$ نشان می‌دهیم. اگر برای مدار $(x_j \ , \ y_k)$ از قانون **کیرشهف** استفاده کنیم، روشن است که در



شکل ۸

این مدار باید این معادله برقرار باشد:

$$\frac{۱}{R}[(U_{j+۱,k}-U_{j,k})+(U_{j,k+۱}-U_{j,k})+(U_{j-۱,k}-U_{j,k})+(U_{j,k-۱}-U_{j,k})]=۰$$

که اختلاف آن با معادله‌ای که برای دستگاه جبری آوردیم، تنها درنحوهٔ نوشتن است. مقدارهای u_{jk} جواب‌های دستگاه جبری، باید در مدارهای شبکه بر فشار الکتریکی U_{jk} منطبق باشد و می‌توانند از روی مدل و با روش اندازه‌گیری‌های معمولی الکتریکی به دست آیند.

بخش چهاردهم

ماشین‌های حساب الکترونی
(رایانه‌ها)

س. آ. له به دو

۱. اهمیت و اصول اساسی کار ماشین‌های حساب الکترونی

روش‌های ریاضی به طور گسترده‌ای در دانش و صنعت به‌کار می‌رود، ولی حل بسیاری از مسأله‌های مهم، اگر بخواهیم تنها از ماشین‌های حساب دستی معمولی استفاده کنیم، مواجه با چنان حجمی از محاسبه‌ها می‌شود که در عمل چنین مسأله‌هایی غیرقابل حل به نظر می‌رسند. پیدایش ماشین‌های حساب الکترونی، که در سرعت محاسبه‌ها، امکان‌های بی‌سابقه و حیرت‌انگیزی به وجود آورد، موجب انقلاب عظیمی در کاربرد ریاضیات برای حل مسأله‌های اساسی فیزیک، مکانیک، اخترشناسی، شیمی و غیره شد.

ماشین‌های حساب الکترونی قادرند هزارها و حتی ده‌ها هزار عمل حسابی و منطقی را در یک ثانیه انجام دهند و جای‌گزین کار ده‌ها و صدها هزار محاسب بشوند. این سرعت محاسبه چنان است که در مثل می‌توان مسیر پرواز گلولهٔ توپ را تندتر از پرواز خود گلوله، به دست آورد.

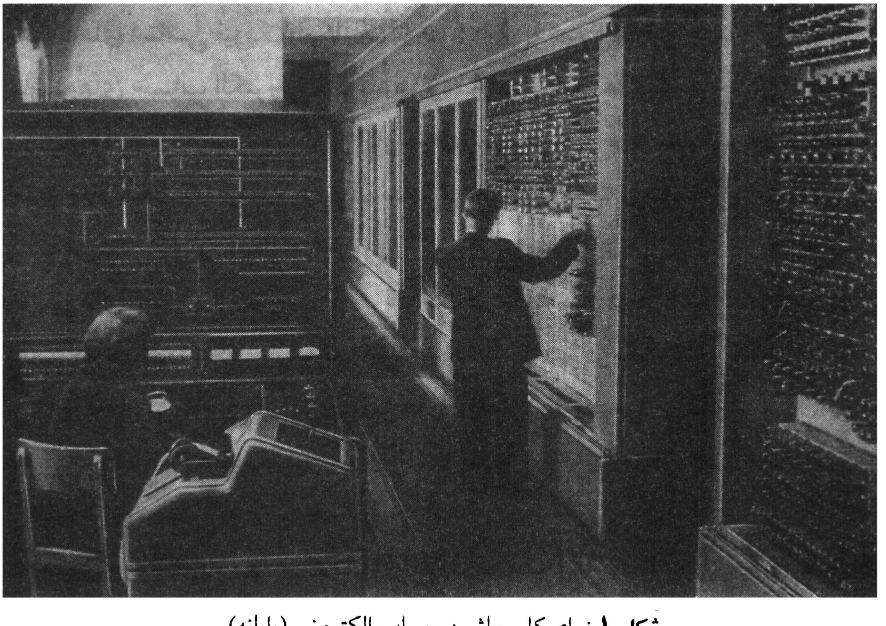
ماشین‌های حساب الکترونی، به‌جز سرعت فوق‌العاده‌ای که در انجام عمل‌های حسابی و منطقی دارند، این امکان را هم به وجود آورده‌اند که بتوان مسأله‌های به‌کلی متفاوت را به‌کمک یک ماشین انجام داد. این ماشین‌ها را باید از لحاظ کیفی، وسیلهٔ تازه‌ای دانست که در کنار انجام کارهای عظیم و پرحجم، توانسته‌اند به حل چنان مسأله‌هایی بپردازند، که قبل از آن ناممکن و دست نیافتنی به حساب می‌آمد.

در بسیاری حالت‌ها، تنها سرعت فوق‌العادهٔ محاسبه و به دست آوردن جواب در زمانی محدود می‌تواند از لحاظ عملی دارای ارزش باشد. برای نمونه، چنین وضعی در زمینهٔ پیش‌گویی هوا برای روز بعد، پیش می‌آید. اگر بخواهیم محاسبه‌ها را با دست انجام دهیم، برای پیش‌گویی مطمئن هوا در شبانه روز آینده، نیاز به چند شبانه‌روز وقت داریم. و روشن

است که نتیجه‌ای که از این راه و با این سرعت به‌دست می‌آمد، ارزش عملی ندارد. دسترسی به ماشین‌های حساب الکترونی، توانست به طور قطعی و کامل، این مسأله را حل کند.

ماشین‌حساب الکترونی تندکار. به عنوان نمونهٔ این ماشین‌ها، می‌توان ماشین‌حساب الکترونی سریع‌العملی را نام برد که در خدمت انستیتوی مکانیک فرهنگستان علوم شوروی قرار دارد (شکل ۱). این ماشین می‌تواند در هر ثانیه، به طور متوسط ۸ تا ۱۰ هزار عمل حساب انجام دهد. نمی‌توان این مقایسه را انجام نداد که یک حسابدار با تجربه می‌تواند در یک روز کار خود، تنها ۲ هزار عمل را با ماشین‌های حساب‌دستی انجام دهد. بنابراین ماشین الکترونی در ظرف چند ساعت، می‌تواند کاری را به پایان برساند که یک حسابدار پرتجربه در تمامی زندگی خود از عهدهٔ آن برنخواهد آمد. یکی از این ماشین‌ها را می‌توان جانشین لشکر عظیمی کرد که از ده‌ها هزار عضو تشکیل شده است. تنها برای جادادن این افراد، به صدها هزار متر مربع جا نیاز داریم.

از زمان بهره‌برداری از این ماشین‌ها تاکنون[1] توانسته‌اند مسأله‌های زیادی را در



شکل ۱ نمای کلی ماشین حساب الکترونی (رایانه).

۱. خواننده باید توجه داشته باشد که این کتاب در سال ۱۹۵۶ نوشته شده است (م).

رشته‌های مختلف دانش و صنعت حل کنند و در نتیجه، کشور ما توانسته است صدها میلیون روبل صرفه‌جویی کند. چند مثال می‌آوریم.

برای تنظیم تقویم نجومی جهانی، میسر شد مدار حرکت قریب هفتصد سیارهٔ کوچک منظومهٔ شمسی، با درنظر گرفتن تاثیر مشتری و زحل روی آن‌ها، در چند روز محاسبه شود: برای ده‌سال بعد از آن مختصات آن‌ها به دست آمد و با دقت معین شد بعد از هر چهل روز در چه محلی خواهند بود. پیشتر چنین محاسبه‌هایی، ماه‌ها طول می‌کشید و به‌کار دفتر محاسبه‌ای بسیار بزرگی نیاز داشت.

برای تنظیم یک نقشه براساس عکس‌برداری، نقشه‌برداری محل، باید دستگاهی از معادله‌های جبری را حل کرد که شامل تعداد زیادی مجهول‌اند. حل دستگاهی که شامل ۸۰۰ معادله باشد، و برای حل آن به ۲۵۰ میلیون عمل نیاز داریم، به یاری ماشین الکترونی در کمتر از بیست ساعت انجام می‌شود.

با همین ماشین‌ها، می‌توان جدول‌هایی برای تعیین شکل طرح‌های شیب‌های تند کانال، تنظیم کرد که در ساختمان‌های هیدروتکنیک، حداکثر صرفه‌جویی در مصالح و در وقت را درنظر گرفته باشند. تلاش‌های قبلی برای حل این مسأله، آن هم تنها برای یک حالت، با کار ۱۵ محاسب و در جریان چندماه، نمی‌توانست با موفقیت به پایان برسد. با ماشین‌های الکترونی، می‌توان تنها با صرف وقتی کمتر از سه‌ساعت، ده‌ها حالت مختلف را مشخص کرد.

به‌کمک ماشین می‌توان انواع گوناگون حل یک‌مسأله را آزمایش و مناسب‌ترین آن‌ها را انتخاب کرد. در مثل از این راه می‌توان باصرفه‌ترین ساخت یک پل را تعیین کرد، بهترین شکل بال هواپیما، شیپورهٔ موتورهای رآکتیو، پره‌های توربین و غیر آن را پیدا کرد.

در عمل، دقت فوق‌العادهٔ محاسبه، این امکان را به وجود می‌آورد که با ماشین‌های حساب الکترونی، همهٔ انواع جدول‌های ممکن را که برای دانش و صنعت لازم است به دست آوریم. برای این‌که جدولی شامل ۵۰ هزار مقدار انتگرال *فره‌نل* را به‌کمک رایانه تنظیم کنیم، تنها به یک ساعت وقت نیاز داریم.

کاربرد ماشین‌های حساب الکترونی در حل مسأله‌های منطقی. به‌کمک ماشین‌های حساب الکترونی، علاوه بر انجام مسأله‌های ریاضی، می‌توان مسأله‌های منطقی را هم حل کرد و از جمله متنی را از یک زبان به زبانی دیگر ترجمه کرد. در این‌باره باید به جای عددها، واژه‌ها، فرهنگ دو

زبانی و عبارت‌های مختلف زبان‌ها را در ماشین نگاه داشت.

ماشین؛ ضمن مقایسهٔ واژه‌های متن با واژه‌های «فرهنگ»، واژه‌های مورد لازم را پیدا می‌کند. ماشین بعد از این انتخاب، به‌کمک قانون‌های دستوری، که به صورت برنامه نوشته شده است، روی واژه‌ها کار می‌کند و آن‌ها را به صورت لازم در می‌آورد و در داخل عبارت، در مکان خودش قرار می‌دهد. متن ترجمه‌شده روی کاغذ چاپ می‌شود. برای موفقیت ترجمه، کار سنگین و دقیق زبان‌شناسان و ریاضی‌دانان در تنظیم برنامه، لازم است.

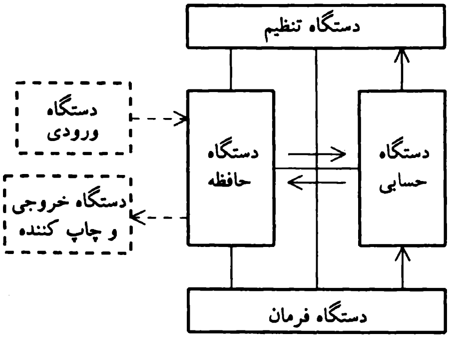
فرهنگ‌ها و برنامه‌های آزمایشی که برای ترجمهٔ متن‌های علمی ــ فنی از زبان انگلیسی به زبان روسی، در اواخر ۱۹۵۵ در فرهنگستان علوم شوروی برای رایانه ساخته شد، نخستین آزمایش‌ها در زمینهٔ ترجمه بود.

حل خیلی از مسأله‌های پیچیدهٔ منطقی، و از جمله مسأله‌های مربوط به شطرنج، با موفقیت به وسیلهٔ رایانه به نتیجه رسیده است. تحلیل کامل بازی شطرنج به‌کمک رایانه‌های امروزی، به مناسبت تعداد عظیم حالت‌های ممکن، میسر نیست. با یک روش تقریبی، می‌توان مهره‌های شطرنج را به وسیلهٔ امتیازهایی که به آن‌ها داده می‌شود، ارزیابی کرد: از جمله برای شاه، ده هزار امتیاز؛ وزیر، صد امتیاز؛ رخ، پنجاه امتیاز. علاوه بر آن، به هر موقعیت موضعی، و از جمله برای خط باز پیاده هم، می‌توان تعدادی امتیاز داد. ماشین از راه یک رشته آزمایش، حالتی را انتخاب می‌کند که در برابر پاسخ‌های احتمالی طرف مقابل، بهترین نسبت را دربارهٔ امتیازها به دست آورد: با وجود این، به این مناسبت که تعداد راه‌حل‌های ممکن بسیار عظیم است، به ناچار تعداد کمی از آن‌ها را آزمایش می‌کند و در نتیجه نمی‌تواند طرح‌های سوق‌الجیشی بازی را به طور کامل در نظر بگیرد.

اصول اساسی کار ماشین‌های حساب الکترونی. ماشین‌حساب الکترونی امروزی، عبارت است از مجموعهٔ پیچیده‌ای از عنصرهای خودکار الکترونی. در ماشین، لامپ‌های الکترونی، اجزای بلوری ژرمانیوم، لوله‌های کاتودیک (با انحراف الکتروستاتیکی دستهٔ الکترون‌ها)، اجزاء مغناطیسی، فوتو سلول‌ها، مقاومت‌ها، خازن‌ها و دیگر اجزای رادیوتکنیک به‌کار رفته است.

عمل‌های حسابی، با سرعتی فوق‌العاده زیاد به وسیلهٔ طرح‌های حسابی الکترونی، و در ارتباط با دستگاه حسابی، انجام می‌شود (شکل ۲).

برای تأمین سرعت زیاد محاسبه‌ها، تنها انجام سریع عمل‌های حسابی روی عددها،



شکل ۲ استخوان‌بندی ساختمان اساسی ماشین‌حساب الکترونی.

کافی نیست. به همین مناسبت تمامی روند محاسبه را به طور کامل خودکار می‌کنند. چه انتخاب عددهای لازم و چه انجام عمل‌های معین متوالی با عددها، همه به طور خودکار انجام می‌شود.

هم عددهایی که در عمل وارد می‌شوند و هم نتیجهٔ محاسبه‌های بینابینی، باید در ماشین حفظ شود. دستگاهی که به این منظور اختصاص دارد ـ «دستگاه حافظه» ـ امکان انتخاب هر عدد لازم، و همچنین پذیرش نتیجهٔ محاسبه‌ها را به وجود می‌آورد. گنجایش دستگاه حافظه، یعنی مقدار عددهایی که می‌توان در آن نگه داشت، تا حد زیادی انعطاف‌پذیری ماشین را نسبت به حل مسأله‌های مختلف، معین می‌کند.

در ماشین‌های الکترونی امروزی، گنجایش دستگاه حافظه بین ۱۰۰۰ تا ۴۰۰۰ عدد است.

درآوردن عددهایی که برای انجام عملی لازم‌اند، از دستگاه حافظه، و فرستادن دوبارهٔ نتیجه‌ها به همان دستگاه حافظه و سپس عبور به عمل بعدی، به وسیلهٔ دستگاه هدایت در ماشین‌حساب الکترونی، تأمین می‌شود. بعد از آن‌که برنامهٔ محاسبه و فرض‌های اولیه به ماشین داده شد، دستگاه هدایت به طور خودکار، روند محاسبه را انجام می‌دهد.

برای داخل‌کردن فرض‌های اولیه و برنامهٔ محاسبه به ماشین، هم‌چنین برای چاپ نتیجه‌های به دست آمده بر کاغذ، دستگاه‌های ورودی و خروجی خاصی وجود دارد.

برای انجام محاسبه در ماشین، باید به درستی نتیجه‌های به دست آمده اطمینان داشت، یعنی باید محاسبه‌های انجام شده را کنترل کرد. کنترل درستی محاسبه‌ها، یا به‌کمک دستگاه خاص کنترل و یا با روش‌های کنترل ریاضی و منطقی، که با برنامه‌ریزی خاصی

به ماشین داده می‌شود، تحقق می‌پذیرد. ساده‌ترین نمونهٔ این کنترل عبارت است از «حساب با دو دست»، یعنی یک محاسبهٔ دوگانه و سپس مقایسهٔ نتیجه‌های به دست آمده.

قبل از آن که به حل مسأله‌ای اقدام کنیم، باید از واقعیت فیزیکی روند مورد بررسی، که مسأله را به صورت دستور جبری، معادلهٔ دیفرانسیلی یا انتگرالی و یا دیگر رابطه‌های ریاضی تنظیم کرده است، آگاه باشیم. با استفاده از روش‌های تجزیه و تحلیل عددی، به تقریب همیشه می‌توان حل این مسأله را به دنبالهٔ بعضی از عمل‌های حسابی منجر کرد. به این ترتیب، پیچیده‌ترین مسأله‌ها به وسیلهٔ چهار عمل حسابی حل می‌شوند.

برای انجام یک عمل حسابی ضمن محاسبهٔ دستی، باید دو عدد انتخاب کرد، عمل حسابی مفروض را روی آن‌ها انجام داد و نتیجهٔ به دست آمده را یادداشت کرد. این نتیجه، ممکن است برای محاسبه‌های بعدی لازم باشد و یا پاسخ نهایی را به ما بدهد.

در ماشین‌های حساب الکترونی هم، همین راه‌ها دنبال می‌شود. دستگاه حافظهٔ ماشین به یک رشته سلول‌ها تقسیم شده است. همهٔ سلول‌ها از قبل شماره‌گذاری شده‌اند و برای این که عددی را درآوریم، باید شمارهٔ سلولی را که عدد در آن «حفظ‌شده است»، بدهیم.

برای انجام یک عمل حسابی، باید شمارهٔ سلولی از دستگاه حافظه، که این دو عدد را باید از آن جاگرفت، عملی که باید روی این عددها انجام شود و شمارهٔ سلولی که باید نتیجهٔ حاصل را به آن جا فرستاد، در دست داشت. این دستور را، که به صورت رمز (کُد) معینی داده می‌شود، «فرمان» گویند.

حل یک مسأله، منجر به دنباله‌ای از انجام یک رشته فرمان می‌شود. این فرمان‌ها، برنامهٔ محاسبه را تشکیل می‌دهند و در ماشین اغلب در همان دستگاه حافظه نگاهداری می‌شوند.

برنامهٔ محاسبه، یعنی مجموعهٔ فرمان‌هایی که به صورت دنباله‌ای از عمل‌ها برای حل مسأله لازم‌اند، از قبل به وسیلهٔ ریاضی‌دان‌ها آماده می‌شود.

برای حل بسیاری از مسأله‌ها، ده‌ها و حتی صدها ملیون عمل حسابی لازم است. به همین مناسبت، در ماشین‌های حساب الکترونی، از روش‌هایی استفاده می‌کنند که به کمک آن‌ها بتوان با تعداد کمتری از فرمان‌های اولیه، تعداد بیشتری از عمل‌های حسابی را انجام داد.

در ماشین‌های الکترونی، در کنار فرمان‌هایی که برای عمل‌های حسابی درنظر گرفته شده است، فرمان‌هایی هم برای عمل‌های منطقی پیش‌بینی می‌کنند، از جمله برای مقایسهٔ دو عدد، به این منظور که بتوانیم عدد بزرگتر را برای محاسبهٔ بعدی انتخاب کنیم.

فرمان‌های برنامه، و همچنین فرض‌های اولیه، به صورت رمز شرطی نوشته می‌شوند. اغلب، این «نوشته‌ها» به صورت کارت یا نوار مشبک (به وسیلهٔ سوراخ‌هایی که در آن‌ها پدید می‌آید) و یا نوار مغناطیسی و به کمک تکان‌ها، انجام می‌گیرد. سپس این رمزها به ماشین وارد و به دستگاه حافظه فرستاده می‌شود، که بعد از آن، ماشین به طور خودکار برنامهٔ محاسبه را انجام می‌دهد.

نتیجهٔ محاسبه‌ها، باز هم می‌تواند روی نوار مغناطیسی، به صورت تکان‌های کُد، نوشته شود. دستگاه خاص کشف رمز، آن‌چه را روی نوار مغناطیسی کُدها نوشته شده است، به رقم تبدیل و به صورت جدول‌هایی چاپ می‌کند.

انجام کارهای محاسبه‌ایِ پیچیده در ماشین‌های حساب الکترونی، با سرعت بی‌اندازه‌ای که دارد، توانسته است در زمینهٔ کارهای فکری بی‌اندازه صرفه‌جویی کند، درست شبیه تولیدهای ماشینی در مقایسه با کار عملی و دستی. البته، ماشین الکترونی، چون با برنامه‌ای کار می‌کند که از قبل به وسیلهٔ انسان تهیه شده است، امکان خلاقیت را افزایش می‌دهد، ولی استفادهٔ از ماشین هرگز نمی‌تواند به معنای این باشد که ماشین می‌تواند جای انسان را بگیرد.

کاربُرد گستردهٔ ماشین‌های حساب الکترونی در انستیتوهای علمی تحقیقی و مرکزهای برنامه‌ریزی، امکان‌های وسیعی برای حل مسأله‌های اقتصادی و انسانی پدید آورده است. دورنمای زنده و پرامیدی در برابر مهندسان و ریاضی‌دانان برای تکامل بعدی نوع کار و ساختمان ماشین الکترونی، و همچنین بهره‌برداری آن، به وجود آمده است.

ماشین‌های حساب الکترونی، وسیلهٔ نیرومندی در دست‌های انسان است. اهمیتی را که این ماشین‌ها برای ساختمان جامعهٔ آینده دارند، به دشواری می‌توان ارزیابی کرد.

۲. برنامه‌ریزی و کُدبندی در ماشین‌های الکترونی تندکار

اصول بنیانی برنامه‌ریزی. ۱. برای محاسبه در ماشین‌های الکترونی، باید روش ریاضی را که برای حل تقریبی مسأله‌ها انتخاب می‌کنیم، به صورت دنباله‌ای از عمل‌های حسابی درآوریم. انجام این عمل‌ها در ماشین، همان‌طور که گفته شد، به وسیلهٔ برنامهٔ محاسبه و از راه یک رشته فرمان تامین می‌شود. البته طبیعی است، اگر برای انجام هر عمل حسابی، یک

فرمان مخصوص به خودش پیش‌بینی شود، برنامهٔ محاسبه چنان عظیم خواهد شد که حتی برای نوشتن آن، همان مقدار زمانی لازم می‌شود که برای محاسبهٔ دستی خود عمل‌ها به آن نیاز داریم. بنابراین، ضمن برنامه‌ریزی باید به نحوی عمل کرد که با کمترین فرمان بتوان حداکثر عمل‌های حسابی را انجام داد.

برای این که با نوع فرمان‌ها و ساختمان برنامه‌ها آشنا شویم، روی مثال ساده‌ای، آن عمل‌هایی را که ضمن حل مسأله با استفاده از حساب‌دستی لازم داریم، درنظر می‌گیریم.

حل معادلهٔ دیفرانسیلی مرتبهٔ اول زیر را با شرط‌های اولیهٔ آن، به وسیلهٔ روش ***اولر***، به عنوان مثال، بررسی می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}=ay \quad \text{و} \quad y|_{x_0}=y_0 \tag{1}$$

بنابراین روش، تمامی حوزهٔ مقدارهای x به یک رشته فاصله‌ها، با طول‌های برابر $\Delta x=h$، تقسیم می‌شود، و پذیرفته می‌شود که در داخل هر فاصله، مشتق $\frac{dy}{dx}$ مقدار ثابتی برابر با مقدار آن در ابتدای فاصله داشته باشد[1]. با این شرط اولیه، محاسبه‌های مربوط به kامین فاصله، چنین می‌شود:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_k=ay_k$$

$$\Delta y_k=\left(\frac{dy}{dx}\right)_k h=(ah)y_k$$

$$y_{k+1}=y_k+\Delta y_k$$

$$x_{k+1}=x_k+h$$

بعد از انجام محاسبه برای kامین فاصله، به‌محاسبه برای فاصلهٔ $(k+1)$ام می‌رسیم. محاسبه‌ها، با مقدارهای مفروض x_0 و y_0 آغاز می‌شود. دنبالهٔ عمل‌ها منجر به جدول ۱ می‌شود.

در محاسبهٔ دستی، تنها از سه عمل اول استفاده می‌شود، بقیهٔ عمل‌ها نوشته نمی‌شود و خودبه‌خود دانسته به حساب می‌آید، از جمله با نشان‌دادن تکرار محاسبه‌ها برای عمل‌های

---

۱. در عمل، حل عددی معادله‌های دیفرانسیلی عادی، اغلب به دستوری پیچیده‌تر و دقیق‌تر، منجر می‌شود.

جدول ۱

عمل‌هایی که برای حل معادلهٔ (۱) با روش اولر لازم است

محاسبه[1]	دستور	مقدارهایی‌که باید به‌دست آید	شمارهٔ عمل
$(ah)(۲)_{k-۱}$	$(ah)y_k$	Δy_k	۱
$(۲)_{k-۱}+(۱)_k$	$y_k+\Delta y_k$	$y_{k+۱}$	۲
$(۳)_{k-۱}+h$	x_k+h	$x_{k+۱}$	۳
چاپ مقدار به دست آمدهٔ $x_{k+۱}$			۴
چاپ مقدار به دست آمدهٔ $y_{k+۱}$			۵
تکرار محاسبه با آغاز از عمل‌های شمارهٔ ۱ برای مقدارهای تازهٔ x و y			۶
وقتی x به مقدار x_n رسید، محاسبه تمام می‌شود			۷

بعدی، نشان‌دادن نتیجهٔ پایان محاسبه‌ها و غیره. در محاسبهٔ با ماشین، باید همهٔ این عمل‌ها بادقت تنظیم شود (عمل‌های ۴ تا ۷). به‌این ترتیب، در ماشین در کنار انجام عمل‌های حسابی، باید عمل‌های هدایتی را هم (عمل ۴ تا ۷) پیش‌بینی کرد. عمل‌های هدایتی یا خصلتی مشخص دارند (مثل عمل‌های ۴ و ۵)، و یا خصلتی شرطی که به نتیجهٔ به دست آمده مربوط می‌شود (مثل عمل‌های ۶ و ۷). از آن‌جا که دو عمل اخیر به هم مربوط اند (باید یا اولی را انجام داد یا دومی را)، بنابراین در ماشین، این دو عمل به صورت یک عمل با هم متحد (عمل مقایسه)، و به‌این صورت تنظیم می‌شود: «اگر مقدار x کمتر از x_n است، باید محاسبه را با آغاز از عمل ۱ تکرار کرد، ولی اگر مقدار x برابر یا بزرگتر از x_n است، باید محاسبه را قطع کرد». به‌این ترتیب، ادامهٔ محاسبه‌های بعدی، به مقدار x، که در جریان محاسبه به دست می‌آید، بستگی دارد.

۲. بررسی عمل‌های حسابی جدول ۱ نشان می‌دهد که برای انجام یک عمل حسابی باید

۱. عددهایی که در این ستون، داخل پرانتز گذاشته شده‌اند نشان می‌دهند که نتیجهٔ کدام عمل را باید برای محاسبه انتخاب کرد، برای نمونه در عمل نخست (سطر اول) باید مقدار ah را در مقداری که در نتیجه انجام عمل دوم به دست می‌آید (سطر دوم برای فاصلهٔ قبلی $(۲)_{k-۱}$)، ضرب کرد؛ در عمل دوم، باید مقداری را که در نتیجهٔ انجام عمل برای فاصلهٔ قبلی $(۲)_{k-۱}$ به دست آمده است با مقداری که در نتیجهٔ عمل اول برای فاصله جاری $(۱)_k$ به دست می‌آید، جمع کرد.

در آغاز محاسبه در ستون «مقدارهایی که باید به دست آید» برای عمل‌های ۲ و ۳، باید فرض‌های اولیهٔ $x_۰$ و $y_۰$ را قرار داد.

مشخص کرد، با عددها چه عملی را باید انجام داد، چه عددهایی را باید انتخاب کرد و نتیجهٔ به دست آمده را به‌کجا باید هدایت کرد، زیرا از این نتیجه برای محاسبه‌های بعدی، استفاده می‌شود.

کُد (رمز) عددها در دستگاه حافظه نگه‌داری می‌شود، بنابراین باید شمارهٔ سلول‌های مربوط را مشخص کرد؛ عددها را از کجا باید گرفت و نتیجهٔ به دست آمده را به‌کجا هدایت کرد. و این، به طور طبیعی منجر به «دستگاه سه آدرسی فرمان» می‌شود.

در دستگاه سه آدرسی فرمان، بخش معینی از ردیف‌های کُد برای دستورعمل‌ها اختصاص دارد، یعنی برای عمل‌هایی که باید روی عددها انجام شود (کُد عمل‌ها). بقیهٔ ردیف‌های کُد فرمان‌ها به سه گروه برابر تقسیم می‌شوند که به آن‌ها «آدرس‌های فرمان‌ها» می‌گویند (شکل ۳). کُد آدرس اول، شمارهٔ سلولی از دستگاه حافظه را نشان می‌دهد که باید عدد اول را از آن انتخاب کرد، کُد آدرس دوم ـ شمارهٔ سلولی را که باید عدد دوم را از آن گرفت، کُد آدرس سوم ـ شمارهٔ سلولی از دستگاه حافظه را که باید نتیجهٔ به دست آمده را به آن فرستاد.

کُد فرمان‌های هدایتیِ جریان محاسبه را هم می‌توان به صورت دستگاه سه آدرسی مشخص کرد. فرمان‌های «انتقال عدد برای چاپ» باید در کُد، شمارهٔ معین این عمل را داشته باشد: در آدرس اول، شمارهٔ سلولی از دستگاه حافظه را نشان می‌دهد که عددی که باید برای چاپ فرستاده شود در آن نگه‌داری شده است، و در آدرس سوم دستگاه چاپ‌کننده (در آدرس دوم، کُد وجود ندارد). فرمانی که این یا آن حرکت بعدی جریان محاسبه را معین می‌کند، «فرمان مقایسه» نامیده می‌شود. کُد مربوط به عمل این فرمان نشان می‌دهد که باید دو عددی را که شمارهٔ آن‌ها در آدرس‌های اول و دوم فرمان داده شده است، با هم مقایسه کند. اگر عدد اول کوچکتر از عدد دوم باشد، باید به فرمانی رفت که شمارهٔ آن در آدرس سوم فرمانِ مقایسه داده شده است. ولی اگر عدد اول، بزرگتر یا برابر عدد دوم باشد، باید انجام فرمان مفروض، به فرمان شمارهٔ بعدی منتقل شود.

کُد فرمان‌ها، همچنین کُد عددها، در دستگاه حافظهٔ ماشین نگه‌داری می‌شوند و به ترتیب شمارهٔ خود به دنبال یکدیگر قرار دارند، مگر این که نشانه‌ای برای تغییر حرکت (و

کُد عمل‌ها	آدرس اول	آدرس دوم	آدرس سوم

شکل ۳ طرح دستگاه سه آدرسی فرمان.

از جمله، ضمن عمل مقایسه) وجود داشته باشد.

برنامهٔ محاسبه را برای مثالی که در بالا آوردیم، بررسی می‌کنیم. تقسیم کُد عددها را در سلول‌های دستگاه حافظه، به ترتیب زیر می‌پذیریم:

مقدار ah در سلول شمارهٔ ۱۱
مقدار h در سلول شمارهٔ ۱۲
مقدار x_n در سلول شمارهٔ ۱۳
مقدار x در سلول شمارهٔ ۱۴
مقدار y در سلول شمارهٔ ۱۵
سلول عمل‌کننده[1] ـ شمارهٔ ۱۶

با توجه به جدول قبلی، برنامهٔ محاسبه‌ای (جدول ۲) به دست می‌آید.

کُد فرمان‌ها در دستگاه حافظه نگه‌داری می‌شود (برای مثال ما، از سلول اول تا هفتم). فرمانی که در سلول دستگاه حافظه حفظ شده است، به دستگاه هدایتی ماشین وارد می‌شود. به مناسبت این فرمان، عددی که در سلول شمارهٔ ۱۱ قرار گرفته است، در عدد سلول ۱۵ ضرب می‌شود، یعنی مقدار $\Delta y_k=(ah)y_k$ محاسبه می‌شود. نتیجه‌ای که به دست

جدول ۲ برنامهٔ محاسبه، برای حل معادلهٔ (۱) با روش اولر

شماره فرمان‌ها	کُد (رمز) فرمان‌ها: کُد عمل‌ها	آدرس اول	آدرس دوم	آدرس سوم	ملاحظه
۱	ضرب	۱۱	۱۵	۱۶	$\Delta y_k=(ah)y_k$
۲	جمع	۱۵	۱۶	۱۵	$y_{k+1}=y_k+\Delta y_k$
۳	جمع	۱۴	۱۲	۱۴	$x_{k+1}=x_k+\Delta y_k$
۴	چاپ	۱۴	—	۱	چاپ x_{k+1} درنخستین دستگاه چاپ
۵	چاپ	۱۵	—	۲	چاپ y_{k+1} در دومین دستگاه چاپ
۶	مقایسه	۱۴	۱۳	۱	اگر $x<x_k$، عبور به فرمان شمارهٔ ۱؛ اگر $x\geq x_k$ عبور، به فرمان بعدی، یعنی به فرمان شمارهٔ ۷
۷	توقف	—	—	—	پایان محاسبه

۱. عمل‌کننده به سلول‌هایی گفته می‌شود که مقدارهای بینابینی که در جریان محاسبه به دست می‌آید، در آن‌ها گذاشته می‌شود.

می‌آید، به سلول عمل‌کنندهٔ ۱۶ فرستاده می‌شود. با انجام این عمل، فرمانی از سلول شمارهٔ بعدی دستگاه حافظه، یعنی از سلول دوم، به دستگاهی هدایتی وارد می‌شود. در اثر این فرمان، مقدار $y_{k+1}=y_k+\Delta y_k$ پیدا می‌شود، که به جای مقدار قبلی y، یعنی به سلول ۱۵، فرستاده می‌شود. به همین ترتیب، بنابر فرمان سوم، مقدار جدید x پیدا می‌شود؛ فرمان‌های چهارم و پنجم، مقدارهای به دست آمدهٔ x و y را چاپ می‌کنند؛ و فرمان ششم، حرکت بعدی جریان محاسبه را معین می‌کند. در اثر این فرمان، عددی که در سلول ۱۴ قرار دارد با عدد سلول ۱۳، یعنی مقدار به دست آمدهٔ x_{k+1} با مقدار نهایی x_n مقایسه می‌شود. اگر $x_{k+1}<x_n$ باشد، باید محاسبه را برای فاصلهٔ بعدی تکرار کرد، یعنی باید به اول و در حالت مفروض، به فرمان اول برگشت. شمارهٔ این فرمان، که با شرط کوچکتربودن عدد اول از عدد دوم باید به آن مراجعه کرد، در آدرس سوم فرمان‌های مقایسه، نشان‌داده است. ولی اگر محاسبه منجر به مقدار $x_{k+1}\geq x_n$ شد، فرمان مقایسه، به فرمان شمارهٔ بعدی منتقل می‌شود، یعنی به فرمان هفتم، که در آن، جریان محاسبه متوقف می‌شود.

پیش از آغاز محاسبه، باید کُد (رمز) فرمان‌ها (در سلول ۱ تا ۷)، کُد ثابت‌ها (در سلول ۱۱ تا ۱۳) و همچنین فرض‌های اولیه، یعنی مقدارهای x_0 و y_0، (در سلول ۱۴ و ۱۵) را به دستگاه حافظه وارد کرد.

با انجام محاسبه برای فاصلهٔ اول، به جای مقدارها x_0 و y_0 مقدارها x_1 و y_1 در سلول‌های ۱۴ و ۱۵ پیدا می‌شود، یعنی مقدارهایی از متغیرها که برای آغاز فاصلهٔ بعدی لازم هستند. بنابراین، با تکرار همین فرمان‌های برنامه، می‌توان محاسبه را برای فاصلهٔ بعدی انجام داد و غیره.

این مثال نشان می‌دهد، به یاری تکرار دوری یک رشته فرمان، می‌توان با برنامهٔ کم و بیش کوچکی، حجم بزرگی از محاسبه را انجام داد. روش تکرار دوری بخش‌های جداگانهٔ برنامه، به طور گسترده‌ای به وسیلهٔ برنامه‌نویسان و برای حل مسأله‌ها، به‌کارگرفته می‌شود.

۳. روش دیگری که عمومی‌شده، و به طور جدی حجم برنامه را کوچک می‌کند، منجر به تغییر خودبه خود آدرس‌های بعضی فرمان‌ها می‌شود. ماهیت این روش را روی مثالی از محاسبهٔ چندجمله‌ای، روشن می‌کنیم.

فرض کنید بخواهیم مقدار چندجمله‌ای

$$y=a_0x^6+a_1x^5+a_2x^4+a_3x^3+a_4x^2+a_5x+a_6$$

جدول ۳ برنامهٔ محاسبهٔ چندجمله‌ای

شمارهٔ فرمان‌ها	کُد (رمز) فرمان‌ها: کُد عمل‌ها	آدرس اول	آدرس دوم	آدرس سوم	ملاحظه
۱	ضرب	۲۰	۳۱	۲۷	a_0x
۲	جمع	۲۷	۲۱	۲۷	a_0x+a_1
۳	ضرب	۲۷	۳۱	۲۷	$(a_0x+a_1)\,x$
۴	جمع	۲۷	۲۲	۲۷	$(a_0x+a_1)\,x+a_2$
۵	ضرب	۲۷	۳۱	۲۷	$((a_0x+a_1)\,x+a_2)\,x$
۶	جمع	۲۷	۲۳	۲۷	$((a_0x+a_1)\,x+a_2)\,x+a_3$
۷	ضرب	۲۷	۳۱	۲۷	$(((a_0x+a_1)\,x+a_2)\,x+a_3)\,x$
۸	جمع	۲۷	۲۴	۲۷	$(((a_0x+a_1)\,x+a_2)\,x+a_3)\,x+a_4$
۹	ضرب	۲۷	۳۱	۲۷	$((((a_0x+a_1)\,x+a_2)\,x+a_3)\,x+a_4)\,x$
۱۰	جمع	۲۷	۲۵	۲۷	$((((a_0x+a_1)\,x+a_2)\,x+a_3)\,x+a_4)\,x+a_5$
۱۱	ضرب	۲۷	۳۱	۲۷	$(((((a_0x+a_1)\,x+a_2)\,x+a_3)\,x+a_4)\,x+a_5)\,x$
۱۲	جمع	۲۷	۲۶	۲۷	$y=(((((a_0x+a_1)\,x+a_2)\,x+a_3)x+a_4)x+a_5)\,x+a_6$

را محاسبه کنیم. برای محاسبهٔ با ماشین، بهتر است این چندجمله‌ای را به این صورت بنویسیم:

$$y=(((((a_0x+a_1)x+a_2)x+a_3)x+a_4)x+a_5)x+a_6$$

فرض کنید مقدارهای ضریب‌های a_0، ... ، a_6 در سلول‌های ۲۰ تا ۲۶ و مقدار x در سلول ۳۱ دستگاه حافظه قرار داشته باشند. برنامهٔ محاسبه، که به طریق ساده‌ای تنظیم شده، در جدول ۳ داده شده است.

همان‌طور که دیده می‌شود، در برنامه به طور متناوب عمل‌های ضرب و جمع وجود دارد. همهٔ فرمان‌های ضرب، به استثنای اولی، یکسان است: باید عددی را که در سلول ۲۷ حفظ شده است، در عدد سلول ۳۱ ضرب کرد و نتیجه را به سلول ۲۷ فرستاد. همهٔ فرمان‌های جمع، آدرس‌های اول و سوم مشابهی دارند. در ضمن، شمارهٔ سلول آدرس دوم، از یک فرمان جمع به فرمان دیگر جمع، هربار یک واحد تغییر می‌کند: در فرمان دوم، عدد از سلول ۲۱، در فرمان چهارم از سلول ۲۲ و غیره انتخاب می‌شود.

اگر تغییر شماره‌های سلول‌ها را در آدرس دوم فرمان‌های جمع، به صورت خودکار تامین کنیم، برنامه محاسبه، خیلی کوتاه می‌شود. کُد فرمان‌ها، در سلول‌های مربوطه نگاهداری می‌شوند، و می‌توان آن‌ها را همچون عددهایی درنظر گرفت. با اضافه‌کردن مقدارهای مربوط به آن‌ها، می‌توان خودکاربودن تغییر آدرس فرمان‌ها را تامین کرد. با چنین روشی، برنامهٔ محاسبهٔ چندجمله‌ای، به صورت جدول ۴ در می‌آید.

جدول ۴ برنامهٔ محاسبهٔ چندجمله‌ای

شمارهٔ فرمان‌ها	کُد (رمز) فرمان‌ها: کُد عمل‌ها	آدرس اول	آدرس دوم	آدرس سوم
۱	جمع	۲۰	–	۲۷
۲	ضرب	۲۷	۳۱	۲۷
۳	جمع	۲۷	۲۱	۲۷
۴	جمع	۳	۲۸	۳
۵	مقایسه	۳	۲۹	۲
۶	توقف			

فرمان اول برای انتقال عدد از سلول ۲۰ به سلول ۲۷، و برای این است که فرمان یکنواختی برای ضرب داشته باشیم. با انجام فرمان‌های دوم و سوم، مقدار $a_{\circ}x+a_{1}$ به دست می‌آید. برای محاسبه‌های بعدی باید آدرس دوم فرمان جمع (سومین فرمان) را یک واحد تغییر داد، که فرمان چهارم هم انجام شود. با این فرمان، عددی انتخاب می‌شود که سلول سوم است، یعنی همراه با هم باید فرمان جمع (سومین فرمان)، انجام شود و مقداری هم که در سلول ۲۸ حفظ شده است، به آن اضافه شود. برای این‌که در آدرس دوم از فرمان سوم، تغییری به اندازهٔ یک واحد به دست آید، باید در سلول ۲۸، مقدار

کُد عمل‌ها	آدرس اول	آدرس دوم	آدرس سوم
–	–	۱	–

حفظ شود. به این ترتیب، بنابر انجام فرمان چهارم، مقدار فرمان سوم به ترتیب زیر به دست می‌آید.

کُد عمل‌ها	آدرس اول	آدرس دوم	آدرس سوم
جمع	۲۷	۲۲	۲۷

دوباره، مقدار به دست آمده در سلول سوم به جای مقدار قبلی فرمان جمع، حفظ می‌شود.

با به دست آوردن مقدار جدید فرمان جمع، می‌توان محاسبه را با آغاز از فرمان ضرب، یعنی از فرمان دوم، آغاز کرد. به این منظور، فرمان پنجم مقایسه به‌کار می‌رود. این فرمان، فرمان تازه به دست آمدهٔ سلول سوم را، با مقداری که در سلول ۲۹ نگه‌داری شده است،

مقایسه می‌کند. در سلول ۲۹، این مقدارها نگه‌داری می‌شود:

کُد عمل	آدرس اول	آدرس دوم	آدرس سوم
جمع	۲۷	۲۷	۲۷

از این مقایسهٔ مقدماتی معلوم می‌شود که مقدار اول (در سلول سوم) کمتر از مقدار دوم (در سلول ۲۹) است و بنابراین جریان محاسبه به فرمان دوم، که در آدرس سوم فرمان‌های مقایسه نشان داده شده است، منتقل می‌شود. به این ترتیب، فرمان‌های ضرب (فرمان دوم) و جمع (فرمان سوم) به طور خودبه خود تکرار می‌شود، در ضمن، شمارهٔ سلول در آدرس دوم مربوط به فرمان‌های جمع، هربار یک واحد تغییر می‌کند (فرمان چهارم اجرا می‌شود).

تکرار دور، تا وقتی آدرس دوم فرمان‌های جمع (فرمان‌های سوم)، به مقدار ۲۷ نرسیده است، پیش می‌آید، یعنی تا شش دور تکرار. در ضمن فرمان سوم، این صورت را دارد:

کُد عمل	آدرس اول	آدرس دوم	آدرس سوم
جمع	۲۷	۲۷	۲۷

یعنی کُد فرمان، همان است که در سلول ۲۹ بود. در ضمن، فرمان مقایسه (فرمان ۵)، مقدارهای برابر را که در سلول‌های ۳ و ۲۹ نگه‌داری شده است، نشان می‌دهد، و بنابراین جریان محاسبه به فرمان شمارهٔ بعدی، یعنی فرمان ۶ می‌رود؛ و در این‌جا محاسبهٔ چندجمله‌ای تمام می‌شود.

روش تغییر خودبه خود شمارهٔ سلول‌ها در آدرس‌های بعضی فرمان‌ها، که به وسیلهٔ برنامه تأمین می‌شود، به طور گسترده‌ای برای حل گوناگون‌ترین مسأله‌ها به‌کار می‌رود. با روش تکرار دوری، می‌توان با تعداد کمتری فرمان، حجم بسیار بزرگی محاسبه را انجام داد.

۴. به‌جز دستگاه سه آدرسی فرمان‌ها، که بررسی کردیم در بسیاری از ماشین‌ها از دستگاه یک آدرسی هم استفاده می‌کنند. در دستگاه یک آدرسی، به‌جز کُد عمل، در هر فرمان، تنها یک آدرس وجود دارد. برای این که یک عمل حسابی را با دو عدد انجام دهیم و نتیجه‌ای را که به دست می‌آید، به دستگاه حافظه بفرستیم، سه فرمان لازم است: فرمان اول، یکی از عددها را از دستگاه حافظه به دستگاه حسابی فرا می‌خواند؛ فرمان دوم، عدد دوم را فرا می‌خواند و عمل روی عددهای مفروض را انجام می‌دهد، و سرانجام فرمان سوم، نتیجه‌ای را که به دست آمده است به دستگاه حافظه می‌فرستد. ضمن محاسبه‌ها، اغلب از

نتیجهٔ به دست آمده، تنها برای انجام عمل حسابی بعدی استفاده می‌کنند. در چنین حالت‌هایی، لازم نیست نتیجهٔ حاصل به دستگاه حافظه فرستاده شود؛ برای انجام عمل بعدی فراخواندن عدد اول لازم نیست. به این ترتیب، تعداد فرمان‌های برنامه در دستگاه یک آدرسی به تقریب تنها دو برابر این تعداد در دستگاه سه آدرسی است. از آن جا که هر فرمان یک آدرسی، ردیف‌هایی کمتر از دستگاه سه آدرسی دارد، جایی که در دستگاه حافظه برای برنامه لازم است، کم و بیش برای دو دستگاه فرمان یکی است (اغلب در دستگاه فرمان یک آدرسی، در هر سلول دستگاه حافظه، دو فرمان نگه‌داری می‌شود). اختلاف در دستگاه‌های فرمان را باید مربوط به سرعت کار ماشین‌ها دانست. اگر سرعت انجام عمل‌ها را، یکی به حساب بیاوریم، ماشین یک آدرسی، محاسبه‌ها را به تقریب دوبار کندتر از ماشین سه آدرسی به پایان می‌رساند.

به‌جز این دستگاه‌ها، ماشین‌هایی هم وجود دارند که با دستگاه دو یا چهار آدرسیِ فرمان کار می‌کنند.

۵. حل یک مسأله، اغلب به چند مرحله تقسیم می‌شود. بسیاری از این مرحله‌ها، برای بیشتر مسأله‌ها، عمومی است. به عنوان مثال، چند نمونه می‌آوریم: محاسبهٔ تابع‌های مقدماتی برحسب مقدار مفروض آوند، تعیین نمو تابع برحسب مشتق مفروض در حل معادله‌های دیفرانسیلی عادی، محاسبهٔ انتگرال معین برحسب تابع زیر انتگرال.

طبیعی است، برای چنین مرحله‌های نمونه‌ای، کافی است «زیربرنامه‌های» آماده شده و مشخصی، یکبار برای همیشه، داشته باشیم. وقتی در جریان حل یک مسأله، به محاسبه‌های یکنواختی برخورد کنیم، باید در وقت خودش، محاسبه را روی یکی از برنامه‌های مشخص تنظیم کنیم. بعد از پایان محاسبه به وسیله زیربرنامهٔ مشخص، باید دوباره به انجام برنامهٔ اصلی، در جایی که قطع شده است، پرداخت.

وجود زیربرنامه‌های مشخص، برای ساده کردن برنامه‌ریزی، بسیار اهمیت دارد. به نسبت تجمع زیربرنامه‌هایی که در کارت مشبک یا نوار مغناطیسی، نگهداری شده باشد، برنامه‌ریزی بسیاری از مسأله‌ها، تنها منجر به تنظیم تعداد کمی برنامه‌های اصلی می‌شود که بتواند زیربرنامه‌های مشخص جداگانه را به هم مربوط کنند.

۶. به‌کمک ماشین‌های محاسبهٔ الکترونی، مسأله‌هایی حل می‌شود که به انجام ده‌ها و حتی صدها ملیون عمل‌های حسابی نیاز دارند. اگر حتی در یکی از این عمل‌ها، اشتباهی رخ دهد، منجر به نتیجهٔ نادرست می‌شود. روشن است برای چنین حجم

عظیمی از عمل‌ها، نمی‌توان در عمل، راهی برای بازرسی دستی پیدا کرد. بنابراین، خود ماشین باید بتواند کار خود را بازرسی کند. روش‌هایی وجود دارد، که به خود دستگاه امکان می‌دهد تا درستی عمل‌های انجام شده را بازرسی کند و در حالتی که اشتباهی پیش آید، به طور خودکار، ماشین را نگه دارد. با وجود این، برای استفاده از بازرسی ماشینی، در واقع باید دستگاه ماشین را بزرگ کنیم و تازه، اغلب نمی‌تواند همهٔ حلقه‌های ماشین را دربر گیرد. بهترین روش بازرسی، پیش‌بینی آن به طور مستقیم، و به وسیلهٔ خود برنامهٔ محاسبه است.

یکی از راه‌های این بازرسی، تکرار محاسبه است. اگر ضمن تکرار محاسبه، به شرطی که بدون ارتباط با هم انجام شده باشد، به یک نتیجه برسیم، می‌تواند به اندازهٔ کافی ضامن نبودن اشتباه‌های تصادفی باشد. روشن است، از این راه، نمی‌توان وجود اشتباه اصولی را تشخیص داد. برای این که اشتباه اصولی را از بین ببریم، قبل از حل مسأله، محاسبه را با پاسخ‌هایی که از قبل معلوم است، بازرسی می‌کنند. این محاسبه‌ها باید تمام حلقه‌های ماشین را دربر گیرد. درستی نتیجه‌های به دست آمده، به ازای محاسبه‌های بازرسی شده، نبودن اشتباه اصولی را تضمین می‌کند.

به‌جز روش تکرار محاسبه، بسته به نوع مسأله، می‌توان روش‌های پیچیده‌تری برای بازرسی به‌کار برد. از جمله، ضمن تعیین مسیر حرکت گلوله، به‌جز حل دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی برای مولفه‌های سرعت، می‌توان به طور اضافی معادلهٔ دیفرانسیلی را برای سرعت کامل حل کرد و در هر گام، انتگرال‌گیری را به وسیلهٔ دستورِ

$$v^۲ = v_x^۲ + v_y^۲$$

تحقیق کرد. ضمن حل معادله‌های دیفرانسیلی عادی، به‌جز محاسبهٔ با گام انتگرال‌گیری h، می‌توان محاسبهٔ دوم را، با گام انتگرال‌گیری $\frac{h}{۲}$ انجام داد. این عمل، نه تنها نبودن اشتباه تصادفی را ضمن محاسبه‌ها، بلکه درستی انتخاب گام‌ها را در ارزیابی، تضمین می‌کند. ضمن محاسبهٔ جدول‌ها به وسیلهٔ رابطهٔ برگشتی، گاهی می‌توان بعضی از مقدارها را با روش‌های دیگری به دست آورد. درستی دو مقدار، می‌تواند تا حد زیادی درستی محاسبهٔ همهٔ مقدارهای بینابینی را تضمین کند.

همیشه، وقتی برنامه‌ای ریخته می‌شود، باید نوعی بازرسی منطقی برای محاسبه‌هایی که در راه است، پیش‌بینی کرد.

رمزنویسی (کُدبندی) عددها و فرمان‌ها. عددها و فرمان‌ها، به صورت رمز به ماشین داده می‌شود. در بیشتر حالت‌ها به جای دستگاه‌دهدهی معمولی، از دستگاه عددنویسی به مبنای ۲، استفاده می‌شود.

در دستگاه‌دهدهی، عدد ۱۰ را به عنوان مبنای عددشماری به حساب می‌آورند. در هر مرتبه، یکی از ده رقم از ۰ تا ۹ می‌تواند وجود داشته باشد. اگر رقم‌ها را از راست به چپ در نظر بگیریم، واحد هر مرتبه، ده برابر واحد مرتبهٔ قبل از آن است. بنابراین، هر عدد درست را در دستگاه دهدهی، می‌توان به این صورت نوشت:

$$N_{۱۰} = k_{۰}\, ۱۰^{۰} + k_{۱}\, ۱۰^{۱} + k_{۲}\, ۱۰^{۲} + \cdots + k_{n}\, ۱۰^{n}$$

در دستگاه دودویی، عدد ۲ را به عنوان مبنای عددشماری به حساب می‌آورند. در عددنویسی به مبنای ۲، تنها از رقم‌های ۰ و ۱، برای مرتبه‌های مختلف، استفاده می‌شود. واحد هر مرتبه در این دستگاه، دو برابر واحد مرتبهٔ قبل از آن است. بنابراین، هر عدد درست را در دستگاه دو دویی، می‌توان به این صورت نوشت:

$$N_{۲} = k_{۰}\, ۲^{۰} + k_{۱}\, ۲^{۱} + k_{۲}\, ۲^{۲} + \cdots + k_{p}\, ۲^{p}$$

که در آن، $k_{۰}$، $k_{۱}$، ....، k_p، می‌توانند یکی از دو مقدار ۰ یا ۱ را قبول کنند.

نخستین عددهای رشتهٔ طبیعی، در دستگاه‌های دودویی و دهدهی، این طور نوشته می‌شوند:

دستگاه دودویی

۰ ۱ ۱۰ ۱۱ ۱۰۰ ۱۰۱ ۱۱۰ ۱۱۱ ۱۰۰۰ ۱۰۰۱ ۱۰۱۰ ۱۰۱۱ ...

دستگاه دهدهی

۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ ۱۰ ۱۱ ...

عددهای غیرصحیح هم به همین ترتیب، و با استفاده از توان‌های منفی مبنا، نوشته می‌شود. مثلاً عدد $۳\frac{۱}{۸}$، در دستگاه دودویی، این طور نوشته می‌شود:

۱۱٫۰۰۱

انتقال عدد، از یک دستگاه عددشماری به دستگاه دیگر، با عمل‌های حسابی معینی انجام می‌گیرد و در ماشین، اغلب این انتقال، به طور مستقیم و با برنامه‌ریزی خاصی صورت می‌پذیرد.

عمل‌های حسابی روی عددها، در دستگاه دودویی، شبیه دستگاه دهدهی است. در ضمن، نتیجهٔ جمع دو رقم برابر واحد، رقم صفر را در همان مرتبه می‌دهد و یک رقم برابر واحد را به مرتبهٔ بعد می‌برد. مثال:

۱۰۱۰ + ۱۱۱ = ۱۰۰۰۱

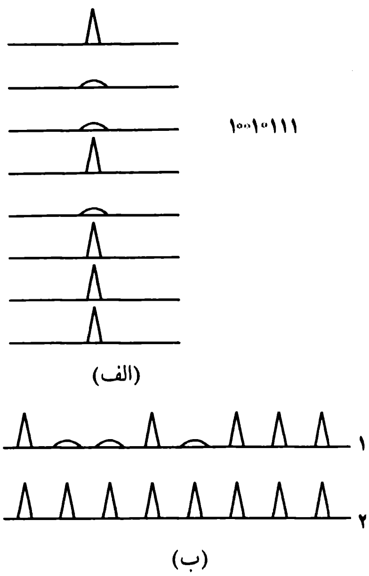
ضرب و تقسیم در دستگاه دودویی، ساده‌تر از دستگاه دهدهی است، زیرا در این جا، جدول ضرب تنها از ضرب عدد در ۰ و ۱، تشکیل شده است. برای نمونه

```
  ۱۰۱۰ (۱۰)
 × ۱۰۱ (۵)
----------
  ۱۰۱۰
 ۰۰۰۰
۱۰۱۰
----------
۱۱۰۰۱۰ (۵۰)
```

انتخاب دستگاه دودویی عددشماری، برای بسیاری از بخش‌های ماشین‌های حساب الکترونی، موجب این می‌شود که دستگاه‌های حسابی بی‌اندازه ساده شود (و به طور عمده، با توجه به عمل‌های ضرب و تقسیم) و به‌جز آن بتوان رقم‌های هر مرتبه را به راحتی نشان داد، از جمله، به صورت جریانی که وصل و قطع می‌شود یا علامتی که ظاهر و یا ناپدید می‌شود و غیره (در دستگاه دودویی، رقم‌های هر مرتبه تنها می‌تواند یکی از دو نماد ۰ یا ۱ باشد).

هر مرتبهٔ دستگاه دودویی را می‌توان به صورت‌بودن یا نبودن علامتی در زنجیر خودش نشان داد. در این حالت، برای هر مرتبه، باید زنجیر و یا رلهٔ خودش را داشت (شکل ۴) که تعداد آن‌ها برابر است با تعداد مرتبه‌ها (دستگاه موازی). می‌توان عدد دودویی را به صورت رمز محرک زمانی هم نشان داد. در این حالت، هر مرتبهٔ عدد، بعد از فاصلهٔ زمانی معینی، روی یک مدار می‌آید (دستگاه پشت سرهم). نشانه‌های زمانی عبور از یک مرتبه به مرتبهٔ دیگر، به وسیلهٔ تکان‌های هم‌زمان کننده (که برای تمامی ماشین عمومی است) به وجود می‌آید.

با توجه به آن‌چه دربارهٔ رمزنویسی عددها گفتیم، ماشین‌های حساب الکترونی به دو مقوله تقسیم می‌شوند: ماشین‌های با عمل موازی و ماشین‌های با عمل متوالی. در ماشین‌های با عمل موازی، همهٔ مرتبه‌ها به طور هم‌زمان منتقل می‌شوند و برای هر مرتبه،



شکل ۴ دستگاه رمزها: الف) موازی؛ ب) پشت سرهم؛ (۱. رمز؛ ۲. تکان‌های هم‌زمان‌کننده).

مدار مربوط به خودش لازم است. در ماشین‌های با عمل متوالی، انتقال عددها به وسیلهٔ یک مدار انجام می‌گیرد، ولی زمان انتقال متناسب با تعداد مرتبه‌هاست. به این ترتیب، ماشین‌های با عمل موازی، در مقایسه با ماشین‌های با عمل متوالی، سریع‌ترند، ولی در عوض به دستگاه‌ها و ابزار بیشتری نیاز دارند.

هر ماشین حساب الکترونی، دارای تعداد معینی ردیف است. همهٔ عددهایی که ضمن محاسبه، با آن‌ها سروکار داریم، باید در این ردیف‌ها جا بگیرند؛ در ضمن طبیعی است که باید ممیز را هم (که عددهای درست را، از عددهای کسری جدا می‌کند)، به حساب آورد.

در بعضی ماشین‌ها، جای ممیز از قبل انتخاب شده است ــ این‌ها، ماشین‌های با ممیز تثبیت شده هستند. اغلب جای ممیز را قبل از بزرگترین مرتبه انتخاب می‌کنند، یعنی همهٔ عددها، ضمن محاسبه، باید کوچکتر از واحد باشند، و این وضع هم، با انتخاب مقیاس‌های مربوط، تأمین می‌شود. در محاسبه‌های پیچیده، دشوار است از قبل بتوان حدود نتیجه‌هایی را که به دست می‌آید، معین کرد، و بنابراین یا باید مقیاس‌هایی ذخیره کرد، که منجر به پایین آمدن دقت می‌شود؛ یا این‌که باید تغییر مقیاس را به طور خودکار در برنامه پیش‌بینی کرد که منجر به بغرنج‌تر شدن برنامه‌ریزی می‌شود.

در بعضی دیگر از ماشین‌ها، جای ممیز برای هر عدد به طور جداگانه معین می‌شود.

اینها، ماشین‌های مرتبه‌دار، و یا آن‌طور که اغلب می‌گویند، ماشین‌های با ممیز «شناور» هستند. نشان دادن جای ممیز به این معناست که عدد را به صورت بخش عددی و مرتبهٔ آن نشان دهیم، یعنی

$$N_{10}=10^k\ N'_{10} \qquad \text{(در دستگاه دهدهی)}$$

$$N_2=2^p\ N'_2 \qquad \text{(در دستگاه دودویی)}$$

از جمله، عدد ۹۷٫۳۵ را می‌توان به صورت 0.9735×10^2 نشان داد. برای نشان دادن عدد در ماشین، باید مرتبهٔ آن (p یا k) و بخش عددی آن را مشخص کرد. در ضمن برای هر عدد، از تمامی جایی که وجود دارد استفاده می‌شود و بدون توجه به مقدار واقعی خود عدد، تمامی رقم‌هایی که در ردیف جا می‌گیرد، به طور کامل داده می‌شود. این موضوع، به دقت محاسبه، به خصوص در عمل ضرب کمک می‌کند و در بسیاری حالت‌ها امکان انجام محاسبه را، بدون درنظر گرفتن مقیاس مشخصی، اجازه می‌دهد.

بالابردن دقت محاسبه و ساده‌تر کردن برنامه‌ریزی در ماشین‌ها، اگر همراه با به حساب‌آوردن مرتبه‌ها باشد (یعنی بخواهیم همهٔ عددها را با یک دقت معین حساب کنیم)، همراه با بغرنج‌کردن دستگاه‌ها و لوازم، به‌ویژه در بخش مربوط به جمع و تفریق است. از آن جا که ممکن است عددها دارای مرتبه‌های متفاوت باشند، قبل از جمع یا تفریق، باید مرتبه‌های آن‌ها را پشت سرهم با هم مقایسه کرد، و در ضمن مرتبه‌های کوچکتر در عدد کوچکتر را حذف کرد. مثل

$$0.7587\times10^2+0.3743\times10^0=0.7587\times10^2+0.0037\times10^2=0.7624\times10^2$$

دربارهٔ دستگاه دودویی، رمزنویسی در ماشین با تثبیت جای ممیز (آن‌ها را کوچکتر از واحد فرض می‌کنند)، خیلی ساده و با ردیف‌کردن نشانه‌های عدد، انجام می‌گیرد. مثل

$$\frac{27}{128}=0.00110110000000$$

در ماشین‌های با ممیز شناور، بخش معینی از رمز، برای نوشتن مرتبه در نظر گرفته می‌شود، که آن هم با توجه به مبنای دودویی عدد نوشته می‌شود. مثل

$$۶\frac{۳}{۴} = ۲^{۳} \times \frac{۲۷}{۳۲} = ۰۰۱۱\text{ر}۱۱۰۱۱۰۰۰۰۰۰۰$$

فرمان‌ها هم، مثل عددها، به این ترتیب رمزنویسی می‌شوند که بخش‌های معینی از رمز برای نوشتن شمارهٔ عمل و شماره‌های سلول‌های هر آدرس (در دستگاه دودویی)، درنظر گرفته می‌شود.

۳. اصول فنی دستگاه‌های ماشین‌های حساب الکترونی

ردیف انجام عمل‌ها در ماشین‌های حساب الکترونی. انجام هر عمل حسابی در ماشین، به وسیلهٔ دریافت متناوب فرمان‌ها، منجر به مرحله‌های زیر می‌شود (در این جا، بحث ما بر سر دستگاه سه آدرسی فرمان‌هاست):

۱. احضار نخستین عدد از دستگاه حافظه و تحویل آن به دستگاه حسابی (شمارهٔ سلولی از دستگاه حافظه، که این عدد در آن جا نگه‌داری می‌شود، در اولین آدرس رمز (کُد) فرمان داده می‌شود).

۲. احضار دومین عدد از دستگاه حافظه و تحویل آن به دستگاه حسابی (شمارهٔ سلول، در آدرس دوم رمز فرمان داده می‌شود).

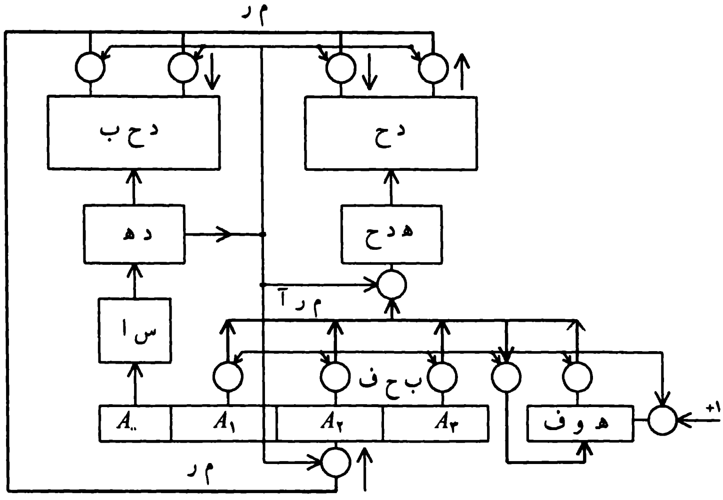
۳. بسته به رمز عمل، دستگاه حسابی، عملِ لازم را با عددها انجام می‌دهد.

۴. نتیجه‌ای که به دست می‌آید، از دستگاه حسابی، به سلول مربوط در دستگاه حافظه فرستاده می‌شود (شمارهٔ این سلول در آدرس سوم داده شده است).

۵. از دستگاه حافظه، شمارهٔ بعدی فرمان انتخاب می‌شود، و ماشین به انجام عمل بعدی می‌پردازد.

در ماشین، رمز فرمان در «بلوک حافظهٔ فرمان‌ها» (ب ح ف، شکل ۵) پذیرفته می‌شود. سوی‌گر (کوموتاتور) الکترونی (س)، شمارهٔ دودویی فرمان عمل را، در یکی از مدارهای خروجی خود، که متناظر با عمل حسابی لازم است، به فشار توجیه شده‌ای تبدیل می‌کند. این فشار توجیه شده، از طریق دستگاه هدایت‌کننده (د ه) مدار ماشین را برای انجام عمل لازم، آماده می‌کند.

برای بیرون‌آوردن نخستین عدد، رمز آدرس اول فرمان ($A۱$) از بلوک حافظهٔ فرمان‌ها



شکل ۵ طرح ساختمانی ماشین حساب الکترونی.

(ب ح ف)، به‌وسیلهٔ میله توزیع برق رمزی آدرس (م رآ) به‌بلوک هدایت‌کننده دستگاه حافظه (ه د ح)، منتقل شود. علامت انتقال این رمز، از دستگاه هدایت‌کنندهٔ ماشین (د ه) داده می‌شود. از سلولی از دستگاه حافظه (د ح)، که متناظر با رمز تحویل شماره است، نخستین عدد انتخاب می‌شود و به‌وسیلهٔ میلهٔ توزیع رمزی (م ر)، به‌دستگاه حسابی (د ح ک) فرستاده می‌شود. بازکردن مدارهای ورودی دستگاه حسابی، به‌وسیلهٔ علامت متناظری از دستگاه هدایت‌کنندهٔ ماشین (د ه)، عملی می‌شود.

به همین ترتیب، عدد دوم هم انتخاب می‌شود. علامتی از دستگاه هدایت‌کنندهٔ ماشین (د ه)، رمز آدرس دوم فرمان ($A2$) را از بلوک حافظهٔ فرمان‌ها (ب ح ف) به بلوک هدایت‌کنندهٔ دستگاه حافظه (ه د ح) می‌فرستد. عدد دوم، که از دستگاه حافظه (د ح) انتخاب شده است، به‌وسیلهٔ میلهٔ توزیع رمزی (م ر)، به‌دستگاه حسابی (د ح ب) منتقل می‌شود.

دستگاه حسابی (د ح ب)، عمل لازم را، بنابر رمزی که از قبل معین شده است، با عددها انجام می‌دهد.

برای انتقال نتیجهٔ به دست آمده، به دستگاه حافظه، رمز آدرس سوم فرمان ($A3$) به‌وسیلهٔ میلهٔ توزیع رمزی آدرس (م ر آ)، از بلوک حافظهٔ فرمان‌ها (ب ح ف) به بلوک هدایت‌کنندهٔ دستگاه حافظه (ه د ح) فرستاده می‌شود. علامت انتقال این رمز، از دستگاه

هدایت‌کنندهٔ ماشین (د ه) داده می‌شود. سلول دستگاه حافظه، متناظر با شمارهٔ مربوط، انتخاب و مدارهای ورودی آن باز می‌شود. روش انتخاب یا تحویل عدد، به‌وسیلهٔ علامت‌هایی از دستگاه هدایت‌کنندهٔ ماشین (د ه)، داده می‌شود. علامتی که از دستگاه هدایت‌کنندهٔ ماشین (د ه) داده می‌شود، نتیجهٔ حاصل را از دستگاه حسابی (د ح ب) به میله‌های توزیع رمزی (م ر) می‌رساند و از طریق آن، این عدد، به سلولی از دستگاه حافظه (که انتخاب شده است)، منتقل می‌شود.

برای انتخاب فرمان، بلوک هدایت‌کنندهٔ فرمان‌ها (ه ف) در ماشین، پیش‌بینی شده است. در این بلوک، شمارهٔ فرمان‌هایی که باید انتخاب کرد، داده شده است. فرمان‌ها، اغلب به ردیف شمارهٔ آن‌ها داده شده است، بنابراین برای این که شمارهٔ فرمان بعدی داده شود، باید به عددی که در بلوک هدایت‌کنندهٔ فرمان‌ها (ه ف) قرار دارد، یک واحد اضافه شود. این امر به‌وسیلهٔ دستگاه هدایت‌کنندهٔ ماشین (مدار ۱ +) عملی می‌شود. فرمان‌ها، در دستگاه حافظه نگه‌داری می‌شوند. برای درآوردن فرمان بعدی، دوباره شمارهٔ به‌دست آمده، به‌وسیلهٔ میلهٔ توزیع رمزی (م ر آ)، از بلوک هدایت‌کنندهٔ فرمان‌ها (ه ف) به بلوک هدایت‌کنندهٔ دستگاه حافظه (ه د ح) فرستاده می‌شود. علامت مربوط به این انتقال، از بلوک هدایت‌کنندهٔ ماشین (د ه) وارد می‌شود. فرمان تازه‌ای که از دستگاه حافظه (د ح) انتخاب شده است، به‌وسیلهٔ میلهٔ توزیع رمزی (م ر)، به بلوک حافظهٔ فرمان‌ها (ب ح ف) می‌رسد، که مدارهای ورودی آن به‌وسیلهٔ علامتی از بلوک هدایت‌کنندهٔ ماشین، باز می‌شود. به این ترتیب، یک دور کار ماشین به پایان می‌رسد. در دور بعدی، ماشین دوباره، فرمانی را که گرفته است، انجام می‌دهد. تناوب عادی فرمان‌ها، ممکن است ضمن انجام یک عمل، از جمله، ضمن فرمان مقایسه، از ردیف شماره‌های خود، خارج شود. این فرمان، یک عمل حسابی انجام نمی‌دهد، بلکه روند محاسبه را معین می‌کند. اگر عدد اول کوچکتر از عدد دوم باشد، باید به فرمانی که شمارهٔ آن در آدرس سوم نشان داده شده است، مراجعه کرد. ولی اگر عدد اول بزرگتر از عدد دوم باشد، فرمان شمارهٔ بعدی انتخاب می‌شود.

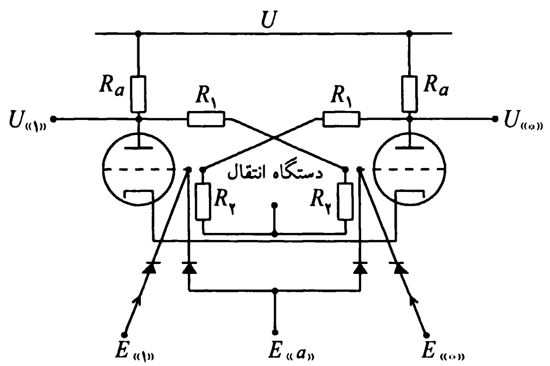
برای رسیدن رمز فرمان مقایسه، به بلوک حافظهٔ فرمان‌ها (ب ح ف)، سوی‌گر الکترونی (س ا)، شمارهٔ دودویی فرمان عمل را به فشار الکتریکی توجیه‌شده، در مداری ورودی از خودش، که متناظر با این عمل است، تبدیل می‌کند. این فشار الکتریکی توجیه‌شده، مدار ماشین را برای انجام عمل مقایسه، آماده می‌کند.

در آوردن هر دو عدد، از سلول‌های دستگاه حافظه، که شمارهٔ آن‌ها در آدرس‌های اول و

دوم فرمان مقایسه داده شده است، درست مثل حالت انجام عمل‌های حسابی، انجام می‌شود. مقایسه عددها، در دستگاه حسابی (د ح ب) را می‌توان با کم‌کردن عدد دوم از عدد اول، انجام داد. بسته به علامت این تفاضل، دستگاه هدایت‌کننده (د ه) یا رمز شمارهٔ فرمان بعدی را از آدرس سوم (A ۳) به وسیلهٔ میلهٔ رمزی توزیع آدرس (م ر آ) به بلوک هدایت‌کنندهٔ فرمان‌ها (ه ف) می‌رساند و یا این که یک واحد به عددی که در این بلوک قرار دارد، اضافه می‌کند (مدار ۱ +) (درست مثل انجام یک عمل حسابی). بعد از آن که شمارهٔ فرمان بعدی، در بلوک هدایت‌کنندهٔ فرمان‌ها (ه ف) قرار گرفت، ادامهٔ کار، شبیه یک عمل حسابی، انجام می‌گیرد.

دستگاه حسابی و دستگاه هدایت‌کننده. در ماشین‌های حساب الکترونی، از وسایل امروزی خودکارهای الکترونی استفاده می‌شود. ساختمان ماشین، در اساس بر اصل «بله ـ نه» کار می‌کند، یعنی، یا علامت (سیگنال) وجود دارد و یا علامت وجود ندارد. بنابراین، هر تغییری در پارامترهای شماهای الکترونی، اثری بر درستی کار ماشین، نمی‌گذارد.

یکی از اجزایی که در ماشین‌های الکترونی، به فراوانی به‌کار می‌رود، سلول ماشه‌ای است. ساده‌ترین طرح ماشه‌ای (شکل ۶)، عبارت است از دو تقویت‌کننده با مقاومت‌های آندی R_a، که از طریق مقسم‌های R_1 و R_2 به هم وصل هستند. دستگاه انتقال مدار (U_{CM}) طوری عمل می‌کند که یکی از لامپ‌ها بسته و دیگری باز باشد. از آن جا که دو نیمهٔ طرح قرینهٔ یکدیگرند، هر کدام از لامپ‌ها می‌تواند بسته باشد، یعنی طرح دارای دو وضع پایدار تعادل است. در واقع، اگر لامپ چپ بسته باشد، لامپ راست باز است و در این صورت، در



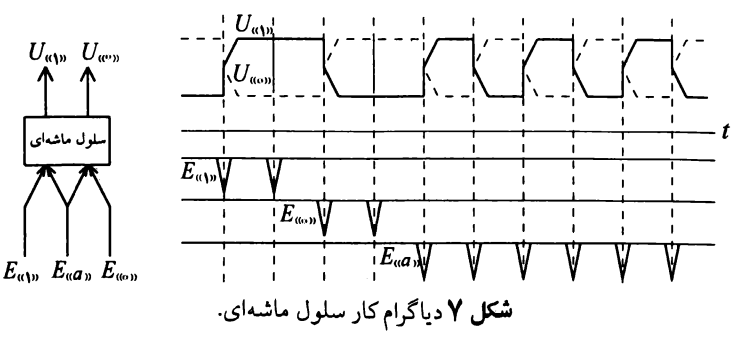
شکل ۶ طرح سلول ماشه‌ای.

آنُد لامپ چپ ($U_{«۱»}$) فشار بالا و در آنُد لامپ راست ($U_{«۰»}$) فشار پایین خواهد بود (با به حساب آوردن سقوط فشار در آنُد مقاومت R_a از جریان لامپ). این فشارها، از راه مقسم‌های $R_۱$ و $R_۲$ به شبکهٔ لامپ‌های روبه‌رو می‌رود و بنابراین، در شبکه لامپ چپ فشار پایین، و در شبکهٔ لامپ راست، فشار بالا خواهد بود. با انتخاب درست پارامترهای مدار، این فشارهای شبکه‌ای، لامپ‌ها را در حالت مفروض، نگه می‌دارند.

به همین ترتیب، اگر لامپ چپ باز، و لامپ راست بسته باشد، در این صورت، در آنُد لامپ چپ و در شبکهٔ لامپ راست، فشار پایین، و در آنُد لامپ راست و شبکه لامپ چپ، فشار بالا خواهد بود.

انتقال سلول ماشه‌ای را، از یک حالت به حالت دیگر، می‌توان با ضربه‌های منفی که از طریق دیوُد بر شبکهٔ لامپ‌ها داده می‌شود، انجام داد. وقتی ضربهٔ منفی به شبکهٔ لامپ چپ داده شود، لامپ چپ بسته می‌شود و فشار آنُدی آن بالا می‌رود. این امر، باعث بالارفتن فشار در شبکهٔ لامپ راست می‌شود، که در نتیجه لامپ راست را باز می‌کند. به این ترتیب، ماشه به وضع نخستین تعادل می‌افتد (فشار بالا، در آنُد لامپ چپ). و اگر ضربهٔ منفی به شبکهٔ لامپ راست داده شود، در این صورت، ماشه به وضع پایدار دیگر تعادل می‌افتد (فشار بالا در آنُد لامپ راست). اگر ضربهٔ منفی، به طور هم‌زمان به شبکهٔ هر دو لامپ داده شود، در این صورت، هر ضربه ای که به این ترتیب باشد، ماشه را از یک وضع تعادل، به وضع تعادل دیگر، منتقل می‌کند.

ضمن بررسی مداری که ضربه از طریق آن به شبکهٔ لامپ‌ها داده می‌شود (به عنوان ورود)، و فشار آنُدی (به عنوان خروج)، دیاگرام کار سلول ماشه‌ای به دست می آید که در شکل ۷ نشان داده شده است.

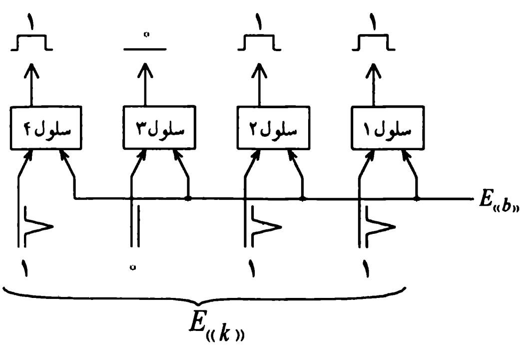


شکل ۷ دیاگرام کار سلول ماشه‌ای.

از ویژگی سلول‌های ماشه‌ای، می‌توان به راحتی برای دستگاه‌های مختلف ماشین حساب الکترونی استفاده کرد. یکی از حالت‌های تعادل را می‌توان به معنای رمز «۰» گرفت (از جمله، وقتی در خروجی راست («۰»U)، فشار بالا باشد)، و حالت دیگر را به معنای رمز «۱» (فشار بالا در خروجی چپ («۱»U)). بنابراین ورودی‌ها را می‌توان $E_{«۰»}$، $E_{«۱»}$، و $E_{«a»}$ (ورودی حسابی) نامید.

سلول‌های ماشه‌ای، برای حفظ موقتی رمزها (فهرست قبولی)، در ماشین‌های الکترونی به‌کار می‌روند (شکل ۸). از قبل، همهٔ سلول‌های ماشه‌ای در موقعیت رمز «۰» قرار می‌گیرند که از راه‌دادن ضربه منفی ($E_{«b»}$) روی ورودی‌های همهٔ سلول‌ها، انجام می‌گیرد. رمز عدد یا فرمان، به صورت ضربه‌های منفی، بر ورودی سلول‌های ماشه‌ای وارد می‌شود. در ردیف‌هایی که در آن‌ها ضربهٔ رمز وجود دارد، سلول‌های ماشه‌ای، در موقعیت رمز «۱» قرار می‌گیرند و این وضع را تا لحظهٔ ضربهٔ خاموش‌کننده ($E_{«b»}$) حفظ می‌کند. فهرست قبولی، در دستگاه‌های حسابی و برای نگه‌داری رمز انجام فرمان‌ها، برای دادن شمارهٔ سلول لازم در دستگاه حافظه و غیره، به‌کار می‌رود.

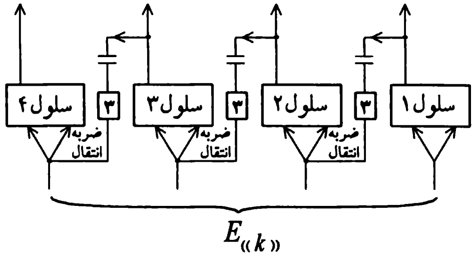
حوزهٔ دیگر کاربُرد سلول‌های ماشه‌ای، در طرح‌های جمع‌کننده است. در این جا خاصیت سلول ماشه‌ای به این ترتیب استفاده می‌شود که هر بار با به‌کاربردن ضربهٔ منفی و بر ورودی حسابی (همراه با هم بر دو ورودی)، حالت تعادل خود را تغییر می‌دهد. اگر ماشه در موقعیت رمز «۰» باشد، به‌کاربردن ضربه آن را به موقعیت رمز «۱» می‌اندازد. در حالتی هم که ماشه در موقعیت رمز «۱» باشد، به‌کاربردن ضربه، آن را منجر به موقعیت رمز «۰» می‌کند. و وقتی ضربه‌ای نباشد، ماشه در موقعیت قبلی می‌ماند. موقعیت اولیهٔ ماشه را



شکل ۸ طرح فهرست قبولی در سلول‌های ماشه‌ای.

می‌توان به عنوان رمز مرتبهٔ مفروض نخستین عدد، و ضربهٔ وارد شده را، به عنوان رمز مرتبهٔ مفروض عدد دوم، در نظر گرفت. در ضمن به سادگی معلوم می‌شود که رفتار ماشه، متناظر است با قانون جمع عددهای دودویی برای یک مرتبه (۰ = ۰ + ۰؛ ۱ = ۱ + ۰؛ ۱ = ۰ + ۱؛ ۱۰ = ۱ + ۱، یعنی «۰» در مرتبهٔ مفروض و انتقال «۱» به مرتبهٔ بعدی). برای این که عمل جمع برای چند مرتبهٔ دو دویی عملی شود، باید انتقال از یک مرتبه به مرتبهٔ دیگر، تامین شود. انتقال به مرتبهٔ بزرگتر، ضمن جمع دو واحد پیش می‌آید، یعنی ضمن عبور ماشه از موقعیت رمز «۱» به موقعیت رمز «۰». ضمن این عبور، فشار در خروجی چپ ماشه، از بالا به پایین، تغییر می‌کند. اگر این فشار زنجیری از ظرفیت‌ها و مقاومت‌ها را طبقه‌بندی کند، در خروجی آن، ضربهٔ منفی به وجود می‌آید. این ضربهٔ انتقال، می‌تواند از راه مدار تاخیر، به مدخل حسابی مرتبهٔ بعد، جهت‌گیری کند.

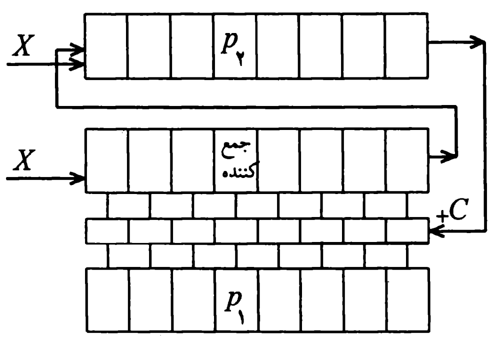
در شکل ۹، طرح ساده‌ای از جمع‌کننده در سلول‌های ماشه‌ای نشان داده شده است. پیشتر همهٔ سلول‌های ماشه‌ای با ضربهٔ $E_{«0»}$ که بر ورودی‌های صفر آن‌ها وارد می‌شود، در موقعیت رمز «۰» قرار می‌گیرند. با انتخاب نخستین عدد، که به صورت ضربه‌های منفی به مدخل‌های حسابی می‌رسند، سلول‌های ماشه‌ای، وضعی متناظر با رمز نخستین عدد به خود می‌گیرند. با انتخاب رمز عدد دوم، جمع مرتبه‌ای عددهای دودویی انجام می‌گیرد، و در مرتبه‌هایی که باید دو واحد با هم جمع شود، ضربهٔ انتقال پیش می‌آید، که بعد از تاخیر زمانی t_z به ورودی‌های حسابی سلول‌های ماشه‌ای مرتبه‌های بالاتر می‌رود. این ضربه‌های انتقال، ممکن است ماشهٔ مرتبهٔ بالاتر را از موقعیت رمز «۱» به موقعیت رمز «۰» ببرد. در این‌باره، دوباره ضربهٔ انتقال به مرتبهٔ بالاتر، به وجود می‌آید. در بدترین حالت‌ها، وقتی که ضمن جمع رمزها، همهٔ مرتبه‌ها در موقعیت رمز «۱» قرار گیرند، و کوچک‌ترین مرتبه از موقعیت رمز «۱» به موقعیت رمز «۰» منتقل شود، ضربهٔ انتقال پشت سرهم از مرتبه‌ای



شکل ۹ طرح جمع‌کننده برای سلول‌های ماشه‌ای.

به مرتبهٔ دیگر، از راه تأخیر زمانی t_z، به وجود می‌آید. به این ترتیب، کل زمان عبور ضربه‌های انتقال، برابر است با زمان یک تاخیر، ضرب در تعداد مرتبه‌ها. طرح‌های بغرنج‌تر الکترونی در سلول‌های ماشه‌ای توانسته‌اند دشواریِ وقفه‌های متوالی را حل و تا حد زیادی، زمان لازم برای جمع را کوتاه‌تر کنند.

برای ضرب عددها، دستگاه حسابی در سلول‌های ماشه‌ای (شکل ۱۰)، دارای دو ردیف گیرنده برای نگه‌داری دو عامل ضرب ($P_۱$ ، $P_۲$). بلافاصله، یک جمع‌کننده است. ضرب، به این ترتیب انجام می‌گیرد. ابتدا به یک مرتبهٔ رمز از عامل اول ضرب پرداخته می‌شود. اگر کوچک‌ترین مرتبهٔ این عامل، رمز «۱» را داشته باشد، در این صورت، در خروجی راست ردیف عامل اول ضربه‌ای به وجود می‌آید، که به مداری که رمز داده شده را به ردیف‌عامل دوم ضرب در جمع‌کننده می‌رساند، وارد می‌شود (مدار $C+$). بعد، این حاصل‌ضرب جزئی به دست آمده، به طرف راست، در یک مرتبه وارد می‌شود و عمل تکرار می‌شود. به این‌ترتیب، مجموع حاصل‌ضرب‌های جزئی، در جمع‌کننده ذخیره می‌شود. این عمل‌ها، به تعداد مرتبه‌های رمز عددها، تکرار می‌شود. در ضرب دو عددی که دارای «n» مرتبه هستند، حاصل ضرب «$۲n$» مرتبه خواهد داشت. «n» مرتبهٔ بزرگتر حاصل‌ضرب، در جمع‌کننده قرار می‌گیرند. «n» مرتبه کوچک‌تر حاصل‌ضرب را می‌توان به ترتیب، با حرکت به طرف راست در مرتبه‌های خالی ردیف‌عامل اول قبول کرد. به این ترتیب، ضمن انجام عمل ضرب، «n» مرتبهٔ کوچکتر حاصل‌ضرب، در ردیف‌عامل اول ضرب، قرار می‌گیرد. زمان لازم برای ضرب را می‌توان به تقریب با ضرب زمانی که برای جمع لازم است، در مرتبه‌هایی که رمز عددها دارند، به دست آورد.



شکل ۱۰ طرح ضرب در سلول‌های ماشه‌ای.

انتقال رمزها به سلول‌های ماشه‌ای، طبق طرحی که در شکل ۱۱ نشان داده شده است، انجام می‌گیرد. با واردکردن ضربهٔ انتقال (E_p) بر ورودی‌های صفر همهٔ سلول‌های ماشه‌ای، آن‌ها را در موقعیت رمز «۰» قرار می‌دهند. از آن سلول‌های ماشه‌ای، که در موقعیت رمز «۱» قرار گرفته‌اند، ضربه‌های انتقالی به وجود می‌آید که بعد از تاخیر زمانی $t_۳$، سلول‌های همسایه را، در موقعیت رمز «۱» قرار می‌دهند. بنابراین، با هر ضربهٔ انتقالی، رمز، جای خود را یک «مرتبه» عوض می‌کند.

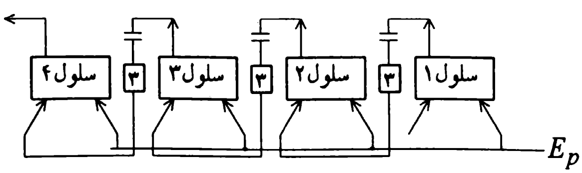
دستگاه حسابی در سلول‌های ماشه‌ای، که از دو ردیف قبولی و جمع‌کننده تشکیل شده است، امکان انجام تقسیم عددها را هم به وجود می‌آورد.

اغلب، دستگاه حسابی در سلول‌های ماشه‌ای، به صورت همه‌کاره و برای انجام همهٔ عمل‌های حسابی و هم عمل‌های منطقی، ساخته می‌شود.

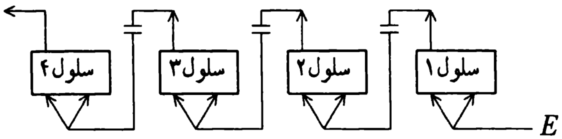
سلول‌های ماشه‌ای، در ماشین‌های الکترونی، برای محاسبهٔ ضربه‌هایی هم که در طرح‌های هدایت‌کننده لازم است، به‌کار می‌رود. تفاوت شمارگر الکترونی (شکل ۱۲)، با طرح جمع‌کنندهٔ مقدماتی (شکل ۹) تنها در این است که در اولی مدار تاخیر در مدارهای ضربه‌های انتقال، وجود ندارد. چنین شمارگری می‌تواند ۲^n ضربه را حساب کند (nـ تعداد ردیف‌های شمارگر است)، که بعد از آن، موقعیت شمارگر تکرار می‌شود. با بغرنج‌تر کردن طرح، می‌توان شمارگر الکترونی با تعداد دل‌خواه ضربه (که با ۲^n برابر نباشد)، به دست آورد.

برای انجام عمل‌های منطقی و طرح‌های هدایت‌کننده در ماشین‌های حساب الکترونی، از دستگاه‌های انطباق، اینورسور و مدارهای دیُودی فاصل، استفاده می‌کنند.

دستگاه‌های ***انطباق***، طبق قانون «E-E» کار می‌کنند (E آن‌گاه باز هم E)، یعنی تنها وقتی در خروجی این دستگاه علامتی به وجود می‌آید که در همهٔ ورودی‌ها، علامت وجود داشته باشد. ***اینوِرسور***، طبق قانون «بله ـ نه» کار می‌کند، یعنی اگر در ورودی علامتی وجود داشته



شکل ۱۱ طرح انتقال رمز در سلول‌های ماشه‌ای.

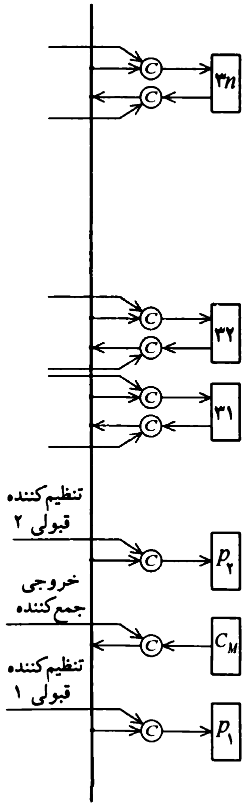


شکل ۱۲ طرح شمارگر الکترونی در سلول‌های ماشه‌ای.

باشد، در خروجی علامتی نخواهد بود، و بر عکس، اگر در ورودی علامتی نباشد، در خروجی وجود دارد. مدارهای دیُودی فاصل، عمل منطقی «یا ـ یا» را انجام می‌دهند، یعنی در خروجی در حالت‌هایی علامت وجود دارد که دست کم در یکی از ورودی‌ها، وجود داشته باشد.

دستگاه‌های انطباق به طور وسیعی برای «کانالیزه کردن» علامت‌های الکتریکی در ماشین، یعنی برای هدایت‌کردن علامت‌ها به مدارهای لازم، به‌کار می‌روند. از جمله در شکل ۱۳، میلهٔ توزیع رمزی یکی از مرتبه‌های عدد، نشان داده شده است. در این میلهٔ توزیع رمزی، از راه دستگاه انطباق (C) ورودی‌ها و خروجی‌های سلول‌های دستگاه حافظه را به هم مربوط می‌کند، ورودی دو تنظیم‌کنندهٔ قبولی در دستگاه حسابی و خروجی جمع‌کننده. با دادن علامت توجیه‌کننده، به دستگاه‌های خروجی انطباق یک سلول دستگاه حافظه، در واقع، رمزی را که در این سلول نگه‌داری شده است، به میلهٔ رمزی داده‌ایم. اگر به طور هم‌زمان، علامت توجیه‌کننده‌ای به دستگاه ورودی انطباق، و از جمله به تنظیم‌کنندهٔ قبولی اول داده شود، در این صورت، رمزی که به وسیلهٔ میلهٔ توزیع رمزی منتقل می‌شود، به تنظیم‌کنندهٔ اول (P_1) می‌رسد. به همین ترتیب، اگر علامت توجیه‌کننده‌ای به دستگاه‌های خروجی انطباق جمع‌کننده برسد، در این صورت، رمزی که به جمع‌کننده می‌رسد، به میلهٔ توزیع رمزی منتقل می‌شود. اگر در این ضمن، علامت توجیه‌کننده‌ای به دستگاه ورودی انطباق یک سلول دستگاه حافظهٔ (z) داده شود، در این صورت رمزی که به وسیلهٔ میلهٔ توزیع رمزی منتقل شده است، در این سلول قبول می‌شود. البته طبیعی است با قبول رمزها در سلول‌های دستگاه حافظه و یا در تنظیم‌کننده‌های قبولی دستگاه حسابی باید از قبل رمزی را که قبل از آن در آن جا داشته‌ایم، از بین ببریم.

مثالی را که در این جا بررسی کردیم، نمی‌تواند همهٔ کاربُردهای متنوع دستگاه انطباق را برای کانالیزه کردن علامت‌های الکتریکی در ماشین‌های حساب الکترونی نشان دهد. دستگاه انطباق، در دستگاه حافظه، دستگاه حسابی و دستگاه‌های هدایت‌کنندهٔ ماشین هم،

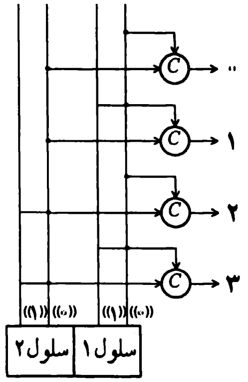


شکل ۱۳ کانالیزه کردن علامت‌های دستگاه انطباق.

کاربرد زیادی دارد.

دستگاه انطباق، به‌جز انجام عمل کانالیزه‌کردن علامت‌ها، وظیفه‌های پیچیده‌تری هم به عهده دارد. از جمله، ضمن انتخاب سلول دستگاه حافظه، اغلب مسالهٔ تبدیل شمارهٔ سلول، که به صورت عدد دودویی داده شده است، به فشار الکتریکی توجیه‌کننده‌ای که به این سلول داده شده است، پیش می‌آید. این مسأله به‌کمک سوی‌گر الکترونی، حل می‌شود. در شکل ۱۴، طرح سوی‌گر الکترونی با چهار مدار خروجی داده شده است. شمارهٔ سلول‌ها، به صورت رمز دودویی، در دو سلول ماشه‌ای داده می‌شود. چهار ترکیب ممکن حالت‌های این سلول‌های ماشه‌ای، در جدول ۵ داده شده است.

اگر فشار الکتریکی دستگاه انطباق بالا باشد، برای به دست آوردن علامت در مدار



شکل ۱۴ طرح سوی‌گر الکترونی با چهار مدار خروجی.

جدول ۵

رمز	ماشهٔ دوم		ماشهٔ اول	
	خروجی چپ	خروجی راست	خروجی چپ	خروجی راست
«۰۰»	پ	ب	پ	ب
«۰۱»	پ	ب	ب	پ
«۱۰»	ب	پ	پ	ب
«۱۱»	ب	پ	ب	پ

پ ـ فشار الکتریکی *پایین* در خروجی. ب ـ فشار الکتریکی *بالا* در خروجی.

خروجی صفر، باید ورودی‌های دستگاه انطباق را به خروجی راست ماشه‌های اول و دوم وصل کرد. در این حالت، در خروجی این دستگاه انطباق، تنها وقتی علامت به وجود می‌آید که سلول‌های ماشه‌ای در موقعیت رمز «۰۰» قرار داشته باشند. به همین ترتیب، برای به دست آوردن علامت در مدار خروجی اول (رمز «۱ ۰»)، باید ورودی‌های دستگاه مربوطهٔ انطباق را در خروجی چپ ماشهٔ اول و در خروجی راست ماشهٔ دوم، داخل کرد. و بر همین اساس، برای مدار دوم (رمز «۰ ۱») و مدار سوم (رمز «۱۱»).

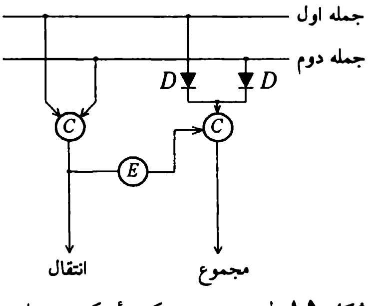
در بعضی حالت‌ها، دستگاه انطباق، همراه با دیُودهای انورسُور و دیُودهای جداکننده، برای ساختن دستگاه‌های حسابی به‌کار می‌رود. برای جمع دو مرتبهٔ دودویی، چهار ترکیب ممکن وجود دارد:

انتقال به مرتبهٔ بالاتر	مقدار جمع	مقدار جمله‌های		شمارهٔ ردیف
		دوم	اول	
۰	۰	۰	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۲
۰	۱	۰	۱	۳
۱	۰	۱	۱	۴

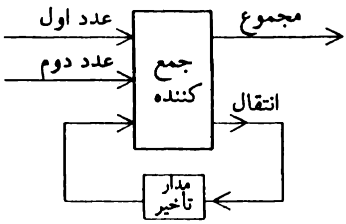
این رابطه‌های متقابل را می‌توان، از جمله با طرحی که در شکل ۱۵ داده شده است، انجام داد. چنین طرحی را «نیم جمع‌کننده» گویند. علامت انتقال به مرتبهٔ بالاتر، با دستگاه انطباق (ترکیب ۴) انجام می‌گیرد. برای به دست آوردن علامت مجموع (ترکیب‌های ۲ و ۳)، کافی است در حالت‌نبودن علامت خروجی انتقال، علامتی در یکی از دو خروجی داشته باشیم، که می‌تواند به وسیلهٔ دستگاه انطباق، اَنوِرسُور و اتصال دیُودی مدار، انجام شود. ضمن جمع عددها، به‌جز رقم‌های مرتبهٔ مفروض، باید انتقال از مرتبهٔ قبل را هم به حساب آورد. این انتقال را می‌توان به این ترتیب به حساب آورد که به نتیجهٔ به دست آمده، انتقال از مرتبهٔ قبل را دوباره اضافه کنیم. به این ترتیب، ترکیب متوالی دو نیم جمع‌کننده، به طور کامل، جمع یکی از مرتبه‌های دو عدد دودویی را تامین می‌کند.

طرح جمع‌کننده را برای یکی از مرتبه‌ها، می‌توان به طور مستقیم هم، با بررسی ترکیب‌های ممکن و یا به حساب آوردن انتقال از مرتبهٔ کوچکتر قبلی، انجام داد.

مؤثرترین کاربرد طرح‌های جمع‌کنندهٔ دستگاه‌های انطباق، در ماشین‌های با تحویل پشت‌سرهم رمز است. در این حالت، رمز عدد، به وسیلهٔ یک میله توزیع رمزی داده



شکل ۱۵ طرح نیم جمع‌کنندهٔ یک‌مرتبه‌ای.



شکل ۱۶ طرح جمع‌کنندهٔ متوالی در دستگاه‌های انطباق.

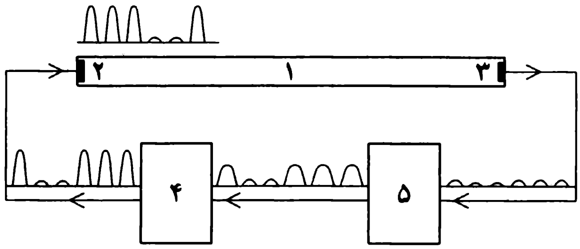
می‌شود. مرتبه‌های عدد، پشت‌سرهم، و بعد از فاصلهٔ زمانی مشخصی، می‌آیند. در این حالت، برای جمع عددها می‌توان از جمع‌کنندهٔ یک‌مرتبه‌ای استفاده کرد (شکل ۱۶). رمزهای هر دو عدد، و قبل از همه، مرتبه‌های کوچک‌تر آن‌ها، به دو ورودی اصلی جمع‌کنندهٔ یک‌مرتبه‌ای، می‌رسند. خروجی انتقال، از راه مدار تاخیر، به ورودی سوم جمع‌کننده می‌رسد. زمان تاخیر، شامل فاصله‌های برابر بین تحریک‌هاست. به این ترتیب، اگر ضمن جمع مرتبه‌ای از عددها، ضربهٔ انتقال به وجود آید، این ضربه همراه با رسیدن ضربه‌های مرتبهٔ بزرگتر بعدی، به ورودی جمع‌کننده، می‌رسد. زمان جمع دو عدد، برابر است با زمان عبور رمز یک عدد.

ضرب دو عدد را هم، می‌توان با جمع‌کنندهٔ یک‌مرتبه‌ای، انجام داد. در ضمن، عدد به تعداد مرتبه‌های رمز عدد، از جمع‌کننده عبور می‌کند، یعنی زمان ضرب، n برابر زمان جمع است.

دستگاه‌های حافظه. امکان‌های ماشین، تا حد زیادی به حجم دستگاه حافظه، یعنی به تعداد عددهایی که می‌توان در ماشین نگه‌داری کرد، مربوط می‌شود. برای ماشین‌های حساب الکترونی عمومی امروزی، این حجم اغلب شامل ۵۰۰ تا ۴۰۰۰ عدد است.

برای نگه‌داری رمزها، می‌توان از سلول‌های ماشه‌ای استفاده کرد. ولی از این راه، مقدار لوازم آن چنان زیاد خواهد شد که این نوع دستگاه حافظه، به تقریب به‌کار نمی‌رود.

برای ماشین‌های با عمل متوالی، دستگاه‌های حافظه‌ای که از لوله‌های جیوه‌ای الکتروآکوستیکی ساخته شده است، به طور گسترده‌ای استفاده شده است (شکل ۱۷). علامت الکتریکی، به صورت ضربه به بلور کوارتز در ورودی لوله، می‌رسد. بلور کوارتز



شکل ۱۷ طرح اصلی نگه‌داری دینامیکی رمز در لولهٔ الکتروآکوستیکی: ۱. لولهٔ جیوه‌ای؛ ۲. بلور واگذارکنندهٔ کوارتز؛ ۳. بلور قبول‌کنندهٔ کوارتز؛ ۴. تجدید ساختمان شکل ضربه‌ها؛ ۵. تقویت ضربه‌ها.

دارای این ویژگی است که ضربهٔ الکتریکی را به نوسان‌های مکانیکی، و بر عکس، تبدیل می‌کند. به این ترتیب، علامت الکتریکی ورودی، به نوسان مکانیکی (فراصوتی) تبدیل، که در طول لوله و با سرعت معینی پراکنده می‌شود. وقتی علامت تا انتهای لوله را طی کرد و به بلور قبول‌کننده کوارتز رسید، دوباره به ضربهٔ الکتریکی تبدیل می‌شود. با تقویت علامت و بازسازی آن به شکل اولیه، دوباره به طرف ورودی لوله سمت می‌گیرد. به این ترتیب، رمزهای عددهایی، که به صورت ضربه‌هایی به لولهٔ جیوه‌ای داده می‌شود، به طور نامحدود در لوله دور می‌زنند. برای واردکردن عددها، رمزها از ماشین به ورودی لوله داده می‌شود، و بلافاصله در این فاصلهٔ زمانی، مدار برگشت ضربه‌ها از انتهای لوله، قطع می‌شود. برای انتخاب عددها در لحظهٔ زمانی متناظر، وقتی رمز لازم به انتهای لوله می‌رسد، مدارهای خروجی باز و رمزها به دیگر دستگاه‌های ماشین منتقل می‌شوند. واردکردن و خارج‌کردن عددها، به طور خودکار و به وسیلهٔ طرح‌های الکتریکی مربوط انجام می‌شود. اغلب، به منظور ساده‌ترکردن لوازم، در هر لولهٔ جیوه‌ای، چند عدد نگه‌داری می‌شود. بنابراین، ضمن انتخاب عددها، باید تا زمانی که رمز لازم به انتهای لوله می‌رسد، انتظار کشید. هر قدر که عددهای بیشتری در لوله نگه‌داری شده باشد، زمان متوسط انتظار برای پیداکردن عدد لازم هم، بیشتر می‌شود.

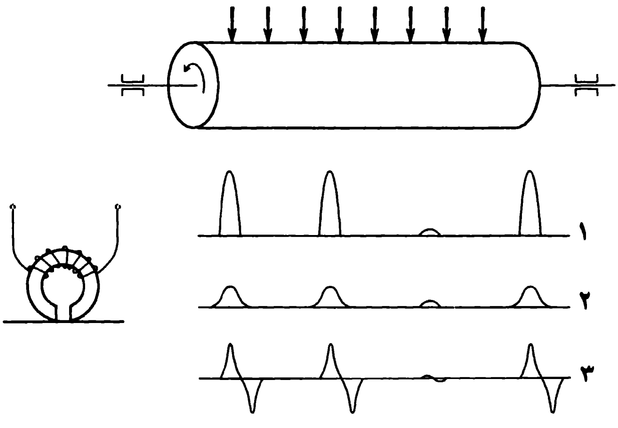
ماشین‌های دنباله‌ای با دستگاه حافظهٔ روی لوله‌های جیوه‌ای الکتروآکوستیکی، سرعتی برابر یک تا دو هزار عمل در ثانیه دارند.

اغلب، برای دستگاه‌های حافظه، از اصل ضبط مغناطیسی علامت‌های الکتریکی، شبیه ضبط صداها، استفاده می‌کنند. ضبط را می‌توان روی نوارهای مغناطیسی و یا روی استوانه‌ای که حرکت دورانی پیوسته‌ای دارد و با مادهٔ فِرومغناطیسی پوشیده شده است،

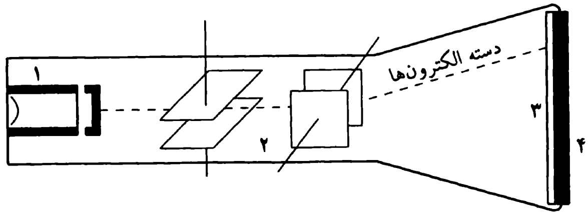
انجام داد (شکل ۱۸). در طول مولد استوانه، کلاهک‌های مغناطیسی قرار گرفته است. اگر در لحظهٔ معینی، از راه سیم کلاهک‌های مغناطیسی، ضربه‌های جریان عبور کند، در نقطه‌های متناظر روی سطح استوانه علامت‌ها به صورت باقی‌مانده‌های مغناطیس شده، ضبط می‌شود. ضمن دوران استوانه، حوزهٔ باقی‌ماندهٔ مغناطیس شده، ضمن عبور از زیر کلاهک‌ها، به علامت‌های الکتریکی آن‌ها منجر می‌شود که به وسیلهٔ تقویت‌کننده‌ها، تقویت شده و به دیگر دستگاه‌های ماشین می‌رسند.

استوانهٔ مغناطیسی می‌تواند برای دستگاه‌های متوالی و متوازی تحویل رمزها هم به‌کار رود. با همهٔ این‌ها، نارسایی لوله‌های جیوه‌ای الکتروآکوستیکی، یعنی انتظار برای انتخاب عددها، از ویژگی‌های بارز استوانهٔ مغناطیسی هم است. بنابراین، دستگاه حافظهٔ با استوانهٔ مغناطیسی، برای ماشین‌هایی به‌کار می‌رود که سرعت کمی دارند (چندصد عمل در ثانیه). از طرف دیگر، استوانهٔ مغناطیسی، امکان بالابردن حجم دستگاه حافظه را با مقدار کم لوازم، به وجود می‌آورد که گاهی دارای اهمیت اساسی است. به این ترتیب، استوانهٔ مغناطیسی و نوارهای مغناطیسی در ماشین‌های عمومی، اغلب به صورت دستگاه اضافی حافظه و در کنار دستگاه حافظهٔ تندکار، به‌کار می‌رود.

در ماشین‌های حساب الکترونی با عمل متوازی، که سرعت محاسبهٔ زیادی دارند، برای دستگاه حافظه، از لوله‌های پرتوهای الکترونیکی استفاده می‌کنند (شکل ۱۹). اگر دستهٔ



شکل ۱۸ طرح اساسی استوانهٔ مغناطیسی: ۱. جریان از راه بُوبین؛ ۲. باقی‌ماندهٔ مغناطیس شده؛ ۳.علامت‌های الکتریکی در بُوبین.



شکل ۱۹ طرح اصلی لولهٔ با پرتوهای الکترونی: ۱. دستهٔ الکترون‌ها؛ ۲. صفحهٔ مایل؛ ۳. پرده؛ ۴. ورقهٔ علامت.

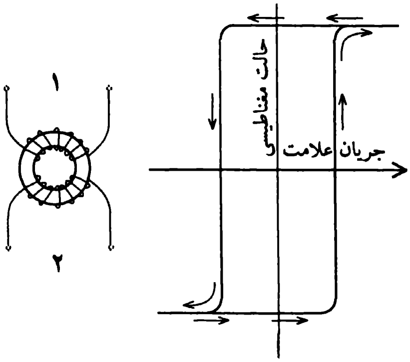
الکترون‌ها، به نقطه‌ای از پردهٔ دی‌الکتریک برسد، در این نقطه، بار الکتریکی جمع می‌شود. بار برای مدتی کم و بیش طولانی باقی می‌ماند، به نحوی که می‌توان رمز عددها را روی پرده ضبط کرد. ضمن محاسبه، دستهٔ الکترون‌ها دوباره به نقطهٔ لازم می‌رود. اگر عنصر مفروضی دارای بار نباشد، باردار می‌شود و ضربهٔ رمز از راه ورقهٔ علامت و تقویت‌کنندهٔ خروجی، عبور می‌کند. ولی اگر عنصر دارای بار باشد، در این صورت، علامت نمی‌رسد. به این ترتیب، می‌توان معین کرد آیا در نقطهٔ مفروض، علامتی ضبط شده است یا نه. بعد از انتخاب رمز، باید حالت قبلی عنصر مفروض را برقرار کرد، که به طور خودکار و به وسیلهٔ مدار خاصی انجام می‌گیرد. به همین ترتیب باید ضبط رمزها را هم با تناوب بازسازی کرد تا از تغییر اساسی بارها به وسیلهٔ الکترون‌های اضافی و نشت به وسیلهٔ دی‌الکتریک، جلوگیری شود.

اغلب روی پرده، ۱۰۲۴ (۳۲×۳۲) یا ۲۰۴۸ (۶۴×۳۲) نقطه قرار داده می‌شود. جهت‌دادن دستهٔ الکترون‌ها به طرف نقطهٔ لازم، به وسیلهٔ واردکردن فشارهای متناظر، بر دو زوج صفحهٔ مایل، عملی می‌شود.

در ماشین‌های با عمل موازی، برای هر مرتبهٔ عدد دودویی، لولهٔ با پرتوهای الکترونی مربوط به خودش انتخاب می‌شود، و انتخاب عدد به طور هم‌زمان از همهٔ لوله‌ها انجام می‌گیرد. زمان انتخاب، با به حساب آوردن کار تمامی طرح، تا چند میکروثانیه خواهد بود.

در سال‌های اخیر، از عنصرهای مغناطیسی هم که دارای منحنی مستطیلی هیسترزیس هستند، در دستگاه‌های حافظه، استفاده کرده‌اند (شکل ۲۰). اگر از طریق سیم‌پیچ علامت مثبت داده شود، هسته به طور مثبت مغناطیسی می‌شود، و با علامت منفی، حالت مغناطیسی هم منفی خواهد شد.

وقتی علامت از بین برود، هستهٔ مغناطیسی شده، مثبت یا منفی، باقی خواهد ماند.



شکل ۲۰ طرح اصلی عنصر حافظه‌ای بامنحنی مستطیلی هیسترزیس: ۱. سیم‌پیچ ورودی؛ ۲ سیم‌پیچ‌خروجی.

به‌این ترتیب، حالت هسته، وضع علامت ضبط شده را مشخص می‌کند. از راه سیم‌پیچ علامت معینی، و از جمله مثبت، داده می‌شود. اگر در این حالت، هسته، حالت مغناطیسی منفی داشته باشد، جریان مغناطیسی عوض می‌شود و در سیم‌پیچ خروجی نیروی محرکه‌ای حاصل می‌شود که به‌وسیلهٔ تقویت‌کننده، تقویت می‌شود. ولی اگر هسته، حالت مغناطیسی مثبت داشته باشد، تغییری در حالت آن پیش نمی‌آید و در سیم‌پیچ خروجی علامتی به‌وجود نمی‌آید. به‌این ترتیب، می‌توان تشخیص داد که چه علامتی در عنصر مفروض ضبط بوده است. طبیعی است بعد از انتخاب رمز باید حالت اولیهٔ هسته را بازسازی کرد که با مدار خاصی، عملی می‌شود.

۴. دورنمای پیشرفت و کاربُرد ماشین‌های حساب الکترونی

کاربرد ماشین‌های حساب الکترونی، باید تاثیر زیادی بر تکامل بسیاری از رشته‌های دانش و صنعت امروزی، و به‌ویژه بر تکامل دانش فیزیک ـ ریاضی داشته باشد. به همین مناسبت، کوشش می‌کنیم دورنمای آیندهٔ کاربرد ماشین‌های حساب، و اهمیتی را که این مسأله برای ریاضیات دارد، در خط‌های کلی خود روشن کنیم.

گسترش میدان کاربرد ماشین‌های ریاضی در آینده. ۱. در روزگار ما، حرکت ثمربخش و پیوسته‌ای در زمینهٔ پیشرفت تولید ماشین‌های حساب تندکار وجود دارد، به نحوی که مرتب، چه از نظر

ساختمانی و چه از نظر کاربرد قانون‌های تازهٔ فیزیکی و ارایه گونه‌های مختلف آن‌ها، در جهت پیشرفت و تکامل گام می‌گذارد. طبیعی است این وضع، انتظار بهترشدن ویژگی‌های فنی این ماشین‌ها را (سرعت، گنجایش حافظه، کار منظم و مطمئن) و همچنین ساده‌تر شدن ساختمان و بهره‌برداری از آن‌ها را به وجود می‌آورد، به نحوی که باید امکان استفاده از این ماشین‌ها را تأمین کند.

کاربرد گستردهٔ ماشین‌ها، به تنوع آن‌ها هم کمک می‌کند. در کنار ماشین‌های نیرومندی که امکان‌های وسیعی برای کار دارند، ماشین‌های کوچکی با حجم کم و خدمت‌های ساده وجود دارد که برای هر سازمان علمی و پژوهشی یا هر کارخانه‌ای قابل دسترس است؛ در کنار ماشین‌های همه‌کاره، ماشین اختصاصی ساده‌ای هم وجود دارد که به‌کار حل محدودهٔ معینی از مسأله‌ها می‌خورد؛ در کنار ماشین‌هایی که تنها با عدد سروکار دارند، ماشین‌هایی هم ساخته شده است که مفروض‌های پیوسته را می‌فهمد، آن‌ها را به عدد تبدیل می‌کند و نتیجه‌های اساسی را باز هم به طور پیوسته و به صورت منحنی‌ها یا پارامترها ارائه می‌کند.

۲. راه دیگر بالابردن بهره‌دهی این ماشین‌ها، به تکمیل روش‌های برنامه‌ریزی مربوط می‌شود. برنامه را با روش‌های معمولی، که در بند ۲ شرح دادیم، می‌توان به سادگی دربارهٔ مسأله‌های سادهٔ ریاضی تنظیم کرد؛ ولی همین برنامه‌ریزی دربارهٔ بسیاری از مسأله‌های واقعی خیلی پیچیده می‌شود و به‌کاری طولانی نیاز پیدا می‌کند. برای ساده‌ترکردن کار می‌توان مجموعه‌ای از زیربرنامه‌های استاندارد را برای محاسبهٔ گروهی تابع‌های اساسی و انجام بعضی از عمل‌های جاری ریاضی (مثل تبدیل ماتریس‌ها، انتگرال‌گیری عددی) به وجود آورد. با وجود این، تطبیق برنامهٔ اصلی با زیربرنامه‌ها، آدرس‌بندی اصلی و فرعی نتیجه‌ها، تحقیق و طرح برنامه‌ها، به‌کاری طولانی و بغرنج، و به مهارت و تجربه‌ای معین، نیاز دارد؛ و همین وضع می‌تواند مانع از این شود که کارهای تازه‌ای برای ماشین، طرح‌ریزی شود.

در این مسیر، دو راه برای تکامل آینده وجود دارد. یکی از این راه‌ها عبارت است از خودکارکردن تنظیم برنامه با استفاده از خود ماشین، یعنی خود ماشین بتواند برای دستورهای اصلی و طرح منطقی مسأله، که به صورت رمز به ماشین داده شده است، به‌کمک نوعی «برنامهٔ برنامه‌ریزی» که در ماشین وجود دارد، برنامه‌ای بریزد.

راه دیگر این است که به ماشین برنامه‌ای خاص و کلی داده شده باشد، و ماشین بتواند خودش عمل‌ها را تقسیم کند و انجام دهد، بدون این که برای هر عمل جزئی، برنامهٔ

جداگانه‌ای برای ماشین طرح شده باشد.

۳. تکامل آتی کاربرد ماشین‌های حساب در ریاضیات، مربوط به این است که این ماشین‌ها نه تنها از برآوردهای عددی، بلکه از برآوردهای تحلیلی هم بتوانند استفاده کنند.

چنین امکانی، از لحاظ اصولی، و در حالت‌های معینی، روشن و عملی است. از جمله، اگر چندجمله‌ای‌ها به صورت دستگاهی از ضریب‌های آن‌ها نوشته شده باشد، آن وقت عمل‌هایی مثل ضرب یا تقسیم چندجمله‌ای‌ها، به صورت عمل‌های حسابی روی ضریب‌های متوالی در می‌آید و به سادگی قابل برنامه‌ریزی در ماشین است. با استفاده از رمزنویسی مشخصی در ثبت تابع، به خوبی می‌توان برنامه‌ای را ریخت که با مفروض‌بودن یک تابع مقدماتی، مشتق آن را (که با همان رمز ثبت می‌شود) بدهد، یعنی امکان دیفرانسیل‌گیری به صورت تحلیلی وجود دارد. این موقعیت به ما امکان می‌دهد، در آینده بتوانیم حل مسأله‌ها را با روش معینی (مثل، حل دستگاه‌های معادله‌های دیفرانسیلی را با رشته‌های توانی)، با تحقق کامل برآوردِ تحلیلی و عددی، انجام دهیم. به این ترتیب، ماشین‌های حساب می‌توانند برای کارهای ظریف و تخصصی و فکری هم کاربرد داشته باشند (البته به شرطی که کار، خصلت مشخصی داشته باشد) و نه تنها زحمت «زمین‌کن»، بلکه حتی کار «گل‌دوز» هنرمند را هم به عهده بگیرد.

تأثیر ماشین‌های تندکار بر روش‌های عددی و تقریبی. طبیعی است که وسیله و ابزار کار، بر خود روش‌های کار هم اثر می‌گذارد. برای نمونه، رابطه‌های مثلثاتی که برای استفادهٔ از لگارتیم آماده شده‌اند، برای ماشین‌های حساب (که فقط امکان انجام مستقیم ضرب و تقسیم را دارند)، نمی‌تواند مفید باشد. به‌کار گرفتن ماشین‌های خودکار رومیزی، مستلزم استفاده از طرح‌های محاسبه‌ای دیگری در روش‌های تقریبی است (از جمله، طرح‌های غیرتفاضلی در معادله‌های دیفرانسیلی).

طبیعی است وقتی در وسیلهٔ محاسبه‌ای، تغییرهای ریشه‌ای به وجود آید و موجب به‌کارگرفتن ماشین‌های حساب الکترونی شود، باید نه تنها باعث ارزیابی دوباره در روش‌های آنالیز عددی بشود، بلکه تا حد معینی، خود مسأله‌های ریاضی و کاربرد آن‌ها را هم مواجه با ارزیابی تازه‌ای می‌کند.

بعضی از حالت‌هایی را که دربارهٔ آن‌ها این تغییرها روشن‌تر است یاد می‌کنیم.

جدول‌های ریاضی و روش‌های دیگر واردکردن تابع‌ها در محاسبه ماشین‌های الکترونی، قبل

از هر چیز در امکان‌هایی که برای محاسبهٔ جدول‌ها وجود دارد، تغییرهایی ریشه‌ای به وجود می‌آورد. به جای جدول‌های استثنایی تابع‌ها، هر سال صدها جدول منتشر می‌شود و این امکان به وجود آمده است که جدول‌های کامل و دقیقی، از همهٔ تابع‌های اختصاصی اساسی، چه شامل یک و چه شامل چند متغیر، تنظیم شود. در عین حال، ساختمان جدول‌ها هم باید به طور جدی تغییر کند. برای استفاده در ماشین‌های تندکار، جدول‌های فشرده‌ای که شامل مقدارهای پایه‌ای و پراکنده باشند، مناسب‌تر است.

در بسیاری حالت‌ها به جای جدول، برای واردکردن تابع‌ها، از روش‌های دیگری استفاده می‌شود، مثل چند جمله‌ای‌های با بهترین تقریب، تبدیل به کسر مسلسل، دستورهای تقریبی و غیره، که باید قبل از برنامهٔ محاسبهٔ تابع مفروض، داده شود.

تابع‌های خاص و جواب‌های خاص تحلیلی. استفادهٔ از تابع‌های خاص، و سرآخر، به دست آوردن جواب به صورت تحلیلی، هم برای بررسی کیفی مسأله و هم برای روشن‌کردن خصلت‌های خاص آن دارای اهمیت است که در ضمن برای حل عددی مسأله‌ها هم، بی‌اهمیت نیست. در بعضی مسأله‌ها، این روش می‌تواند منجر به صرفه‌جویی زیادی در حجم عمل‌های مربوط به پیداکردن جواب بشود. در عین حال، امکانی که در بسیاری حالت‌ها برای به دست آوردن جواب دقیق یا تقریبی به‌کمک تابع‌های خاص وجود دارد و پیشتر به منظور ساده‌ترکردن محاسبه‌ها استفاده می‌شد، بیهوده از آب در می‌آید. وقتی از ماشین استفاده می‌کنیم، ممکن است پیداکردن جواب با روش‌های عددی کلی، و بدون این که از امکان‌های تصور تحلیلی آن استفاده کنیم، ساده‌تر و کوتاه‌تر بشود.

به این ترتیب، در بسیاری حالت‌ها، نیروهای زیادی که صرف پیداکردن شکل تحلیلی پیچیدهٔ جواب در مسأله‌های خاص جداگانه می‌شد، در اصول فنی لزومی پیدا نمی‌کند.

انتخاب روش‌های عددی. درست نیست اگر گمان کنیم، با بالارفتن بهره‌دهی ماشین‌های الکترونی، دیگر نیازی پیدا نخواهد شد که روش‌های تقریبی را تکامل دهیم و استفادهٔ از همان روش‌های مقدماتی برای ما کافی است. در واقع، اگر تنها به حل ساده‌ترین مسأله‌ها توجه داشته باشیم، با انتخاب روش‌های مختلف ــ که ممکن است شامل ده‌ها یا صدها هزار عمل باشد ــ پیداکردن جواب به‌کمک ماشین الکترونی می‌تواند چند ثانیه و یا چند دقیقه طول بکشد.

از آن جا که برای حل مسأله‌های پیچیده‌تر، اغلب برای هر کدام از آن‌ها به ده‌ها و صدها میلیون عمل نیاز داریم، انتخاب درست روش می‌تواند این تعداد عمل‌ها را به میزان قابل

توجهی کاهش دهد. به این ترتیب، جست‌وجوی روش‌های تقریبی ثمربخش، به‌ویژه برای مسأله‌های پیچیده‌تر، از اهمیت زیادی برخوردار است (از جمله دربارهٔ درج تابع‌های با چند متغیر، محاسبهٔ انتگرال‌های جداگانه، حل دستگاه معادله‌های جبری غیرخطی و معادله‌های غیرجبری، حل معادله‌های انتگرالی فضایی، معادله‌های دیفرانسیلی با مشتق‌های جزئی، و همچنین دستگاهی از آن‌ها و غیره).

در ضمن، روش‌های مختلف باید از دیدگاه‌های مختلف، ارزیابی شوند: باید از نظر امکان کاربرد آن‌ها در ماشین و همچنین از نظر عمومی‌بودن آن‌ها، یعنی قابل استفاده‌بودن آن‌ها در گروه زیادی از مسأله‌ها، ارزیابی شوند. بنابراین، روش‌هایی که تنها دربارهٔ مسأله‌های خاصی به‌کار می‌روند، تا حد زیادی اهمیت خود را از دست می‌دهند.

اهمیت بیشتر را باید به روش‌های عمومی داد که در گروه وسیعی از مسأله‌ها به‌کار می‌روند: روش‌های تفاضلی و وردشی، روش‌های تکراری و غیره.

البته، ضمن انتخاب روش‌های عددی، باید به این نکته توجه داشت که این روش‌ها، به خصوص در ماشین قابل اجرا باشند و در ضمن گاهی باید، حتی خصوصیات ساختمانی ماشین را هم به حساب آورد. بیش از هر چیز باید به استفادهٔ حداکثر از حافظهٔ فعال، کنترل‌های ضمن کار و راحتی برنامه‌ریزی مسأله، توجه داشت.

با وجود این، نباید گمان کرد، ماشین تنها از عهدهٔ ساده‌ترین روش‌هایی که براساس عمل‌های عادی گذاشته شده است، بر می‌آید. امکان‌های گسترده‌ای که در برنامه‌ریزی وجود دارد و تکمیل بعدی روش‌های آن، ماشین را برای بغرنج‌ترین طرح‌های محاسبه‌ای آماده می‌کند و به مناسبت نوع نتیجه‌هایی که به دست می‌آید، حتی می‌تواند مسیر محاسبهٔ خود را عوض کند، کاری که از عهدهٔ محاسبه‌های دستی هم به سادگی بر نمی‌آید. تنها باید همهٔ این امکان‌ها را در برنامه‌ریزی به طور کامل پیش‌بینی کرد.

همچنین نباید گمان کرد، در ماشین نمی‌توان از روش‌هایی که به عمل‌های جبری نیاز دارند استفاده کرد. همان طور که یادآوری کرده‌ایم، انجام بسیاری از برآوردهای تحلیلی، تا همین امروز هم به خوبی عملی شده است.

اهمیت ارزیابی خطاها. ضمن ارزیابی خطا در روش‌های تقریبی، ارزیابی خصلت مجانبی‌بودن مقدار تقریبی، اهمیت زیادی دارد. زیرا استفاده از مقدارهای بزرگ n (از جمله، تعداد معادله‌ها، ضمن تبدیل معادلهٔ انتگرالی به معادلهٔ جبری) و یا به‌کمک‌گرفتن گام‌های کوچک در روش‌های تفاضلی و غیره، در ماشین‌های تندکار، به خوبی عملی است.

با توجه به این مطلب، ضمن ارزیابی مقایسه‌ای روش‌های تقریبی، ارزیابی‌های مجانبی، که با سرعت هم‌گرایی روش مشخص می‌شوند، اهمیت تعیین‌کننده دارد.

ضمن استفادهٔ از روش‌ها در ماشین، باید بیش از همه، از ارزیابی‌های تجربی خطاها ــارزیابی براساس حل عددی ــ استفاده کرد. چنین ارزیابی‌هایی را می‌توان در برنامهٔ محاسبه وارد کرد و براساس نتیجه‌ای که از آن‌ها به دست می‌آید، حرکت بعدی محاسبه را انجام داد. برای نمونه اگر معلوم شود خطا از میزان مجاز بیشتر شده است، محاسبه به طور خودبه خودی و با نصف‌کردن گام‌ها، تکرار شود. روشن است که ارزیابی خطا، به این نحوهٔ تجربی، خیلی راحت‌تر و عملی‌تر از ارزیابی پیش‌بینی شده برای تمام مسیر حل پیچیدهٔ مسأله است.

امکان تحلیل نظری مسأله. باید به امکان استفادهٔ دیگری هم که می‌توان از نتیجه‌های حاصل از حل عددی مسأله به دست آورد، اشاره کرد. از جمله، از روی جواب تقریبی که به دست می‌آید، با به‌کاربردن روش آنالیز تابعی، می‌توان دربارهٔ وجود و منحصر به فردبودن جواب و همچنین دربارهٔ حوزهٔ استقرار جواب، داوری کرد. از آن جا که چنین بررسی‌هایی به‌کمک روش‌های خالص نظری، گاهی بی‌اندازه پیچیده و طولانی و حتی در حالت‌هایی به‌کلی غیرعملی است، امکان استفاده از محاسبه‌های عددی، که به‌کمک ماشین انجام می‌گیرد، برای این منظور، اهمیت تردیدناپذیری پیدا می‌کند.

مسالهٔ تازه در روش‌های عددی. افزایش شدید امکان‌های محاسبه‌ای و تجربه‌های ناشی از کاربرد آن‌ها، موضوع تازه‌ای را در بررسی روش‌های عددی پیش آورده است. به جای جواب‌های یگانهٔ حالت‌های قبلی از دستگاه‌های معادله‌های خطی با تعداد زیاد مجهول، این گونه دستگاه‌ها به صورت عنصر ثابتی برای حل مسأله‌های ریاضی در می‌آیند. و این، پرسش جدی دربارهٔ تاثیرهایی که گردکردن، نه تنها در ضریب‌ها، بلکه در تمامی جریان حل مسأله، بر دقت تعیین مجهول‌ها می‌گذارد، به وجود می‌آورد.

امکان انتگرال‌گیری عددی دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی در ماشین (وقتی که انتگرال‌گیری در فاصله‌ای بزرگ و با گام‌های کوچک انجام گیرد)، موضوع مربوط به پایداری روندهای انتگرال‌گیری عددی معادله‌ها را در مرکز توجه قرار داده است. تجزیه و تحلیل تجربی این موضوع، و سپس بررسی نظری آن، منجر به ارزیابی دوبارهٔ روش‌های انتگرال‌گیری عددی معادله‌های دیفرانسیلی می‌شود.

مسأله‌های مربوط به پایداری، به خصوص ضمن کاربرد روش‌های تفاضلی در

معادله‌های با مشتق‌های جزئی، اهمیت درجه اول پیدا می‌کند.

روش‌های تازه. امکان استفاده از ماشین، گونه‌های به‌کلی تازه‌ای از روش‌های تقریبی و عددی را مطرح کرده است، که غیرعملی به نظر می‌آمدند. به عنوان نمونهٔ مشخص این روش‌ها، می‌توان از روش آزمایش‌های تصادفی (و یا آن طور که اغلب می‌نامند، روش ***مونت‌کارلو***) نام برد. این روش مبتنی بر این است که برای پیداکردن مقدار لازم، به سراغ چنان مسالهٔ مربوط به نظریهٔ احتمال می‌روند که جواب آن (احتمال، امید ریاضی) منطبق بر مجهول مورد جست‌وجو باشد. جواب مسالهٔ اخیر را به صورت تجربی، با آزمایش‌های احتمالی و به عنوان مقدار متوسط تمامی آزمایش‌ها، به دست می‌آورند. از جمله، برای محاسبهٔ مساحت شکلی که با نابرابری $F(x, y) \geq 0$ تعریف و در مربع (۱ , ۰ ; ۱ , ۰) واقع است، باید ضمن انتخاب زوج تصادفی (x , y) در این مربع، قسمتی از آن‌ها را انتخاب کرد که برای آن‌ها نابرابری مفروض برقرار باشد. البته، اگر بخواهیم این آزمایش‌ها را با دست انجام دهیم، خیلی کم به نتیجه می‌رسد، ولی اگر از ماشین استفاده کنیم، عملی و ثمربخش است. خود آزمایش‌ها را هم می‌توان به‌کمک جدول عددهای تصادفی انجام داد. در بعضی حالت‌ها، و از جمله برای پیداکردن انتگرال‌های چندگانه با دقت زیاد، این روش می‌تواند خیلی سودمندتر از روش‌های دیگر باشد.

از همین روش می‌توان برای مسالهٔ تبدیل ماتریس‌ها (با استفادهٔ از رشتهٔ مناسب ***مارکوف***)، همچنین برای حل معادله‌های با مشتق‌های جزئی، استفاده کرد.

اهمیت ماشین‌های تندکار برای آنالیز ریاضی، مکانیک و فیزیک. در آنالیز ریاضی، بررسی مسأله‌های گوناگونی، که به معادله‌های انتگرالی و مسالهٔ حدی فیزیک ریاضی مربوط‌اند، اهمیت عملی زیادی دارد. این بررسی‌ها و روش‌هایی که برای حل پیدا می‌شود، کار بیهوده‌ای نیست و می‌توانند به‌کمک استفاده از امکان‌های تازهٔ تکنیک محاسبه عملی شود و به‌ویژه، حل منظم چنین مسأله‌هایی، برای زمان ما اهمیت جدی دارد.

طبیعی است، دربارهٔ روش‌های تازه‌ای که به دست می‌آید، باید دربارهٔ امکان عملی‌بودن آن‌ها هم فکر کرد.

از طرف دیگر، امکان انجام محاسبه‌های آزمایشی زیاد، و در ضمن با دقت کافی، به‌کمک ماشین، ضمن بررسی قبلی مسأله‌های ریاضی، میدان کاربرد «تجربهٔ ریاضی» را وسعت داده و ثمربخشی آن را بالا برده است. اهمیت این مطلب در این جاست که از این

روش بررسی، هم به خاطر هدف مسأله و هم برای موضوع‌های دیگر، و از جمله برای بررسی کیفی معادله‌های دیفرانسیلی، استفاده کرد.

این را هم باید یادآوری کنیم که در مسأله‌های آنالیز، نه تنها می‌توان از ماشین برای کاربرد آن، بلکه حتی برای نیازهای نظری داخلی آن هم، استفاده کرد. برای نمونه، از محاسبه به‌کمک ماشین می‌توان برای دقیق‌ترکردن مقدارهای ثابت در بعضی نابرابری‌های تابعی و در ارزیابی‌ها، استفاده کرد؛ به این ترتیب، محاسبهٔ ماشینی، نه تنها در آنالیز، بلکه در نظریهٔ عددها هم کاربرد پیدا می‌کند.

سرانجام، از ماشین می‌توان برای تحقیق درستی دستورهای منطق ریاضی هم استفاده کرد، و از آن جا که کاربردهای ریاضی و اثبات‌ها را می‌توان به‌کمک علامت‌های منطق ریاضی نوشت، این امکان اصولی وجود دارد که بتوانیم درستی منطقی بعضی از نتیجه‌گیری‌های ریاضی را، به‌کمک ماشین‌های محاسبه، تحقیق کنیم.

وقتی دربارهٔ مکانیک و فیزیک صحبت می‌کنیم، قبل از همه باید روی کاربرد وسیع ریاضیات در این دانش‌ها تاکید کرد. تا زمان ما، کاربرد ریاضیات در مسأله‌های مشخص فیزیک ریاضی، به خاطر پیچیدگی و حجم زیاد محاسبه‌های لازم، محدود بود. در مسأله‌های واقعی، حجم کار اغلب چنان بود که برای محاسبهٔ مسأله، به چندماه و گاهی چند سال از کار محاسبه‌ای نیاز داشت. به همین مناسبت، با وجودی که طرح کلی ریاضی بسیاری از مسأله‌های مکانیک و فیزیک نظری معلوم بود و روش‌هایی هم برای حل آن‌ها به طور اصولی پیدا شده بود، جز دربارهٔ تعداد محدودی از حالت‌های ساده (مثل مسأله‌های مسطحه، دوره‌های بستهٔ ساده و غیره)، در عمل نمی‌شد از عهدهٔ حل ریاضی دقیق و یا عددی آن‌ها، برآمد.

در نتیجه، در حل ریاضی، خیلی بیش از آن چه برای بررسی‌های کیفی مسأله لازم بود، باید برای مقدارهای محاسبه‌ای لازم، وقت صرف شود.

برعکس، وقتی پای ابزارهای محاسبه‌ای جدید به میدان آمد، امکان حل انبوهی از مسأله‌های مکانیک و فیزیک، با همان صورت پیچیده و واقعی آن‌ها به دست آمد (مسأله‌های فضایی، مسأله‌های مربوط به دوره‌های بستهٔ بغرنج، معادله‌های غیرخطی، دستگاه معادله‌های با مشتق‌های جزئی و غیره).

البته، عملی‌شدن این امکان، بستگی به آماده‌کردن روش‌های آنالیز عددی مسأله‌ها و راه‌های حل آن‌ها در ماشین، دارد. با وجود این، کاربرد موفقیت‌آمیز ماشین‌های الکترونی

برای حل دستگاه‌های معادله‌های با مشتق‌های جزئی در هواشناسی، در دینامیک گازها، معادله‌های محیط‌های روان و غیرآن، دلیل بر به حقیقت پیوستن این امکان است.

امکان وسیع تجزیه و تحلیل ریاضی ـ نظری مسأله‌های مکانیک و فیزیک، نزدیک‌کردن طرح آن‌ها به شرط‌هایی که در مسأله‌های فیزیکی واقعی وجود دارد، سرعت بخشیدن به این تجربه و تحلیل و قابل انعطاف‌بودن آن‌ها؛ همه حاکی از آن است که با به‌کاربردن ماشین‌های الکترونی، می‌توان در بسیاری جاها، ریاضیات را جانشین تجزیهٔ فیزیکی کرد. این امکان باید با پیشرفت و تکامل بعدی روش‌های بررسی مسأله‌های فیزیک و مکانیک تامین شود، که در آن جا، روش‌های محاسبه‌ای و نظری جای مهمی در این تجزیه و تحلیل خواهند داشت.

اهمیت ماشین‌های الکترونی برای صنعت و تولید. ثمربخشی و سرعت حل عددی مسأله‌های آنالیز ریاضی، این امکان را در رشته‌های مختلف فنی (مکانیک ساختمانی، الکتروتکنیک و رادیوتکنیک، مکانیک آبگونه‌ها و هیدروتکنیک و غیره) به وجود می‌آورد که از روش‌های نظری بررسی مسأله‌های فنی به طور گسترده‌ای استفاده شود و تجزیه و تحلیل دقیق‌تر و عملی‌تری از آن‌ها انجام گیرد. از این جا، این امکان پیدا شده است که بتوانیم از تجزیه و تحلیل ریاضی، در چنان مسأله‌هایی از صنعت استفاده کنیم که تا کنون تصور آن هم وجود نداشت.

در کنار حل عددی مسأله‌های آنالیز ریاضی (که در رشته‌های مختلف صنعتی به آن‌ها برخورد می‌کنیم)، امکان‌های به‌کلی تازهٔ دیگری هم از کاربرد ماشین ریاضی در صنعت پیدا می‌شود. از جمله می‌توان از ماشین‌های ریاضی برای برنامه‌ریزی صنعتی، انتخاب انواع راه‌حل‌های ساختمانی یا جابه‌جایی چیزها، استفاده کرد. دربارهٔ مسأله‌های مربوط به تنظیم تولید، برای توزیع و انجام تسلسل کارها، راه‌حل‌های متفاوتی پیدا می‌شود. انتخاب راهی که متضمن بهترین و بیشترین تولید، همراه با حداکثر صرفه‌جویی باشد، دشواری‌های زیادی را به وجود می‌آورد. و همین جاست که می‌توان از ماشین استفاده کرد، زیرا اگر بتوان حالت‌های مختلف را در برنامه‌ریزی پیش‌بینی کرد، آن وقت می‌توان به‌کمک محاسبهٔ ماشینی، ده‌ها و صدها هزار حالت مختلف را با هم مقایسه کرد، کاری که هرگز از عهدهٔ روش‌های معمولی برنمی‌آید.

این مطلب آیندهٔ بسیار درخشانی دارد که بتوان با مربوط‌کردن ماشین به دستگاه‌ها،

جریان تولید را به طور خودکار هدایت کرد. از جمله، اگر فرض‌های هندسی مربوط به محصول را به ماشین بدهیم، ماشین می‌تواند با برنامهٔ معینی، نظام مشخصی به دستگاه بدهد و در صورت لزوم، آن را عوض کند. تنها از یک ماشین الکترونی، می‌توان برای تنظیم کار چند دستگاه استفاده کرد. همچنین، اهمیت این مطلب روشن است که می‌توان از این ماشین‌ها برای هدایت خودکار، چیزهای متحرک، و موشک‌های بین سیاره‌ای، استفاده کرد، زیرا می‌توان برنامه‌ریزی را طوری در ماشین انجام داد که بسته به اوضاع و احوال موجود، مسیر آن را معین کند.

به این ترتیب، موضوع ساختمان ماشین‌های محاسبه، تجزیه و تحلیل کار آن‌ها و امکان‌های وسیعی که دربارهٔ کاربرد آن‌ها وجود دارد، زمینهٔ گسترده‌ای را برای فعالیت ریاضی‌دانان به وجود آورده است. بدون هیچ تردیدی، استفاده از ماشین‌های ریاضی می‌تواند در سال‌های آینده، نقشی اساسی در رشد صنعت و فرهنگ داشته باشد.

نمایه نام‌های خاص

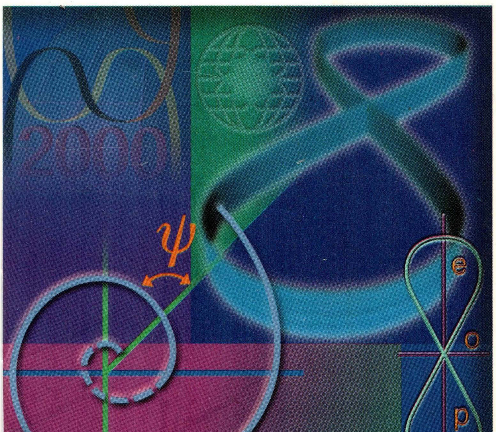
فهرست عنوانهای جلد اوّل «جوهر، روش و کارایی ریاضیات»

فهرست عنوانهای جلد سوّم «جوهر، روش و کارایی ریاضیات»

عنوان	صفحه

۹۶

شرکت انتشارات فنی ایران



شابک : ۴_۶۰_۶۲۳۲_۹۶۴

ISBN 964-6232-60-4

9789646232600

۲۵۰۰ تومان