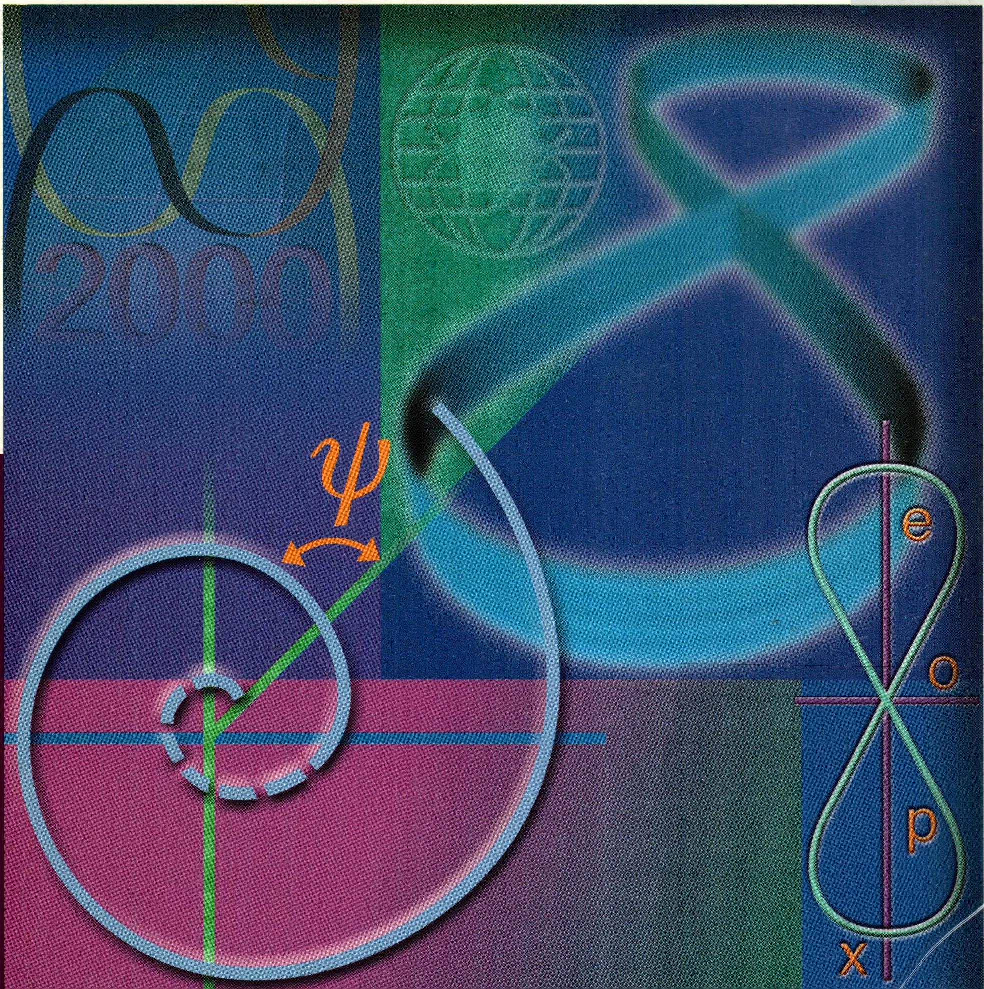
شرکت انتشارات فنی ایران

جوهر، روش و کارایی ریاضیات ۱

(به مناسبت سال جهانی ریاضیات)



تألیف: گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلووای شوروی
ترجمه: پرویز شهریاری

جوهر، روش و کارایی ریاضیات ۱

تألیف: گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلووای شوروی

ترجمه: پرویز شهریاری

ویرایش: دکتر شهریار شهریاری

شرکت انتشارات فنی ایران

فهرستنویسی پیش از انتشار کتابخانهٔ ملی جمهوری اسلامی ایران

جوهر، روش و کارایی ریاضیات / تألیف گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلووای شوروی ؛ ترجمه پرویز شهریاری ؛ ویرایش شهریار شهریاری . ـ تهران: شرکت انتشارات فنی ایران ، ۱۳۷۹.

۳ ج .

ISBN 964-6232-58-2 (دوره) . ـ ISBN 964-6232-59-0 (ج . ۱) ـ

ISBN 964-6232-60-4 (ج . ۲) ـ ISBN: 964-6232-61-2 (ج . ۳)

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

۱. ریاضیات. الف. انستیتوی ریاضی استکلووا Matematicheskii institut im. V. A . Steklova ب. شهریاری ، پرویز، ۱۳۰۵ ـ ، مترجم . ج . عنوان .

۵۱۰ QA ۳۷/۲/ ۹ج ۱۳۷۹

کتابخانه ملی ایران ۱۴۶۵۱ـ ۷۸ م

شرکت انتشارات فنی ایران

جوهر، روش و کارایی ریاضیات ۱

تألیف : گروه مؤلفین انستیتوی ریاضی استکلووای شوروی

ترجمه : پرویز شهریاری

ویرایش : دکتر شهریار شهریاری

ناشر : شرکت انتشارات فنی ایران ؛ **تلفن** : ۶۴۹۰۱۴۶ ، ۸۷۵۰۴۴۷

نوبت چاپ : اول ۱۳۷۹

تیراژ : ۳۰۰۰ نسخه

امور فنی : محمدعلی رزاقی

حروفچینی : عبدی

لیتوگرافی : کورش

چاپ : سعید نو

شابک (دورهٔ ۳ جلدی) : ۹۶۴ـ۶۲۳۲ـ۵۸ـ۲ ISBN: 964-6232-58-2 (3 Vol. Set)

شابک (جلد اول) : ۹۶۴ـ۶۲۳۲ـ۵۹ـ۰ ISBN: 964-6232-59-0 (Vol. 1)

علم چندانکه بیشتر خوانی — چون عمل در تو نیست نادانی

نه محقق بود نه دانشمند — چارپایی بر او کتابی چند

آن تهی مغز را چه علم و خبر — که بر او هیزم است یا دفتر

سعدی

پیش‌گفتار

این کتاب مجموعه‌ای است از آگاهی‌های ریاضی، که آشنایی با آن‌ها، برای هر درس‌خوانده‌ای لازم است. با این که کتاب در سال‌های پنجاه سدهٔ بیستم تنظیم شده و به طور طبیعی شامل پیشرفت‌هایی که در دهه‌های بعد پدید آمده، نیست، ارزش خود را در زمان ما هم حفظ کرده است.

از ویژگی‌های کتاب، جامع بودن و انسانی بودن آن است؛ نویسندگان کتاب، همه جا به تاریخ ریاضیات، فلسفهٔ ریاضیات و کاربردهای ریاضیات توجه داشته‌اند و «ریاضیات» را به عنوان مجموعه‌ای یکپارچه و یگانه، و تا آن‌جا که ممکن بوده است با زبانی ساده و غیرتخصصی، بررسی کرده‌اند. همان‌طور که در پیش‌گفتار هیأت تحریریه آمده، کتاب در انستیتوی ریاضیات اتحاد شوروی و با شرکت و بحث دسته‌جمعی بزرگترین ریاضی‌دانان آن زمان شوروی تنظیم شده است و، به این ترتیب، از غربال نقد ریاضی‌دانانِ با صلاحیت گذشته است.

تنها دربارهٔ فصل چهاردهم (جلد دوم)، با توجه به پیشرفت‌های حیرت‌آوری که در دهه‌های اخیر در ساختمان رایانه‌ها به وجودآمده، باید گفت، تنها ارزش تاریخی دارد و می‌تواند خواننده را با موقعیت کار رایانه‌ها در آغاز پیدایش خود آشنا کند که، به نوبهٔ خود، برای هر کسی جالب است. دیگر فصل‌ها به طور کامل قابل استفاده است و اگر لازم به یادآوری نکته یا نکته‌هایی بوده، ویراستار محترم ترجمهٔ فارسی، به آن‌ها اشاره کرده است.

کتاب بعد از انتشار، بلافاصله به بیشتر زبان‌های زندهٔ دنیا برگردانده شد و به عنوان یکی از کتاب‌های مرجع در اختیار دانش‌پژوهان قرار گرفت. در ایران، برای نخستین‌بار، فصل‌های

اول و دوم جلد اول در سال‌های اول دههٔ چهل خورشیدی و سپس ترجمهٔ جلدهای اول و دوم کتاب در سال ۱۳۵۶ منتشر شد و اینک به همت شرکت انتشارات فنی ایران، هر سه جلد در اختیار خوانندهٔ علاقه‌مند قرارمی‌گیرد.

از پسرم شهریار که با دقت وسواس‌گونه‌ای تمامی ترجمه را، ضمن تطبیق آن با اصل کتاب، خوانده‌اند و هرجا لازم بوده است، یادداشتی در پاورقی افزوده‌اند، بسیار سپاس دارم؛ بی‌تردید بدون همراهی او، خواننده نمی‌توانست کتابی به این صورت در اختیار داشته باشد.

پرویز شهریاری

فهرست

عنوان	صفحه

عنوان	صفحه
بخش چهارم ـ جبر	۳۲۹
۱. ورود به مطلب	۳۳۱
۲. حل جبری معادله‌ها	۳۳۶
۳. قضیهٔ اصلی جبر	۳۵۴
۴. جست‌وجوی وضع ریشه‌های چندجمله‌ای روی صفحهٔ مختلط	۳۶۸
۵. محاسبهٔ تقریبی ریشه‌ها	۳۸۱
نمایه نام‌های خاص	۳۹۱
فهرست عنوانهای جلد دوم «جوهر، روش و کارایی ریاضیات»	۳۹۵
فهرست عنوانهای جلد سوم «جوهر، روش و کارایی ریاضیات»	۳۹۹

پیش‌گفتار

ریاضیات، در دوران باستان در بستگی با نیازهای زندگی پدید آمد، و به تدریج به دستگاهی از دانش‌های گوناگون تبدیل شد. ریاضیات نیز، همچون سایر دانش‌ها بازتابی از قانون‌های طبیعت است و به عنوان سلاح نیرومندی برای شناخت طبیعت و پیروزی بر آن به‌کار می‌رود. ولی از آن‌جا که ریاضیات بیش از اندازه انتزاعی و ذهنی است، رشته‌های جدید آن برای کسانی که ویژه کار نیستند تا اندازهٔ زیادی قابل دسترس نیست. همین ویژگی انتزاعی بودن ریاضیات، از روزگاران باستان، پندارهای ذهن‌گرایانه دربارهٔ بی‌ارتباطی آن با طبیعت به وجود آورد.

هدف نویسندگان کتاب حاضر این بوده است که گروه گسترده‌ای از روشنفکران را با جوهر و روش بخشهای ریاضیات و پایه‌های عملی و شیوه‌های پیشرفت آن آشنا سازند.

کمترین آگاهی‌های ریاضی که برای خوانندهٔ این کتاب فرض‌شده، ریاضیات دورهٔ دبیرستانی است. با وجود این، نوشته‌های این کتاب یک‌دست نیست. کسانی که می‌خواهند به مقدمه‌های ریاضیات عالی آشنا شوند، می‌توانند از چند بخش اول کتاب استفاده کنند، ولی برای فهم دقیق بخش‌های بعد، باید با کتابهای درسی مربوط آشنا باشند. مجموعهٔ کتاب برای خوانندگانی قابل استفاده است که به‌کاربرد روش‌های آنالیز ریاضی (محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی) آشنا باشند. برای کسانی که با دانش‌های طبیعی سر و کار دارند (مهندسان رشته‌های مختلف و معلمان ریاضی) بخش‌های ویژه‌ای وجود دارد که آنان را با رشته‌های جدیدتر ریاضی آشنا می‌کند.

طبیعی است در چارچوب یک کتاب نمی‌توان حتی همهٔ روش‌های مختلف ریاضی را بررسی کرد و بنابراین برای گزینش مطلب‌های کتاب، نوعی آزادی عمل لازم بوده است.

ولی در خط‌های کلی‌تر، این کتاب روی‌هم اندیشهٔ درستی دربارهٔ وضع کنونی ریاضی، پیدایش و پیشرفت آن به دست می‌دهد. کتاب تا اندازه‌ای برای کسانی هم در نظر گرفته شده است که به موضوع‌های اساسی کتاب آشنایی کامل داشته باشند. همچنین کتاب باید بتواند بعضی از تنگ‌نظری‌هایی را هم که گاهی بعضی از ریاضی‌دان‌های جوان ما از خود نشان می‌دهند، برطرف کند.

بخش‌های جداگانهٔ کتاب به وسیلهٔ نویسندگان مختلف نوشته شده است. با وجود این مجموعهٔ کتاب نتیجهٔ کوشش دسته‌جمعی است. طرح کلی و گزینش موضوع‌های بخش‌های گوناگون آن در معرض دید و داوری دسته‌جمعی قرار گرفته و براساس تبادل زندهٔ اندیشه‌ها تکمیل شده است. ریاضی‌دان‌های بسیاری از شهرهای اتحاد شوروی، در بحثی که به وسیلهٔ انستیتوی ریاضی ترتیب داده شده بود شرکت کردند و دربارهٔ متن مقدماتی آن یادآوری‌های پر ارزشی کردند و البته این یادآوری‌ها و پیشنهادها، از طرف نویسندگان در نظر گرفته شده است.

همچنین برخی از نویسندگان در تهیهٔ متن آخر بخش‌هایی که به وسیلهٔ نویسندگان دیگر نوشته شده است به طور مستقیم شرکت کردند. بخش اساسی مقدمهٔ بخش دوم را ***ب. ن. دِلون*** (*B. N. Delon*) نوشته و ***د. ک. فادیف*** (*D.K. Fadeev*) در تهیهٔ بخش‌های چهارم و بیستم کوشش فراوان کرده است.

همچنین عده‌ای از کسانی که بخش جداگانه‌ای تهیه نکرده‌اند، در کار تهیهٔ کتاب مشارکت داشته‌اند: ***ل. ب. کانتارویچ*** (*L. B. Kontorovitch*) بند چهارم از بخش چهاردهم و ***ا. آ. لادیژنسکایا*** (*O. A. Ladigenskaia*) بند ششم از بخش ششم و ***آ. گ. پاستنیکوف*** (*A. G. Postnikov*) بند پنجم از بخش دهم را نوشته‌اند، و ***ا. آ. اُله نیک*** (*O. A. Oleinik*) در تهیهٔ متن بخش پنجم و ***یو. و. پروخوروف*** (*U. V. Prokhorov*) در آخرین بررسی متن بخش یازدهم شرکت داشته‌اند.

و. آ. زالگالر (*V. A. Zalgaler*) بعضی از بخش‌های اول و دوم و هفتم و هفدهم را نوشته است و آخرین بررسی متن کتاب به وسیلهٔ ***زالگالر و ویدنسکی*** (*Videnski*) و با شرکت ***ت. و. راگازکینا*** (*T. V. Rogozkina*) و ***آ. پ. لئونوا*** (*A. P. Leonova*) انجام گرفته است. بخش اساسی تصویرها به وسیلهٔ ***ا. پ. سنکینی*** (*A. P. Senkini*) رسم شده است.

هیأت تحریریه

بخش اول

نگاهی کلی به ریاضیات

آ. د. آلکساندروف

اندیشهٔ درست دربارهٔ هر دانشی، از روی‌هم ریختن آگاهی‌های پراکنده‌ای که دربارهٔ آن وجود دارد به دست نمی‌آید، ولو این آگاهی‌ها خیلی هم زیاد باشد. برای این منظور لازم است دید درستی دربارهٔ دانش به طور کلی داشت و ماهیت دانشی را که بررسی می‌کنیم درک کرد. هدف این بخش هم این است که دربارهٔ ریاضیات یک اندیشهٔ کلی و درست به دست دهد. برای این هدف لازم نیست وارد بررسی مفصل نظریه‌های جدید ریاضی بشویم، زیرا تاریخ این دانش و ریاضیات مقدماتی، به اندازهٔ کافی بنیان‌های آن را در دسترس ما قرار می‌دهد.

۱. ویژگی‌های ریاضیات

۱. حتی با آشنایی خیلی سطحی هم می‌توان ویژگی‌های بنیانی ریاضیات را مشاهده کرد. این ویژگی‌ها چنین‌اند: نخست انتزاعی‌بودن آن، دوم دقت (و یا درست‌تر دقت منطقی) یعنی الزامی‌بودن نتیجه‌های آن و سرانجام گستردگی بی‌اندازهٔ کاربرد آن.

انتزاعی‌بودن، حتی در حساب ساده هم دیده می‌شود. ما عددهای مجرد را به‌کار می‌بریم، بدون این‌که هر بار به بستگی آن‌ها با چیزهای مشخص توجه کنیم. در مدرسه جدول ضرب را به روش انتزاعی یاد می‌گیریم، جدولی که عددها را به طور کلی درهم ضرب می‌کند، نه عدهٔ بچه‌ها را در عدهٔ سیب‌ها و یا عدهٔ سیب‌ها را در بهای هر سیب و غیره.

در هندسه هم چنین است: خط راست بررسی می‌شود و نه نخی که محکم کشیده شده باشد و نیز در مفهوم خط هندسی، هرگونه ویژگی دیگری جز وجود امتداد، از آن کنار

گذاشته می‌شود. مفهوم کلی دربارهٔ شکل هندسی به این ترتیب به دست می‌آید که شیء واقعی را از همهٔ ویژگی‌هایی که دارد، به جز شکل فضایی و اندازه‌های آن، جدا کنیم.

این‌گونه انتزاع‌ها، ویژهٔ همه بخش‌های ریاضیات است و دو مفهوم عدد درست و شکل هندسی، نخستین و ساده‌ترین آن‌ها را تشکیل می‌دهد. پس از این دو مفهوم ساده، انتزاع‌های فراوان دیگری قرار دارد که به سختی می‌توان آن‌ها را شرح داد، زیرا به آن درجه از انتزاع می‌رسد که عددهای مختلط، تابع‌ها، دیفرانسیل‌ها، فونکسیون‌ها، فضاهای nبعدی و حتی بی‌نهایت بعدی و غیره را به وجود می‌آورد. این مفهوم‌ها از نظر انتزاعی‌بودن، هر یک در مرحلهٔ بالاتری نسبت به دیگری قرار دارد و به چنان پایه‌ای از انتزاع رسیده‌اند که به نظر می‌رسد هرگونه بستگی با زندگی را از دست داده‌اند، تا جایی‌که به نظر یک آدم ساده و معمولی «چیزی دربارهٔ آن‌ها نمی‌توان گفت به جز این‌که همهٔ آن‌ها نامفهوم‌اند».

البته، در واقع این‌طور نیست. اگرچه فضای nبعدی خیلی انتزاعی به نظر می‌رسد، ولی در عین حال دارای درون‌مایه‌ای واقعی است که درک آن آن‌قدرها دشوار نیست. در این کتاب به ویژه روی درک واقعی این مفهوم‌های انتزاعی تکیه شده است و خواننده خواهد پذیرفت که همهٔ آن‌ها چه از نظر پیوندهای نخستین و چه از نظر کاربرد، به زندگی بستگی دارد.

انتزاع ریاضی را می‌توان به این ترتیب مشخص کرد: نخست و پیش از همه، بستگی‌های کمیتی و شکل‌های فضایی را حفظ و آن‌ها را از همهٔ ویژگی‌های دیگر موجود، جدا می‌کند. دوم انتزاع ریاضی از یک رشته درجه‌های پشت سر هم به وجود آمده است. انتزاع ریاضی از انتزاعی که در دانش‌های طبیعی معمول است، خیلی جلوتر می‌رود (این دو مطلب را اندکی بعد و به طور مفصل، با مثالهای مربوط به مفهوم‌های اساسی ریاضیات، یعنی عدد و شکل، روشن می‌کنیم). و سرانجام این مطلب به چشم می‌خورد که موضوع ریاضیات، در مجموع و به تقریب به طور کامل، در دوروبر مفهوم‌های انتزاعی و بستگی آن‌ها با یکدیگر، دور می‌زند. اگر یک دانشمند طبیعی برای اثبات نظر خود پیوسته به آزمایش می‌پردازد، دانشمند ریاضی، قضیه‌ها را تنها از راه محاسبه و استدلال ثابت می‌کند.

البته، دانشمندان ریاضی هم برای کشف قضیه‌ها و روش‌هایی که به‌کار می‌برند پیوسته از نمونه‌ها و هم‌ارزهای فیزیکی آن‌ها استفاده می‌کنند و به مثال‌های فراوان جداگانه‌ای که روشن باشد مراجعه می‌کنند و غیره. همهٔ این‌ها کمک می‌کند تا قضیه‌ای کشف و یا سرچشمهٔ حقیقی آن روشن شود. ولی یک قضیه تنها وقتی در ریاضیات دارای ارزش

می‌شود که به طور دقیق و با استدلال منطقی اثبات شده باشد. اگر هندسه‌دانی که دربارهٔ قضیهٔ تازه‌اش گزارش می‌دهد تنها به نمایش روی یک نمونه اکتفا کند، هیچ ریاضی‌دانی آن را اثبات شده نمی‌داند. لزوم اثبات قضیه‌ها، که در هندسهٔ دبیرستانی هم به خوبی دیده می‌شود، دربارهٔ همهٔ ریاضیات درست است. ما می‌توانیم دو زاویهٔ پهلوی قاعدهٔ هزاران مثلث متساوی‌الساقین را با دقت کامل اندازه بگیریم، ولی این اندازه‌گیری نمی‌تواند ***اثبات ریاضی قضیه‌ای*** را به ما بدهد که به موجب آن دو زاویهٔ پهلوی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین با هم برابرند. ریاضیات چنین می‌خواهد که این نتیجه را از مفهوم‌های بنیانی هندسه بیرون بکشیم (امروز برای بیان دقیق هندسه، این مفهوم‌های اساسی را، در اصل‌ها با دقت کامل خلاصه کرده‌اند) و به این ترتیب اثبات یک قضیه برای ریاضی‌دان این معنی را می‌دهد که آن را از راه بحث دربارهٔ ویژگی‌های ابتدایی، که برای مفهوم‌های مورد استفادهٔ این قضیه ذاتی هستند، بیرون بکشد. بنابراین، نه تنها مفهوم‌های ریاضی، بلکه روش آن هم، انتزاعی و ذهنی است.

یکی از ویژگی‌های نتیجه‌گیری‌های ریاضی، دقت منطقی و قانع‌کنندهٔ آنست.

استدلال ریاضی، دارای آن‌چنان دقتی است که برای هر کس که آن را بفهمد، مسلم و قانع‌کننده است. این مطلب که استدلال ریاضی دقیق و قانع‌کننده است حتی از دورهٔ دبیرستانی هم دیده می‌شود. خود واقعیت‌های ریاضی هم انکارناپذیرند. بی جهت نیست که می‌گویند: «ثابت‌کردن مثل دو دو تا چهار تاست». در این‌جا به ویژه رابطهٔ ریاضی $۲ \times ۲ = ۴$ به عنوان حقیقتی مسلم و انکارناپذیر به‌کار رفته است. ولی دقت ریاضیات هم مطلق نیست. ریاضیات پیش می‌رود و قانون‌های آن یک‌بار و برای همیشه منجمد نمی‌ماند. قانون‌های ریاضی تغییر می‌کند و می‌تواند به‌موضوع دانش‌های مختلف خدمت‌کند و خدمت هم می‌کند.

در تحلیل آخر، ***سرچشمهٔ زنده‌بودن ریاضیات در این‌جا است که مفهوم‌ها و نتیجه‌های آن، با همهٔ انتزاعی‌بودنشان، به طوری که خواهیم دید، ناشی از واقعیت است و کاربرد فراوانی در سایر دانش‌ها، در صنعت و در همهٔ زمینه‌های مربوط به زندگی بشری پیدا می‌کند و این مهم‌ترین مطلب برای درک ریاضیات است.***

گسترش استثنایی و بی‌اندازهٔ کاربرد ریاضیات هم یکی دیگر از ویژگی‌های آن است. نخست، همیشه و هر ساعت؛ در تولید، در زندگی و زندگی اجتماعی، گسترده‌ترین و همه‌گیرترین مفهوم‌ها و نتیجه‌های ریاضی را به‌کار می‌بریم بدون این‌که دربارهٔ آن‌ها فکر کنیم. به این ترتیب که وقتی حساب روزها و یا خرج زندگی را نگاه می‌داریم، از حساب و

وقتی که رویهٔ مربع را محاسبه می‌کنیم، از هندسه بهره می‌بریم. این نتیجه‌ها خیلی ساده‌اند، ولی یادآوری این مطلب مفید است که زمانی در دوره‌های باستان، زمانی که ریاضیات تازه پدید می‌آمد، این‌ها در ردیف بزرگترین پیشرفت‌ها به شمار می‌رفت.

دوم، صنعت امروز بدون وجود ریاضیات امکان‌پذیر نیست. بدون محاسبه‌های کم و بیش دشوار، حتی یک پیشرفت فنی هم به انجام نمی‌رسد. ریاضیات در پیش‌برد رشته‌های صنعت نقش بسیار مهم دارد.

سرانجام، به تقریب همهٔ دانش‌ها به طور کم و بیش اساسی از ریاضیات استفاده می‌کنند. قانون‌های «دانش‌های پایه» مکانیک، نجوم، فیزیک و تا اندازهٔ زیادی شیمی، به طور معمول به وسیلهٔ فرمول (دستور) بیان می‌شود (و این چیزی است که از زمانی روی نیمکت مدرسه نشسته‌ایم با آن آشنا هستیم) و نظریه‌های آن‌ها زمانی پیشرفت می‌کند که از دستگاه‌های ریاضی به طور گسترده‌ای استفاده شود. بدون ریاضیات، پیشرفت این دانش‌ها ممکن نیست و به همین دلیل است که نیازهای مکانیک، اخترشناسی و فیزیک در پیشرفت ریاضیات همیشه اثری قطعی و مستقیم داشته است.

در دیگر دانش‌ها نقش ریاضیات کمتر است ولی در آن‌جاها هم کاربردهای زیادی پیدا می‌کند. البته روش ریاضی را نمی‌توان، همان‌طور که در فیزیک به‌کار می‌رود، در پدیده‌های پیچیده‌ای چون زیست‌شناسی و جامعه‌شناسی به‌کار برد. لازم به یادآوری است که نباید سرگرم بازی ساده با رابطه‌ها و دستورها شد، کاری که به دنبال آن هیچ‌گونه مضمون واقعی وجود ندارد. ولی به هر صورت، ریاضیات به تقریب در همهٔ دانش‌ها، از مکانیک گرفته تا اقتصاد، به‌کار می‌رود.

چند نمونهٔ بسیار درخشان کاربرد ریاضیات را در «دانش‌های پایه» و صنعت به یاد آوریم:

یکی از دورترین سیاره‌های منظومهٔ خورشیدی، یعنی *نپتون*، در سال ۱۸۴۶ براساس محاسبه‌های ریاضی کشف شد. *آدامس* و *لِوُریه*، ضمن بررسی بی‌نظمی‌های حرکت *اورانوس*، به این نتیجه رسیدند که این بی‌نظمی‌ها در اثر کشش سیارهٔ دیگری به وجود آمده است. *لِوُریه* براساس قانون‌های مکانیک و قانون جاذبه جای این سیاره را به‌کمک محاسبه پیدا کرد و رصدکننده‌ای، که *لِوُریه* این مطلب را به او گزارش داده بود، سیاره را در همان محل با دوربین مشاهده کرد. این کشف نه تنها پیروزی مکانیک و اخترشناسی و به ویژه دستگاه *کوپرنیک* بود، بلکه پیروزی محاسبه‌های ریاضی هم به شمار می‌رفت.

نمونهٔ دیگری که کمتر از نمونهٔ اول مهم نیست، کشف موج‌های الکترومغناطیسی است. ***ماکسوِل***، فیزیک‌دان انگلیسی، ضمن عمومیت‌دادن قانون‌های پدیده‌های الکترومغناطیسی، که در اثر تجربه به دست آمده بود، آن‌ها را به صورت معادله‌هایی بیان کرد. از روی این معادله‌ها و با محاسبهٔ خالص ریاضی نتیجه گرفت که باید موج‌های الکترومغناطیسی، که با سرعت نور منتشر می‌شود، وجود داشته باشد. ***ماکسوِل*** با تکیه به این مطلب، نظریهٔ الکترومغناطیسی نور را پیشنهاد کرد که بعدها به طور همه‌جانبه‌ای پیش رفت و بر شالودهٔ مستحکمی قرار گرفت. اما به جز این نتیجه‌گیری، ***ماکسوِل*** بررسی‌های مربوط به موج‌های الکترومغناطیسی راکه سرچشمهٔ الکتریکی دارد، مثل نوسان‌هایی که ضمن تخلیهٔ الکتریکی منتشر می‌شود، تکامل داد. این موج‌ها در حقیقت به‌وسیلهٔ *هِرتز* کشف شد. بزودی ***آ. س. پوپوف*** وسیلهٔ تحریک، ارسال و ضبط نوسان‌های الکتریکی را پیدا کرد و آن‌ها را به مرحلهٔ عمل و استفادهٔ گسترده‌ای رساند و همین امر پایهٔ صنعت رادیو را بنا نهاد. در اختراع رادیو، که اینک دیگر در دسترس همه قرار گرفته است، نتیجه‌گیری‌های خالص ریاضی نقش مهمی داشته است.

به این ترتیب دانش از مشاهده و برای نمونه مشاهدهٔ انحراف عقربهٔ مغناطیسی در اثر جریان الکتریسیته، شروع می‌شود و به سمت تعمیم، به سمت نظریه، به سمت قانون‌های منظم شده و بیان ریاضی آن‌ها می‌رود، و این قانون‌ها نتیجه‌های جدیدی به بار می‌آورد که به سهم خود برای پیشرفت نظریه، انگیزهٔ نیرومند جدیدی به شمار می‌رود.

به ویژه جالب است که حتی انتزاعی‌ترین مفهوم‌های ریاضی، که در داخل خود ریاضیات به وجود آمده است و انگیزه‌ای از سوی دانش‌های طبیعی و یا صنعت نداشته است، نیز کاربردهای عملی ثمربخشی پیدا کرده است. برای نمونه، عددهای موهومی در دنیای جبر به وجود آمده و تا مدت‌ها مفهوم واقعی آن‌ها ناشناخته باقی ماند و به همین علت هم آن‌ها را موهومی نامیدند. ولی بعدها، وقتی در ابتدای سدهٔ گذشته، بیان هندسی آن‌ها داده شد (این مطلب در بخش چهارم شرح داده شده است)، عددهای موهومی جای استواری در جبر پیداکردند و نظریهٔ کلی تابع‌های با متغیر مختلط (یعنی با متغیر به شکل $x+y\sqrt{-1}$) به وجود آمد. این نظریه، برخلاف نامی که روی آن است (تابع‌های «موهومی» از متغیرهای «موهومی») به‌کلی غیرموهومی است و به عنوان یک وسیلهٔ حقیقی برای حل دشواری‌های صنعت به‌کار می‌رود. درست به یاری همین نظریه است که قضیهٔ اساسی ***ن. ی. ژوکوفسکی***،

مربوط به قدرت بالارفتن بال هواپیما ثابت می‌شود. همچنین از این نظریه، در حل مسألهٔ مربوط به تراوش آب زیر سدها استفاده شده است، مسأله‌ای که اهمیت آن در زمان ساختمان سدهای بزرگ هیدروالکتریک (برق‌آبی) روشن است.

هندسهٔ نااقلیدسی نمونهٔ روشن دیگری از این قبیل است[1]. هندسهٔ نااقلیدسی بر زمینهٔ بیش از دو هزار سال تلاشی که از زمان ***اقلیدس*** برای اثبات اصل توازی انجام می‌گرفت به وجود آمد. یعنی از مساله‌ای پدید آمد که تنها کشش ریاضی داشت. ***ن. ای. لباچوسکی*** که طرح این هندسهٔ تازه را ریخت، با دوراندیشی نام آن را «تخیلی» گذاشت، زیرا نمی‌توانست معنای حقیقی آن را نشان دهد، گر چه مطمئن بود که این معنا سرانجام پیدا خواهد شد. نتیجه‌گیری‌های هندسهٔ او نه تنها تخیلی، بلکه حتی غیرقابل تصور و پوچ به نظر می‌رسید. با وجود این، اندیشهٔ ***لباچوسکی*** ریشهٔ پیشرفت‌های تازه‌ای در هندسه و سرچشمهٔ به وجود آمدن نظریهٔ فضاهای مختلف نااقلیدسی شد و بعدها به عنوان یکی از پایه‌های نظریهٔ نسبیت عمومی به آن خدمت کرد. و نیز باید دانست که دستگاه ریاضی نظریهٔ نسبیت را یکی از نمونه‌های هندسهٔ نااقلیدسی فضای چهاربعدی تشکیل می‌دهد. به این ترتیب حتی آن مفهوم‌های انتزاعی ریاضی، که زمانی غیرقابل فهم به نظر می‌رسید، به دستگاه نیرومندی برای گسترش و پیشرفت یکی از مهمترین نظریه‌های فیزیکی تبدیل شد. به همین ترتیب در نظریهٔ تازهٔ پدیده‌های اتمی، به نام مکانیک کوانتایی، بسیاری از مفهوم‌های انتزاعی ریاضی، و برای نمونه مفهوم فضای بی‌نهایت بعدی، به طور جدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

نیازی نیست خود را در مثالهای زیادی گم کنیم. به اندازهٔ کافی تاکید کردیم که ریاضیات در زندگی روزانه، صنعت و در دانش‌های مختلف استفادهٔ گسترده‌ای دارد و نیز بسیاری از نظریه‌هایی که در درون خود ریاضیات به وجود آمده و پیشرفت کرده است بعدها در «دانش‌های پایه» و بسیاری از مساله‌های مربوط به صنعت کاربرد خود را پیدا کرد. چنین است یکی از ویژگی‌های ریاضیات که ضمن انتزاعی‌بودن، دارای نتیجه‌گیری‌های دقیق و متقاعدکننده است.

۲. البته با نام‌بردن این ویژگی‌ها هنوز کارآیی ریاضیات را روشن نکرده‌ایم، بلکه تنها

---

۱. در این‌جا این نمونه را می‌آوریم، بدون این‌که در پی روشن‌کردن آن باشیم. خواننده می‌تواند شرح آن را در بخش هفدهم کتاب پیدا کند.

اثرهای خارجی آن را نشان داده‌ایم. می‌خواهیم جوهر این ویژگی‌ها را روشن کنیم. برای این کار دست کم باید به این پرسشها پاسخ دهیم:

مفهوم‌های انتزاعی چه چیزی را بازتاب می‌دهند؟ به زبان دیگر: ***موضوع واقعی ریاضیات چیست؟***

چرا نتیجه‌گیری‌های انتزاعی، تا این اندازه قانع‌کننده و مفهوم‌های نخستین آن، تا این اندازه روشن است؟ به زبان دیگر، ***بنیان روش ریاضی در چیست؟***

چرا ریاضیات، با وجود همهٔ انتزاعی بودنش، تنها بازی سرگرم‌کنندهٔ با مجردها نیست و گسترده‌ترین کاربردها را پیدا می‌کند؟ به زبان دیگر، ***کارآیی ریاضیات از کجا ناشی می‌شود؟***

سرانجام، چه نیروهایی ریاضیات را به جلو می‌برد و به آن اجازه می‌دهد انتزاع را با کاربرد گستردهٔ آن به هم مربوط کند؟ به زبان دیگر، ***درون‌پایه روند پیشرفت ریاضیات در چیست؟***

با پاسخ‌دادن به این پرسش‌ها، می‌توانیم تصور کلی دربارهٔ موضوع ریاضیات، دربارهٔ بنیان‌های روش آن و دربارهٔ اهمیت و پیشرفت آن به دست آوریم، یعنی ماهیت آن را بشناسیم.

ذهن‌گرایان و دوستداران ماورای طبیعت، نه تنها در حل این‌گونه مساله‌های بنیانی سردرگم می‌شوند، بلکه حتی کارشان به وارونه‌کردن ریاضیات می‌کشد و در واقع آن را خلاف آنچه است نشان می‌دهند. این‌ها از یک‌طرف انتزاعی‌بودن بی‌اندازهٔ ریاضیات و از طرف دیگر ویژگی متقاعدکنندهٔ آن را می‌بینند و به همین جهت گمان می‌برند که ریاضیات تنها از اندیشهٔ آدمی به وجود آمده است.

ولی در واقع، ریاضیات هیچ‌گونه ریشه و اساسی، برای نظریه‌های ذهن‌گرایی به دست نمی‌دهد بلکه درست برعکس، اگر پیشرفت ریاضیات و رابطه‌های آن را به طور عینی در نظر بگیریم، تایید درخشانی از نظریه‌های دیالکتیکی خواهد بود و با هر گامی‌که به جلو بر می‌دارد، نظریه‌های ذهن‌گرایی را رد می‌کند. زمانی‌که به طور کلی، به پرسش‌های بالا ــ پرسش‌هایی که دربارهٔ ماهیت ریاضیات طرح کردیم ــ پاسخ دادیم، به درستی این مطلب یقین خواهیم کرد. پاسخ به این پرسش‌ها، همچنین ما را متقاعد خواهد کرد که درک دیالکتیکی دربارهٔ ریاضیات، دربارهٔ طبیعت دانش و به طور کلی شناخت، درست است. برای این‌که دربارهٔ این پرسش‌ها، به نتیجه‌های مقدماتی برسیم، کافی است بنیان‌های حساب و هندسهٔ مقدماتی را بررسی کنیم و ما نیز همین کار را خواهیم کرد. البته اگر دقت بیشتری در

ریاضیات بکنیم، مطلب عمیق‌تر و کامل‌تر می‌شود، ولی آن‌چه در این نتیجه‌گیری‌ها به دست خواهیم آورد را رد نخواهد کرد.

۲. حساب

۱. مفهوم عدد (این‌جا تنها از عددهای طبیعی صحبت می‌کنیم)، مفهومی‌که این قدر برای ما عادی است، خیلی به‌کندی وجود آمد در این باره می‌توان دست کم از روی روش عددشماری مردمی که تا چندی پیش در درجه‌های مختلفی از نظام‌های نخستین زندگی اجتماعی قرار داشتند، داوری کرد. بعضی از آن‌ها، حتی برای عددهای بزرگتر از دو یا سه نامی نداشتند، برخی دیگر عددشماری را جلوتر می‌بردند ولی در هر حال عددشماری آن‌ها خیلی زود تمام می‌شد و برای عددهای بزرگتر به سادگی می‌گفتند «زیاد» یا «بی‌شمار». این مطلب نشان می‌دهد، اندوختهٔ عددهای جدا از هم، به تدریج نزد ملت‌ها پدید آمد.

با این‌که، مردم می‌توانستند خود به خود دربارهٔ مقدار و اندازهٔ مجموعه‌های مختلفی که در عمل با آن‌ها برخورد می‌کردند داوری کنند، در ابتدا تصوری دربارهٔ خود عدد نداشتند، بلکه عدد، به طور مستقیم و به عنوان ویژگی جدانشدنی مجموعه‌ای از این و یا آن چیز، درک می‌شد و به طور روشن و مشخص از این مجموعه جدا نمی‌شد. امروز چنان به شمار عادت کرده‌ایم که به‌زحمت می‌توانیم تصور این مطلب را داشته باشیم، ولی فهمیدن آن دشوار نیست[1].

درگام بعدی، عدد به خاصیتی از مجموعهٔ چیزها بدل می‌شود، ولی هنوز به عنوان «عدد مجرد» یعنی عدد به طور کلی، عددی که به چیز معینی مربوط نباشد، از مجموعهٔ چیزها جدا نمی‌شود. این مطلب را در نام‌هایی که بعضی ملت‌ها به عدد داده‌اند، نیز می‌توان دید. مثل «پنجه» برای پنج و «آدم» برای بیست و غیره.

---

۱. در واقع، هر مجموعه‌ای از چیزها، خواه گلهٔ گوسفند باشد یا توده هیزم، وجود خارجی دارد و به همان شکل مشخص و در عین حال پیچیدهٔ خود درک می‌شود. ویژگی‌ها و رابطه‌هایی که در این مجموعه وجود دارد زمانی تشخیص داده می‌شود که تجزیه و تحلیل معینی از آن بشود، در حالی‌که طرز تفکر نخستین بشر اجازه چنین تجزیه و تحلیلی را نمی‌داد و هر چیزی را تنها در مجموع خود (به عنوان یک مجموعه) درک می‌کرد. مثل کسی که به موسیقی آشنا نیست و نمی‌تواند بخش‌های ملودی‌ها و آهنگ‌ها را در اثرهای موسیقی از هم جدا کند، در صورتی‌که یک موسیقی‌دان حتی سمفونی‌های پیچیده را هم تجزیه و تحلیل می‌کند.

در اینجا پنجِ مجرد در نظر نیست، بلکه مثل این است که بگویند «به اندازه انگشت‌هایی که در یک دست است» و دربارهٔ بیست «به اندازه همه انگشت‌هایی که یک آدم دارد» و غیره. درست به همین ترتیب، بعضی از ملت‌ها، از جمله مفهوم «سیاهی»، «سختی» و «گردی» نداشته‌اند. آن‌ها برای این‌که بگویند فلان چیز سیاه است آن را به‌کلاغ تشبیه می‌کردند و برای این‌که بگویند پنج چیز وجود دارد این چیزها را به طور مستقیم با انگشت‌های دست می‌سنجیدند. گاهی هم برای شمردن چیزهای مختلف، نام‌های جداگانه داشتند: برای شمارش آدم‌ها نام‌های ویژه‌ای از عددها و برای شمارش قایق‌ها نام‌های دیگری داشتند و به همین ترتیب ده‌ها نوع مختلف عددشماری داشتند. در اینجا عددهای مجرد وجود ندارد، این‌ها «نام‌هایی» هستند که تنها برای شمارش نوع معینی از یک چیز به‌کار می‌رود. در بین بعضی از ملت‌ها، برای عددها نام‌های جداگانه‌ای وجود ندارد و برای نمونه با وجودی که می‌توانند بگویند «سه آدم»، «در سه محل» و غیره، عدد «سه» در زبان آن‌ها وجود ندارد.

این مطلب شبیه به آن است که ما به سادگی می‌گوییم این یا آن چیز سیاه است، حال آنکه به ندرت دربارهٔ خود «سیاهی» که مفهومی انتزاعی است صحبت می‌کنیم[1].

در واقع، شمارهٔ چیزها خاصیتی است که مربوط به یک مجموعهٔ معین است، در حالی که عدد، به عنوان «عدد مجرد»، خاصیتی است که از مجموعه‌های مشخص جدا شده، و خود به خود قابل تصور است، همان‌طور که «سیاهی»، «سختی» و غیره قابل تصور است.

همان‌گونه که سیاهی ویژگی کلی همهٔ چیزهایی است که رنگ زغال را دارند، همان‌طور هم «پنج» ویژگی کلی همهٔ مجموعه‌هایی است که به تعداد انگشت‌های یک دست عضو دارد و نیز خود برابری عددی هم از راه مقایسهٔ ساده به دست می‌آید: همان‌طور که یک دانه از چیزی را از مجموعه‌ای برمی‌داریم، یکی از انگشت‌های خود را خم می‌کنیم و به این ترتیب آن‌ها را به‌کمک انگشت‌های خود شماره می‌کنیم. به طور کلی مقابلهٔ عضوهای دو مجموعه می‌تواند نشان دهد آیا تعداد عضوهای آن‌ها برابر است یا نه؟ (بدون این‌که از شمار استفاده کنیم). برای نمونه زمانی‌که مهمان‌ها پشت میز قرار می‌گیرند، اگر میزبان، میز را

---

۱. دربارهٔ به وجود آوردن مفهوم ویژگی‌های چیزها، خواه رنگ چیزی و یا شمارهٔ مجموعه‌ای باشد، می‌توان سه مرحله تشخیص داد که البته نمی‌توان این مرحله‌ها را به طور کامل از هم جدا کرد. در مرحلهٔ نخست، این ویژگی از راه مقایسهٔ مستقیم چیزها با یکدیگر معین می‌شود: برای نمونه می‌گویند به رنگ کلاغ است، به اندازه انگشتان یک دست است. در مرحلهٔ دوم، به شکل صفت ظاهر می‌شود مثل سنگ سیاه و یا به شکل شماره، مثل پنج درخت و غیره. در مرحلهٔ سوم، ویژگی از چیز جدا می‌شود و می‌تواند به صورتی مانند «سیاهی» و یا عدد مجرد «پنج» و غیره مجسم شود.

به اندازهٔ یک نفر کم چیده باشد، بدون این‌که کسی مهمان‌ها را بشمارد، به سادگی این فراموشی روشن می‌شود. زیرا یکی از مهمان‌ها بدون وسیلهٔ پذیرایی باقی می‌ماند.

بنابراین می‌توان عدد را به این ترتیب تعریف کرد: ***هر عدد مشخص مانند دو، پنج و غیره عبارت است از یک خاصیت کمیتی که برای همهٔ مجموعه‌هایی که بتوان عضوهای آن‌ها را با هم مقابله کرد یکسان باشد و برای آن مجموعه‌هایی که دربارهٔ آن‌ها این مقابله ممکن نیست، یکسان نباشد.***

برای این‌که این خاصیت کلی را کشف و جدا کنیم، یعنی برای این‌که مفهوم عددهای جداگانه را به وجود آوریم و نام «شش»، «ده» و غیره را به آن‌ها بدهیم، باید تعداد زیادی مجموعه را با هم بسنجیم. نسل‌های بسیاری شمرده‌اند و یک عمل معین را میلیون‌ها بار تکرار کرده‌اند تا این‌که در جریان عمل و تجربه، عددها و رابطهٔ بین آن‌ها را کشف کرده‌اند.

۲. عمل‌هایی که روی عددها انجام می‌گیرد، به نوبهٔ خود بازتابی از عمل‌های واقعی روی چیزهای مشخص است. این مطلب را از نام‌های عددها هم می‌توان احساس کرد. برای نمونه بعضی از سرخ‌پوستان بومی امریکا، عدد «بیست و شش» را به شکل «من شش را روی دو برابر ده گذاشته‌ام»، تلفظ می‌کنند. روشن است که در این‌جا، روش مشخص شماره‌کردن چیزها، بازتاب می‌شود. در ضمن روشن است که جمع عددها، متناظر با روی‌هم ریختن، یعنی تبدیل دو یا چند مجموعه به صورت یک مجموعهٔ واحد، است. به همین ترتیب، به سادگی مفهوم مشخص تفریق، ضرب و بخش دیده می‌شود (به ویژه روشن‌است‌که ضرب تا حد زیادی عبارت است ازشمارش دو، سه ویا چند مجموعهٔ برابر).

در جریان پیشرفت شمار، نه تنها مردم رابطهٔ بین عددهای جداگانه را کشف می‌کردند و یاد می‌گرفتند که برای نمونه دو و سه می‌شود پنج، بلکه به تدریج قانون‌های کلی را هم به دست می‌آوردند: در عمل کشف شد حاصل جمع به ترتیب جمله‌های جمع بستگی ندارد، یا نتیجهٔ شمارش چیزهای مفروض، به این‌که شمارش به چه ترتیب انجام بگیرد بستگی ندارد. این وضع در سنجش عددهای «ترتیبی» (نخستین، دومین و غیره) با عددهای «اصلی» (یک، دو، و غیره) تظاهر می‌کند. بنابراین عددها نه به طور مستقل و جداگانه، بلکه در بستگی با یکدیگر به صحنهٔ وجود آمدند.

برخی از عددها، حتی درخواندن و نوشتن هم به وسیلهٔ عددهای دیگر بیان می‌شوند. از جمله در زبان روسی، «بیست» را «دو (مرتبه) ده» و در زبان فرانسوی، ۸۰ را «چهاربیست تا» و ۹۰ را «چهاربیست تا و ده» می‌گویند، یا برای نمونه رقم‌های رومی VIII و IX به این معنی

است که ۳ + ۵ = ۸ و ۱ − ۱۰ = ۹.

به طور کلی باید گفت عددها به صورت منفرد و جدا از هم به وجود نیامده‌اند، بلکه دستگاه عددها، همراه با رابطه‌ها و قانون‌های مربوط به آن‌ها پدید آمده‌اند.

موضوع حساب به ویژه عبارت است از دستگاه عددها و رابطه‌ها و قانون‌های مربوط به آن‌ها[1].

عدد مجرد منفرد، به خودی‌خود دارای ویژگی‌هایی که مربوط به مضمون آن باشد، نیست. بنابراین دربارهٔ چنین عددی خیلی کم می‌توان صحبت کرد. اگر برای نمونه دربارهٔ ویژگی‌های عدد ۶ از خود بپرسیم، می‌بینیم که ۶ = ۱ + ۵ و ۶ = ۲ × ۳ و یا ۶ یکی از بخشیاب‌های عدد ۳۰ است و غیره. اما در همهٔ حالت‌ها، عدد ۶ به سایر عددها مربوط می‌شود، به طوری‌که ویژگی هر عدد به ویژه، به رابطه‌هایی که با سایر عددها دارد، معین می‌شود[2]. به جز این، روشن است که هر عمل مربوط به حساب، رابطه و یا به زبان دیگر، نسبت بین عددها را معین می‌کند.

بنابراین، حساب یعنی رابطهٔ بین عددها. ولی رابطهٔ بین عددها، شکل انتزاعی رابطهٔ کمیتی است که در واقع بین مجموعهٔ چیزها وجود دارد و بنابراین می‌توان گفت که: ***حساب علم رابطه‌های کمیتی و واقعی است که آن‌ها را به صورت مجرد بررسی می‌کند.***

همانطور که می‌بینیم حساب، آن‌طور که ذهن‌گرایان می‌کوشند نشان دهند، از تفکر خالص به وجود نیامده است بلکه بازتابی از ویژگی‌های معین چیزهای واقعی است و در نتیجهٔ تجربهٔ عملی طولانی نسل‌های زیادی به وجود آمده است.

۳. هر قدر زندگی عملی جامعه گسترده‌تر و پیچیده‌تر می‌شد، مسأله‌های گسترده‌تری در برابر آن قرار می‌گرفت. دیگر نه تنها لازم بود مقدار چیزها معین شود و دربارهٔ تعداد آن‌ها تبادل فکر به عمل آید (که خود این مطلب هم ایجاب می‌کرد که مفهوم عدد و نام‌های عدد شکل بگیرد)، بلکه این هم لازم بود که مجموعه‌های بزرگ هم شماره شود (خواه چارپایان

---

۱. واژهٔ Arithmetique (حساب) از واژهٔ یونانی «Arithmos» به معنای شمار و «Tekhne» به معنای فن آمده است و بنابراین یعنی فن شمار.

۲. این مطلب را از روی کلی‌ترین مفهوم‌ها هم می‌توان درک کرد. هر مفهوم مجرد، زمانی که از بنیان مشخص خود جدا شده باشد ــ مثل عدد که از مجموعهٔ چیزها جدا شده است ــ به خودی‌خود قابل درک نیست. چنین انتزاعی تنها در ارتباط با سایر مفهوم‌ها زندگی می‌کند و این رابطه، در هر بیان و یا تعریف ناکاملی از آن، نیز وجود دارد. یعنی یک مفهوم مجرد انتزاعی، خارج از این رابطه‌ها، هیچ گونه معنی و مضمونی پیدا نخواهد کرد، یعنی وجود ندارد. مفهوم عدد مجرد هم در قانون‌ها و رابطه‌هایی که در دستگاه عددها وجود دارد معنا پیدا می‌کند.

یک گله باشد، یا کالاهای قابل مبادله، و یا تعداد روزها تا زمان مقرر و غیره) و نتیجه‌های شمار، ثبت و به دیگران منتقل شود. چنین شماری دیگر نیاز به نام‌گذاری کامل و سپس نشانه‌گذاری برای عددها داشت.

گزینش نشانه برای عددها (نمادها)، که به ظاهر در همان زمان به وجودآمدن خط و چیزنویسی صورت گرفت، در پیشرفت دانش حساب نقش بزرگی داشت. به جز این، این عمل نخستین گامی است که به سوی قانون‌ها و رابطه‌های کلی ریاضی برداشته شده است. گام بعدی، یعنی کشف قانون‌های عمل‌های حساب و گزینش حرف برای مجهول (x) خیلی دیرتر برداشته شد.

مفهوم عدد را، مثل هر مفهوم انتزاعی دیگری، نه می‌توان مجسم کرد و نه می‌توان نمایش داد، بلکه می‌توان دربارهٔ آن اندیشید. اما اندیشه، تنها به یاری زبان شکل می‌گیرد و مجسم می‌شود. بنابراین، بدون نام، مفهوم هم وجود ندارد. نماد هم عبارت از همین نام‌گذاری است، تنها این نام‌گذاری، نوشتنی است و می‌تواند در ذهن به شکل محسوسی مجسم شود. برای نمونه، زمانی که من می‌گویم «هفت» شما چه چیزی را مجسم می‌کنید؟ به احتمال زیاد، شما هفت چیز خاص را به نظر نخواهید آورد، بلکه پیش از همه رقم «۷» را پیش خود مجسم خواهید کرد. این رقم «۷» در عین حال، به عنوان تظاهر مادی عدد مجرد «هفت» هم به کار می‌رود و روشن است که تلفظ عددی مانند ۱۸۲۷۳ دشوارتر از نوشتن آن است و نمی‌توان آن را با دقت کامل به صورت مجموعهٔ چیزهایی پیش خود مجسم کرد. به این ترتیب نمادها توانستند مفهوم عددها را، که نه از مشاهده ساده به دست آمده‌اند و نه از شمار مستقیم، به تدریج به وجود آورند. این مطلب مربوط به نیازهای عملی بود: با پیدایش دولت، لازم بود مالیات جمع‌آوری شود، لشکر گرد آید و نیازهای آن برآورده شود و مانند این‌ها. و همهٔ این‌ها به کار با عددهای بزرگ نیازمند بود.

بنابراین نقش نمادها در این است که تجسم ساده‌ای از مفهوم عدد مجرد می‌دهد[1]. نقش نشانه‌های ریاضی، به طور کلی چنین است: آن‌ها مفهوم‌های انتزاعی ریاضی را مجسم

۱. یادآوری این مطلب لازم است که فراگرفتن مفهوم عدد که در جریان یک دورهٔ طولانی و با این دشواری به وجود آمد، برای بچه‌های امروزی ساده است. چرا؟ البته، نخست به این دلیل که بچه می‌شنود و می‌بیند که چگونه بزرگترها همیشه از عددها استفاده می‌کنند و به او هم این مطلب را یاد می‌دهند، دوم به این دلیل که (و تکیهٔ ما هم روی همین دلیل است) بچه واژه‌ها و نشانه‌های آماده‌ای برای عددها دارد. او ابتدا شکل ظاهری عددها را یاد می‌گیرد و سپس به مفهوم آن‌ها چیره می‌شود.

می‌کنند، در مثل نماد + به معنی جمع، x به معنی عدد مجهول، a به معنی عدد مفروض دلخواه و غیره. دوم، نشانه‌ها امکان می‌دهد که عمل‌های مربوط به عددها خیلی به سادگی انجام گیرد و هر کسی می‌داند که «محاسبهٔ روی کاغذ چقدر ساده‌تر از محاسبهٔ ذهنی است». نشانه‌ها و رابطه‌های ریاضی هم به طور کلی همین اهمیت را دارند. آن‌ها به ما امکان می‌دهند، به جای بخشی از برهان، رابطهٔ ریاضی آن را قرار دهیم و عمل‌ها را به طور مکانیکی دنبال کنیم. رابطه‌ای که نوشته شود تا حد معینی سندیت پیدا می‌کند، در آن همه چیز دیده می‌شود، همه چیز را می‌توان آزمایش کرد، همه چیز به وسیلهٔ قاعده‌های دقیقی معین می‌شود. برای نمونه می‌توان جمع ستونی یا هر عمل جبری را، مثل بردن به طرف دیگر معادله، با تغییر علامت به خاطر آورد.

از آن‌چه گفته شد روشن می‌شود که حساب بدون نشانه‌های مناسب برای عددها نمی‌توانست پیش برود. ادامهٔ پیشرفت ریاضیات، بدون نشانه‌ها و رابطه‌های خاص غیرممکن بود.

به خودی خود روشن است که مردم روش نوشتن عددها را، به نحوی که امروز معمول و تا این حد هم مناسب است، نتوانستند یکباره پیدا کنند. از دوره‌های باستانی همراه با پیدایش تمدن، نمادهای مختلفی هم برای عددها، بین ملت‌های مختلف به وجود می‌آمد، ولی نه تنها از نظر نشانه، بلکه حتی از نظر روش نوشتن هم، با آن چه امروز معمول است کم شباهت داشت (از جمله در استفاده از دستگاه دهدهی؛ بابِلی‌های قدیم مخلوطی از دستگاه دهدهی و دستگاه با مبنای ۶۰ را به‌کار می‌بردند). در جدول صفحهٔ ۱۹ بعضی از نمادهای عددهای مربوط به ملت‌های مختلف را، به عنوان نمونه، نشان داده‌ایم و به خصوص دیده می‌شود که یونانی‌های باستان و سپس روس‌ها، نشانه‌های الفبایی را به‌کار می‌بردند. رقم‌های «عربی» کنونی و به طور کلی روش یادداشت عددها، از هندوستان سرچشمه می‌گیرد و از آن‌جا به وسیلهٔ ریاضی‌دانان ایرانی در سدهٔ دهم به اروپا آورده شد و در آن‌جا طی چندین سده قوام گرفت.

نخستین ویژگی این دستگاه در این است که دهدهی است، ولی این ویژگی بنیانی نیست. زیرا در مثل اگر نمادهای ویژه‌ای برای ده و یازده برگزینیم، می‌توانیم دستگاه عددشماری به مبنای ۱۲ را با موفقیت به‌کار بریم.

ویژگی مهم این دستگاه در این است که «موضعی» است، یعنی در آن هر رقم، اگر در جاهای مختلف قرار گیرد، معناهای مختلف پیدا می‌کند. در عدد ۳۷۲، رقم ۳ به معنای

تعداد صدها (سدگان) و ۷ به معنای تعداد ده‌ها (دهگان) می‌باشد. این روش نوشتن نه تنها کوتاه و ساده است، بلکه محاسبه‌ها را هم بی‌اندازه ساده می‌کند. نمادهای رومی خیلی کمتر از این ساده‌اند: همین عدد ۳۷۲ به وسیلهٔ نمادهای رومی چنین نوشته می‌شود: CCCLXXII و ضرب عددهای بزرگ در این حالت، یعنی زمانی‌که به وسیلهٔ نمادهای رومی نوشته شده باشد، چقدر دشوار می‌شود!

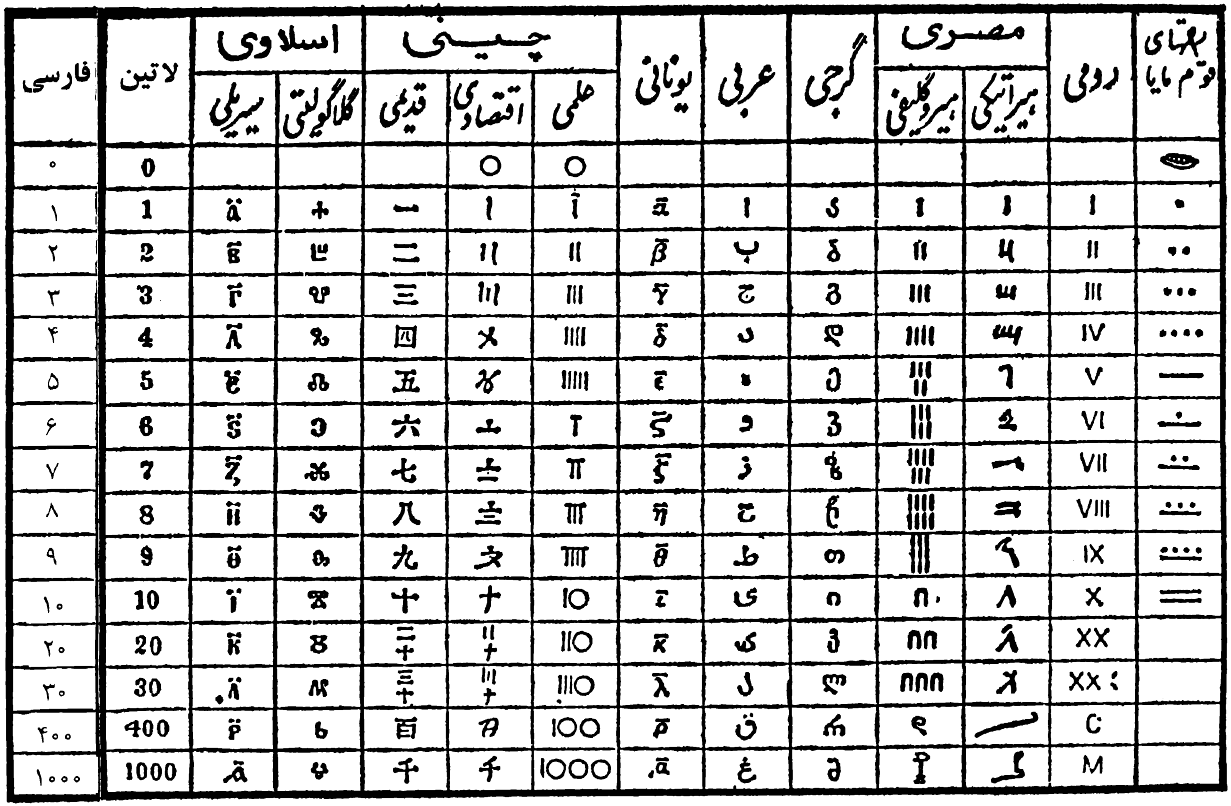
نوشتن «موضعی» عددها ایجاب می‌کند که برای مرتبهٔ خالی و بدون رقم هم نشانه‌ای گذاشته شود. زیرا اگر چنین نشانه‌ای وجود نداشته باشد، عددی مثل سیصد و یک با سی و یک اشتباه می‌شود. به جای مرتبهٔ بدون رقم، صفر می‌گذاریم و به این ترتیب ۳۰۱ را از ۳۱ تمیز می‌دهیم. در خط میخی بابلی‌های اخیر هم صفر به صورت نطفه‌ای و ابتدایی وجود داشته است، ولی هندی‌ها بودند که صفر را به طور منظم وارد در عددشماری کردند[1]. و همین مطلب آن‌ها را به سمت تکامل دستگاه «موضعی» عددهای نوشتنی، با همان روشی که ما امروز به‌کار می‌بریم، راهنمایی کرد.

اما هنوز مطلب تمام نیست: صفر در دستگاه عددها، خودش عددی است. البته صفر به خودی‌خود هیچ است (در زبان سانسکریت، هند قدیم، صفر را «چونگا *Cunga*» یعنی «خالی ـ تهی» می‌نامیدند)، ولی در بستگی با دیگر عددها، معنا پیدا می‌کند و ویژگی معینی به دست می‌آورد: اگر چه هر عددی به اضافه صفر برابر با خودش می‌شود، ولی ضرب هر عدد در صفر برابر صفر است.

۴. به حساب دوران باستان برگردیم. کهن‌ترین نوشتهٔ ریاضی که از بابِل و مصر به ما رسیده است، مربوط به دو هزار سال پیش از میلاد است. این نوشته‌ها و نوشته‌هایی که مربوط به دوره‌های تازه‌تر هستند، شامل مسأله‌های مختلف حساب و حل آن‌ها است و حتی مسأله‌هایی که امروزه به جبر بستگی دارد، مانند حل برخی از معادله‌های درجهٔ دوم و حتی درجهٔ سوم، در آن‌ها دیده می‌شود (البته همهٔ این‌ها دربارهٔ مسأله‌های عملی و مشخص و مثال‌های عددی هستند). همچنین، از بابِلی‌ها، جدول مجذورها، مکعبها و معکوس‌های عددها هم به ما رسیده است. می‌توان گمان برد که بابِلی‌ها علاقه‌های خاص ریاضی، که

---

۱. نخستین کتیبهٔ هندی که در آن صفر وجود دارد، مربوط به آخرهای سدهٔ نهم میلادی است و در آن عدد ۲۷۰ به همین شکلی که ما امروز می‌نویسیم، نوشته شده است. ولی احتمال می‌رود که صفر پیش از آن و از سدهٔ ششم میلادی در هندوستان رایج بوده است.



نشانه‌گذاری عددها نزد ملتهای مختلف.

نقل از مقالهٔ گ. *یاشماکوی* و *آ. ب.* پوشکوویچ، «سرچشمهٔ دستگاه شمار»

(فرهنگ «ریاضیات مقدماتی»، جلد I، چاپ مسکو، ۱۹۵۱)

به این و یا آن مسأله عملی مربوط نباشد، داشته‌اند.

به هر حال، در بابِل و مصر باستان، علم حساب خوب پیش رفته بود. اما این، هنوز نظریهٔ ریاضی عددها نبود، بلکه مجموعه‌ای بود از قانون‌های محاسبه و حل مسأله‌های مختلف. در دبستان‌ها، امروز هم دانش حساب را به همین روش یاد می‌گیرند و آن‌هایی هم که با ریاضیات خالص سروکار دارند آن را همین طور می‌فهمند، و این وضع هم طبیعی است. ولی در این صورت دانش حساب هنوز نظریهٔ ریاضی نیست: در حساب قضیه‌های عمومی دربارهٔ عددها وجود ندارد.

انتقال به حساب نظری به تدریج انجام گرفت.

همان‌طور که گفتیم، نمادها به ما امکان می‌دهد که با چنان عددهای بزرگی سروکار داشته باشیم که چه از راه مجموعهٔ چیزها و چه از شمارش پشت سر هم، نمی توان به آنها رسید. اگر در بین قبیله‌های غیرمتمدن، شمارش عدد به ۳، ۱۰، ۱۰۰ و غیره پایان می‌پذیرفت و برای بعد از آن، از واژهٔ مبهم «بسیاری» استفاده می‌کردند، نمادها به چینی‌ها، بابِلی‌ها و مصری‌ها امکان داد که از ده‌ها هزار و حتی میلیون‌ها هم بگذرند. این‌جا حتی امکان ادامهٔ بی‌پایان سلسلهٔ عددها هم مطرح می‌شود. آگاهی روشن در این‌باره کی به وجود آمد. ما نمی‌دانیم، ولی همین‌قدر می‌شود گفت که ناگهانی نبوده است. *ارشمیدس* (۲۸۷-۲۱۲ پیش از میلاد) در اثر مشهور خود «دربارهٔ شمارهٔ شن‌ها»، راهی برای نامیدن عددی می‌دهد که از تعداد شن‌هایی که می‌تواند در «کرهٔ ستاره‌های ثابت» جا بگیرد، بزرگتر باشد. به این ترتیب، امکان نامیدن و یادداشت چنین عددی، حتی در زمان *ارشمیدس*، به بیان مفصل و پیچیده‌ای نیاز داشت.

یونانی‌ها، در سدهٔ سوم پیش از میلاد، از دو مطلب مهم آگاهی روشنی داشتند: نخست این‌که سلسلهٔ عددها، می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه یابد. دوم این‌که، نه تنها می‌توان روی عددهای مفروض دلخواه عمل کرد، بلکه با تبدیل به رابطه و اثبات قضیه‌های کلی دربارهٔ عددها، می‌توان دربارهٔ عدد به طور کلی بحث کرد و این از راه تعمیم آزمایش‌های زیادی که پیش از آن، ضمن عمل با عددهای مشخص انجام داده بودند، صورت گرفته است. به ویژه، از این آزمایش‌ها بود که قانون‌ها و برداشت‌های کلی پیدا شد، امکان داد تا دربارهٔ عددها داوری‌های کلی بشود و به این ترتیب، انتقال به درجهٔ بالاتری از انتزاع صورت گیرد: انتقال از عددهای مفروض جداگانه (و انتزاعی)، به عدد به طور کلی، ***به هر عددِ ممکن دلخواه***.

با افزودن واحد به عددی که پیش از آن در دست است، و از راه شمارش تک‌تک چیزها، به تصور بی‌پایان‌بودن روند تشکیل عددها می‌رسیم. سلسلهٔ عددها را به صورت یک امتداد بی‌پایان می‌توان به تصور آورد و به این ترتیب، همراه با این تصور، مفهوم بی‌نهایت در ریاضیات وارد شد. البته ما در عمل نمی‌توانیم از راه اضافه‌کردن واحد، به عددی که به اندازهٔ دلخواه بزرگ باشد، برسیم: چه کسی می‌تواند تا میلیون ملیون بشمارد، در حالی‌که تعداد ثانیه‌های یک سال ۴۰ مرتبه از این عدد کوچکتر است. اما اصل مطلب در این نیست. جریان روی هم‌گذاشتن واحدها، جریان تشکیل مجموعهٔ چیزهایی که تعداد آن‌ها به اندازهٔ کافی زیاد باشد، از نظر اصولی محدود نیست و بنابراین سلسلهٔ عددها، توانایی ادامهٔ بی‌پایان را پیدا می‌کند. محدودبودن عملی شمار در این‌جا نقشی ندارد و در واقع انسان می‌کوشد تا خود را از آن جدا کند. قضیه‌های کلی عددها هم مربوط به همین سلسله عددهایی است که به طور بی‌پایان ادامه پیدا می‌کند.

قضیه‌های عمومی، که ویژگی‌های عدد را به طور کلی بیان می‌کند، در عین حال شامل بیان ویژگی تعداد بی‌شماری از عددهای مختلف‌اند و از جنبهٔ کیفی از شرحی که مربوط به عددهای خاصی هستند غنی‌ترند، ولو این‌که ویژگی مربوط به یک عدد خاص، دربارهٔ هر عدد دیگری هم قابل آزمایش باشد. بنابراین لازم است قضیه‌های کلی را از راه برهان‌های کلی، که متکی بر خود قانون تشکیل سلسلهٔ عددهاست، اثبات کرد. در این‌جا یک ویژگی مهم ریاضیات مطرح می‌شود. موضوع ریاضیات تنها رابطه‌های کمیتی مفروض نیست، بلکه هر رابطهٔ کمیتی ممکن (و ضمن آن بی‌پایان بودن) هم جزو موضوع ریاضیات قرار می‌گیرد.

در «مقدمات» مشهور اقلیدس، که در سدهٔ سوم پیش از میلاد نوشته شده است، قضیه‌های عمومی دربارهٔ عددهای درست وجود دارد. به ویژه به این قضیه برمی‌خوریم که رشتهٔ عددهای اول بی‌پایان است و عدد اول، به هر اندازه بزرگ که بخواهیم، وجود دارد[1].

به این ترتیب، دانش حساب به نظریهٔ عددها تبدیل می‌شود، همچنین دانش حساب از مسأله‌های خاص و مشخص، جدا و به رشته‌ای از مفهوم‌ها و قضاوت‌های انتزاعی تبدیل می‌شود؛ حساب بخشی از ریاضیات «خالص» می‌شود. و در واقع، این همان زمانی است که خود ریاضیات خالص با همهٔ ویژگی‌هایش (که در پیش دربارهٔ آن صحبت کردیم) به دنیا

۱. به یاد بیاوریم که عدد اول به هر عدد مثبت و درست، به جز واحد، گویند که تنها بر خودش و بر یک بخش‌پذیر باشد.

می‌آید. البته لازم به یادآوری است که ریاضیات نظری، در عین حال هم از حساب و هم از هندسه به وجود آمد. علاوه بر این در قانون‌های کلی حساب، دیگر نطفه‌های جبر هم وجود داشت که بعدها از حساب جدا شد و ما در این‌باره گفت‌وگو خواهیم کرد.

اکنون زمان آن است که همهٔ نتیجه‌ها را جمع‌بندی کنیم، زیرا جریان به‌وجود آمدن حساب نظری را اگر چه سطحی هم بود، از همان زمان که نطفهٔ مفهوم عدد بسته شد بررسی کردیم.

۵. از آن‌جا که تولد حساب نظری، بخشی از تولد ریاضیات بود، به طور طبیعی می‌توانیم انتظار داشته باشیم نتیجه‌هایی که دربارهٔ حساب به دست آوردیم بتواند به پرسش‌های عمومی که به طور کلی دربارهٔ ریاضیات مطرح کردیم پاسخ بدهد. این پرسش‌ها را با توجه به حساب به یاد بیاوریم:

نخست ـ این‌که مفهوم‌های انتزاعی حساب چگونه به وجود می‌آید و در واقع چه چیزی را بازتاب می‌دهد؟

آن‌چه دربارهٔ سرچشمهٔ به‌وجود آمدن حساب یادآوری کردیم، به این پرسش پاسخ می‌دهد: مفهوم حساب، رابطه‌های کمیتی مجموعه‌های چیزها را بازتاب می‌دهد، این مفهوم‌ها از راه انتزاع و بر پایه تجزیه و تحلیل و عمومی‌کردن آزمایش‌های عملی فراوان پیدا شده است. در ضمن، به وجودآمدن این مفهوم‌ها هم تدریجی بوده است؛ ابتدا عدد، با توجه به چیزهای مشخص، و سپس عدد مجرد و سرانجام مفهوم عدد به طور کلی، یعنی عدد ***دلخواه ممکن***، به وجود آمد و هر یک از این درجه‌ها هم در نتیجهٔ جمع‌بندی آزمایش‌ها و به‌کاربردن مفهوم‌های قبلی پدید آمده است. در ضمن، یکی از قانون‌های اساسی تشکیل مفهوم‌های ریاضی نیز چنین است: مفهوم‌های ریاضی از راه یک رشته انتزاع پیاپی و سپس تعمیم آن‌ها به وجود می‌آید، در حالی‌که هر انتزاع و هر تعمیم، متکی بر آزمایش‌های عملی است که در واقع کاربرد مفهوم‌های انتزاعی را نشان می‌دهد.

تاریخ به‌وجودآمدن مفهوم‌های حساب، نادرستی این نظریه را که گویا این مفهوم‌ها از «تفکر خالص»، از «بررسی حضوری» و چیزهایی از این قبیل، ریشه گرفته است، ثابت می‌کند.

دوم ـ چرا نتیجه‌های حساب تا این اندازه قانع‌کننده و غیرقابل رد هستند؟

تاریخ به این پرسش ما هم پاسخ می‌دهد: می‌بینیم که نتیجه‌گیری‌های حساب به‌کندی و به‌تدریج به دست آمده است. آن‌ها بازتاب‌کنندهٔ آزمایش‌هایی هستند که در طول نسل‌های

پشت سر هم انجام گرفته است و از این راه در ذهن تثبیت شده است. آن‌ها به وسیلهٔ نام‌های عددها، به وسیلهٔ عمل‌های یک‌نواختی که مرتب تکرار می‌شد، به وسیلهٔ به‌کاربردن عملی و دایم آن‌ها در زبان، تثبیت می‌شد و به این ترتیب، روشنی و ویژگی متقاعدکنندهٔ خود را کسب می‌کرد. ریشه و سرچشمهٔ خود روش‌هایی هم که دربارهٔ برهان‌های منطقی به‌کار می‌رود، در همین جا است. و نیز باید گفت که مسأله تنها برسر تکرار نیست، بلکه در این هم هست که خود واقعیت‌ها هم دارای رابطه‌های روشن و استواری هستند و همین رابطهٔ واقعیت‌هاست که در مفهوم‌های بنیانی حساب و در قانون‌ها و نتیجه‌گیری‌های منطقی آن بازتاب شده است.

ویژگی متقاعدکنندهٔ دانش حساب در این است که نتیجه‌گیری‌های آن به طور منطقی از مفهوم‌های بنیانی آن بیرون کشیده شده است و این هر دو ــ یعنی برهان‌های منطق و مفهوم‌های حساب ــ براساس هزاران عمل و براساس قانون‌های عینی که دنیای ما را دربر گرفته است، به وجود آمده و در ذهن استوار شده است.

سوم ـ چرا حساب با همهٔ انتزاعی‌بودن مفهوم‌هایش، تا این اندازه کاربرد پیدا می‌کند؟

پاسخ این پرسش ساده است. مفهوم‌ها و نتیجه‌گیری‌های دانش حساب، که از تعمیم آزمایش‌های بسیار به دست آمده است، چنان بستگی‌هایی از واقعیت را به طور انتزاعی بیان می‌کند، که در همه‌جا با آن‌ها برخورد می‌کنیم، مانند شمردن چیزهای اتاق، ستاره‌ها، مردم، اتم‌ها و .... حساب بعضی از ویژگی‌های کلی را برمی‌گزیند و آن‌ها را از همهٔ ویژگی‌های مشخص که خاص چیزهای جداگانه است جدا می‌کند و به خصوص به مناسبت همین گزینش عمومی‌ترین ویژگی‌هاست که نتیجه‌گیری‌های حساب در حالت‌های خیلی زیاد کاربرد پیدا می‌کند. به این ترتیب، انتزاعی‌بودن حساب، امکان کاربرد گستردهٔ آن را تأمین می‌کند (همچنین این مطلب مهم است که این انتزاع بی‌معنی نیست، بلکه از آزمایش‌های طولانی و در عمل به دست آمده است). همین مطلب دربارهٔ همهٔ ریاضیات و دربارهٔ هر مفهوم یا نظریهٔ انتزاعی درست است. امکان کاربرد نظریه، به این مطلب مربوط است که مواد اولیه‌ای که این نظریه از آن‌ها ساخته شده است تا چه اندازه در آن تعمیم یافته است.

در عین حال هر مفهوم انتزاعی، و به ویژه مفهوم عدد، به دلیل همین انتزاعی‌بودنش دارای معنای محدودی می‌شود: اول، زمانی که دربارهٔ چیز مفروض و مشخص به‌کار می‌رود تنها یکی از جنبه‌های آن را منعکس می‌کند و بنابراین تصور نارسایی از آن به ما می‌دهد. از جمله داده‌های عددی اغلب خیلی کم دربارهٔ ماهیت عمل صحبت می‌کند، دیگر،

مفهوم‌های انتزاعی را همه جا نمی‌توان به‌کاربرد، مگر این‌که شرط‌های معینی وجود داشته باشد؛ نمی‌توان حساب را دربارهٔ مسأله‌ای به‌کاربرد، مگر این‌که قانع شویم این کاربرد معنا دارد. برای نمونه، زمانی که ما دربارهٔ جمع صحبت می‌کنیم در ذهنمان چیزهایی را روی‌هم می‌ریزیم و البته با این عمل هیچ‌گونه تغییری در وضع خود چیزها حاصل نمی‌شود. اما اگر جمع را دربارهٔ روی‌هم ریختن عملی چیزهایی به‌کار بریم، یعنی اگر چیزها را به شکل توده‌ای روی‌هم بریزیم و یا روی میز قرار دهیم، دیگر یک جمع سادهٔ انتزاعی انجام نمی‌گیرد، بلکه به‌واقع جریانی صورت می‌پذیرد و این جریان نه تنها نتیجه‌ای از جمع سادهٔ حساب نیست، بلکه ممکن است عمل جمع را بی‌معنی بنمایاند. برای نمونه چیزهایی که به‌صورت توده، روی‌هم ریخته می‌شود ممکن است بشکنند، جانورانی که با هم زندگی می‌کنند ممکن است یکدیگر را پاره کنند، چیزهایی که «روی هم ریخته شده است» ممکن است وارد واکنش‌های شیمیایی شوند، مخلوط یک لیتر آب و یک لیتر الکل به علت انحلال متقابل این دو مایع، به جای ۲ لیتر، ۹ر۱ لیتر خواهد شد و غیره.

آیا نمونه‌های دیگری هم لازم است؟ هر قدر که لازم باشد می‌توان از این نمونه‌ها آورد؟

سخن کوتاه: هر واقعیتی محسوس، قابل آزمایش و مشخص است و درک این مسأله به خصوص دربارهٔ رابطه‌های ریاضی، به علت انتزاعی‌بودنشان، مهم است.

چهارم ـ سرانجام آخرین پرسشی که کرده بودیم مربوط به نیروهای محرکهٔ پیشرفت ریاضیات بود.

دربارهٔ حساب، پاسخ به این پرسش هم از تاریخ به وجودآمدنش روشن می‌شود. می‌بینیم که مردم در عمل به شمار چیره شدند و مفهوم عدد را به‌وجود آوردند. سپس خود عمل، لزوم نشانه‌ها را برای عددها و هم مسأله‌های دشوارتر را مطرح کرد. سخن کوتاه، نیازهای جامعه به‌عنوان نیروی محرکه‌ای پیشرفت حساب را تأمین می‌کرد. در این روند پیشرفت، عمل با تفکر انتزاعی، که آزمایش‌های عملی را تعمیم می‌داد، در تأثیر متقابل دایمی بود. مفهوم‌های انتزاعی که بر مبنای عمل به وجود می‌آید به سلاح نیرومند عمل تبدیل می‌شود و در عین حال در جریان استفادهٔ عملی، پیش می‌رود. انتزاع از مسأله‌های غیراساسی به‌کشف حقیقت امر کمک می‌کند و در حالت‌هایی ویژگی‌ها و بستگی‌های کلیِ جداشده، که نقش تعیین‌کننده را بازی می‌کند، به پیداکردن روش کلی راه یاری می‌رساند.

به جز این، گاهی تفکر بیش از اندازه‌ای که به‌طور مستقیم مورد نیاز مسأله‌های عملی است جلو می‌رود. برای نمونه، مفهوم عددهای بزرگی مانند ملیون و میلیاردها، برمبنای

شمار و پیش از آن که استفادهٔ عملیِ این‌گونه عددها مطرح شود به وجود آمد. از این‌گونه نمونه‌ها در تاریخ دانش کم نیست، کافی است، عددهای موهومی را ــ که پیش از این هم به آن اشاره کردیم ــ به یاد بیاوریم. این‌ها همه تنها حالت ویژه‌ای از شناختن رابطهٔ متقابل عمل و تفکر انتزاعی، عمل و نظریه را نشان می‌دهد.

۳. هندسه

۱. تاریخ پیدایش هندسه در اساس شبیه تاریخ پیدایش حساب است. نخستین مفهوم‌ها و آگاهی‌های هندسی، در دوره‌های پیش از تاریخ و در جریان کوشش عملی بشر پیدا شده است.

بشر، شکل‌های هندسی را از خود طبیعت گرفته است: گردی و داس‌مانندی ماه، صافی و مستوی‌بودن دریاچه، مستقیم‌بودن شعاع نور و کشیده‌بودن درخت از مدت‌ها پیش از بشر وجود داشته و همیشه در برابر او بوده است. البته در خود طبیعت با خط‌هایی که راستِ کامل باشد و یا با مثلث‌ها و مربع‌ها خیلی کم برخورد می‌کنیم. بشر تصور دربارهٔ این شکل‌ها را به ویژه به این علت به دست آورد که طبیعت را ضمن کوشش عملی درک می‌کرد و به خاطر نیازهایی که داشت چیزهایی تهیه می‌کرد که به تدریج شکل منظم‌تری به خود می‌گرفت. مردم برای خود خانه می‌ساختند، سنگ‌ها را تراش می‌دادند، قطعه‌های زمین را محصور می‌کردند، روی کمان‌های خود زه می‌کشیدند، ظرف‌های گِلی می‌ساختند و آن را تکمیل می‌کردند و ضمن این کار به این مفهوم می‌رسیدند که ظرف، **گرد** از آب در می‌آید و یا زهی که کشیده شده باشد ***راست*** است و غیره. کوتاه سخن: ابتدا شکل را به مادهٔ اولیه دادند و سپس آن را به عنوان چیزی که به ماده داده می‌شود و می‌تواند به خودی خود و جدا از ماده بررسی شود درک کردند. بشر، ضمن درک شکل، می‌توانست ساخته‌های دست خود را تکمیل کند و از آن‌جا با روشنی بیشتری خود مفهوم شکل را بشناسد. به این ترتیب، اساس به وجودآمدن مفهوم‌های انتزاعی هندسه را کوشش عملی بشر تشکیل می‌دهد.

می‌بایست هزاران چیز با کناره‌های راست ساخته شود، هزاران نخ کشیده شود، تعداد زیادی خط‌های راست روی زمین رسم شود، تا تصور روشنی دربارهٔ خط راست، به مفهوم کلی آن به دست آید: چنان مفهوم کلی که بتواند در همهٔ این حالت‌های خاص درست باشد.

اکنون ما به وسیلهٔ چیزهایی که با دست بشر ساخته شده و کناره‌های راست دارند احاطه شده‌ایم. خودمان هم یاد گرفته‌ایم که خط راست را رسم کنیم و تنها به همین علت است که از کودکی دارای تصور روشنی دربارهٔ خط راست هستیم.

به همین ترتیب، مفهوم مقدارهای هندسی طول، سطح و حجم از کوشش عملی به وجود آمد. مردم تنها به خاطر نیازهایشان طول‌ها را اندازه می‌گرفتند، مسافت‌ها را معین می‌کردند و مساحت‌ها و حجم‌ها را با چشم برآورد می‌کردند. به تدریج ساده‌ترین قانون‌های کلی و نخستین رابطه‌های هندسی کشف شد؛ برای نمونه، مساحت مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب دو ضلع آن. آگاهی بر این رابطه‌ها، برای کشاورزان مفید بود تا بتوانند مساحت زیر کشت، و در نتیجه محصول احتمالی را برآورد کنند.

به این ترتیب، هندسه از تلاش‌های عملی و از مسأله‌های مربوط به زندگی ریشه گرفت و به وجود آمد. *ادموس رودسی*، دانشمند یونان باستان در سدهٔ چهارم پیش از میلاد، نوشته است: «هندسه به وسیلهٔ مصری‌ها کشف شد و ضمن اندازه‌گیری زمین به وجود آمد. این اندازه‌گیری به علت سرکشی رود نیل که همیشه مرزها را می‌شست لازم بود. هیچ چیز شگفت‌آوری در این مطلب نیست که این دانش هم از نیازهای بشری به وجود آمده باشد[۱]. هر دانشی که به وجود می‌آید از حالت نارسایی به طرف کمال می‌رود. نطفهٔ این دانش از راه درک احساسی به وجود می‌آید و به تدریج به موضوعی که قابل بررسی است تبدیل می‌شود و سپس در آخر کار، به مطلبی که می‌تواند در ذهن مجسم شود، تبدیل می‌گردد».

البته اندازه‌گیری زمین، تنها انگیزهٔ مردمان قدیم برای به وجودآوردن هندسه نبوده است. دربارهٔ ویژگی‌های مسأله‌هایی که برای مصری‌ها و بابلی‌های قدیم مطرح بود و چگونگی حل این مسأله‌ها، می‌توان از روی متن‌هایی که تاکنون کشف شده است داوری کرد. یکی از کهن‌ترین متن‌های مصری که به ما رسیده است مربوط به بیش از ۱۷۰۰ سال پیش از میلاد است. این متن راهنمایی برای «منشی‌ها» (مباشران درباری) است و به وسیلهٔ **آحمس** نامی نوشته شده است. در آنجا یک سلسله مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ گنجایش ظرف‌ها و انبارها، مساحت قطعه‌های زمین، اندازه‌گیریِ زمین و غیره جمع‌آوری شده است.

مصری‌ها و بابِلی‌ها می‌توانستند اندازهٔ مساحت‌ها و حجم‌های ساده را پیدا کنند، نسبت

---

۱. گفت‌گو بر سر مرزهای قطعه‌های زمین است، و نیز یادآور می‌شویم که کلمهٔ «Géométrie» (هندسه) به معنی اندازه‌گیری زمین است (در زبان یونان باستان «gé» به معنی زمین و «metron» به معنی اندازه‌گیری است).

محیط و قطر دایره را با دقت خوبی می‌دانستند و به احتمالی حتی می‌توانستند مساحت کره را به دست آورند. سخن کوتاه: آن‌ها مجموعهٔ زیادی از آگاهی‌های هندسی در اختیار داشتند، ولی تا آن‌جا که می‌توان داوری کرد هندسهٔ آن‌ها هنوز به عنوان یک دانش نظری که شامل قضیه‌ها و برهان‌های مربوط به آن باشد نبود. هندسهٔ این دوره هم، مانند حساب، عبارت از مجموعهٔ قانونی‌هایی بود که از راه آزمایش به دست آمده بود. علاوه بر این، هندسه به طور کلی، از علم حساب جدا نبود: مسأله‌های هندسه، از نظر محاسبه، در عین حال مسأله‌های حساب هم بودند.

در سدهٔ هفتم پیش از میلاد، هندسه از مصر به یونان رفت و در آن‌جا به وسیلهٔ فیلسوفان بزرگ یعنی ***طالس*** و ***دموکریت*** و دیگران، پیشرفت بیشتری پیدا کرد. پیروان ***فیثاغورس***، پایه‌گذار مکتب ایده‌آلیستی فلسفی ـ مذهبی هم، سپردهٔ با ارزشی در هندسه به جا گذاشتند.

پیشرفت هندسه در این جهت انجام می‌گرفت که مطلب‌های تازه‌ای جمع‌آوری و بستگی آن‌ها با یکدیگر روشن شود. به تدریج این بستگی‌ها تبدیل به بیرون‌آوردن منطقی بعضی از مطلب‌های هندسی، از بعضی دیگر شد و از این راه نخست خود مفهوم قضیهٔ هندسی و برهان آن به وجود آمد و بعد حکم‌هایی که می‌توان سایر مطلب‌ها را از آن‌ها نتیجه گرفت، یعنی اصل موضوع‌ها (آکسیوم‌ها) را روشن کرد.

به این ترتیب، هندسه به تدریج به یک نظریهٔ ریاضی تبدیل شد.

مطلب‌های منظم هندسه، در سدهٔ پنجم پیش از میلاد وجود داشته است، ولی به ظاهر به این علت که کتاب ***«مقدمات اقلیدس»*** (سدهٔ سوم پیش از میلاد) جانشین همهٔ آن‌ها شد، چیزی از آن‌ها به ما نرسیده است. در اثر اقلیدس، هندسه با چنان روش دقیقی داده شده است که تا زمان ***لباچوسکی***، یعنی در جریان بیش از دو هزار سال، هیچ چیز اساسی تازه‌ای نتوانست به آن اضافه شود. کتاب درسی مشهور ***کیسلیف***، همچون همهٔ کتاب‌های درسی مشابهش در همهٔ دنیا، در چاپ‌های قدیمی چیزی جز آن‌چه اقلیدس گفته بود، منتهی قابل فهم‌تر، ارائه نمی‌داد. به دشواری می‌توان کتابی به دوام ***«مقدمات اقلیدس»*** پیدا کرد، و این نشانه‌ای از نیروی آفرینش و هوش سرشار یونانی است. البته، ریاضیات به جلو می‌رفت و درک ما از اصل‌های هندسی عمیق‌تر می‌شد، ولی با وجود این، «مقدمات» اقلیدس باز هم از بسیاری جهت‌ها، به عنوان کتاب نمونه‌ای از ریاضیات خالص، به شمار می‌رفت. در «مقدمات» کلیهٔ پیشرفت‌های پیشین جمع‌بندی شده است. اقلیدس ریاضیات زمان خودش را به عنوان یک دانش نظری (تئوریک) مستقل، یعنی همان چیزی که امروز هم از آن فهمیده

می‌شود، تلقی می‌کرد.

۲. همان نتیجه‌هایی را که از تاریخ حساب به دست آوردیم از تاریخ هندسه هم می‌توان به دست آورد. می‌بینیم که هندسه از عمل ناشی‌شده و در دوره‌ای طولانی به صورت یک نظریهٔ ریاضی درآمده است.

هندسه با «جسم‌ها» و شکل‌های هندسی سروکار دارد و رابطه‌های کمیتی و وضع آن‌ها را نسبت به هم بررسی می‌کند. ولی جسم هندسی چیزی جز همان جسم حقیقی نیست که تنها از دیدگاه شکلِ[1] فضایی آن بررسی می‌شود. در حقیقت، کار هندسه این است که این «شکل» را از سایر ویژگی‌های جسم، از قبیل وزن مخصوص، رنگ، وزن و غیره جدا کند («شکل هندسی» مفهومی گسترده‌تر و همه‌گیرتر از «شکل فضایی» است؛ شکل هندسی می‌تواند بدون امتداد فضایی باشد. از جمله، سطح تنها دوبعد و خط یک‌بعد دارد و نقطه دارای بعدی نیست. نقطه مفهوم انتزاعی انتهای خط، مفهوم انتزاعی مکان است و این انتزاع تا آن‌جا است که نقطه شامل هیچ جزئی نمی‌شود. همچنین باید گفت که همهٔ این مفهوم‌ها را اقلیدس هم معین کرده بود).

بنابراین موضوع هندسه عبارت است از شکل‌های فضایی جسم‌های حقیقی و رابطه‌های آن‌ها، به نحوی که این رابطه‌ها از همهٔ ویژگی‌های دیگر جسم‌های حقیقی جدا و به زبان دیگر به صورت «خالص» باشد. به ویژه همین مرز تجرید است که هندسه را از سایر دانش‌هایی که شکل‌های فضایی و رابطه‌های جسم‌ها را بررسی می‌کنند جدا می‌کند: اخترشناسی، رابطه‌ها و وضع جاگیری نسبی جسم‌ها و به ویژه جسم‌های آسمانی را بررسی می‌کند؛ زمین‌شناسی، شکل زمین و بلورشناسی، شکل بلورها را بررسی می‌کند و غیره؛ درتمام این حالت‌ها، شکل و وضع جاگیری نسبی جسم‌های مشخص با توجه به سایر ویژگی‌های آن‌ها بررسی می‌شود.

انتزاعی بودن هندسه مستلزم ذهنی‌بودن روش آن است. با خط راستی که پهنایی ندارد و با «شکل‌های مطلق مجرد هندسی» نمی‌توان آزمایش کرد و تنها این راه می‌ماند که با کمک برهان، نتیجه‌ای را از نتیجه‌های دیگر به دست آوریم. بنابراین یک قضیهٔ هندسی باید به‌کمک برهان به اثبات برسد وگرنه متعلق به هندسه و به خصوص مربوط به «شکل مطلق و مجرد هندسی» نخواهد بود.

---

[1] شکلِ جسم، همیشه همراه با اندازه‌های آن هم هست.

روشنی مفهوم‌های بنیانی هندسه، برداشت برهان‌ها و اطمینان به نتیجه‌گیری‌های آن، دارای همان سرچشمه و ریشه‌ای است که دربارهٔ حساب گفتیم. ویژگی‌های مفهوم‌های هندسی هم، مانند خود آن مفهوم‌ها، از طبیعتی که بشر را احاطه کرده است جدا شده است. مردم بارها خط راست را رسم کرده‌اند تا این‌که این مطلب را که «از هر دو نقطه می‌توان خط راستی عبور داد» به عنوان یک اصل، پذیرفته شده است. میلیاردها بار چیزهای مختلف را جابه جا کرده‌اند و پهلوی هم گذاشته‌اند تا این‌که با تعمیم این عمل در هندسه، تصور روی هم قرارگرفتن شکل‌های هندسی را به وجود آورده و سپس این تصور را برای اثبات قضیه‌ها به‌کار برده‌اند (آن طور که دربارهٔ قضیه‌های مشهور برابری مثلث‌ها به‌کار می‌رود).

سرانجام، یکی دیگر از ویژگی‌های هندسه، عمومی‌بودن آن است: حجم کره برابر است با $\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$ و این رابطه به این مربوط نیست که کرهٔ ما یک ظرف باشد، یا کره‌ای که از فولاد ساخته شده است، یا کره‌ای آسمانی و یا قطره‌ای آب و غیره. از آن‌جا که هر جسم واقعی، دارای شکل، اندازه و موقعیت کم و بیش مشخصی نسبت به سایر جسم‌ها است، هندسه توانست آن چیزی را که برای همهٔ جسم‌ها ***عمومی است*** مشخص کند. به همین علت، طبیعی است که هندسه هم کم و بیش به همان گستردگی حساب، کاربرد عملی داشته باشد: کارگری که جزءها را اندازه می‌گیرد و یا نقشه‌ای را می‌خواند، توپچی که فاصلهٔ خود تا هدف را معین می‌کند، کشاورزی که سطح زمین زیر کشت را اندازه می‌گیرد، معماری که حجم کارهای ساختمانی را برآورد می‌کند، همهٔ این‌ها از مقدمه‌های هندسه استفاده می‌کنند. راهنمای کشتی یا هواپیما، اخترشناس، زمین‌شناس، مهندس و فیزیک‌دان به نتیجه‌های دقیق هندسه نیاز دارند.

به عنوان نمونهٔ برجسته‌ای از حل انتزاعی و هندسی مسأله‌های مهم دانش‌های طبیعی، می‌توان از بررسی‌های بلورشناس و هندسه‌دان مشهور *فِدورف* نام برد. مسألهٔ یافتن همهٔ گونه‌های ممکن تقارن بلورها، که *فِدورف* پیش روی خود طرح کرده بود، یکی از مسأله‌های اساسی در بلورشناسی نظری است. *فِدورف* برای حل این مسأله، تمام ویژگی‌های فیزیکی بلورها را کنار گذاشت و آن‌ها را تنها به عنوان دستگاه منظمی از جسم‌های هندسی (به جای دستگاه اتم‌های مشخص)، بررسی کرد. بنابراین مطلب به این‌جا رسید که شکل‌های ممکن تقارنی که دستگاه جسم‌های هندسی می‌تواند داشته باشد کدام است؟ و این مسألهٔ خالص

هندسی را، **فدورف** تا به آخر حل کرد و همهٔ گونه‌های تقارن را پیدا کرد. **مسأله ۲۳۰ جواب داشت. همچنین حل این مسأله سپردهٔ بزرگی در هندسه باقی گذاشت و سرآغازی برای** بسیاری از بررسی‌های هندسی به شمار می‌رود.

در این نمونه نیز (مانند نمونه‌های مشابهش در هندسه)، نیروی محرک اساسی هندسی به چشم می‌خورد و آن عبارت است از: رابطهٔ متقابل عمل و تفکر انتزاعی. از مشاهدهٔ بلورها، مسألهٔ تقارن آن‌ها مطرح شد و از آن، به طور انتزاعی، نظریهٔ ریاضی تازه‌ای به نام ***نظریهٔ دستگاه‌های منظم***، و یا آن طور که مشهور است ***«گروه‌های فدورف»*** به وجود آمد (در بخش دهم راجع به این مطلب صحبت خواهد شد). سپس خود این نظریه نه تنها مشاهده‌های مربوط به بلورها را به طور درخشانی تأیید کرد بلکه به عنوان یک راهنمای کلی، به پیشرفت بلورشناسی خدمت کرد و هم بررسی‌های تجربی و هم بررسی‌های خالص ریاضی تازه‌ای پدید آورد.

۴. حساب و هندسه

۱. تا این‌جا حساب و هندسه را جدا از یکدیگر بررسی کردیم. بستگی متقابل آن‌ها و به طور کلی بستگی بین نظریه‌های ریاضی از دید ما دور بود. حال آن که این بستگی اهمیت بسیار زیادی دارد. تأثیر متقابل نظریه‌هاست که ریاضیات را به جلو می‌کشاند و غنای رابطه‌هایی از واقعیت‌ها را که به وسیلهٔ این نظریه‌ها منعکس شده است ظاهر می‌سازد.

حساب و هندسه نه تنها از یکدیگر استفاده می‌کنند بلکه در عین حال سرچشمهٔ اندیشه‌ها، روش‌ها و نظریه‌های عمومی بعدی هم به شمار می‌روند. در تحلیل نهایی، حساب و هندسه عبارت از دو ریشه‌ای هستند که ریاضیات بر پایهٔ آن‌ها قرار گرفته و رشد کرده است. تأثیر متقابل این دو دانش از همان زمانی که نطفهٔ هر یک از آن‌ها بسته می‌شد وجود داشت. همان اندازه‌گیری سادهٔ طول هم ترکیبی از حساب و هندسه است. زمانی که طول چیزی را اندازه می‌گیریم، واحد طول را روی آن ***جدا می‌کنیم*** و ***حساب می‌کنیم*** که چند مرتبه می‌توانیم این عمل را انجام دهیم. عمل اول (جداکردن واحد) یک عمل هندسی و عمل دوم (محاسبه) یک عمل مربوط به حساب است. هر کسی هم که طول جاده‌ای را با گام‌های خود می‌شمارد، این دو عمل را با هم ترکیب می‌کند.

به طور کلی، اندازه‌گیری هر کمیت، شمار را با عمل ویژه‌ای که مربوط به نوع این کمیت است ترکیب می‌کند. کافی است اندازه‌گیری آب‌گونه‌ها را به وسیلهٔ پیمانه و یا اندازه‌گیری فاصلهٔ زمانی را با شمردن نوسان‌های آونگ، به یاد بیاوریم.

ولی ضمن اندازه‌گیری کشف می‌شود که در حالت کلی، واحد انتخابی به تعداد درست در کمیتی که اندازه می‌گیریم نمی‌گنجد و با شمردن سادهٔ واحد نمی‌توان کار اندازه‌گیری را پایان داد. در آن صورت لازم است که واحد را تقسیم کنیم تا بتوانیم کمیت را به وسیلهٔ بخش‌هایی از واحد، دقیق‌تر بیان کنیم. در این‌جا دیگر کمیت با عدد کسری بیان می‌شود، نه با عدد درست. آن طور که از تحلیل مدرک‌های تاریخی و غیر آن می‌توان درک کرد، در واقع هم عددهای کسری به همین ترتیب به وجود آمده است: این عددها از تقسیم و مقایسهٔ کمیت‌ها، یعنی ضمن اندازه‌گیری، به وجود آمده است. نخستین کمیت‌هایی که بشر اندازه می‌گرفت عبارت از کمیت‌های هندسی بود، مانند طول، سطح زیر کشت، حجم آب‌گونه‌ها و جسم‌های دانه‌ای. بنابراین، در به وجود آمدن عددهای کسری، تأثیر متقابل حساب و هندسه دیده می‌شود. این تأثیر متقابل، منجر به پیدایش مفهوم مهم و تازهٔ کسرها و گسترش مفهوم عدد، از عددهای درست به عددهای کسری (و یا آن طور که ریاضی‌دانان می‌گویند، عددهای گویا، یعنی عددهایی که به وسیلهٔ نسبت عددهای درست بیان می‌شوند) شد. عددهای کسری از تقسیم عددهای درست به وجود نیامد و نمی‌توانست به وجود بیاید، زیرا با عددهای درست چیزهای درست را می‌شمارند: جمله‌هایی از قبیل سه آدم، سه تیرکمان و غیره همه قابل فهم است، ولی دوسوم آدم و حتی یک‌سوم تیرکمان قابل فهم نیست، با سه تا «یک‌سوم تیرکمان» نمی‌توان گوزنی را شکار کرد، برای این کار یک تیرکمان **درست** لازم است.

۲. در جریان پیشرفت مفهوم عدد، که حساب و هندسه هر دو در آن شرکت داشتند، پیدایش عددهای کسری نخستین گام به شمار می‌رود. گام بعدی، کشف پاره‌خط‌های گنگ بود. یادآوری می‌کنیم، پاره‌خط‌ها را زمانی نسبت به هم گنگ گویند که پاره‌خطی وجود نداشته باشد که در هر دوی آن‌ها به تعداد درستی بگنجد (یعنی وقتی که مقیاس مشترک نداشته باشند و یا به زبان دیگر، نسبت بین آن‌ها به وسیلهٔ کسرهای معمولی، یعنی نسبت بین عددهای درست، بیان نشود).

در آغاز، مردم به این فکر نمی‌افتادند که آیا هر طولی را می‌توان با کسری بیان کرد یا نه؟ اگر ضمن تقسیم، یا اندازه‌گیری، بخش‌های خیلی کوچکی پیدا می‌شد آن‌ها را به سادگی

حذف می‌کردند: در عمل، دقیق‌کردن بی‌حدِ اندازه‌گیری بی‌معنا بود. **دموکریت** فرض کرد که شکل‌های هندسی از اتم‌ها تشکیل شده است. طبق نظر دموکریت، پاره‌خط‌ها از یک رشته اتم‌ها تشکیل شده‌اند و بنابراین نسبت پاره‌خط‌ها عبارت است از نسبت عدهٔ اتم‌هایی که در آن‌هاست، یعنی این نسبت‌ها می‌تواند به وسیلهٔ کسر بیان شود. این فرض که به نظر ما به اندازهٔ کافی شگفت‌انگیز است، برای تعیین مساحت‌ها و حجم‌ها، خیلی ثمربخش از آب درآمد. مساحت به صورت مجموع رشته‌هایی از اتم‌ها و حجم به صورت مجموع لایه‌هایی از اتم‌ها، در نظر گرفته می‌شد. از همین راه بود که **دموکریت** مثلاً حجم مخروط را پیدا کرد. خواننده‌ای که با محاسبه‌های انتگرالی آشنا باشد به سادگی متوجه می‌شود که در این برداشت، نطفهٔ تعیین مساحت‌ها و حجم‌ها به روش محاسبهٔ انتگرالی وجود دارد (علاوه براین زمانی که به‌طور ذهنی به دورهٔ **دموکریت** برگردیم باید کوشش کنیم خود را از تمام اندیشه‌هایی که امروز، در اثر پیشرفت ریاضی، برای ما عادی و معمولی شده است آزاد کنیم. در زمان **دموکریت** هنوز شکل‌های هندسی به اندازهٔ امروز، از چیزهای واقعی جدا نبود و بنابراین طبیعی بود که فرض مربوط به این‌که جسم‌های واقعی از اتم‌ها تشکیل شده است، **دموکریت** را به این مطلب منتقل کند که شکل‌های هندسی هم از اتم‌ها تشکیل شده است).

ولی این فرض که پاره‌خط‌ها از اتم‌ها تشکیل شده است با قضیهٔ ***فیثاغورس*** نمی‌سازد. زیرا نتیجهٔ مستقیم این قضیه وجود پاره خط‌های راستی است که نسبت به هم گنگ‌اند. برای نمونهٔ قطر مربع نسبت به ضلع آن گنگ است، یعنی نسبت آن‌ها را نمی‌توان به وسیلهٔ نسبت عددهای درست بیان کرد.

ثابت می‌کنیم که ضلع و قطر مربع در واقع نسبت به هم گنگ‌اند: اگر ضلع مربعی برابر a و قطر آن برابر b باشد، طبق قضیهٔ فیثاغورس خواهیم داشت: $b^۲ = a^۲ + a^۲ = ۲a^۲$ و بنابراین $(\frac{b}{a})^۲ = ۲$. ولی، کسری وجود ندارد که مجذور آن برابر ۲ باشد و ما این مطلب را از روش برهان خلف ثابت می‌کنیم. فرض کنیم که p و q عددهای درستی باشند که در رابطهٔ $(\frac{p}{q})^۲ = ۲$ صدق کنند، و نیز می‌توانیم فرض کنیم که p و q دارای بخشیاب مشترکی نباشند (یعنی نسبت به هم اول باشند)، زیرا در غیر این صورت می‌توان کسر را ساده کرد. اما اگر $(\frac{p}{q})^۲ = ۲$ باشد، در این صورت $p^۲ = ۲q^۲$ می‌شود و بنابراین $p^۲$ باید بر ۲ بخش‌پذیر باشد و از آن‌جا که $p^۲$ مجذور یک عدد درست است، باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد. بنابراین، خواهیم داشت: $p^۲ = ۴q_۱^۲$ و از آن‌جا $۴q_۱^۲ = ۲q^۲$ یا $q^۲ = ۲q_۱^۲$. از اینجا نتیجه می‌شود که q هم باید بر ۲ بخش‌پذیر باشد، و این با شرطی که برای p و q داریم، نمی‌سازد (گفتیم که p و q بخشیاب

مشترک ندارند). این ناسازگاری ثابت می‌کند که نسبت $\frac{b}{a}$ نمی‌تواند به وسیلهٔ عددی گویا بیان شود، یعنی قطر و ضلع مربع نسبت به هم گنگ‌اند.

این کشف، تأثیر خیلی زیادی روی دانشمندان یونانی گذاشت. اکنون، زمانی که ما دیگر به عددهای گنگ عادت کرده‌ایم و به سادگی با ریشهٔ دوم و غیرهٔ عددها عمل می‌کنیم، وجود پاره‌خط‌هایی که نسبت به هم گنگ باشند ما را ناراحت نمی‌کند. ولی در سدهٔ پنجم پیش از میلاد، برای دانشمندان یونانی، کشف این‌گونه پاره‌خط‌ها خیلی ناراحت‌کننده بود. آن‌ها مفهوم عددهای گنگ را نمی‌دانستند، نشانه‌ای به شکل $\sqrt{۲}$ نداشتند و بنابراین نتیجه‌ای که به دست آمده بود برای آن‌ها به این معنی بود که نسبت قطر و ضلع مربع را نمی‌توان به وسیلهٔ هیچ عددی نشان داد.

برای یونانی‌ها در وجود پاره‌خط‌های گنگ، رازی نهفته بود و این راز مربوط به پیوستگی بود: یکی از بیان‌های تضاد دیالکتیکی، که مربوط به پیوستگی و حرکت است. بحث دربارهٔ این تضاد، فیلسوفان مشهور یونان را به خود مشغول داشت که در بین آن‌ها معماهای *زِنون الئایی* شهرت خاصی دارد.

یونانی‌ها نظریهٔ نسبت پاره‌خط‌ها (و به طور کلی، هر کمیتی) را با توجه به وجود پاره‌خط‌هایی که نسبت به هم گنگ‌اند مطرح کردند[۱]. این نظریه در کتاب «مقدمات» اقلیدس شرح داده شده است. و اکنون هم به صورت ساده شده‌اش در دورهٔ درسی کتاب‌های هندسه شرح داده می‌شود. اما توجه به این مطلب که نسبت یک پاره‌خط به دیگری (که به عنوان واحد برگزیده شده است)، یعنی به طور ساده طول پاره‌خط، می‌تواند مثل یک عدد بررسی شود (و به این ترتیب، خود مفهوم عدد هم، کلی‌تر می‌شد)، برای یونانی‌ها نتوانست به وجود آید و مفهومی به نام عدد گنگ برای آنها به وجود نیامد[۲]. این مطلب، بعدها و

---

۱. به وجودآمدن این نظریه، به *اودوکسوس*، دانشمند یونانی که در سدهٔ چهارم پیش از میلاد می‌زیست منسوب است.

۲. از آن‌جا که اندازه‌گیری هر مقداری تابع حساب نبود و بخشی از هندسه شمرده می‌شد، هندسه در یونان باستان، ریاضیات را به زیر پر و بال خود قرار داده بود و مسأله‌هایی از قبیل حل معادله‌های درجه دوم را که ما امروز در جبر مطرح می‌کنیم، جزو هندسه می‌دانستند و به کمک هندسه حل می‌کردند. کتاب «مقدمات» اقلیدس شامل تعداد زیادی از این‌گونه مسأله‌ها است و به ظاهر «مقدمات» برای هم‌دوره‌هایش، آن طور که ما می‌فهمیم، تنها مربوط به هندسه نبود، بلکه خلاصه‌ای از بنیان‌های ریاضیات، به طور کلی بود. این چیرگی هندسه، تا زمان دکارت ادامه داشت، ولی دکارت برعکس، هندسه را تابع جبر کرد. اثرهای این چیرگی هنوز هم در نام‌هایی از قبیل «مربع» و «مکعب» که برای توان دوم و توان سوم به کار می‌رود، باقی‌مانده است: «مکعب a» یعنی مکعبی با ضلع a.

به وسیلهٔ ریاضی‌دانان خاورزمین مطرح شد و به طور کلی تعریف دقیق ریاضی عدد حقیقی (تعریفی که به طور مستقیم به هندسه متکی نباشد)، در این اواخر و در سال‌های ۷۰ سدهٔ گذشته داده شد[1].

یک چنین فاصلهٔ زمانی طولانی برای درک نظریهٔ نسبت، نشان می‌دهد که مفهوم‌های انتزاعی با چه دشواری‌هایی به وجود می‌آید و چقدر طول می‌کشد تا به صورتی دقیق منظم شود.

۳. **نیوتن**، ضمن مشخص‌کردن مفهوم عدد حقیقی، در کتاب خود به نام «حساب عمومی» نوشت: «عدد مجموعه‌ای از واحدها نیست، بلکه عدد نسبت انتزاعی یک کمیت به‌کمیت دیگری است که به عنوان واحد برگزیده شده باشد». این عدد (نسبت) می‌تواند درست، گویا یا گنگ (اگر کمیت مفروض نسبت به واحد انتخابی گنگ باشد) باشد.

در نتیجه، عدد حقیقی طبق مفهوم نخستین خود چیزی جز نسبت یک کمیت به‌کمیت دیگری، که به عنوان واحد برگزیده شده است، نیست و در حالت خاص عبارت است از نسبت پاره‌خط‌های راست، ولی می‌تواند نسبت مساحت‌ها، وزن‌ها و غیره هم باشد.

بنابراین، عدد حقیقی عبارت است از نسبت کمیت‌ها به طور کلی و این نسبت هم جدا از طبیعت و خود ویژگی‌های این کمیت‌ها بررسی می‌شود.

همان‌طور که عددهای درست **مجرد**، نه به طور جداگانه، بلکه در بستگی با یکدیگر و در دستگاه عددهای درست، موضوع ریاضیات را تشکیل می‌دهد، همان طور هم عددهای حقیقی **مجرد**، تنها زمانی دارای مضمون می‌شود و به عنوان موضوع ریاضیات از آب در می‌آید که در بستگی با یکدیگر، یعنی در دستگاه عددهای حقیقی در نظر گرفته شود.

در نظریهٔ عددهای حقیقی هم مثل حساب، پیش از همه، عمل‌هایی که روی عددها انجام می‌گیرد تعریف می‌شود؛ یعنی جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و همچنین نسبت بین عددها که به وسیلهٔ واژه‌هایی مثل «بزرگتر است» و «کوچکتر است» بیان می‌شود. این عمل‌ها و نسبت‌ها، بستگی‌های واقعی کمیت‌های مختلف را منعکس می‌کند؛ جمع، افزایش

---

۱. صحبت بر سر تعریف تشریحی نیست، بلکه منظور تعریفی است که به طور مستقیم پایهٔ برهان‌هایی است که ضمن بررسی ویژگی‌های عددهای حقیقی انجام می‌گیرد. طبیعی است این‌گونه تعریف‌ها خیلی دیرتر به وجود آمد، یعنی زمانی که پیشرفت ریاضیات و به ویژه آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها ایجاب کرد که تعریفی برای عددهای حقیقی که متناظر با «متغیر x» باشد، داده شود. این تعریف به شکل‌های مختلف در سال‌های ۷۰ سدهٔ گذشته به وسیلهٔ ریاضی‌دان‌های آلمانی *وایرشتراس*، ددکیند و *کانتور* داده شد.

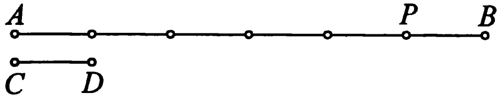
پاره‌خط‌ها را منعکس می‌کند. عمل روی عددهای حقیقی از سده‌های میانه و به وسیلهٔ ریاضی‌دانان خاورزمین آغاز شده است و بعدها به تدریج مهم‌ترین ویژگی دستگاه عددهای حقیقی، یعنی پیوسته‌بودن آن مطرح شد. دستگاه عددهای حقیقی عبارت است از شکل انتزاعی مقدارهایی که به طور پیوسته تغییر می‌کند و هر حالت ممکن را هم می‌تواند قبول کند.

بنابراین، موضوع حساب عددهای حقیقی (شبیه حساب عددهای درست)، عبارت است از رابطه‌های کمیتی واقعی مقدارهای پیوسته، که به صورت کلی و جدا از هر موضوع و چیز مشخص، بررسی می‌شود. در حقیقت، این‌که عدد حقیقی تا این اندازه کاربرد گسترده پیدا کرده است به همین علت است که مفهوم عدد حقیقی مشخص‌کنندهٔ یک کمیت پیوسته، به طور کلی است.

اندازهٔ کمیت‌های مختلف، خواه طول، وزن، شدت جریان برق، انرژی و خواه هر کمیت دیگری باشد به وسیلهٔ عدد بیان می‌شود و رابطه‌های بین این کمیت‌ها هم همان رابطه‌های بین مقدارهای عددی آن‌ها است.

برای این‌که مفهوم کلی عددهای حقیقی بتواند به پایه‌ای از نظریهٔ ریاضی تبدیل شود باید بیان ریاضی آن داده شود. این تعریف را به راه‌های مختلف می‌توان داد، ولی طبیعی‌تر از همه این است که جریان پیشرفت اندازه‌گیری کمیت‌ها را مبنا قرار دهیم (جریانی که سرچشمهٔ عملی تعمیم مفهوم عدد بود). ما دربارهٔ طول پاره‌خط‌های راست صحبت خواهیم کرد، ولی خواننده به سادگی متوجه می‌شود که دربارهٔ هر کمیت دلخواه دیگر هم به همین ترتیب می‌توان داوری کرد، به شرطی که فرض کنیم تقسیم آن کمیت تا بی‌نهایت ممکن باشد.

فرض کنیم می‌خواهیم پاره‌خط راست AB را به وسیلهٔ پاره‌خط راست CD (که به عنوان واحد انتخاب شده است) اندازه بگیریم (شکل ۱). روی پاره‌خط راست AB، و در مثل از نقطهٔ A، به اندازهٔ پاره‌خط راست CD جدا می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم؛ فرض کنیم که پاره‌خط راست CD به اندازه n مرتبه روی AB جا بگیرد. اگر بعد از این عمل، از پاره‌خط AB قطعه‌ای مانند PB باقی بماند، پاره‌خط CD را به ده بخش می‌کنیم و بقیهٔ AB را با این بخش‌های یک‌دهمی اندازه می‌گیریم. فرض کنیم که در این باقیمانده، n_1 قسمت یک‌دهمی جا بگیرد. اگر بعد از این عمل هم باقیمانده‌ای داشته باشیم، مقیاس خود را باز هم به ده بخش می‌کنیم، یعنی CD را به صد بخش می‌کنیم و این عمل را تکرار می‌کنیم. ممکن است



شکل ۱

جریان اندازه‌گیری به پایان برسد و ممکن هم هست که ادامه داشته باشد. ولی در هر حال در پاره‌خط راست AB به اندازهٔ $n_۰$ برابر پاره‌خط راست CD و $n_۱$ برابر یک‌دهم آن و $n_۲$ برابر یک‌صدم آن و غیره وجود دارد. به عبارت دیگر نسبت AB به CD را با دقت لازم تا یک‌دهم، یک‌صدم و غیره به دست خواهیم آورد. بنابراین، خود نسبت به وسیلهٔ یک کسر دهدهی با $n_۰$ عدد درست و $n_۱$ دهم و غیره نمایش داده می‌شود.

$$\frac{|AB|}{|CD|}=n_۰/n_۱n_۲n_۳\,...$$

این کسر می‌تواند بی‌پایان باشد و این نشانهٔ آن است که می‌توانیم اندازه‌گیری‌های کسر را تا هر مرزی که بخواهیم دقیق‌تر کنیم.

بنابراین، نسبت پاره‌خط‌ها (و کمیت‌ها به طور کلی)، به وسیلهٔ کسر دهدهی (که ممکن است به پایان برسد و یا بی‌انتها باشد) قابل بیان است، ولی در کسر دهدهی دیگر اثری از کمیت‌های مشخص نیست و یک نسبت مجرد، یعنی عدد حقیقی را، به دست می‌دهد. عدد حقیقی از نظر شکل ظاهریش ممکن است به صورت کسر دهدهی (که نامحدود و یا محدود است) معین شود[۱].

برای این‌که کار را به پایان برسانیم باید عمل‌های مربوط به‌کسرهای دهدهی (جمع و غیره) را هم مشخص کنیم و این به آن جهت است که عمل‌های مربوط به‌کسرهای دهدهی، متناظر با عمل‌هایی هستند که روی کمیت‌ها انجام می‌گیرد. برای نمونه برای جمع پاره‌خط‌ها، طول‌های آن‌ها روی هم گذاشته می‌شود، یعنی طول پاره‌خط $|AB| + |BC|$ برابر مجموع طول‌های $|AB|$ و $|BC|$ است. در تعیین عمل‌های مربوط به عددهای حقیقی، این اشکال وجود دارد که این عددها در حالت کلی به صورت کسرهای دهدهی نامحدود،

---

۱. در این‌جا کسرهایی را که دورهٔ تناوبی ۹ داشته باشند در نظر نمی‌گیریم، چنین کسرهایی طبق قانون مشهوری که از نمونهٔ ۱۴ر۰ = ... ۱۳۹۹۹۹ر۰ روشن است، هم‌ارز با کسرهایی هستند که دورهٔ تناوبی ۹ ندارند.

بیان می‌شود، در صورتی که قانون‌های معمولی، مربوط به عمل‌هایی است که روی کسرهای دهدهی محدود انجام می‌گیرد. با توجه به این مطلب، تعریف دقیق عمل‌هایی که دربارهٔ کسرهای نامحدود انجام می‌گیرد به این ترتیب داده می‌شود: فرض کنید می‌خواهیم دو عدد a و b را با هم جمع کنیم. کسرهای دهدهی مربوط را با تقریب دلخواه و در مثل تا یک ملیونیم تقریب برمی‌گزینیم و آن‌ها را روی هم می‌ریزیم. در این صورت مجموع $a+b$ را با تقریب مربوط به دست آورده‌ایم (تا دو ملیونیم تقریب، زیرا اشتباه‌های a و b با هم جمع می‌شوند) و بنابراین می‌توانیم مجموع دو عدد را با ***دقت دلخواه***، به دست آوریم و این به آن معناست که مجموع آن‌ها معین شده است، اگر چه در هر حال این مجموع، تنها با تقریب معینی مشخص می‌شود. باری، این مجموع، منظور ما را برآورده می‌کند زیرا هر یک از مقدارهای a و b هم با تقریب معینی اندازه گرفته می‌شود و مقدار دقیق آن که به صورت کسر دهدهی نامحدود تصور می‌شود، به این معنی است که می‌توانیم اندازهٔ کمیت را به طور پایان‌ناپذیری دقیق و دقیق‌تر کنیم.

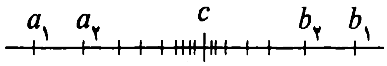
نسبت‌هایی را که با جمله‌های «بزرگتر است» و «کوچکتر است» بیان می‌شود، می‌توان از روی جمع تعریف کرد. $a>b$ است زمانی که عددی مانند c وجود داشته باشد، به نحوی که داشته باشیم $a=b+c$ (صحبت بر سر عددهای مثبت است).

پیوسته‌بودن دستگاه عددهای حقیقی، به این وسیله بیان می‌شود که اگر عددهای a_1، a_2، ... صعودی و عددهای b_1، b_2، ... نزولی باشند به طوری که همیشه عددهای دستهٔ دوم بزرگتر از عددهای دستهٔ اول باقی بماند، بین این دو دسته عدد، عددی مانند c وجود دارد.

اگر هر یک از نقطه‌های خط راستی را طبق قانون معینی متناظر با یکی از این عددها بدانیم، می‌توان همین مطلب را روی خط راست نمایش داد (شکل ۲). در این‌جا به خوبی دیده می‌شود که وجود عدد c و نقطهٔ متناظرش درست به معنای نبودن بریدگی و رخنه در دستگاه عددها، یعنی پیوستگی دستگاه عددها است.

۴. در نمونهٔ تأثیر متقابل حساب و هندسه می‌توان دید که پیشرفت ریاضیات ناشی از جریان برخورد تعداد زیادی عنصرهای متضاد با هم، مانند مشخص و مجرد، حالت خاص و حالت کلی، شکل و مضمون، محدود و نامحدود، پیوسته و ناپیوسته و غیره، که در درون آن به هم آمیخته‌اند، می‌باشد.

برای نمونه، عنصرهای متضاد مشخص و مجرد را دربارهٔ به‌وجودآمدن مفهوم عدد



شکل ۲

حقیقی دنبال کنیم. همان طور که دیدیم، عدد حقیقی جریان پیشرفت **دقیق** اندازه‌گیری، و یا به مفهوم دیگر، اندازه‌گیری بی‌اندازه دقیق کمیت‌ها را منعکس می‌کند و این به آن مناسبت است که در هندسه اندازه‌ها و شکل‌هایی که دقت ایده‌آلی دارند، بررسی می‌شود. در حالی که اندازه و شکل‌های واقعی چیزهای دور و برما، قابل تغییرند و بعضی نامشخصی‌ها دارند. در بالا دربارهٔ اندازه‌گیری ایده‌آلی پاره‌خط راست صحبت کردیم.

باری، شکل‌های هندسی دقیق، و اندازه‌گیری دقیق کمیت‌ها، مفهوم‌هایی انتزاعی هستند. شکلِ هیچ چیز مشخصی، به طور مطلق دقیق نیست، همان طور که هیچ کمیت مشخصی را نه تنها نمی‌توان به طور دقیق اندازه گرفت، بلکه اصولاً از مقداری که به طور مطلق دقیق باشد نمی‌توان سخن گفت. اگر بخواهیم طول یک خط‌کش را بیش از حد مقیاس یک اتم دقیق کنیم، مفهومی نخواهد داشت. همیشه اگر دقیق‌کردن کمیتی از حد معینی تجاوز کند، در کمیت تغییر کیفی به وجود می‌آید و مفهوم نخستین خود را به‌کلی از دست می‌دهد. فشار گاز را نمی‌توان بیش از نیروی ضربهٔ یک ملکول دقیق کرد، یا اگر بار الکتریکی تا حد بار یک الکترون دقیق شود، پیوسته بودنش از بین می‌رود و غیره. از آن‌جا که در طبیعت، چیزهایی که دارای شکل‌هایی با دقت ایده‌آلی باشند وجود ندارد، درک این مطلب را که نسبت قطر مربع به ضلع آن برابر $\sqrt{۲}$ است نه تنها نمی‌توان از راه اندازه‌گیری مستقیم به دست آورد، بلکه در واقع برای هیچ مربع مشخصی این مطلب مفهوم ندارد.

همان‌طور که دیدیم، این نتیجه که قطر و ضلع مربع نسبت به هم گنگ‌اند، از قضیهٔ فیثاغورس به دست می‌آید. این نتیجهٔ نظری، از پیشرفت فرض‌های تجربی به دست آمده است، یعنی نتیجهٔ به‌کار بردن منطق در حکم‌های هندسی است، حکم‌هایی که خود از راه آزمایش به دست آمده‌اند.

بنابراین، مفهوم پاره‌خط‌های گنگ، و از آن کلی‌تر، مفهوم عدد حقیقی، بازتاب ساده و مستقیمی از داده‌های تجربی نیست، بلکه از آن تجاوز می‌کند. علت این مطلب معلوم است: عدد حقیقی، هیچ کمیت مشخص مفروضی را منعکس نمی‌کند، بلکه کمیت را به طور کلی، کمیتی که از هر چیز مشخصی جدا شده است، منعکس می‌کند. به زبان دیگر، عدد حقیقی،

چیزی را که در همهٔ کمیت‌های منفرد و واقعی مشترک است، منعکس می‌کند. این چیز مشترک، به ویژه مربوط به این است که اندازهٔ یک کمیت را به طور کلی می‌توان دقیق کرد و اگر کمیت مشخصی در نظر نباشد، حد این دقت ممکن (که برای کمیت‌های مختلف، مختلف است و مربوط به طبیعت خاص هر کمیت است) نامحدود و از دسترس خارج می‌شود.

بنابراین، نظریهٔ *ریاضی* کمیت‌ها، که آن‌ها را جدا از خود ویژگی‌هایشان بررسی می‌کنیم، به ناچار این نیرو را به ما می‌دهد که کمیت‌ها را تا هر مرز دل‌خواه دقیق‌تر کنیم و از آن‌جا *به ناچار* به مفهوم عدد حقیقی می‌رسیم. همچنین ریاضیات، که تنها، ویژگی مشترک کمیت‌های مختلف را منعکس می‌کند، ویژگی هر حالت جداگانه را در نظر نمی‌گیرد، همان‌طور که نویسندهٔ «دفاتر فلسفی» یادآور می‌شود: «هر نظریهٔ کلی نمی‌تواند ویژگی‌های مربوط به یک‌یک حالت‌های خاص را بیان کند ... .»

ریاضیات، با گزینش خاصیت‌های عمومی و کلی، مفهوم‌های جداگانه و مشخص انتزاعی را، که خود به وجود آورده است بدون توجه به مرزهای واقعی کاربرد آن‌ها، بررسی می‌کند. این به ویژه، به این علت است که مرزهای کاربرد؛ به وجه‌های مشترک پدیده‌ها مربوط نیست، بلکه به ویژگی‌های مشخص پدیده‌های خاصی که بررسی می‌شوند، و به تغییر کیفی این پدیده‌ها، مربوط است. بنابراین زمانی که از ریاضیات استفاده می‌کنیم، باید دید آیا به‌کار بردن این و یا آن نظریه، معنی دارد یا نه؟ به این ترتیب بررسی یک شیء، به عنوان یک شیء پیوسته، و بیان آن به وسیلهٔ کمیت‌های پیوسته، تنها زمانی ممکن است که بتوان آن را از ساختمان اتمیش جدا کرد و این عمل هم تنها با شرط‌های معین و در حالت‌های خاصی ممکن است.

با وجود این، عددهای حقیقی، وسیلهٔ ممکن و مطمئن بررسی ریاضی کمیت‌ها و روندهای واقعی پیوسته می‌باشد. نظریه‌های مربوط به عددهای حقیقی، به وسیلهٔ عمل، یعنی با به‌کار بردن گسترده در فیزیک و صنعت و شیمی پایه‌گذاری شده است. بنابراین، عمل ثابت می‌کند که مفهوم عدد حقیقی، ویژگی‌های مشترک کمیت‌ها را به درستی منعکس می‌کند. اما این درستی، بی‌پایان و مطلق نیست. نظریهٔ عددهای حقیقی را نمی‌توان به عنوان یک نظریهٔ منجمد، مطلق و بدون تغییر بررسی کرد، یعنی نمی‌توان این نظریه را به طور انتزاعی و به‌کلی جدا از واقعیت گسترش داد. خود مفهوم عدد حقیقی هم، به پیشرفت خود ادامه می‌دهد و هنوز تا پایان مطلق خود، فاصلهٔ زیادی دارد.

۵. نقش نمونهٔ دیگری از عنصرهای متضاد، یعنی دو مفهوم پیوسته و ناپیوسته را هم می‌توان برمبنای پیشرفت مفهوم عدد پی‌گیری کرد. پیش از این دیدیم که کسرها از تقسیم کمیت‌های پیوسته به وجود آمده‌اند.

دربارهٔ تقسیم، یک مسألهٔ طنز گونه‌ای وجود دارد که در ضمن، آموزنده است: مادربزرگی سه سیب‌زمینی خرید و می‌خواست آن‌ها را به طور مساوی بین دو نوه‌اش بخش کند، چه باید می‌کرد؟ پاسخ چنین است: باید از آن‌ها پوره درست می‌کرد و سپس بین نوه‌هایش تقسیم می‌کرد.

باری این شوخی، واقعیتی را روشن می‌کند. چیزهای منفرد به آن جهت بخش‌ناپذیرند که چیز بخش‌شده، کم یا بیش همیشه، چیزی غیر از آن است که در اول بود. این مطلب در نمونه‌های «یک‌سوم آدم» و یا «یک‌سوم تیرکمان» که پیش از این یادآور شدیم، به روشنی دیده می‌شود. برعکس، کمیت‌ها یا چیزهای پیوسته و یکنواخت به سادگی بخش و جمع می‌شوند، بدون این‌که ماهیتشان را از دست بدهند. پوره یکی از نمونه‌های عالی این گونه چیزهای پیوسته و یکنواخت است که اگر چه بخش شده نیست، ولی در عمل می‌تواند به سادگی به هر تعداد سهم‌های کوچک دلخواه بخش شود. طول، سطح و حجم هم دارای همین ویژگی هستند. در مفهوم پیوسته‌بودن این مطلب هم نهفته است که اگر در واقع بخش نشده است ولی امکان بخش آن تا بی‌نهایت وجود دارد.

بنابراین ما با دو عنصر متضاد رو به رو هستیم: از یک سو چیزهای تنهای بخش نشدنی، و یا آن طور که مشهور است چیزهای ناپیوسته، و از سوی دیگر چیزهایی که بخش‌پذیر ولی بخش نشده و پیوسته‌اند. البته این دو عنصر متضاد، همیشه با هم و در کنار هم وجود دارد، زیرا نه چیزهایی که به طور مطلق بخش‌ناپذیر باشد وجود دارد و نه چیزهایی که به طور کامل پیوسته باشد؛ این دوگانگی هر چیزی نه تنها واقعیت دارد بلکه اغلب دربارهٔ یک چیز، این جنبه، و دربارهٔ چیز دیگر، جنبهٔ دیگر، نقش تعیین‌کننده‌ای پیدا می‌کند.

ریاضیات، با جداکردن شکل از محتوی، شکل را به پیوسته و ناپیوسته بخش می‌کند.

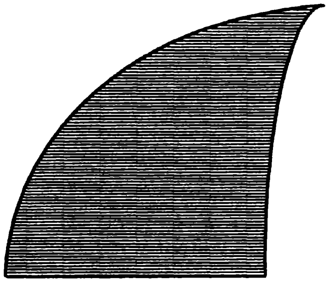
واحد، تجسم ریاضی چیزهای تنها و منفرد، مجموع واحدها تجسم ریاضی مجموعهٔ چیزهای تنها و منفرد است، و این، تجسم ناپیوستگی به صورت خالص و مطلق خود می‌باشد، ناپیوستگی که از ویژگی‌های دیگر جدا شده است. پیوستگی شکل‌های هندسی، و درحالت ساده‌تر، پیوستگی خط راست، تجسم ریاضی و در عین حال پایه و ریشهٔ مفهوم پیوستگی را به دست می‌دهد.

در برابر ما، دو نوع تضاد وجود دارد: پیوستگی و ناپیوستگی، و تجسم ریاضی و انتزاعی آن‌ها: عدد درست و امتداد هندسی. اندازه‌گیری عبارت از جمع این تضادهاست: کمیت‌های پیوسته به وسیلهٔ واحدهای ناپیوسته اندازه گرفته می‌شود. اما انجام این عمل با واحدهای بخش نشدنی ممکن نیست؛ زیرا برای اندازه‌گیری ناچاریم بخش‌های واحد اولیه را هم وارد عمل کنیم. به این ترتیب، عددهای کسری به وجود می‌آید. مفهوم عدد، به ویژه در نتیجهٔ اجتماع تضادهای نامبرده پیش می‌رود.

سپس، در درجهٔ بعدی انتزاع، مفهوم پاره‌خط‌های گنگ، و در نتیجه مفهوم عدد حقیقی، به عنوان تجسم انتزاعی اندازهٔ دقیق کمیت‌ها به وجود آمد. ولی این مفهوم یکباره پیدا نشد و راه دراز پیشرفت آن، از میان مبارزهٔ عنصرهای متضاد پیوستگی و ناپیوستگی عبور می‌کند.

همان طور که گفته شد، **دموکریت** فرض می‌کرد که شکل‌ها از اتم‌ها تشکیل شده است و به این وسیله، پیوسته را به ناپیوسته مربوط می‌کرد. ولی کشف پاره‌خط‌های گنگ باعث شد که از این فرض صرف‌نظر شود. پس از آن دیگر کمیت‌های پیوسته، از عنصرهای جداگانهٔ اتم‌ها یا نقطه‌ها تشکیل نشده بود، دیگر نمی‌شد این کمیت‌ها را به وسیلهٔ عددها بیان کرد، زیرا در آن زمان عددهای دیگری به جز عددهای درست و کسری نمی‌شناختند.

تضاد پیوستگی و ناپیوستگی، در سدهٔ هفدهم، زمانی که پایه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال (حسابان) گذاشته می‌شد، با نیروی تازه‌ای در ریاضیات ظاهر شد. این‌جا گفت‌گو بر سر مقدارهای بی‌نهایت کوچک بود. از دیدگاه بعضی‌ها، عنصرهای بی‌نهایت کوچک به عنوان ذره‌هایی از کمیت‌های پیوسته که «بخش‌نشدنی» است و در واقع هم بی‌نهایت کوچک است تصور می‌شد (مثل اتم‌های دموکریت). ولی در این‌جا، عدهٔ آن‌ها بی‌نهایت زیاد بود. محاسبهٔ مساحت و حجم (انتگراسیون)، به عنوان مجموع بی‌نهایت جزء بی‌نهایت کوچک، در نظر گرفته می‌شد. در مثل مساحت به عنوان «مجموع خط‌هایی که سطح از آن‌ها تشکیل شده است، فهمیده می‌شد (شکل ۳). به این ترتیب، پیوسته‌بودن دوباره به نحوی به ناپیوستگی منجر می‌شد، ولی به شکلی پیچیده‌تر و در سطحی بالاتر. ولی این نقطه‌نظر، قانع‌کننده نبود و به عنوان نظر مخالف آن، از همان دورهٔ نیوتن پایه‌های مربوط به متغیرهای **پیوسته** و درک بی‌نهایت کوچک‌ها، به عنوان کمیت‌های **متغیری** که نزولی است و بنابراین می‌تواند به هر اندازه که بخواهیم کوچک شود، گذاشته شد. این درک، در نیمهٔ نخست سدهٔ نوزدهم (زمانی که نظریهٔ دقیق حد به وجود آمد) عمیق‌تر شد. دیگر پاره‌خط‌ها از نقطه‌ها و یا از عنصرهای «بخش‌ناپذیر» تشکیل نمی‌شد، بلکه به عنوان یک امتداد، به عنوان یک محیط



شکل ۳

پیوسته، یعنی جایی که تنها می‌توان نقطه‌های منفرد و مقدارهای مشخص کمیت متغیر را روی آن معین کرد فهمیده می‌شد. ریاضی‌دانان هم دربارهٔ «امتداد» همین نظر را داشتند. در اجتماع پیوستگی و ناپیوستگی، دوباره پیوستگی چیره شد.

باری، پیشرفت آنالیز ایجاب می‌کرد که نظریهٔ کمیت‌ها دقیق‌تر شود، و پیش از همه تعریف کلی عدد حقیقی، به عنوان مقدار دل‌خواه یک کمیت متغیر، داده شود. سپس در سال‌های ۷۰ سدهٔ نوزدهم، نظریهٔ عددهای حقیقی به وجود آمد که پاره‌خط‌ها را همچون مجموعه‌ای از نقطه‌ها و متناظر با فاصله‌های تغییر یک متغیر، و به عنوان مجموعه‌ای از عددهای حقیقی، معرفی می‌کرد. دوباره پیوستگی، از نقطه‌های تنهای ناپیوسته تشکیل می‌شد و ویژگی پیوسته‌بودن، در ساختمان مجموعه‌ای که از نقطه‌ها تشکیل شده است، بیان می‌شد. این نظریه، منجر به موفقیت‌های بزرگی در ریاضیات شد و به نظریه‌ای مسلط و حاکم تبدیل شد. با وجود این، در این نظریه هم دشواری‌های زیادی وجود داشت و همین دشواری‌ها باعث شد که کوشش‌هایی در جهت برگشت به‌گونهٔ تازه‌تری از پیوستگی خالص انجام گیرد. همچنین راه‌های دیگری هم برای معرفی پاره‌خط راست، به عنوان مجموعهٔ نقطه‌ها، پیش‌بینی می‌شود و نقطه‌نظرهای تازه‌ای دربارهٔ مفهوم عدد، متغیر و تابع به وجود می‌آید. پیشرفت نظریه، همچنان ادامه دارد و باید منتظر گام‌های بعدی آن بود.

۶. تأثیر متقابل حساب و هندسه تنها دربارهٔ به وجود آمدن مفهوم «عدد حقیقی» نقش خود را بازی نکرد. همین تأثیر متقابل هندسه و حساب، و یا دقیق‌تر بگوییم، هندسه و جبر بود که موجب تثبیت مفهوم عددهای منفی و مختلط (یعنی عددی به شکل $a+b\sqrt{-1}$) در ریاضیات شد. عددهای منفی، به وسیلهٔ نقطه‌هایی بیان می‌شود که در سمت چپ نقطه‌ای که متناظر با صفر است واقع باشد. عددهای مختلط هم، به وسیلهٔ نقطه‌های واقع بر صفحه

بیان می‌شود و به ویژه این نمایش هندسی، موقعیت عدد موهومی را، که تا آن زمان نامفهوم باقی‌مانده بود، تحکیم کرد.

مفهوم کمیت، پیشرفت بیشتری پیدا کرد، از جمله کمیت‌های بُرداری که پاره‌خط‌های جهت‌دار را بیان می‌کرد و کمیت‌های باز هم کلی‌تری (مثل تانسورها) به وجود آمد که در همهٔ این حالت‌ها، دوباره جبر با هندسه یکی می‌شود.

یکی‌شدن نظریه‌های مختلف ریاضی، همیشه نقشی قاطع و گاه تعیین‌کننده داشته است و هنوز هم دارد. ما این مطلب را در نمونه‌های به‌وجود آمدن هندسهٔ تحلیلی، حساب دیفرانسیل و انتگرال، نظریهٔ تابع‌های متغیر و نظریهٔ تازه‌ای که آنالیز تابعی (فونکسیونل) نامیده می‌شود و سایر نظریه‌ها، خواهیم دید. در خود نظریهٔ عددها، یعنی در بررسی عددهای درست هم روشهای مربوط به پیوستگی با موفقیت زیادی به‌کار می‌رود: آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها و آنالیز هندسی که فصل‌های مفصلی مانند: «نظریهٔ تحلیلی عددها» و «هندسهٔ عددها» را به وجود آورد.

از بعضی جنبه‌ها، می‌توان درهم آمیختگی مفهوم‌هایی را که از حساب و هندسه ریشه گرفته است، یعنی مفهوم‌های کلی پیوستگی و عمل‌های جبری را (به عنوان تعمیم عمل‌های حساب)، در پایه‌های ریاضی مشاهده کرد. اما در این‌جا نمی‌توانیم دربارهٔ این نظریه‌های پیچیده صحبت کنیم. هدف ما در این بخش این است که دست کم تصوری کلی دربارهٔ تأثیر متقابل مفهوم‌ها و اجتماع و مبارزهٔ ضدین در ریاضیات، به دست دهیم و در این‌جا نمونهٔ تأثیر متقابل حساب و هندسه را در نظر گرفته‌ایم و آن را هم در نمونهٔ پیشرفت مفهوم عدد، مطالعه و بررسی کردیم.

۵. دورهٔ ریاضیات مقدماتی

۱. پیشرفت ریاضیات به این‌جا نمی‌رسد که قضیه‌های تازه‌ای روی‌هم انباشته شود، بلکه این پیشرفت همراه با تغییر کیفی ریاضیات است. ولی این تغییر کیفی از راه شکست و نابودی نظریه‌های موجود به دست نمی‌آید بلکه از راه عمیق‌کردن و تعمیم نظریه‌های موجود و از راه به‌وجود آمدن نظریه‌های تعمیم‌دهندهٔ تازه (که بر پایهٔ پیشرفت‌های قبلی تدارک دیده شده است) صورت می‌گیرد.

با یک نظر کلی در تاریخ ریاضی، می‌توان چهار دورهٔ اساسی که از جنبه‌های کیفی با هم اختلاف دارد تشخیص داد. البته مرزبندی دقیق این دوره‌ها ممکن نیست، زیرا مرزهای اساسی هر یک از آن‌ها کم و بیش به تدریج به وجود آمده است، ولی اختلاف این دوره‌ها و عبور از یک دوره به دورهٔ دیگر به خوبی مشخص است.

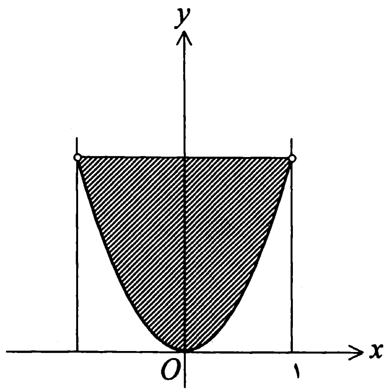
نخستین دوره، عبارت از دوره‌ای است که ضمن آن ریاضیات به عنوان یک دانش مستقل و نظری به‌وجود آمد. این دوره از زمان‌های باستانی آغاز و به سدهٔ پنجم پیش از میلاد پایان می‌پذیرد. و این به شرطی است که ریاضیات «خالص» و بستگی منطقی بین قضیه‌ها و اثبات آن‌ها، زودتر از آن، در یونان به وجود نیامده باشد (در سدهٔ پنجم پیش از میلاد، حکمهای منظم هندسی مثل «مقدمات» بقراط [= هیپوکراتوس]خیوسی به وجود آمد). این دوره، دورهٔ شکل گرفتن حساب و هندسه است که ما به اندازهٔ کافی آن را بررسی کردیم. در آن زمان، ریاضیات، از بستگی مستقیمی که قانون‌های جداگانه و منفرد آن، با عمل داشتند به وجود آمد، قانون‌هایی که خود زاییدهٔ آزمایش‌اند، ولی هنوز به عنوان دستگاه واحدی که به صورت‌منطقی‌به هم مربوط باشد تشکیل‌نشده‌است. خصلت نظری‌بودن ریاضی‌که همراه با اثبات منطقی قضیه‌های آن باشد، خیلی به تدریج و متناسب با ماده‌های خام موجود، به وجود آمد. حساب و هندسه هم از یکدیگر جدا نبود و به طور جدی به هم آمیخته بود.

دورهٔ دوم را می‌توان به عنوان دورهٔ ریاضیات مقدماتی مشخص کرد. ریاضیات مقدماتی عبارت از ریاضیات مقدارهای ثابت است که محصول ساده شدهٔ آن کم و بیش برنامهٔ دورهٔ دبیرستانی امروز را تشکیل می‌دهد. این دوره، نزدیک به دوهزار سال ادامه داشت و در سدهٔ هفدهم، با به وجود آمدن ریاضیات «عالی» به پایان رسید. ما در این بخش بررسی گسترده‌ای دربارهٔ این دوره می‌کنیم و در بخش‌های بعدی به دوره‌های سوم و چهارم ــ دورهٔ به وجود آمدن و پیشرفت آنالیز و دورهٔ ریاضیات امروز، خواهیم پرداخت.

۲. دورهٔ ریاضیات مقدماتی را می‌توان به نوبهٔ خود به دوبخش، که از نظر مضمون با هم اختلاف دارد، بخش کرد: دورهٔ پیشرفت هندسه (تا سدهٔ دوم میلادی) و دوره‌ای که آن را بیش از همه می‌توان دورهٔ پیشرفت جبر دانست (از سدهٔ دوم تا سدهٔ هفدهم میلادی). از نظر شرایط تاریخی هم دورهٔ ریاضیات مقدماتی، به سه دوره بخش می‌شود که می‌توان آن‌ها را دوره‌های «یونانی»، «شرقی» و «دورهٔ تجدد اروپایی» نامید. دورهٔ یونانی، همزمان با شکفتگی عمومی تمدن یونان است که از سدهٔ هفتم پیش از میلاد آغاز می‌شود و در سدهٔ سوم پیش از میلاد، یعنی زمان هندسه‌دانان بزرگ دنیای باستان، اقلیدس، ارشمیدس و

آپولونیوس به اوج خود می‌رسد و در سدهٔ ششم پس از میلاد پایان می‌یابد. ریاضیات و به ویژه هندسه، در یونان به شکفتگی شگفت‌انگیزی رسید و اگر چه تعداد کمی از اصل اثرهای ریاضی‌دانان یونانی به ما رسیده است، نام نوشته‌های بسیاری از آن‌ها را می‌دانیم. همچنین باید یادآور شد، روم که در سدهٔ اول میلادی دوران شکوفان خود را می‌گذارند، چیزی به ریاضیات نیفزود، در حالی که یونان، که زیر سلطهٔ رومی‌ها بود، توانست دانش را به چنین مرز شکوفایی برساند.

یونانی‌ها، نه تنها هندسهٔ مقدماتی را پیش بردند و دستگاه منظمی از آن، به اندازه‌ای که در «مقدمات» اقلیدس داده شده است و اکنون هم در دبیرستان‌ها درس داده می‌شود، به وجود آوردند، بلکه از آن‌هم فراتر رفتند. آن‌ها مقطع‌های مخروطی: بیضی هذلولی و سهمی را بررسی می‌کردند، بعضی از قضیه‌های مربوط به دانشی را که امروز «هندسهٔ تصویری» نامیده می‌شود ثابت می‌کردند، بر اساس نیازهای کیهان‌شناسی، هندسهٔ کروی را به وجود آوردند (سدهٔ اول میلادی) و همچنین، مقدمات مثلثات را فراهم کردند و نخستین جدول‌های سینوس‌ها را محاسبه کردند (**هیپارک** در سدهٔ دوم پیش از میلاد و **کلود بطلمیوس** در سدهٔ دوم میلادی)[1]، یک‌دسته مساحت‌ها و حجم‌های شکل‌های پیچیده را معین کردند. برای نمونه، **ارشمیدس** مساحت یک قطعه سهمی را معین کرد و ثابت کرد که این مساحت دوسوم مساحت مستطیلی است که شامل این قطعه سهمی باشد (شکل ۴). یونانی‌ها، حتی



شکل ۴

۱. **بطلمیوس**، به عنوان آورندهٔ دستگاهی معروف است که در آن زمین مرکز جهان در نظر گرفته شده است و حرکت سیاره‌ها، به عنوان حرکت به دور زمین بیان شده است. این دستگاه (یعنی دستگاه بطلمیوس) به وسیلهٔ کپرنیک رد شد.

قضیه‌ای به دست آوردند، که بنابر آن از میان حجم‌هایی که مساحت کلی آن‌ها با هم برابر باشد بزرگترین حجم مربوط به کره است، ولی اثبات این قضیه به ما نرسیده است و دشوار هم به نظر می‌رسد که یونانی‌ها توانسته باشند آن را به طور کامل ثابت کنند، زیرا اثبات آن ساده نیست. اثبات این قضیه، در سدهٔ نوزدهم و با کمک حساب انتگرال داده شد.

در زمینهٔ حساب و مقدمه‌های جبر هم، سهم یونانی‌ها کم نیست. همان طور که پیش از این گفتیم، آن‌ها مقدمه‌های «نظریهٔ عددها» را فراهم کردند. به عنوان نمونه، می‌توان از بررسی‌های آن‌ها دربارهٔ عددهای اول (قضیهٔ *اقلیدس* دراین باره تعداد عددهای اول بی‌پایان است و «*غربال اراتوستن*» برای پیداکردن عددهای اول)، همچنین پیداکردن ریشهٔ درست معادله‌ها (**دیوفانت** در حدود سال‌های ۲۴۶ و ۳۳۰ میلادی) نام برد.

گفتیم یونانی‌ها، کمیت‌های گنگ را هم کشف کردند، ولی این کمیت‌های گنگ را به روش هندسی و به عنوان پاره‌خط‌های راست درک می‌کردند. بنابراین، مسأله‌هایی را که امروز به روش جبری بررسی می‌کنیم، یونانی‌ها به روش هندسی بررسی می‌کردند. آنها معادله‌های درجه دوم را هم از همین راه حل می‌کردند و عبارت‌های گنگ را به همین ترتیب نمایش می‌دادند. در مثل، معادله‌ای را که امروز به صورت $x^۲ + ax = b^۲$ می‌نویسیم، این طور بیان می‌کردند: پاره‌خط راستی مانند x چنان پیدا می‌کنید که اگر مربعی به ضلع x را با مستطیلی به ضلع‌های a و x جمع کنیم، مستطیلی به دست بیاوریم که معادل با مربع مفروضی به ضلع b باشد. چیرگی هندسه در ریاضیات، تا مدت‌ها پس از یونانی‌ها ادامه داشت. یونانی‌ها همچنین با محاسبهٔ ریشهٔ دوم و ریشهٔ سوم، و ویژگی‌های تصاعدهای حسابی و هندسی، آشنا بودند.

بنابراین، یونانی‌ها مواد اولیهٔ زیادی از جبر مقدماتی امروز را در دست داشتند، ولی آن‌چه اساسی بود، یعنی عددهای منفی و عدد صفر، عددهای گنگی که جدا از هر مفهوم هندسی در نظر گرفته شده باشد، و سرانجام دستگاه پیشرفتهٔ نشانه‌های حرفی را کم داشتند. البته **دیوفانت**، نشانه‌های حرفی را برای مجهول و درجهٔ آن به کار می‌برد و نشانه‌های ویژه‌ای هم برای جمع و تفریق و تساوی داشت و به این ترتیب معادله‌های جبری را، البته با ضریب‌های عددی مشخصی، می‌نوشت.

یونانی‌ها در هندسه، تا نزدیکی‌های ریاضیات «عالی» رسیدند: **ارشمیدس** در محاسبهٔ مساحت‌ها و حجم‌ها، به حساب انتگرال و ***آپولونیوس*** در بررسی‌های خود دربارهٔ مقطع‌های مخروطی، به هندسهٔ تحلیلی نزدیک شدند. در حقیقت ***آپولونیوس***، حتی معادله‌های این

منحنی‌ها را، البته به زبان هندسی، بیان می‌کند[1]. ولی آنها، نه مفهوم‌های کلی مقدارهای ثابت و متغیر را داشتند و نه گونه‌های مختلف نشانه‌های حرفی که در جبر لازم بود. در حالی که همین نشانه‌ها (که در دوران دیگری به وجود آمد)، توانست بررسی‌های جبر را به سرچشمهٔ نظریه‌های تازه‌ای که به ریاضیات عالی می‌رسید، هدایت کند. پس از صدها سال، کسانی که این نظریه‌ها را به وجود آوردند، تا حد زیادی به سپردهٔ دانشمندان یونانی، مراجعه می‌کردند. اثر **دکارت** به نام «هندسه» (۱۶۳۷)، که پایه‌های هندسهٔ تحلیلی را گذاشته است، درست از بیان همان مسأله‌هایی آغاز می‌کند، که یونانی‌ها موفق به حل آن‌ها نشده بودند.

این یک قانونی کلی است: نظریه‌های کهن، به طور دایم، مسأله‌های تازه‌تر و عمیق‌تری را به وجود می‌آورد و این به جایی می‌رسد که گویی پوستهٔ کهنه، تاب نگهداری آن‌ها را ندارد و نیازمند شکل‌ها و اندیشه‌های تازه‌ای می‌شود. به وجود آمدن شکل‌ها و اندیشه‌های تازه هم ممکن است نیاز به شرط‌های تازه‌ای داشته باشد. در اجتماع کهن، شرط‌های انتقال به ریاضیات عالی وجود نداشت و نمی‌توانست وجود داشته باشد. این شرط‌ها در دورهٔ تازه و با پیشرفت دانش‌های طبیعی فراهم شد و این پیشرفت هم به نوبهٔ خود، در سده‌های شانزدهم و هفدهم، به دلیل نیازهای تازهٔ صنعت، و بنابراین مربوط به پیدایش و پیشرفت سرمایه‌داری، بود.

یونانی‌ها هندسهٔ مقدماتی را تا آن‌جا که ممکن بود، پیش بردند و درست به همین علت است که پیشرفت درخشان هندسه، در سده‌های نخستین پس از میلاد، قطع شد و جای خود را به پیشرفت مثلثات و جبر در کارهای ***بطلمیوس*** و ***دیوفانت*** و دیگران داد. کارهای ***دیوفانت*** را می‌توان به عنوان آغاز دوره‌ای که بیش از همه به جبر مربوط می‌شود دانست. ولی اجتماع کهنه‌ای که در آستانهٔ برافتادن بود، دیگر نمی‌توانست دانش را در جهت تازهٔ خود به جلو ببرد و پیشرفت دهد.

باید یادآور شد که صدها سال پیش از آن، حساب در چین به سطح بالایی رسیده بود. در سده‌های اول و دوم پیش از میلاد، قانون‌های حل حسابی دستگاه سه معادلهٔ درجهٔ اول داده شده بود. همچنین برای نخستین بار در تاریخ، از ضریب‌های منفی استفاده کردند و

---

۱. او «معادله» مقطع‌های مخروطی را نسبت به رأس آن‌ها می‌دهد. از جمله «معادلهٔ» سهمی $y^2 = 2px$ را به این ترتیب بیان می‌کند: مربعی به ضلع y هم‌ارز است با مستطیلی به ضلع‌های $2p$ و x (البته به جای p و x و y، پاره‌خط‌های راست متناظر با آن‌ها را نمایش می‌داد).

قانون‌های مربوط به عمل‌های با مقدارهای منفی را تنظیم کردند (ولی تنها جواب‌های مثبت را جست‌وجو می‌کردند، همان طور که بعدها **دیوفانت** هم همین کار را می‌کرد). در همین کتاب‌ها روش‌های تعیین ریشه‌های دوم و سوم هم یادآوری شده است.

۳. با به پایان رسیدن دانش یونانی، دوران رکود علمی در اروپا فرا رسید و مرکز پیشرفت ریاضیات به هند و آسیای میانه و کشورهای عربی‌زبان منتقل شد[1]. در این‌جا در جریان هزار سال، از سدهٔ پنجم تا سدهٔ پانزدهم میلادی، ریاضیات و به طور عمده آن چه مربوط به نیازهای محاسبه‌ای و به ویژه اخترشناسی بود، پیشرفت زیادی کرد: ریاضی‌دانان خاورزمین، اغلب اخترشناس هم بوده‌اند. آن‌ها به تقریب هیچ چیز به دانش هندسهٔ یونانی اضافه نکردند و در این دانش تنها آفریده‌های یونانی‌ها را برای نسل‌های بعدی حفظ کردند؛ در عوض ریاضی‌دانان هند و آسیای میانه و نزدیک، در رشته‌های حساب و جبر به موفقیت‌های بزرگی رسیدند[2].

همان طور که پیش از این هم گفتیم، هندی‌ها دستگاه امروزی شمار را پیدا کردند و عددهای منفی را وارد در محاسبه کردند. آن‌ها عددهای مثبت و منفی را مانند دارایی و بدهی متناظر با دو جهت مختلف روی خط راست می‌دانستند. سرانجام آن‌ها با عددهای گنگ هم مانند عددهای گویا، و بر خلاف یونانی‌ها بدون استفاده از هندسه، آغاز به‌کار کردند. آن‌ها همچنین برای عمل‌های جبری، که شامل ریشه‌گرفتن هم می‌شد، نشانه‌های ویژه‌ای داشتند. دانشمندان هند و آسیای میانه، به ویژه به این مناسبت که از اختلاف بین مقدارهای گنگ و گویا دست‌پاچه و سردرگم نشدند، توانستند بر «تحمیلات» هندسه، که از ویژگی‌های ریاضیات یونانی بود، چیره شوند و راه پیشرفت جبر امروزه را، آزاد از فشار پوستهٔ سنگین هندسی خود، که به وسیلهٔ یونانی‌ها به وجود آمده بود پیدا کنند.

شاعر و ریاضی‌دان بزرگ، ***عمر خیام*** (۱۰۴۸-۱۱۲۲) و ***نصیرالدین توسی*** به روشنی نشان دادند که هر نسبتی از کمیت‌ها را، خواه گنگ باشد یا گویا، می‌توان به وسیلهٔ عدد نمایش داد

---

۱. برای این‌که زمان این دوره روشن‌تر شود، دوران زندگی بعضی از ریاضی‌دانان مشهور خاورزمین را یادآوری می‌شویم. از هندی‌ها: *آریابهاتا* متولد حدود سال ۴۷۶، *براهماگوپتا* حدود سال‌های ۵۹۸-۶۶۰، *بهاسکارا* سدهٔ دوازدهم، از خوارزمی‌ها: *خوارزمی* سدهٔ نهم، *بیرونی* ۹۷۳-۱۰۴۸، *نصیرالدین توسی* که در آذربایجان کار می‌کرد ۱۲۰۱-۱۲۷۴، *غیاث‌الدین جمشید* که در سمرقند کار می‌کرد سدهٔ پانزدهم.

۲. باید در نظر داشت که نسبت‌دادن پیشرفت عمدهٔ ریاضیات آن زمان به عرب‌ها درست نیست. اصطلاح ریاضیات «عربی»، بیشتر به این مربوط است که بسیاری از دانشمندان خاورزمین به زبان عربی، که همراه با پیروزی‌های عرب‌ها، گسترش یافته بود می‌نوشتند.

و به همین علت است که در اثرهای این دانشمندان، همان تعریف کلی که **نیوتن** دربارهٔ عدد داده است و ما پیش از این یادآور شدیم دیده می‌شود (تعریفی که هم دربارهٔ عددهای گویا و هم دربارهٔ عددهای گنگ، درست باشد). اهمیت بزرگ این موفقیت‌ها زمانی روشن می‌شود که متوجه شویم ریاضی‌دانان اروپایی خیلی دیر، و حتی بعد از آنکه در اروپا بازسازی ریاضیات آغاز شد، به عددهای منفی و گنگ به طور کامل گردن نهادند. برای نمونه، ریاضی‌دان مشهور فرانسوی، **ویت** (۱۵۴۰-۱۶۰۳)، که جبر تا حد زیادی مدیون اوست، عددهای منفی را نادیده می‌گرفت. و در انگلستان، حتی در سدهٔ هجدهم هم، هنوز اعتراض علیه عددهای منفی به‌گوش می‌رسید: این عددها پوچ و بی‌معنی‌اند، زیرا کوچکتر از صفر، یعنی «از هیچ هم کمترند». ولی امروز دیگر عددهای منفی، گرچه به صورت درجه حرارت منفی هم باشد، برای ما عادی شده است. همهٔ ما در روزنامه می‌خوانیم و منظور نویسنده را هم می‌فهمیم که در مثل درجه حرارت فلان شهر ۸− درجه است.

خود واژهٔ «جبر» را هم ریاضی‌دان و اخترشناس خوارزم، ***محمد فرزند موسی خوارزمی*** که در سدهٔ نهم زندگی می‌کرد نام‌گذاری کرده است. نوشتهٔ او دربارهٔ جبر، « ***الجبر و المقابله*** » نامیده می‌شد که به معنی «جبران‌کردن و مقابله‌کردن» است. انتقال عددهای منفی به سوی دیگر معادله تحت عنوان (الجبر)، و حذف مقادیر برابر از دو طرف معادله تحت عنوان «المقابله»، فهمیده می‌شد.

واژهٔ عربی «الجبر» در زبان لاتینی « *algebra* » ترجمه و «المقابله» هم حذف شد: به این ترتیب نام *algebra* به وجود آمد[1].

در عین حال سرچشمهٔ این نام‌گذاری به طور کامل به مضمون درونی خود دانش پاسخ می‌دهد. جبر دراساس عبارت است از تعمیم عمل‌های حساب که آن‌ها را به صورت کلی و قالبی، جدا از عددهای مشخص بررسی می‌کند. در نظر اول موضوع جبر عبارت است از منظم‌کردن قانون‌های قالبی برای تبدیل عبارت‌ها و حل معادله‌ها. خوارزمی عنوان کتابش را درست همان چیزی گذاشت که معرف بعضی قانون‌های عمومی جبر بود و به این وسیله روح جبر را بیان کرد.

بعدها، **عمر خیام**، جبر را به عنوان دانشی که برای حل معادله‌ها به‌کار می‌رود تعریف

۱. باید یادآور شد که اصطلاح ریاضی *آلگوریتم*، که به معنی روش و قانون‌های محاسبه است، از خود اسم «*الخوارزمی*» گرفته شده است.

کرد. این تعریف به اهمیت خود باقی بود تا این‌که در پایان سدهٔ نوزدهم، همراه با نظریهٔ معادله‌ها، جبر به راه تازه‌ای گام گذاشت و گرچه روح جبر به عنوان بررسی عمل‌های قالبی، حفظ شد ولی سیمای آن به‌کلی دگرگون شد.

ریاضی‌دانان آسیای میانه و نزدیک، ریشه‌گرفتن، حل تقریبی یک رشته معادله‌ها، دستور کلی «دوجمله‌ای نیوتن» و غیره را پیدا کردند. البته، این رابطه‌ها را به وسیلهٔ جمله‌ها بیان می‌کردند، نه به وسیلهٔ نشانه‌ها. به جز آن ریاضی‌دانان آسیای میانه و نزدیک، مثلثات را هم خیلی پیش بردند: آن را منظم کردند و جدول سینوس‌ها را خیلی دقیق محاسبه کردند. این جدول‌ها را ریاضی‌دان *غیاث‌الدین* جمشید کاشانی (حدود سال ۱۴۲۷) برای اخترشناس مشهور ازبک، *الغ‌بیک* تنظیم کرد. همین *غیاث‌الدین* کسرهای دهدهی را ۱۵۰ سال پیش از پیدایش مجدد آن‌ها در اروپا اختراع کرد.

کوتاه سخن، در جریان سده‌های میانه، دستگاه‌شمار دهدهی کنونی (که شامل کسرها هم می‌شود)، جبر مقدماتی و مثلثات، کم و بیش به صورت کامل، در هند و آسیای میانه به‌وجود آمد. در همین دوره، پیشرفت‌های دانش‌های چینی آغاز به واردشدن در کشورهای مجاور کرد. دانشمندان چین در سدهٔ ششم میلادی، راه‌حل معادله‌های ساده، محاسبه‌های تقریبی در هندسه و نخستین راه‌حل تقریبی معادلهٔ درجهٔ سوم را می‌دانستند. سدهٔ شانزدهم، از مطالب دورهٔ دبیرستانی امروز جبر، چیزی جز لگاریتم و عددهای موهومی، کم نداشت. به جز آن، دستگاه نشانه‌گذاری حرفی هم هنوز پیدا نشده بود، درون مایهٔ جبر از شکل و قالب آن جلو افتاده بود و دیگر این قالب لازم نبود: انتزاع از عددهای مشخص و تنظیم قانون‌های کلی نیازمند روش بیانی بود که متناسب با آن باشد. لازم بود که برای هر عدد دلخواه و عمل‌های مربوط به آن نشانه‌هایی به‌وجود آید. علامتی‌بودن جبر، همان شکل و قالب لازمی بود که به «درون مایهٔ» آن پاسخ می‌داد. همان طور که در دنیای باستان، برای عمل‌کردن با عددهای درست، لازم بود که نمادهایی برای آن‌ها درنظر گرفته شود، همان‌طور هم اکنون برای عمل‌کردن با عددهای دلخواه به طور کلی، و پیداکردن قانون‌های کلی آن‌ها، لازم بود که نشانه‌های مناسبی درنظر گرفته شود. حل این مسأله از همان زمان یونانی‌ها آغاز شد، ولی تنها در سدهٔ هفدهم، زمانی که سرانجام در اثر کوشش‌های *دکارت* و دیگران، دستگاه کنونی نشانه‌گذاری‌ها پیدا شد، به پایان رسید.

۴. در دورهٔ بازسازی دانش، اروپاییان نزد ریاضی‌دانان عرب زبان تحصیل می‌کردند و از راه ترجمه‌های عربی با دانش یونانی آشنا می‌شدند. کتاب‌های *اقلیدس*، *بطلمیوس*، و

خوارزمی، برای نخستین‌بار در سدهٔ دوازدهم از عربی به لاتینی، که زبان عمومی علمی آن زمان در اروپای غربی بود، ترجمه شد. در همین زمان، در مبارزه‌ای که در اروپا بین دستگاه‌های قبلی عددشماری (که از یونانی‌ها و رومی‌ها باقی‌مانده بود) و عددشماری هندی (که از ریاضی‌دانان ایرانی گرفته شده بود) درگرفته بود، به تدریج دستگاه عددشماری هندی پیروز شد.

تنها در سدهٔ شانزدهم بود که دانش اروپایی توانست سرانجام از موفقیت‌های گذشتگان خود تجاوز کند. مثلاً ***تارتاگلیا*** و ***فِراری***، که هر دو ایتالیایی بودند، اولی معادلهٔ درجهٔ سوم و دومی معادلهٔ درجهٔ چهارم را به صورت کلی حل کردند (بخش چهارم را ببینید) باید یادآور شد که اگرچه این نتیجه‌گیری‌ها جزو برنامهٔ دبیرستان‌ها نیست، ولی به علت نوع روش‌هایی که در آن‌ها به‌کار می‌رود، مربوط به ریاضیات مقدماتی است (در جبر عالی، نظریهٔ عمومی معادله‌ها بررسی می‌شود).

در همین دوره، برای نخستین‌بار، آغاز به عمل با عددهای موهومی کردند (در آن زمان عمل با عددهای موهومی تنها صوری بود و هیچ‌گونه پایهٔ **خصوصیت** حقیقی نداشت پایهٔ حقیقی عددهای موهومی خیلی دیرتر، و در ابتدای سدهٔ نوزدهم، روشن شد). همچنین نشانه‌های جبری کنونی فراهم شد و به ویژه (به وسیلهٔ ویت در سال ۱۵۹۱)، نه تنها برای مجهول، بلکه برای عددهای معلوم هم نشانه‌های حرفی «a» و «b» و غیره درنظر گرفته شد. در این کوششی که برای پیشرفت جبر انجام می‌گرفت، عدهٔ زیادی از ریاضی‌دانان شرکت داشتند و نیز در همین دوره کسرهای دهدهی هم در اروپا به وجود آمد (آن‌ها را دانشمند هلندی ***ستهون*** اختراع و در سال ۱۵۸۵ منتشر کرد).

سرانجام، **نپر** در انگلستان، لگارتیم را، به عنوان وسیله‌ای برای محاسبه‌های اخترشناسی کشف کرد و در سال ۱۶۱۴ آن را به دیگران شناساند و **بریگ** نخستین جدول لگاریتم دهدهی را در سال ۱۶۲۴ تنظیم کرد[1].

در همان زمان در اروپا «**نظریهٔ** آنالیز ترکیبی» (ترکیبیات) و دستور کلی «دوجمله‌ای

---

۱. جالب است یادآور شویم که نپر، لگاریتم را به روشی که امروز تعریف می‌کنند (در رابطه $x=a^y$، عدد y عبارت است از لگاریتم x در پایهٔ a)، تعریف نمی‌کرد. تعریف امروزی لگاریتم، بعدها داده شد. تعریف نپر به مفهوم‌های متغیر و بی‌نهایت کوچک مربوط است و به این‌جا می‌رسد که لگاریتم x عبارت است از تابعی مثل $y=f(x)$ که سرعت نمو آن متناسب با عکس x باشد، یعنی $y'=\frac{c}{x}$ (بخش دوم را ببینید). بنابراین، با وجودی که هنوز دیفرانسیل اختراع نشده بود، این تعریف برپایهٔ معادله‌های دیفرانسیل قرار داشت.

نیوتن»[۱] به وجود آمد؛ تصاعدها هم که از قبل شناخته شده بود. به این ترتیب، ساختمان جبر مقدماتی به پایان می‌رسید و همراه با آن، در آغاز سدهٔ هفدهم، دورهٔ ریاضیات مقدارهای ثابت و ریاضیات مقدماتی، که اکنون در دبیرستان‌ها با کم و بیش اضافه‌هایی تدریس می‌شود، پایان می‌یافت: دیگر استخوان‌بندی حساب، هندسهٔ مقدماتی مثلثات و جبر مقدماتی به وجود آمده بود.

ولی نباید گمان کرد که پیشرفت ریاضیات مقدماتی به همین جا پایان می‌پذیرد. این پیشرفت ادامه می‌یابد؛ برای نمونه، در هندسهٔ مقدماتی، نتیجه‌های تازه‌ای به دست آمد و باز هم به دست خواهد آمد. بالاتر از آن، به ویژه به یاری پیشرفت بعدی ریاضیات بود که توانستیم جوهر ریاضیات مقدماتی را روشن‌تر بفهمیم. ولی در ریاضیات، دیگر نقش اساسی به عهدهٔ مفهوم‌های متغیر، تابع و حد بود. اکنون هم مسأله‌هایی از ریاضیات مقدماتی وجود دارد که نه تنها به‌کمک مفهوم‌های ریاضیات عالی و روش‌های مربوط به آن حل و روشن می‌شوند، بلکه اغلب با روش‌های ریاضیات مقدماتی غیرقابل حل‌اند. امروز هم مسأله‌های ریاضیات مقدماتی، در بستگی با مفهوم‌ها و روش‌های ریاضیات عالی، سرچشمهٔ بسیاری از نتیجه‌ها و حتی نظریه‌های کلی هستند. به عنوان نمونه، نظریهٔ دستگاه‌های منتظم شکل‌ها و یا مسأله‌های مربوط به نظریهٔ عددها، گرچه از لحاظ شکل ظاهری مربوط به ریاضیات مقدماتی هستند، ولی روش حل آن‌ها مقدماتی نیست و بحث دربارهٔ آن‌ها را خواننده در بخش دهم خواهد دید.

۶. ریاضیات کمیت‌های متغیر

۱. در سدهٔ شانزدهم، بررسی حرکت، در مرکز توجه دانش‌های طبیعی قرار داشت. نیازهای علمی و پیشرفت دانش‌های طبیعی، این دانش‌ها را در آستانهٔ بررسی گونه‌های مختلف تغییر، و بررسی بستگی بین کمیت‌های متغیر قرار داد.

مفهوم‌های متغیر و تابع به عنوان بازتابی از ویژگی‌های عمومی کمیت‌های متغیر و رابطهٔ

---

۱. این دستور، نه به این علت که نیوتن آن را برای نخستین‌بار کشف کرد، بلکه به این علت است که نیوتن آن را تعمیم داد و توان n را برای عددهای کسری و گنگ هم به‌کار برد به نام نیوتن نامیده شده است.

بین آن‌ها، در ریاضیات به وجود آمدَ و این پیشرفت موضوع ریاضیات، برای انتقال به دورهٔ تازه یعنی دورهٔ کمیت‌های متغیر، نقش تعیین‌کننده‌ای داشت.

قانون حرکت جسم روی مسیر مفروض، و در مثل روی خط راست، از روی مسافتی که نسبت به زمان می‌پیماید معین می‌شود.

گالیله (۱۵۶۴-۱۶۴۲)، قانون سقوط جسم را کشف و ثابت کرد که مسافت پیموده شده به وسیلهٔ جسمی که سقوط می‌کند متناسب با مجذور زمان است. این بیان به وسیلهٔ دستور زیر نشان داده می‌شود:

$$S = \frac{gt^{۲}}{۲} \qquad (۱)$$

(که در آن: $g \approx ۹{,}۸۱ \mathrm{m/sec}^{۲}$).

به طور کلی، قانون حرکت، مسافت طی‌شده را برحسب زمان t می‌دهد. در این‌جا، زمان t و مسافت S دو متغیرند: «مستقل» «وابسته»، و این‌که هر مقدار t متناظر است با مسافت معینی از S، به این معنی است که مسافت S تابعی است از متغیر t.

مفهوم ریاضی متغیر و تابع، چیزی جز تعمیم انتزاعی مقدارهای متغیر مشخص (همچون زمان، مسافت، سرعت، زاویهٔ دوران، رویهٔ جاروب‌شده و غیره) و رابطه‌های مشخص بین آنها (مثل رابطهٔ بین مسافت پیموده شده با زمان و غیره) نیست. همان‌طور که عدد حقیقی شکل انتزاعی اندازهٔ کمیت است، همان‌طور هم «متغیر» شکل انتزاعی کمیت تغییرکننده است، کمیتی که می‌تواند مقدارهای مختلفی را قبول کند: کمیت متغیر ریاضی عبارت است از «چیزی» یا بهتر بگوییم «چیز دلخواهی» که می‌تواند مقدارهای عددی مختلف را قبول کند. بنابراین، متغیر ریاضی، یک متغیر به طور کلی است که زیر عنوان آن می‌توان هم زمان، هم مسافت و هم هر کمیت دیگری را فهمید.

به همین ترتیب، تابع عبارت است از شکل انتزاعی بستگی یک کمیت با کمیت دیگر. این مطلب که y تابعی است از x، در ریاضیات تنها این معنی را می‌دهد که به ازای هر مقدار x، مقدار متناظر معینی برای y وجود دارد (مفهوم تابع، هم به معنی خود بستگی متقابل و هم به معنی قانون بستگی متقابل کمیت y با کمیت x می‌باشد). طبق قانون سقوط جسم، مسافتی که جسم در حال سقوط در زمان معینی می‌پیماید از روی دستور (۱) به دست می‌آید: مسافت تابعی است از زمان.

انرژی یک جسم متحرک، برحسب جرم و سرعت آن، طبق این دستور تعیین می‌شود:

$$E = \frac{m \cdot v^{۲}}{۲} \qquad (۲)$$

برای یک جسم مفروض، انرژی E آن تابعی است از سرعت v آن.

طبق قانون معروف، مقدار حرارتی که ضمن عبور جریان برق در واحد زمان ایجاد می‌شود از روی این دستور به دست می‌آید:

$$Q = \frac{R \cdot I^{۲}}{۲} \qquad (۳)$$

که در آن I شدت جریان و R مقاومت سیمی است که جریان برق از آن می‌گذرد. برای مقاومت مفروض، هر شدت جریان I متناظر است با مقدار معینی از حرارت Q که در واحد زمان به دست آمده است. بنابراین Q تابعی است از I.

مساحت S مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یکی از زاویه‌های حاده‌اش α و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن x باشد (شکل ۵)، به وسیلهٔ این دستور بیان می‌شود:

$$S = \frac{۱}{۲} x^{۲} \tan \alpha \qquad (۴)$$

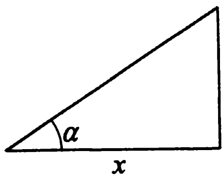
اگر زاویهٔ α معلوم باشد، مساحت مثلث، تابعی از ضلع x خواهد بود.

همهٔ دستورهای (۱) تا (۴) را می‌توان به صورت یک رابطه نوشت:

$$y = \frac{۱}{۲} a x^{۲} \qquad (۵)$$

این هم انتقال از کمیت‌های متغیر مشخص t، S، E، Q، v و غیره به متغیرهای کلی x و y انتقال از رابطه‌های مشخص (۱) ، (۲) ، (۳) ، (۴) ، به صورت کلی آن‌ها، یعنی رابطهٔ (۵) است. اگر مکانیک و الکتریسیته با دستورهای مشخص (۱) ، (۲) و (۳) که مربوط به کمیت‌های مشخصی هستند سروکار دارد، دانش ریاضی تابع‌ها، با دستور کلی (۵) ، دستوری که با هیچ کمیت مشخصی بستگی ندارد، سروکار دارد.

درجهٔ بعدی انتزاع، از حالت‌های مشخص، آن است که بین x و y رابطهٔ مشخصی مثل



شکل ۵

$y=\frac{1}{2}ax^2$، $y=\sin x$، $y=\log x$ و غیره در نظر نگیریم، بلکه رابطهٔ تابعی x و yرا به طور کلی و به صورت رابطه‌ای که به وسیلهٔ این دستور انتزاعی بیان می‌شود، بررسی کنیم:

$$y=f(x)$$

این دستور حاکی از آن است که مقدار y ***تابعی*** کلی از xاست، یعنی هر مقدار معینی از x به **نحوی** متناظر با مقدار معینی از yاست. موضوع بر سر این و یا آن تابع مفروض ($y=\frac{1}{2}ax^2$، $y=\sin x$ و غیره) نیست، بلکه بر سر تابع‌های ***دل‌خواه*** (یا دقیق‌تر بگوییم: کم و بیش دل‌خواه) می‌باشد.

این درجه‌های انتزاع، نخست انتزاع از مقدارهای مشخص و سپس انتزاع از تابع‌های مشخص، شبیه به درجه‌های انتزاعی است که ضمن تشکیل مفهوم عدد درست، انجام می‌گرفت: نخست انتزاع از مجموعهٔ چیزهای مشخص و به وجودآمدن مفهوم عددهای جداگانه (۱ و ۳ و ۱۲ و غیره) و سپس انتزاع از عددهای مشخص جداگانه، که به مفهوم عدد درست به طور کلی می‌رسد. این تعمیم، نتیجهٔ تحلیل و ترکیب عمیقی است که به طور متقابل انجام می‌گیرد. یعنی تحلیل رابطه‌های جداگانه از یک سو و ترکیب خط‌های کلی نتیجه‌های به دست آمده، به صورت مفهوم‌های تازه، از سوی دیگر.

رشته‌ای از ریاضیات که ویژهٔ بررسی تابع‌ها است، آنالیز، آنالیز ریاضی و یا (آن طور که اغلب نامیده می‌شود) آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها است. نام‌گذاری اخیر به این سبب است که مفهوم مقدارهای بی‌نهایت کوچک، به عنوان وسیلهٔ مهمی برای بررسی تابع‌ها به‌کار می‌رود (درون‌مایهٔ مفهوم مقدارهای بی‌نهایت کوچک و اهمیت آن در بخش دوم روشن می‌شود).

از آن‌جا که تابع، شکل انتزاعی رابطهٔ یک کمیت با کمیت دیگر است، می‌توان گفت که موضوع آنالیز عبارت است از بستگی بین کمیت‌های متغیر، ولی نه چنان بستگی که بین این و آن کمیت مشخص وجود دارد، بلکه بستگی بین متغیرها به طور کلی، متغیرهایی که از هرگونه مضمون و محتوا جدا شده باشد. یک چنین انتزاعی، گسترش کاربرد آنالیز را تأمین می‌کند، زیرا یک دستور و یا یک قضیه، حالت‌های ممکنهٔ بسیار زیادی را دربر می‌گیرد. به عنوان نمونه می‌توان دستورهای سادهٔ (۱) تا (۵) را نام برد. در این‌جا شباهت کاملی بین آنالیز با حساب و جبر دیده می‌شود: همهٔ آن‌ها از مسأله‌های معین عملی به وجود آمده و بستگی‌های کمی حقیقی واقعیت را، به شکل کلی و به صورت انتزاعی، بازتاب می‌دهند.

۲. بنابراین دورهٔ تازهٔ ریاضیات، یعنی دورهٔ ریاضیات کمیت‌های متغیر را که از سدهٔ

هفدهم آغاز می‌شود، می‌توان به عنوان دورهٔ پیدایش و پیشرفت آنالیز دانست (این سومین دورهٔ بزرگ پیشرفت ریاضیات است که پیش از این نیز یادآور شدیم). ولی، روشن است که هیچ نظریه‌ای تنها با تشکیل مفهوم‌های تازه به وجود نمی‌آید، آنالیز هم نمی‌توانست از مفهوم‌های متغیر و تابع به‌وجود آید. برای به‌وجودآمدن نظریه، و از آن بالاتر برای به‌وجودآمدن یک رشتهٔ کامل علمی، که آنالیز ریاضی یکی از آن‌ها است، باید مفهوم‌های تازه وارد عمل و به‌کمک آن‌ها رابطه‌های تازه‌ای کشف شود و مسأله‌های تازه‌ای را حل کنند. به جز این، وجود مفهوم‌های تازه، تنها بر پایهٔ مسأله‌هایی که به وسیلهٔ این مفهوم‌ها حل می‌شود، و تنها بر پایهٔ قضیه‌هایی که از این مفهوم‌ها استفاده می‌کنند، به‌وجود می‌آید، تکامل پیدا می‌کند، دقیق‌تر می‌شود و تعمیم می‌یابد. مفهوم‌های متغیر و تابع به صورت آماده و یک دفعه برای ***گالیله***، ***دکارت***، ***نیوتن***، و یا هر کس دیگری به وجود نیامد، بلکه برای عدهٔ زیادی از ریاضی‌دانان مطرح بود (برای نمونه، برای نپر در ارتباط با لگاریتم)، سپس ***نیوتن*** و ***لایب‌نیتس*** شکل کم و بیش روشنی به آن‌ها دادند، ولی این شکل هنوز قطعی نبود و بعدها با پیشرفت آنالیز تعمیم یافت و دقیق‌تر شد. تعریف کنونی این مفهوم‌ها، تنها در سدهٔ نوزدهم داده شد، ولی این تعریف هم به صورت مطلق دقیق و به طور کامل قطعی نیست، پیشرفت مفهوم تابع در زمان ما هم ادامه دارد.

آنالیز ریاضی، بر پایهٔ مواد اولیه‌ای که به وسیلهٔ مکانیک مطرح شده بود، و بر پایهٔ مسأله‌های هندسه، و روش‌ها و مسأله‌هایی که ناشی از جبر بود، به وجود آمد.

نخستین گام تعیین‌کننده در به وجودآمدن ریاضیات با کمیت‌های متغیر، با پیدایش کتاب «هندسهٔ» ***دکارت*** در سال ۱۶۳۷ برداشته شد. در این کتاب، پایه‌های دانشی که «هندسهٔ تحلیلی» نامیده می‌شود، گذاشته شده بود. فکر اساسی ***دکارت*** چنین است:

فرض کنید این معادلهٔ را داشته باشیم:

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad (۶)$$

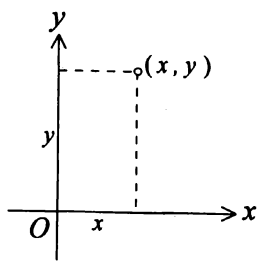
در جبر x و y، به عنوان مجهول شناخته می‌شد و از آن‌جا که با معادلهٔ (۶) نمی‌توان مجهول‌ها را معین کرد، چنین معادله‌ای برای جبر جالب نبود. ***دکارت*** x و y را نه به عنوان مجهول‌هایی که باید آن‌ها را به یاری این معادله به دست آورد، بلکه به عنوان ***متغیرهایی*** که این معادله رابطهٔ بین آن‌ها را بیان می‌کند، بررسی کرد. چنین معادله‌ای را می‌توان با انتقال تمام جمله‌های آن به سمت چپ به این صورت کلی نوشت:

$$F(x\ ,\ y) = 0$$

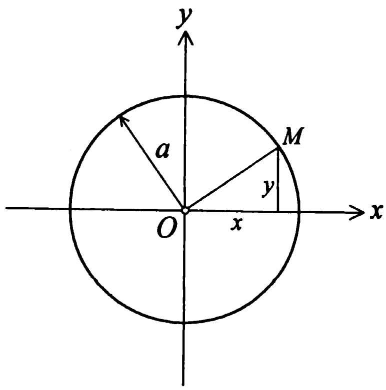
سپس، **دکارت مختصات** x و y را که امروز کارتزین (= دکارتی) نامیده می‌شود، روی صفحه وارد کرد (شکل ۶)، به نحوی که با هر دو مقدار x و y نقطه‌ای مشخص می‌شود و هر نقطه‌ای متناظر با مختصاتی از x و y است. به این ترتیب، معادلهٔ $F(x, y) = 0$ مکان هندسی نقطه‌هایی را روی صفحه معین می‌کند که مختصات آن‌ها در این معادله صدق کند. این مکان، به طور کلی یک خط است. به عنوان نمونه، معادلهٔ (۶)، دایره‌ای به شعاع a و به مرکز مبداء مختصات را معین می‌کند. در حقیقت همان طور که از شکل ۷ دیده می‌شود، بنابر قضیهٔ فیثاغورس $x^2 + y^2$ مساوی با مجذور فاصلهٔ O تا M (به مختصات x و y) است. بنابراین معادلهٔ (۶) مکان هندسی نقطه‌ای را معین می‌کند که فاصلهٔ آن از مبداء مختصات برابر a باشد: یعنی دایره.

برعکس: مکان هندسی نقطه‌ای را که به وسیلهٔ یک شرط هندسی معین شده است، می‌توان به وسیلهٔ معادله‌ای که همین شرط را با زبان جبر و به یاری مختصات بیان می‌کند، نشان داد. مکان هندسی نقطه‌هایی که از نقطهٔ مفروض به یک فاصله باشد، به زبان جبر به وسیلهٔ معادلهٔ (۶) بیان می‌شود.

بنابراین، موضوع کلی و روش هندسهٔ تحلیلی را می‌توان به این ترتیب بیان کرد: نمایش معادله‌ای که دو متغیر دارد، به وسیلهٔ یک خط روی صفحه، و بررسی ویژگی‌های **هندسی** خط مزبور، به وسیلهٔ ویژگی‌های **جبری** معادلهٔ آن، و برعکس: پیدا کردن معادلهٔ خط مفروض، به کمک شرط‌های هندسی آن و سپس دوباره، جست‌وجوی ویژگی‌های هندسی



شکل ۶



شکل ۷

آن، به‌کمک ویژگی‌های جبری معادله‌ای که به دست آورده‌ایم. از این راه می‌توان مسأله‌های هندسی را به مسأله‌هایی از جبر و سرانجام محاسبه، منجر کرد.

دربارهٔ جوهر روش هندسهٔ تحلیلی، در بخش سوم به تفصیل گفت‌وگو خواهد شد. در این‌جا همان طور که از بیان کوتاه ما پیداست، می‌خواهیم به این نکته توجه کنیم که سرچشمهٔ این روش، عبارت است از توأم‌کردن هندسه، جبر و اندیشهٔ کلی کمیت متغیر. نظریهٔ مقطع‌های مخروطی، جوهر اصلی هندسی بخش‌های نخستین هندسهٔ تحلیلی را تشکیل می‌دهد (بیضی، هذلولی، سهمی). همان طور که یادآور شدیم، این نظریه در دوران باستان هم پیشرفت کرده بود؛ نتیجه‌گیری‌های *آپولونیوس*، شامل معادلهٔ مقطع‌های مخروطی (البته تنها به شکل هندسی) هم بود. به هم‌آمیختن این درون‌مایهٔ هندسی با قالب جبری، که با پیشرفت ریاضیات بعد از یونانی‌ها انجام‌گرفت، و با فکر کلی کمیت متغیر، که ضمن بررسی حرکت به وجود آمد، هندسهٔ تحلیلی را ایجاد کرد.

اگر مقطع‌های مخروطی، برای یونانی‌ها یک موضوع خالص ریاضی بود، در زمان *دکارت*، آن‌ها را برای به دست آوردن مقدارهای واقعی، که برای اخترشناسی، مکانیک و صنعت لازم بود، بررسی می‌کردند. *کپلر* (۱۵۷۱-۱۶۳۰) کشف کرد که سیاره‌ها، روی مدار بیضی به دور خورشید حرکت می‌کنند و *گالیله* ثابت کرد جسمی که پرتاب شود، خواه سنگ باشد یا گلولهٔ توپ، به شکل سهمی پرواز می‌کند (اگر بتوانیم در تقریب اول از مقاومت هوا بگذریم). توجه به موضوع‌های گوناگون و محاسبه‌های مربوط به آن‌ها، منجر به مقطع‌های مخروطی شد، و در نتیجه آن را به عنوان یکی از نیازهای جدی زمان معرفی کرد. روش دکارت هم، به ویژه، همین مسألهٔ مورد نیاز را حل کرد. کوتاه سخن، هندسهٔ تحلیلی براساس پیشرفت‌های قبلی ریاضیات تدارک دیده شد و به وسیلهٔ نیازهای رسیده و پختهٔ دانش و صنعت، به زندگی فرا خوانده شد.

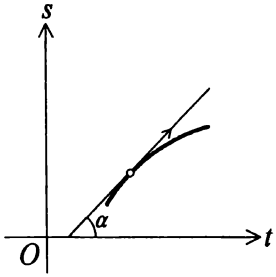
۳. گام تعیین‌کنندهٔ بعدی در ریاضیات کمیت‌های متغیر، با به وجود آمدن حساب دیفرانسیل و انتگرال و به وسیلهٔ **نیوتن** و **لایب‌نیتس** در نیمهٔ دوم سدهٔ هفدهم برداشته شد. این دیگر به وجود آمدن واقعی آنالیز بود، زیرا برخلاف هندسهٔ تحلیلی که موضوع آن در هر صورت شکل‌های هندسی است، موضوع حساب دیفرانسیل و انتگرال، عبارت از ویژگی‌های خود تابع است. در واقع، **نیوتن** و **لایب‌نیتس** کار مقدماتی بزرگی که بسیاری از ریاضیدان‌ها در آن شرکت داشتند و تدارک آن از همان زمانی آغاز شده بود که یونانیهای باستان، به دنبال روش‌هایی برای تعیین سطح و حجم بودند، به پایان رساندند.

ما در این‌جا مضمون مفهوم‌های اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال و نظریهٔ آنالیز را که پس از آن به وجود آمد، شرح نخواهیم داد. این شرح در بخش‌هایی که مربوط به این نظریه‌هاست داده خواهد شد. ما تنها می‌خواهیم نظرها را متوجه سرچشمه‌های کهن حساب دیفرانسیل و انتگرال کنیم. سرچشمه‌هایی که مسأله‌های تازهٔ مکانیک و مسأله‌های کهنهٔ هندسه، مسأله‌های مربوط به رسم مماس بر منحنی و تعیین سطح و حجم عمده‌ترین آن‌ها هستند. این مسأله‌ها، از همان دوران باستان، دانشمندان ریاضی را به خود مشغول کرده بود (کافی است که کارهای *ارشمیدس* را به خاطر بیاوریم). در سدهٔ هفدهم هم عدهٔ زیادی از ریاضی‌دانان مانند *کپلر*، *کاوالیری* و دیگران سرگرم حل این مسأله‌ها بودند. ولی چیزی که در این باره تعیین‌کننده بود، کشف ارتباط بین این دو نوع مسأله و تنظیم روش کلی حل آن‌ها بود. و این افتخار هم نصیب نیوتن و لایب‌نیتس شد.

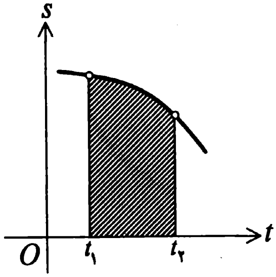
پایهٔ این کشف، یعنی کشف رابطهٔ بین مسأله‌های مکانیک و هندسه را باید در روش مختصاتی جست‌وجو کرد، روشی که اجازه می‌دهد رابطهٔ یک کمیت را با کمیت دیگر، به وسیلهٔ منحنی نشان دهیم، یعنی روشی که امکان نمایش هندسی یک تابع را به دست می‌دهد. زمانی که بتوانیم منحنی یک تابع را نمایش دهیم، به سادگی خواهیم توانست ارتباط بین مسأله‌های مکانیک و هندسه را نشان دهیم، ارتباطی که ریشهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال است و درون‌مایهٔ این حساب هم در آن وجود دارد.

حساب دیفرانسیل، در اساس عبارت است از روش پیداکردن سرعت حرکت در لحظهٔ دلخواهی از زمان، به شرطی که رابطهٔ بین مسافت و زمان معلوم باشد. این مسأله، به وسیلهٔ «دیفرانسیل‌گیری» حل می‌شود و هم‌ارز با مسألهٔ رسم مماس بر منحنی است که نمایش تغییرات مسافت را نسبت به زمان می‌دهد: سرعت در لحظهٔ t برابر است با تانژانت زاویهٔ انحراف (ضریب زاویه) مماس بر منحنی در نقطه‌ای که به ازای t به دست آمده است (شکل ۸).

حساب انتگرال، در اساس عبارت است از روش پیداکردن مسافت پیموده شده، به شرطی که رابطهٔ بین سرعت و زمان معلوم باشد (یا به طور کلی، پیداکردن مقدار مجموع عمل یک کمیت متغیر). روشن است که این مسأله، وارونهٔ دیفرانسیل‌گیری یعنی مسألهٔ یافتن سرعت است و به وسیلهٔ «انتگرال‌گیری» حل می‌شود و هم‌ارز با مسألهٔ پیداکردن مساحت زیر منحنی است که از نمایش تغییرات سرعت نسبت به زمان به دست آمده باشد: مسافت پیموده شده، در فاصلهٔ زمانی از لحظهٔ t_1 تا t_2 برابر است با سطحی که زیر منحنی نمایش



شکل ۸



شکل ۹

تغییرات سرعت قرار دارد و به عرض‌های نقطه‌هایی از منحنی که متناظر مقدارهای t_1 و t_2 است، محدود باشد (شکل ۹). کافی است مسأله‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال را از مکانیک جدا کنیم و به طور انتزاعی دربارهٔ تابع‌ها، و نه دربارهٔ ارتباط مسافت با سرعت یا زمان، صحبت کنیم تا در آن صورت مفهومی کلی دربارهٔ مسأله‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، به صورت خالص، به دست آوریم.

گذشته از مفهوم‌های متغیر و تابع، بعدها مفهوم حد هم به یکی از پایه‌های دیفرانسیل و انتگرال و هم به یکی از پایه‌های آنالیز (ضمن گسترش بعدی آن) تبدیل شد. در دوره‌ای که آنالیز شکل می‌گرفت، به جای واژهٔ آنالیز، مقدارهای بی‌نهایت کوچک را، که در آن زمان هنوز دارای ابهام‌هایی بود، به‌کار می‌بردند. شیوهٔ محاسبهٔ سرعت از روی قانون تغییر مسافت (دیفرانسیل‌گیری) و محاسبهٔ مسافت از روی سرعت (انتگرال‌گیری)، بر پایهٔ استفاده از جبر (و با توجه به مفهوم حد) قرار دارد. آنالیز در نتیجهٔ اجتماع این مفهوم‌ها و مسأله‌های مربوط به مکانیک و هندسه و بعضی مسأله‌های دیگر (مثل مسأله‌های مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم) به وجود آمد. آنالیز، برای پیشرفت مکانیک بیش از حد لازم بود و در اساس، مفهوم آنالیز در خود تنظیم قانون‌های مکانیک (گرچه به‌طور پنهانی) وجود داشت. قانون دوم نیوتن، از زبان خود او می‌گوید که: «تغییر مقدار حرکت متناسب با نیروی مؤثر است». دقیق‌تر: سرعت تغییر مقدار حرکت، متناسب با نیرو است. بنابراین برای استفاده از این قانون باید بتوان سرعت تغییر یک کمیت را معین کرد، یعنی دیفرانسیل گرفت. اگر همین قانون را منظم کنیم و بگوییم که شتاب متناسب با نیرو است، باز هم مسأله به قوت خود باقی می‌ماند، زیرا شتاب چیزی جز سرعت تغییر سرعت نیست. خودبه خود روشن است که برای تعیین قانون حرکتی که در اثر نیروی متغیری به وجود می‌آید و یا به طور کلی حرکتی که

با شتاب متغیر مفروضی به وجود می‌آید، باید مسألهٔ وارون را حل کرد: باید خود کمیت را از روی سرعت تغییرش پیدا کرد، یعنی باید انتگرال گرفت. می‌توان گفت که نیوتن برای این‌که بتواند مکانیک را تکامل دهد *ناچار* بود که دیفرانسیل‌گیری و انتگرال‌گیری را کشف کند.

۴. همراه با حساب دیفرانسیل و انتگرال، رشته‌های دیگری هم در آنالیز به وجود آمد: نظریهٔ رشته‌ها (بخش دوم را ببینید)، نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی (بخشهای پنجم و ششم)، به‌کاربردن آنالیز در هندسه (که بعدها به رشتهٔ ویژه‌ای از هندسه تبدیل شد)، نظریهٔ عمومی خطها و رویه‌های منحنی به نام هندسهٔ دیفرانسیل (بخش هفتم)، و همهٔ این نظریه‌ها هم به وسیلهٔ مسأله‌های مکانیک، فیزیک و صنعت به وجود آمد و پیشرفت کرد.

نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی (یعنی مهم‌ترین بخش آنالیز)، با معادله‌هایی سروکار دارد که مجهول آن‌ها یک کمیت نیست، بلکه یک تابع است. یعنی منظور از حل معادلهٔ دیفرانسیلی یافتن قانون بستگی یک کمیت با کمیت یا کمیت‌های دیگر است. به سادگی می‌توان فهمید که این‌گونه مسأله‌ها از کجا به وجود می‌آید: در مکانیک باید قانون حرکت جسم را در شرایط داده شده معین کرد، نه مقدار مشخصی برای سرعت و یا مسافت. در مکانیک آب‌گونه‌ها باید انتشار سرعت را در تمام مایعی که در حال جریان است، یعنی بستگی بین سرعت با زمان و هر سه بعد فضا را پیدا کرد. به همین ترتیب در نظریهٔ الکتریسیته و مغناطیس باید فشار میدان را در تمام فضا، یعنی رابطهٔ این فشار را با سه بعد فضا پیدا کرد و غیره.

از این گونه مسأله‌ها همیشه در مکانیک (که شامل هیدرودینامیک و نظریهٔ قابلیت ارتجاع هم می‌شود) و در دانش صداشناسی و در نظریهٔ الکتریسیته و مغناطیس و در نظریهٔ گرما به وجود می‌آمد. به طور کلی، آنالیز از همان زمان به وجود آمدنش، دربستگی کامل با پیشرفت مکانیک و به طور کلی فیزیک تکامل یافت و بزرگترین موفقیت‌های آنالیز، همیشه به حل مسأله‌هایی بستگی داشته است که به وسیلهٔ این دانش‌ها مطرح می‌شده است. از زمان ***نیوتن***، بزرگترین دانشمندان آنالیز، یعنی د. ***برنولی*** (۱۷۰۰-۱۷۸۲)، ***ل. اولر*** (۱۷۰۷-۱۷۸۳)، ***ژ. لاگرانژ*** (۱۷۳۶-۱۸۱۳)، ***هانری پوانکاره*** (۱۸۵۴-۱۹۱۲)، م. و. ***استروگرادسکی*** (۱۸۰۱-۱۸۶۱)، ***آ. م. لیاپونوف*** (۱۸۵۷-۱۹۱۸) وعدهٔ زیاد دیگری در اثرهای خودشان به خاطر مسأله‌های حیاتی که در دانش‌های پایهٔ طبیعی زمانشان مطرح شده بود، راه‌های تازه‌ای در آنالیز گشودند.

نظریه‌های تازه، به این ترتیب به وجود آمد: ***اولر*** و ***لاگرانژ*** دربستگی مستقیم با مکانیک،

رشتهٔ تازه‌ای از آنالیز را به نام حساب واریانس (بخش هشتم) و در پایان سدهٔ نوزدهم، **پوانکاره** و ***لیاپونوف*** نظریهٔ کمیتی معادله‌های دیفرانسیلی را، که آن هم از مسأله‌های مکانیک سرچشمه می‌گرفت، به وجود آوردند (بخش پنجم).

در سدهٔ نوزدهم، آنالیز به وسیلهٔ رشتهٔ مهم تازه‌ای به نام نظریهٔ تابع‌های متغیر مختلط، غنی‌تر شد (بخش نهم). نطفه‌های این نظریه در کارهای *اولر* و بعضی ریاضیدان‌های دیگر وجود داشت، ولی در میانه‌های سدهٔ نوزدهم بود که به صورت یک نظریهٔ دقیق تنظیم شد و انجام‌گرفتن آن تا حد زیادی به **کوشی**، ریاضی‌دان فرانسوی (۱۷۸۹-۱۸۵۷)، مربوط می‌شود. این نظریه، به علت غنای درونی و به علت رخنهٔ عمیقی که در یک سلسله قانون‌های آنالیز کرد و در حل مسأله‌های مهم ریاضی و فیزیک و صنعت کاربرد پیدا کرد، به سرعت پیش رفت و اهمیت بسیار به دست آورد.

آنالیز، که با سرعت و شدت پیشرفت می‌کرد، نه تنها در مرکز ریاضی قرار گرفت و به صورت بخش عمده‌ای از آن درآمد، بلکه در کهن‌ترین رشته‌های ریاضی، یعنی جبر و هندسه و حتی نظریهٔ عددها هم رخنه کرد. از این به بعد، جبر را در اساس به عنوان علم تابع‌ها، تابع‌هایی به صورت چند جمله‌ای‌هایی از یک یا چند متغیر، می‌فهمیدند[1]. در مبحث هندسه هم، هندسهٔ تحلیلی و هندسهٔ دیفرانسیلی چیره شد. سرانجام *اولر* دستگاه آنالیز را در نظریهٔ تحلیلی عددها وارد کرد و بنای نظریهٔ تحلیلی عددها را گذاشت که پیشرفت آن موجب موفقیت‌های بزرگی در دانش مربوط به عددها شد.

از راه آنالیز و مفهوم‌های متغیر، تابع وحد، اندیشهٔ حرکت و تغییر، و بنابراین دیالکتیک، به همهٔ ریاضیات رخنه کرد. درست به همین ترتیب، ریاضیات به صورتی جدی از راه آنالیز تحت تأثیر دانش‌های طبیعت و صنعت قرار گرفت و خود ریاضی به عنوان دستگاه تنظیم دقیق قانون‌ها و راه حل مسأله‌های دانش‌های طبیعت، در پیشرفت آن‌ها شرکت کرد. همان طور که برای یونانی‌ها، ریاضیات در واقع، همان هندسه بود، همان طور هم می‌توان گفت که ریاضیات بعد از نیوتن در واقع آنالیز شد. البته، آنالیز همهٔ ریاضیات را به طور کامل در خود فرو نبرد. هندسه، نظریهٔ عددها و جبر همیشه مسأله‌ها و روش‌های ویژهٔ خود را نگه داشتند.

---

۱. تابع‌هایی که به صورت $y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ باشند. مسألهٔ اساسی جبر این دوره، حل معادلهٔ $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ بود، یعنی برای x باید مقداری پیدا کرد که به ازای آن تابع $y = a_0 x^n + a_1 x^{n+1} + \dots + a_n$ برابر صفر شود. خود این مطلب که چنین معادله‌ای دارای ریشه است، یعنی قضیهٔ اساسی جبر، به وسیلهٔ آنالیز ثابت می‌شود (بخش چهارم را ببینید).

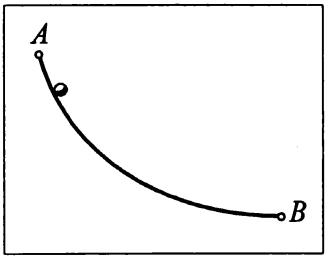
برای نمونه، در سدهٔ هفدهم، هم‌زمان با هندسهٔ تحلیلی، فصل دیگری از هندسه به نام هندسهٔ تصویری به وجود آمد که در آن، روش خالص هندسی تسلط دارد. سرچشمهٔ هندسهٔ تصویری عبارت است از نمایش یک شیء روی صفحه (تصویر). هندسهٔ تصویری به‌ویژه در هندسهٔ ترسیمی و رسم فنی کاربرد دارد.

در همان زمان، رشتهٔ مهم تازه‌ای در ریاضیات به نام نظریهٔ احتمال به وجود آمد. موضوع این نظریه عبارت است از بررسی قانون‌هایی که بر یک پدیده، ضمن تکرار پی‌درپی و متعدد آن (مثل یک رشته تیراندازی و یا پرتاب سکه) حاکم است. نظریهٔ احتمال در دوران اخیر، اهمیت زیادی در فیزیک و صنعت پیدا کرده است. شکفتگی و پیشرفت این دانش، هم به‌مسأله‌هایی‌که از دانش‌های طبیعت وصنعت ناشی شده‌است، و هم به استفاده ازروش‌های آنالیز بستگی دارد و در این پیشرفت دانشمندان روسی و شوروی نقش مؤثری داشته‌اند.

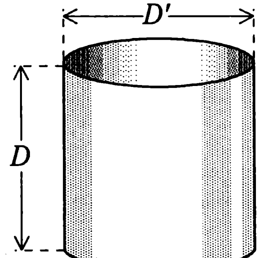
از ویژگی‌های خاص این نظریه آن است که در عین حال که با قانون‌های «روندهای تصادفی» سروکار دارد، آن چنان روش ریاضی به دست می‌دهد که به وسیلهٔ آن می‌توان به جست‌وجوی نیازهایی که به دنبال این روندها به وجود می‌آید، رفت. اصول نظریهٔ احتمال را در بخش یازدهم روشن خواهیم کرد.

۵. آنالیز و رشته‌های مختلف آن، روش‌های پرقدرتی برای حل مسأله‌های مختلف دانش‌های طبیعت و صنعت به دست داد؛ نخستین آن‌ها را به خاطر بیاوریم: پیداکردن سرعت تغییر یک کمیت وقتی که رابطهٔ بین خود کمیت و زمان معلوم باشد؛ تعیین مساحت شکل‌های منحنی‌الخط و حجم جسم‌ها؛ تعیین برآورد کلی یک جریان، یا عمل کلی یک کمیت متغیر. برای نمونه، حساب انتگرال اجازه می‌دهد عمل گاز را ضمن انبساط، وقتی که فشار طبق قانون معینی تغییر می‌کند، معین کنیم. همچنین بنابر قانون *کولُن*، که فشار میدان ناشی از بار نقطه‌ای را (یعنی باری که حجم حامل آن صفر فرض می‌شود) معین می‌کند، می‌توان به‌کمک حساب انتگرال، فشار میدان الکتریکی که دستگاه بارهای آن به اندازهٔ کافی پیچیده باشد، پیدا کرد و غیره.

سپس، آنالیز روش‌پیداکردن مقدارهای‌ماکزیمم و می‌نیمم را باشرط‌های‌مختلف به‌دست داد. برای مثال، به‌کمک آنالیز به سادگی می‌توان شکل مخزن استوانه‌ای را که برای حجم مفروض کمترین مساحت کل را داشته باشد، پیدا کرد و به‌این ترتیب حداقل مصالح را مصرف کرد: این وضع زمانی رخ می‌دهد که بلندی مخزن، برابر با قطر قاعدهٔ آن باشد (شکل ۱۰).



شکل ۱۱



شکل ۱۰

به‌کمک آنالیز می‌توان شکل مسیر بین دو نقطهٔ مفروض را پیدا کرد، به نحوی که جسمی بتواند در کمترین زمان ممکن از ابتدا تا انتهای آن بغلتد (این منحنی را سیکلوئید می‌نامند) (شکل ۱۱).

خواننده چگونگی حل این مسأله و مسأله‌های شبیه آن‌ها را در بخش‌های دوم و هشتم کتاب خواهد دید.

آنالیز، و یا اگر دقیق‌تر بگوییم، نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی، نه تنها امکان می‌دهد که مقدارهای ساده و جداگانهٔ کمیت‌های متغیر را پیدا کنیم، بلکه همچنین امکان پیدا کردن تابع مجهول، یعنی قانون بستگی کمیت‌هایی با کمیت‌های دیگر را هم به دست می‌دهد. برای نمونه، با توجه به قانون‌های عمومی جریان الکتریسیته می‌توانیم رابطهٔ شدت جریان با زمان را در مدار دلخواهی که مقاومت، ظرفیت و خودالقایی آن معین باشد به دست آوریم. می‌توانیم قانون‌های کلی نوسان تارها و پرده‌ها، قانون‌های انتشار نوسان‌ها در محیط‌های مختلف یعنی نوسان‌های مربوط به موج‌های صوتی، موج‌های الکترومغناطیسی و موج‌های دیگری که ضمن زمین‌لرزه‌ها و انفجارها در زمین منتشر می‌شود به دست آوریم، و این مطلب، روش‌های تازه‌ای برای کشف کانی‌ها و بررسی‌های زیرزمینی خاک‌ها، در اختیار ما می‌گذارد. خواننده مسأله‌های جداگانه‌ای از این قبیل را در بخش‌های پنجم و ششم خواهد دید.

سرانجام، آنالیز نه تنها روش‌های حل مسأله‌های مختلف را به دست می‌دهد، بلکه در عین حال روش‌های کلی و عمومی در اختیار ما می‌گذارد که به یاری آن‌ها می‌توانیم قانون‌های کمیتی دانش‌های پایه طبیعت را به شکل ریاضی بنویسیم. همان طور که پیش از این هم گفته شد، قانون‌های عمومی مکانیک را بدون استفاده از آنالیز نمی‌توان

به شکل ریاضی تنظیم کرد و بدون این تنظیم هم امکان حل مسأله‌های مکانیک وجود ندارد. به همین ترتیب قانون‌های کلی انتقال حرارت، نفوذ، انتشار نوسان‌ها، واکنش‌های شیمیایی، قانون‌های اساسی الکترومغناطیس و بسیاری دیگر، نمی‌تواند بدون مفهوم آنالیز به شکل ریاضی تنظیم شود. تنها به یاری چنین فرمول‌هایی است که می‌توان مبنای کاربرد این قانون‌ها را در حالت‌های مشخص پیدا کرد و در مسأله‌های مختلف مربوط به هدایت حرارت، نوسان‌ها، انحلال، میدان الکترومغناطیسی و در مسأله‌های مختلف مربوط به مکانیک، اخترشناسی، همهٔ رشته‌های مختلف فیزیک، شیمی، صنعت حرارتی، انرژی، ماشین‌سازی، الکتروتکنیک و غیره و غیره به نتیجه‌های ریاضی رسید.

۶. همان طور که در تاریخ هندسهٔ یونان، در پایان مسیر طولانی پیشرفت خود، بیان دقیق و منظم هندسه وسیلهٔ اقلیدس داده شد، همان طور هم پیشرفت آنالیز ایجاب می‌کرد که بر شالوده‌ای دقیق‌تر و منظم‌تر از آن‌چه نویسندگان نخستین آن، یعنی ***نیوتن***، ***اولر***، ***لاگرانژ***، و دیگران پایه‌گذاری کرده بودند، گذاشته شود. آنالیزی که این دانشمندان به وجود آوردند، اولاً روزبه‌روز مسأله‌های دشوارتر و عمیق‌تری را در بر می‌گرفت، ثانیاً خود حجم مطلب‌های آن، نظم بیشتر، شالودهٔ محکم‌تر و اصول عمیق‌تری را طلب می‌کرد. به این ترتیب پیشرفت کمیتی نظریه، به ناچار مسألهٔ تحکیم بیشتر پایه‌های آن و منظم‌کردن و تجزیه و تحلیل انتقادی اصل‌های آن را مطرح می‌کند. «تنظیم اصل‌ها» در نقطهٔ آغاز یک نظریه مطرح نمی‌شود، بلکه پس از آن‌که نظریه به درجهٔ معینی از پیشرفت برسد، یک چنین تنظیمی لازم می‌شود. زیرا بدون نظریه، معلوم نیست که اصل‌ها را برای چه چیزی باید تنظیم کرد. همان طور که انگلس در کتاب خود به نام «ضد دورینگ» می‌گوید: «اصل، نقطهٔ آغاز یک بررسی نیست، بلکه به عنوان نتیجهٔ نهایی به دست می‌آید». بعضی از پیروان امروزی «اصالت شکل» (فرمالیست‌ها) این موضوع را فراموش می‌کنند و بهتر می‌دانند که نظریه را بر پایهٔ اصل‌های آن طرح کنند و حتی تکامل دهند، بدون این‌که قبل از آن، از مضمون واقعی اصل‌ها، یعنی چیزی که باید به وسیلهٔ نظریه جمع‌بندی شود، سر درآورده باشند. ولی خود اصل‌ها، نیاز به پایه‌های مضمونی دارند، آن‌ها تنها بقیهٔ مواد اولیه‌ای را که برای آغاز ساختمان منطقی نظریه لازم است، به دست می‌دهند[1].

---

۱. این نقش دوگانه اصل‌های متعارفی گاهی حتی در نوشته‌هایی که جنبهٔ روش‌شناسی هم دارد از نظر می‌افتد ←

زمان انتقاد از آنالیز و منظم‌کردن و بنیانی‌کردن آن در میانه‌های سدهٔ نوزدهم به اجبار فرا رسید و با کوشش تعدادی از دانشمندان برجسته، این امر دشوار و مهم با موفقیت به پایان رسید و به ویژه تعریف‌های دقیقی از مفهوم‌های اساسی: عدد حقیقی، متغیر، تابع، حد و پیوستگی به دست آوردند.

ولی، همان‌طور که پیش از این هم یادآور شدیم، هیچ‌یک از این تعریف‌ها را نمی‌توان صددرصد دقیق و تمام شده دانست. پیشرفت این مفهوم‌ها ادامه دارد. *اقلیدس* و همهٔ ریاضی‌دانان، در جریان دوهزار سال بعد از او، کتاب «مقدمات» را با اطمینان، به تقریب سرحد دقت منطقی می‌دانستند، ولی اکنون و با آگاهی‌هایی که امروز داریم، اصل‌های هندسهٔ اقلیدسی سطحی به نظر می‌رسد. این نمونهٔ تاریخی به ما می‌آموزد که نباید دربارهٔ دقت «مطلق» و «کامل» ریاضیات امروز زیاده‌روی کنیم. در علمی که نمرده و به مومیایی تبدیل نشده است، هیچ چیز تمام شده‌ای وجود ندارد و نمی‌تواند وجود داشته باشد. ولی به هر حال می‌توانیم با اطمینان بگوییم که اولاً اصل‌های آنالیز که امروز پذیرفته شده است، به مسأله‌های کنونی دانش و به مفهوم موجود دقت منطقی جواب می‌دهد، به جز آن، عمیق‌تر شدن این مفهوم‌ها و بحث‌هایی که در اطراف آن‌ها جریان دارد، باعث دورانداختن این اصل‌ها نمی‌شود و نخواهد شد، بلکه در جهتی که درک آن‌ها دقیق‌تر و عمیق‌تر شود، پیش خواهد رفت. دربارهٔ نتیجه‌هایی که از این پیشرفت به دست خواهد آمد، هنوز نمی‌توان داوری کرد.

گرچه استقرار اصل‌های یک نظریه، در نتیجهٔ پیشرفت آن انجام می‌گیرد، ولی نمی‌توان آن را پایان نظریه دانست، بلکه برعکس به عنوان محرک تازه‌ای به نظریه خدمت خواهد کرد. در آنالیز هم همین طور است: همراه با دقیق شدن اصل‌های آن، نظریهٔ ریاضی تازه‌ای به نام نظریهٔ عمومی مجموعه‌های بی‌پایان (مجموعه‌هایی از چیزهای انتزاعی دلخواه، خواه مجموعه عددها باشد یا نقطه‌ها یا تابع‌ها و یا «چیز» دیگری از این قبیل) به وجود آمد. این نظریه ،به وسیلهٔ *ژرژ کانتور*، ریاضی‌دان آلمانی، در سال‌های ۷۰ سدهٔ ۱۹ به وجود آمد. بر پایهٔ این فکر، فصل تازه‌ای به نام نظریهٔ تابع‌های حقیقی در آنالیز پیدا شد، که دربارهٔ آن و هم دربارهٔ مفهوم اصل‌های آنالیز و نظریهٔ مجموعه‌ها در بخش پانزدهم بحث خواهد شد. در ضمن، اندیشهٔ کلی نظریهٔ مجموعه‌ها در همهٔ رشته‌های ریاضی رخنه می‌کرد. اما «دید نظری

→

و با این عمل اصل‌ها را به اشتباه به عنوان پایه‌های مطلق نظریه به حساب می‌آورند.

نسبت به مجموعه‌ها» به طور جدانشدنی، با دورهٔ تازه پیشرفت ریاضی مربوط است، دوره‌ای که دربارهٔ آن، هم اکنون صحبت خواهیم کرد.

۷. ریاضیات امروزی

۱. چهار دورهٔ پیشرفت ریاضیات که در پیش یادآور شدیم، با مرحله‌های آموزش ریاضی تطبیق می‌کند، به این ترتیب که جوهر اساسی هر یک از این دوره‌ها را می‌توان با سطح آموزش ریاضی در مرحله‌های مختلف تحصیلی، مقابله کرد.

همهٔ ما نتیجه‌های اساسی حساب و هندسه را که در نخستین دورهٔ پیشرفت ریاضیات به دست آمده است می‌دانیم، این نتیجه‌ها موضوع آموزش مقدماتی را تشکیل می‌دهد. برای نمونه: برای تعیین مقدار مصالحی که برای انجام کاری، و مثلاً فرش اتاق لازم است، از این نخستین نتیجه‌های ریاضی استفاده می‌کنیم.

مهم‌ترین موفقیت‌های دورهٔ دوم (دورهٔ ریاضیات مقدماتی)، موضوع آموزش دورهٔ دبیرستانی را تشکیل می‌دهد.

نتیجه‌های اساسی دورهٔ سوم (اصل‌های آنالیز، نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی، جبر عالی و غیره) موضوع اساسی آموزش ریاضی هر مهندسی است. این نتیجه‌ها، در برنامهٔ هر مدرسهٔ عالی و هر دانشکده‌ای به جز دانشکده‌های غیرتخصصی، به هر حال وجود دارد. بنابراین، فکرها و نتیجه‌های اساسی این دورهٔ ریاضیات، به تقریب برای همهٔ مهندسان و پژوهشگران دانش‌های طبیعی روشن است و کم و بیش مورد استفادهٔ آنها قرار می‌گیرد.

برعکس، اندیشه‌ها و نتیجه‌های دورهٔ اخیر پیشرفت ریاضیات، به طور اساسی تنها در دانشکده‌های ویژهٔ فیزیک و ریاضی بررسی می‌شود، به جز ویژه‌کاران ریاضی، کارکنان علمی در رشته‌های مکانیک، فیزیک و یک عده از رشته‌های صنعت جدید، از این نتیجه‌ها استفاده می‌کنند. البته، این به آن معنی نیست که این نتیجه‌ها از کاربرد عملی دورند، بلکه از آخرین نتیجه‌های پیشرفت دانش‌ها ناشی شده و بنابراین طبیعی است که پیچیده‌تر جلوه کنند. اکنون که می‌خواهیم ویژگی‌های عمومی دورهٔ اخیر پیشرفت ریاضیات را بررسی کنیم، نمی توانیم اطمینان داشته باشیم که همهٔ آن‌چه را که به طور فشرده خواهیم گفت روشن از آب در آید. کوشش می‌کنیم، تنها خط‌های اساسی رشته‌های تازهٔ ریاضی را یادآور شویم و

بحث گسترده‌تر آن‌ها را به بخش‌های مربوط وامی‌گذاریم.

اگر مطالعهٔ این بخش دشوار به نظر آید، خواننده می‌تواند از خواندن آن بگذرد و پس از آن‌که با بحث‌های ویژهٔ مربوط آشنا شد، به آن برگردد.

۲. آغاز دورهٔ امروزی، در پیشرفت ریاضیات، به وسیلهٔ دگرگونی‌های عمیقی که در همهٔ رشته‌های اساسی آن: جبر، هندسه و آنالیز پدید آمد، مشخص می‌شود. این دگرگونی در هندسه با روشنی بیشتری به چشم می‌خورد. در سال ۱۸۲۶، ***لباچوسکی*** و کم وبیش همزمان با او ***یانوش بایای***(این همان کسی است که فرانسوی‌ها او را ژان بولیه می‌نامند. ـ مترجم.) ریاضی‌دان مجارستانی، هندسهٔ تازهٔ نااقلیدسی را به‌وجود آوردند و تکامل دادند. ریاضی‌دان‌ها خیلی زود اندیشهٔ لباچوسکی را نفهمیدند. این اندیشه خیلی جسورانه و غیرقابل انتظار بود. ولی به‌ویژه، از همین زمان بود که پیشرفت تازهٔ هندسه آغاز و مفهوم آن عوض شد و موضوع و زمینهٔ کاربرد آن به سرعت گسترش یافت. اساسی‌ترین گامی که بعد از ***لباچوسکی*** در این جهت برداشته شد، در سال ۱۸۵۴ و به‌وسیلهٔ ریاضی‌دان مشهور آلمانی ***ریمان*** بود. ***ریمان*** اندیشه نامحدود بودن تعداد «فضاهایی» را که می‌تواند مورد بررسی هندسه قرار گیرد، منظم، و به امکان حقیقی‌بودن مفهوم آن‌ها، اشاره کرد.

دو ویژگی، پیشرفت تازهٔ هندسه را مشخص می‌کند.

نخست: اگر هندسه پیش از آن تنها شکل‌های ***فضایی*** و رابطه‌های جهان مادی را (تنها به همان اندازه که در چارچوب هندسهٔ اقلیدسی بازتاب می‌شد) بررسی می‌کرد، اکنون موضوع بررسی آن، گونه‌های دیگر شکل‌ها و رابطه‌های دنیای واقع است. رابطه‌هایی که تنها شباهتی با رابطه‌های فضایی دارد و به همین علت هم می‌توان برای بررسی آن‌ها از روش‌های هندسی استفاده کرد. به این ترتیب، اصطلاح «فضا» در ریاضیات مفهوم تازهٔ گسترده‌تر و در عین حال خاص‌تری پیدا کرد. در عین حال، خود روش‌های هندسی هم به مراتب غنی‌تر و همه جانبه‌تر شد. این روش‌ها، به نوبهٔ خود وسیلهٔ کامل‌تری برای شناخت فضای فیزیکی که ما را دربر گرفته است به دست می‌دهد، همان فضایی که هندسهٔ مقدماتی از آن منتزع شده بود.

دوم: حتی در هندسهٔ اقلیدسی هم دگرگونی‌های مهمی پیدا شد که امکان بررسی ویژگی‌های شکل‌های کاملاً پیچیده را (تا بررسی مجموعهٔ دل‌خواه نقطه‌ها)، به وجود آورد. همچنین برای بررسی ویژگی‌های شکل‌ها، روش تازه‌ای پیدا شد: ویژگی‌های جداگانه را منتزع می‌کنند و جدا از سایر ویژگی‌ها مورد بررسی قرار می‌دهند، و نیز این انتزاع در ***داخل***

هندسه هم رشته‌های خاصی به وجود می‌آورد که خودشان «هندسه‌های» مستقلی را تشکیل می‌دهند. پیشرفت هندسه در تمام این جهت‌ها ادامه دارد و موضوع آن بررسی «فضاهای» تازه و تازه‌تر و «هندسه‌های» مربوط به آن‌هاست: فضای لباچوسکی، فضای تصویری، فضاهای اقلیدسی و نااقلیدسی با بُعدهای مختلف و برای نمونه فضای چهار بُعدی، فضای ریمانی، فضای فینسلروفی، فضاهای توپولوژی و غیره. این نظریه‌ها کاربرد فراوان هم در ریاضیات (علاوه بر هندسه) و هم در فیزیک و مکانیک پیدا کردند، و نیز کاربردی جدی در نظریهٔ نسبیت، یعنی نظریهٔ فیزیک امروزی دربارهٔ فضا، زمان و جاذبه پیدا کرده‌اند. از آن‌چه گفته شد روشن می‌شود که گفت‌وگو بر سر تغییر کیفی هندسه است.

اندیشه‌های هندسهٔ امروزی و برخی موضوع‌های مربوط به بررسی‌های مختلف دربارهٔ فضاهای هندسی، در بخش‌های ۱۷ و ۱۸ روشن خواهد شد.

۳. در جبر هم، دگرگونی کیفی به وجود آمد: در نیمهٔ اول سدهٔ نوزدهم، نظریه‌های تازه‌ای طرح و منجر به تغییر جبر و گسترش موضوع و میدان کاربرد آن شد.

همان طور که گفته شد، جبر در پایهٔ نخستین خود عبارت بود از دانش عمل‌های حساب دربارهٔ عددها، ولی به صورت کلی و جدا از عددهای مشخص و مفروض. این انتزاع، به این ترتیب منعکس می‌شود که مقدارها را به وسیلهٔ حرف‌ها نمایش می‌دهند و به‌کمک آن‌ها، عمل‌هایی را از روی قانون‌های معین اجرا می‌کنند.

جبر امروزی، این پایه را نگه داشته و آن را بی‌اندازه گسترش داده است. در جبر امروزی، «کمیت‌ها» را با طبیعتی که خیلی کلی‌تر از طبیعت عددها است، بررسی می‌کنند. همچنین عمل‌هایی که روی این «کمیتها» انجام می‌شود، کم و بیش شبیه به ویژگی‌های ظاهری عمل‌های معمولی حساب یعنی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم است. ساده‌ترین نمونهٔ این کمیت‌ها، کمیت‌های بُرداری است و به طوری که می‌دانیم می‌توان طبق قانون متوازی‌الاضلاع روی آن‌ها عمل کرد. اما تعمیمی که در جبر امروزی صورت گرفته تا آن‌جا پیش رفته است که خود اصطلاح «کمیت» هم مفهوم خود را از دست داده است و به طور کلی دربارهٔ «چیزها» صحبت می‌شود و عمل‌هایی هم شبیه به عمل‌های جبر معمولی، روی آن‌ها انجام می‌گیرد. برای نمونه روشن است که دو حرکت، زمانی که یکی پس از دیگری انجام گیرد، هم ارز است با یک عمل جبری (که نتیجه‌ای از آن دو عمل است) و غیره. به این ترتیب، می‌توان دربارهٔ نوعی «جمع» که شامل جمع حرکت‌ها، عمل‌های جبری و غیره می‌شود صحبت کرد. جبر امروزی، همهٔ این‌گونه «جمع‌ها» و بسیاری دیگر از این قبیل را

به صورت کلی و انتزاعی بررسی می‌کند.

نظریه‌های تازهٔ جبر، که در این جهت پیش می‌رود، در نیمهٔ اول سدهٔ نوزدهم و در نتیجهٔ بررسی‌های یک عده از ریاضی‌دان‌ها مطرح شد که از میان آن‌ها به ویژه باید از ***گالوا***، ریاضی‌دان فرانسوی (۱۸۱۱-۱۸۳۲)، نام برد. مفهوم‌های جبر امروزی و روش‌ها و نتیجه‌های آن در آنالیز، هندسه، فیزیک، بلورشناسی و غیره، کاربرد اساسی پیدا کرده است، به ویژه *ا. س. فدورف* دانش تقارن بلورها را که پیش از این نام بردیم، با تکیه به ارتباط هندسه و یکی از نظریه‌های تازهٔ جبر به نام نظریهٔ گروه‌ها به وجود آورد و تکامل داد.

می‌بینیم که صحبت بر سر تعمیم اساسی و کیفی موضوع جبر و بر سر تغییر درک مفهوم جبر است (اندیشه‌های مربوط به جبر امروزی و برخی از نظریه‌های آن را در بخش‌های ۱۶ و ۲۰ خواهیم دید).

۴. آنالیز هم با تمام رشته‌هایش دگرگون شد. نخست همان طور که گفته شد اساس آنالیز دقیق‌تر شد و به ویژه مفهوم‌های اساسی آن: تابع، حد، انتگرال، و سرانجام مفهوم کمیت متغیر به شکل دقیق و عمیقی تعریف شد (تعریف دقیق عدد حقیقی هم داده شد). دقیق‌کردن اصل‌های آنالیز از کارهای ***بولتسانو*** ریاضی‌دان چک (۱۷۸۱-۱۸۴۸) و ***کوشی*** ریاضی‌دان فرانسوی (۱۷۸۹-۱۸۵۷) وعدهٔ دیگری از ریاضی‌دانها سرچشمه می‌گیرد. این دقیق‌کردن، مربوط به همان دوره‌ای است که پیشرفت تازهٔ جبر و هندسه هم در آن انجام گرفت و در سالهای ۸۰ سدهٔ نوزدهم به وسیلهٔ ریاضی‌دان‌های آلمانی ***وایرشتراس***، ***دِدکیند*** و ***کانتور***، تا اندازه‌ای به پایان رسید. همان طور که پیشتر هم گفته شد، شخص اخیر نظریهٔ مجموعه‌های بی‌پایان را که نقش بزرگی در پیشرفت تازهٔ ریاضی دارد بنیان نهاد.

دقیق‌کردن مفهوم‌های تابع و متغیر، همراه با نظریهٔ مجموعه‌ها، زمینه را برای پیشرفت بعدی آنالیز فراهم کرد: راه بررسی تابع‌های کلی‌تر هموار شد و دستگاه آنالیز، یعنی حساب دیفرانسیل و انتگرال هم، در همین جهت تعمیم پیدا کرد. به این ترتیب (همان طور که پیش از این یادآور شدیم) در آستانهٔ سدهٔ ما، فصل تازه‌ای به نام نظریهٔ تابع‌های با متغیر حقیقی در آنالیز به وجود آمد. پیشرفت این نظریه، بیش از همه مدیون ریاضی‌دان‌های فرانسه ***بورل***، ***له‌بگ*** و دیگران و پس از آن به ویژه مدیون *ن. ن. لوزینا* (۱۸۸۳-۱۹۵۰) و مکتب او می‌باشد. فصل‌های تازهٔ آنالیز را در مجموع «آنالیز امروزی» و فصل‌های پیشین را «آنالیز کلاسیک» نام گذاشته‌اند.

در آنالیز نظریه‌های تازهٔ دیگری هم به وجود آمد: برای نمونه، نظریهٔ تقریب تابعها، که

خود رشتهٔ ویژه‌ای است و مسأله‌های مربوط به بهترین نمایش تقریبی تابع‌های عمومی را به وسیلهٔ تابعهای مختلف «ساده» و در مرحلهٔ نخست به وسیلهٔ چند جمله‌ای‌ها، یعنی تابع‌هایی به صورت:

$$a_۰x^n + a_۱x^{n-۱} + \cdots + a_{n-۱}x + a_n$$

بررسی می‌کند.

نظریهٔ تقریب تابع‌ها، دست کم از این جنبه که اصل‌های کلی برای محاسبهٔ عملی تابع‌ها و تغییر تقریبی تابع‌های ساده به دست می‌دهد، دارای اهمیت بسیار زیاد است. نطفه‌های این نظریه از همان زمان به وجود آمدن آنالیز وجود داشت، ولی ریاضی‌دان بزرگ روس ***پافنونی چبیشف*** (۱۸۲۱- ۱۸۹۴) بود که مسیر کنونی را به آن داد. این نظریه، بعدها پیش رفت و به نظریهٔ ترکیبی تابع‌ها تبدیل شد و این پیشرفت هم بیش از همه مدیون کارهای ریاضی‌دان‌های شوروی و به ویژه س. *ن.* **برنشتین** (متولد ۱۸۸۰) می‌باشد. تقریب تابع‌ها در بخش ۱۲ شرح داده شده است.

بالاتر، از پیشرفت نظریهٔ تابع‌های متغیر مختلط گفت‌وگو کردیم. اکنون لازم است که از نظریهٔ کیفی معادله‌های دیفرانسیلی، که برداشت نخستین آن از کارهای ***پوانکاره*** (۱۸۵۴-۱۹۱۲) و ***لیاپونوف*** (۱۸۵۷-۱۹۱۸) سرچشمه می‌گیرد (و دربارهٔ مفهوم آن در بخش پنجم این کتاب صحبت خواهد شد)، و هم از نظریهٔ معادله‌های انتگرالی و غیره نام ببریم. نظریه‌های اخیر اهمیت عملی زیادی در مکانیک، فیزیک و صنعت دارد. از جمله نظریهٔ کیفی معادله‌های دیفرانسیلی، مسأله‌های مربوط به تعادل حرکت، کار دستگاه‌های مکانیکی، دستگاه‌های نوسان‌های الکتریکی و غیره را حل می‌کند. مفهوم کلی پایداری یک روند به این معنی است که اگر در داده‌ها و یا شرایط نخستین آن تغییر کوچکی بدهیم، در جریان روند و در تمام دستگاه آن، در دورانی که وجود دارد، تغییرهای کوچکی به وجود می‌آید. اهمیت مسأله‌هایی از این قبیل در صنعت نیازی به بیان ندارد.

۵. در زمینهٔ پیشرفت آنالیز و فیزیک ریاضی، که با اندیشه‌های تازهٔ هندسه و جبر به هم آمیخته است، رشتهٔ تازه و گسترده‌ای به نام آنالیز تابعی (فونکسیونل) به وجود آمد که نقش بسیار مهمی در ریاضیات امروزی بازی می‌کند. در ایجاد این رشتهٔ آنالیز، دانشمندان زیادی شرکت داشته‌اند که از میان آن‌ها می‌توان برای نمونه از ***هیلبرت***، ریاضی‌دان بزرگ آلمانی (۱۸۶۲-۱۹۴۳) و ***ریس***، ریاضی‌دان مجارستانی (۱۸۸۰- ۱۹۵۶) و ***باناخ***، ریاضی‌دان

لهستانی (۱۸۹۲ـ ۱۹۴۵) نام برد. دانشمندان جوان شوروی هم به نتیجه‌های مهمی که مربوط به فیزیک و ریاضی است، در این رشته رسیده‌اند. بخش نوزدهم ویژه آنالیز تابعی است.

ماهیت این بخش تازهٔ ریاضیات به طور خلاصه چنین است: اگر در آنالیز کلاسیک، متغیر عبارت از یک کمیت (عدد) است، در آنالیز تابعی، خود تابع به عنوان متغیر بررسی می‌شود. در این‌جا ویژگی تابع‌های داده شده، نه به خودی خود، بلکه به وسیلهٔ رابطهٔ این تابع‌ها با تابع‌های دیگر معین می‌شود. بنابراین در آنالیز تابعی، تابع‌های جداگانه و مشخص، بررسی نمی‌شوند، بلکه یکباره مجموعهٔ همهٔ تابع‌هایی که دارای این و یا آن ویژگی مشترک هستند (و از جمله همهٔ تابع‌های پیوسته)، بررسی می‌شود. چنین مجموعه‌ای از تابع‌ها، در فضای موسوم به «فضای تابعی» به هم می‌پیوندد. این مطلب شبیه به آن است که ما بتوانیم مجموعهٔ همهٔ منحنی‌های روی یک صفحه، و یا همهٔ حرکت‌های ممکن در دستگاه مکانیکی مفروضی را بررسی کنیم و ویژگی‌های منحنی‌ها و یا حرکت‌های جداگانه را، از روی رابطه‌هایی که با سایر منحنی‌ها و یا سایر حرکت‌ها دارد، معین کنیم.

گذار از بررسی و یا جست‌وجوی تابع‌های منفرد به بررسی ***تابع‌های متغیر***، شبیه به گذار از عددهای مجهول x و y به x و y **متغیر**، یعنی شبیه به اندیشهٔ دکارت است که پیش‌تر به آن اشاره کردیم. براساس همین اندیشه‌ها بود که دکارت، جبر و هندسه، یعنی معادله و منحنی را به هم پیوند داد، کوششی که می‌توان آن را یکی از عامل‌های تعیین‌کننده، در به وجود آمدن آنالیز دانست.

امروز هم به هم پیوستن مفهوم تابع‌های متغیر با اندیشه‌های جبر و هندسهٔ امروزی، آنالیز تابعی را به وجود آورد. همان طور که آنالیز، برای پیشرفت مکانیک آن زمان لازم بود، آنالیز تابعی هم روش‌های تازه‌ای برای حل مسأله‌های فیزیک ـ ریاضی به دست داد و شامل یک دستگاه ریاضی برای مکانیک اتمی و کوانتایی بود. تاریخ تا حد معینی تکرار می‌شود، ولی به شکلی تازه و در سطحی بالاتر. همان طور که گفتیم آنالیز تابعی، اندیشه‌ها و روش‌های اساسی آنالیز را با جبر و هندسه به هم آمیخت و به نوبهٔ خود در پیشرفت آنالیز تأثیر کرد. مسأله‌های مربوط به آنالیز کلاسیک، امروز راه‌حل‌های تازه‌تر و همه‌گیرتری، به وسیلهٔ آنالیز تابعی به دست می‌آورد. آنالیز تابعی مانند کانونی است که اندیشه‌های عمومی و انتزاعی ریاضیات امروزی در آن جمع می‌شود و نتیجه‌های عملی به بار می‌آورد.

با همین نظر کوتاه و با همین شمردن مسیرهای تازهٔ آنالیز (نظریهٔ تابع‌های متغیر حقیقی،

نظریهٔ تقریب تابع‌ها، نظریهٔ کیفی معادله‌های دیفرانسیلی، نظریهٔ معادله‌های انتگرالی و آنالیز تابعی)، می‌توان فهمید که در واقع صحبت برسر دوره‌ای است که در آن پیشرفت آنالیز در راهی که به‌کلی و از پایه تازه است قدم گذاشته است.

۶. همیشه، سطح فنی روش‌های محاسبه، در خود روش‌های ریاضی تأثیر اساسی داشته است. وسیله‌های محاسبه‌ای که تا همین گذشتهٔ نزدیک در اختیار داشتیم، خیلی محدود بود. ساده‌ترین وسیله‌های مربوط به محاسبه یعنی جدول‌های لگاریتم و خط‌کش‌های لگاریتمی، ماشین‌حساب و سرانجام ماشین‌های محاسبه‌ای ـ تحلیلی و ماشین‌های حساب خودکار، این‌ها تنها وسیله‌های محاسبه‌ای هستند که در سال‌های ۴۰ سدهٔ بیستم وجود داشته است. این وسیله‌ها، انجام کم و بیش سریع عمل‌های جداگانه (جمع، ضرب و غیره) را تأمین می‌کرد. اما برای به دست آوردن نتیجهٔ عددی مسأله‌هایی که طرح می‌شد، گاهی لازم بود که تعداد بسیار زیادی عمل‌های شبیه به هم انجام دهیم. این عمل‌ها اغلب ضمن به دست آوردن نتیجه‌ها و طبق برنامهٔ پیچیده‌ای طرح می‌شد و به این ترتیب، حل چنین مسأله‌هایی، یا غیرعملی بود و یا این‌که پس از تقسیم راه‌حل به راه‌حل‌های ساده‌تر، و پس از یک رشته عمل‌های طولانی و مفصل، به دست می‌آمد.

در دهه‌های اخیر، و جلو چشمان ما، تمامی سطح فنی روش محاسبه از ریشه و اساس تغییر می‌کند. ماشین‌های تازه براساسی تازه ساخته شده است و می‌توانند محاسبه‌های مفصل و پیچیده‌ای راکه از پیش برای ماشین برنامه‌ریزی شده است با برنامه‌ای انعطاف‌پذیر و به طور خودکار و با سرعت بسیار زیاد، انجام دهند. بعضی مطلب‌های مربوط به ساختمان و اهمیت ماشین‌های حساب امروزی در بخش چهاردهم بیان شده است.

صنعت تازه، نه تنها محاسبه‌هایی راکه در پیش غیرعملی به نظر می‌رسید، در دسترس می‌گذارد، بلکه ما را وادار می‌کند که ارزیابی خود را نسبت به بسیاری از نتیجه‌های مشخص ریاضی عوض کنیم.

به‌کمک صنعت تازه، به‌ویژه روش‌های تقریبی پیشرفت می‌کند، روش‌هایی که امکان می‌دهد به وسیلهٔ یک رشته عمل‌های مقدماتی، به نتیجهٔ عددی لازم، با تقریب دلخواه برسیم. و نیز خود این روش‌ها هم باید از نظر راحتی اجرای آن‌ها در ماشین‌های مربوط ارزیابی شود.

منطق ریاضی هم‌بستگی ناگسستنی با پیشرفت روش تازهٔ محاسبه دارد. منطق ریاضی، پیش از همه به خاطر نیازهای درونی ریاضی، که مربوط به دشواری‌های موجود در آن

است، پیشرفت می‌کند و موضوع آن عبارت است از تجزیه و تحلیل استدلال‌های ریاضی. منطق ریاضی، در عین حال که خود بخشی از ریاضیات است، شامل آن بخش از منطق عمومی هم می‌شود، که بتواند روش‌های ریاضی را پیشرفت دهد و به طور عینی تنظیم کند.

منطق ریاضی، ضمن این‌که از یک سو با سرچشمه و بنیان ریاضیات سروکار دارد، از سوی دیگر بستگی استواری با مسأله‌های تازهٔ فن محاسبه دارد. از جمله، طبیعی است استدلالی که منجر به ایجاد یک روند معین می‌شود تا به وسیلهٔ آن بتوانیم به نتیجهٔ لازم و با دقت دلخواه نزدیک شویم، با استدلال انتزاعی‌تری، که وجود این و یا آن نتیجه را ثابت می‌کند، به طور اساسی تفاوت دارد.

مسأله‌هایی هستند که با یک روش معین به نتیجهٔ واحدی می‌رسند و به این ترتیب موضوع مرز عمومی‌بودن این‌گونه مسأله‌ها هم پرسش‌هایی به وجود می‌آورد. از این راه هم نتیجه‌های عمیقی در منطق ریاضی به دست می‌آید که از دیدگاه شناخت به طور کلی، دارای اهمیت فراوانی است.

گزافه نیست اگر بگوییم که در ریاضیات امروزی، با توجه به فن تازهٔ محاسبه و با موفقیت‌های منطق ریاضی، دورهٔ تازه‌ای به وجود می‌آید که موضوع آن نه تنها چیزهای مختلف است، بلکه راه‌ها و شکل‌هایی هم که به وسیلهٔ آن‌ها بتوان این چیزها را معین کرد، جزو موضوع آن می‌شود. نه تنها مسأله‌های مختلف، بلکه وسیله‌های ممکن راه‌حل آن‌ها را هم دربر می‌گیرد.

به آن‌چه گفتیم باید اضافه کنیم که رشته‌های کهن‌تر ریاضی نظریهٔ عددها، هندسهٔ اقلیدسی، جبر و آنالیز کلاسیک و نظریهٔ احتمال هم در تمام دورهٔ ریاضیات امروزی با شدت تمام به وسیلهٔ اندیشه‌ها و نتیجه‌های تازه‌ای پیشرفت می‌کند و همه‌گیرتر می‌شود. از جمله اندیشه‌ها و نتیجه‌هایی که در نظریهٔ عددها و هندسه، به وسیلهٔ ریاضی‌دانان، ***چبیشف***، ***فِدورف***، ***ویناگرادوف*** و دیگران وارد شده است؛ همچنین پیشرفت گستردهٔ نظریهٔ احتمال مربوط به قانون‌های اساسی فیزیک آماری و مسأله‌های صنعت امروزی را، می‌توان یادآور شد.

۷. کلی‌ترین خط‌های مشخص‌کنندهٔ ریاضیات امروزی، که ضمن بررسی پیشرفت هندسه، جبر و آنالیز ظاهر می‌شود، کدام است؟

پیش از هر چیز باید از گسترش بی‌اندازهٔ موضوع ریاضیات و گسترش میدان کاربرد آن نام برد. یک چنین گسترش موضوع و میدان کاربرد، به معنای آن است که ریاضیات به طور

کمّی و کیفی بسیار رشد کرده و نظریه‌ها و روش‌های نیرومند تازه‌ای به وجود آورده است که اجازه می‌دهد مسأله‌هایی را که ناگشودنی به نظر می‌رسید، حل کنیم. گسترش موضوع ریاضیات، پیش از همه، از این‌جا مشخص می‌شود که ریاضیات امروزی دانسته و با شعور کامل، بررسی گونه‌های ممکن رابطه‌های کمّی و شکل‌های فضایی را در مقابل خود قرار داده است.

ویژگی دیگر ریاضیات امروزی این است که مفهوم‌های تازهٔ عام و کلی، که در سطح بالاتری از انتزاع قرار دارد، به‌وجود می‌آورد و به‌ویژه، همین خصلت آن است که یک‌پارچگی و یگانگی ریاضیات را، با وجود رشته‌های گوناگونی که دارد، حفظ می‌کند.

مفهوم‌ها و نظریه‌های کلی و عام، یگانگی و کلیت را در رشته‌هایی که از یکدیگر دورند، تأمین می‌کند؛ همین مفهوم‌ها و نظریه‌ها هستند که به روش‌ها کلیت می‌دهند و کاربرد رشته‌های اساسی ریاضیات، یعنی هندسه و جبر و آنالیز و تأثیر متقابل و عمیق آن‌ها را در یکدیگر تأمین می‌کنند.

چیرگی دیدگاه «نظریه‌ای ـ مجموعه‌ای» را هم باید به عنوان ویژگی ریاضیات امروزی یادآور شد. البته این دیدگاه به این علت اهمیت پیدا می‌کند که مصالحی را که در اثر تکامل پیشین ریاضیات انباشته شده است، جمع‌بندی می‌کند.

سرانجام، یکی از خط‌های مشخص‌کنندهٔ ریاضیات امروزی عبارت است از تجزیه و تحلیل عمیق‌تر بنیان‌های آن، تجزیه و تحلیل مفهوم ساختمان نظریه‌های جداگانهٔ آن و تجزیه و تحلیل خود روش‌های اثبات نتیجه‌گیری‌های ریاضیات. بدون یک چنین تجزیه و تحلیلی، خود نظریه‌ها و اصل‌های تعمیم دهندهٔ ریاضیات، نمی‌توانست تکمیل شود و به پیشرفت خود ادامه دهد.

ویژگی اساسی و تعیین‌کنندهٔ ریاضیات امروزی را باید در این دانست که موضوع آن تنها رابطه‌های کمّی داده شده نیست، بلکه هرگونه رابطه‌های کمّی و شکل‌های ممکنه هم مورد بحث آن است. در هندسه، نه تنها صحبت برسر رابطه‌ها و شکل‌های فضایی، بلکه برسر هرگونه رابطه‌ها و شکل‌های ممکنی که تنها شبیه رابطه‌ها و شکل‌های فضایی هستند، نیز می‌باشد. در جبر گفت‌وگو برسر دستگاه‌های مختلف چیزهای مجرد، و قانون‌هایی که می‌توان روی آن‌ها اعمال کرد، می‌باشد. در آنالیز، نه تنها کمیت، بلکه خود تابع هم به عنوان متغیر بررسی می‌شود. در فضای تابعی، همهٔ تابع‌هایی که از گونه‌های مختلف باشند، یعنی هرگونه رابطهٔ ممکن بین متغیرها، یک‌جا بررسی می‌شود.

بنابراین، به طور خلاصه می‌توان گفت که اگر ریاضیات مقدماتی ریاضیات کمیت‌های ثابت. و ریاضیات دورهٔ بعد از آن ریاضیات کمیت‌های متغیر است، ***ریاضیات امروزی، ریاضیات گونه‌های متفاوت رابطه‌های کمّی متغیر و گونه‌های متفاوت ارتباط بین کمیت‌ها است.***

البته این تعریف کامل نیست، ولی شامل خصلتی از ریاضیات امروزی است که تفاوت کیفی آن را با ریاضیات دوره‌های پیشین نشان می‌دهد.

۸. جوهر و درون‌مایهٔ ریاضیات

۱. اکنون با توجه به آن‌چه گفته شد می‌توان به نتیجه‌های کلی دربارهٔ ماهیت ریاضیات رسید. ماهیت ریاضیات در یکی از بخش‌های «***ضد دورینگ***» بیان شده است و ما در این‌جا این تکهٔ جالب را نقل می‌کنیم. خواننده در این تکه به سادگی همان چیزی را می‌بیند که ما دربارهٔ حساب و هندسه پیش از این آوردیم. علت این مطلب روشن است، ما برای فهم تاریخ واقعی به وجود آمدن و پیشرفت ریاضیات، منطق دیالکتیک را راهنمای خود قرار دادیم. دیالکتیک، به ویژه به این علت ما را به نتیجه‌گیری‌های درست می‌رساند که هیچ چیز را به حقیقت تحمیل نمی‌کند، بلکه واقعیت‌ها را همان طور که هستند، یعنی رابطه‌ها و پیشرفت‌های ضروری آن‌ها را بررسی می‌کند.

انگلس نوشتهٔ خود را با ملاحظهٔ انتقادی دربارهٔ نظریه‌های پوچ **دورینگ** و به ویژه دربارهٔ این نظریهٔ اشتباه که گویا ریاضیات زاییدهٔ «ذهن خالص» است و به آزمایش بستگی ندارد، آغاز می‌کند. او می‌نویسد:

«کاملا اشتباه است اگر بگوییم که در ریاضیات خالص، اندیشه، تنها با آفرینش‌ها و گمان‌های خود سروکار دارد. مفهوم‌های عدد و شکل، از جایی جز از جهان واقعی گرفته نشده است. ده‌انگشت که انسان شمردن، یعنی نخستین عمل حساب را روی آن‌ها یاد گرفت، همه چیزی هست جز محصولی که مخلوق خود فکر باشد. برای شمردن، نه تنها باید چیزهایی داشته باشیم که آن‌ها را بشماریم، بلکه باید این آمادگی را هم داشته باشیم که ضمن بررسی این چیزها، هر ویژگی دیگری به جز شمار را از آن جدا کنیم و این آمادگی هم در نتیجهٔ پیشرفت تاریخی طولانی، که به آزمایش متکی باشد، به دست می‌آید. مفهوم شکل هم، مانند مفهوم عدد، تنها از دنیای خارج به دست آمده است و در مغز و از اندیشهٔ خالص

پدید نیامده است. پیش از این‌که بتوان به مفهوم شکل رسید، باید چیزهایی با شکل معین موجود باشد و این شکل‌ها نیز با یکدیگر مقایسه شده باشد. موضوع ریاضیات، عبارت است از شکل‌های فضایی و رابطه‌های کمّی دنیای واقع؛ یعنی موضوع آن، از مصالح واقعی درست شده است.

این واقعیت، که این مصالح به صورت بیش از اندازه انتزاعی درمی‌آید، تنها به طور سطحی می‌تواند این مطلب را که سرچشمهٔ آن، جهان واقعی خارج است پنهان کند: اما برای این‌که بتوان این شکل‌ها و رابطه‌ها را به صورت خالص بررسی کرد، لازم است آن‌ها را از محتوای خود به‌کلی جدا کرد و این محتوا را به عنوان چیزی که کاربرد ندارد، کنار گذاشت. با این روش، نقطه‌های بدون بعد، خط‌های بدون ضخامت و پهنا و aها و bها و xها و yها ـ کمیت‌های ثابت و متغیر را به دست می‌آوریم، و تنها پس از این‌هاست که به محصول‌های آزاد مخلوق خود فکر و تصورهای آن، و به‌ویژه به‌کمیت‌های موهومی می‌رسیم. درست به همین ترتیب، نتیجه گرفتن کمیت‌های ریاضی از یکدیگر، که حضوری به نظر می‌رسد، حضوری بودن سرچشمهٔ آن‌ها را ثابت نمی‌کند، بلکه تنها عقلانی بودن رابطه‌های آن‌ها را ثابت می‌کند. پیش از رسیدن به این فکر که **شکل** استوانه را از دوران مستطیل دور یکی از ضلع‌های آن به دست آوریم، باید تعدادی مستطیل‌ها و استوانه‌های حقیقی را، ولو این‌که به شکل کاملشان هم نباشد، بررسی کرده باشیم. ریاضیات نیز مانند همهٔ دانش‌های دیگر، از ***نیازهای عملی انسان***، از اندازه‌گیری رویهٔ تکه زمین‌ها و گنجایش ظرف‌ها، از محاسبهٔ زمان و از مکانیک به‌وجود آمده است. اما مانند سایر رشته‌هایی که مربوط به اندیشه‌اند، قانون‌هایی که از دنیای واقعی سرچشمه می‌گیرد، در درجهٔ معینی از پیشرفت خود، از دنیای واقعی جدا می‌شود و به عنوان چیزی مستقل، به عنوان قانون‌هایی که از خارج پدید آمده است و جهان باید خود را با آن‌ها تطبیق دهد، رو به روی دنیای واقع قرار می‌گیرد. همان طور که دربارهٔ اجتماع و حکومت درست است، ریاضیات ***خالص*** هم بعدها دربارهٔ جهان به‌کار برده می‌شود. ریاضیات خالص از خود جهان به‌وجود آمده است و تنها بخشی از شکل بستگی‌های مربوط به آن را بازتاب می‌دهد و به‌ویژه به همین مناسبت است که در اساس می‌تواند کاربرد پیدا کند.

۲. به این ترتیب نویسندهٔ «ضد دورینگ» تأکید می‌کند که ریاضیات بازتاب‌کنندهٔ واقعیت است و تأکید می‌کند که ریاضیات از نیازهای عملی مردم به وجود آمده و نخستین مفهوم‌ها و کاربردهای آن در نتیجهٔ پیشرفت تاریخی طولانی که متکی بر آزمایش است به دست آمده

است و ما این مطلب را به طور گسترده‌تری روی نمونهٔ حساب و هندسه دنبال کردیم.

ما به ویژه پذیرفتیم که مفهوم‌های عدد، کمیت و شکل هندسی، به همین ترتیب به وجود آمده است و این مفهوم‌ها رابطه‌های کمّی واقعی و شکل‌های فضایی واقعیت را بازتاب می‌دهند. درست به همین ترتیب، مفهوم‌های اساسی آنالیز هم بازتابی از رابطه‌های کمّی دنیای واقعی هستند. این مفهوم‌ها به تدریج و براساس مصالح مشخص زیادی، روی هم انباشته شده است، از جمله، مفهوم تابع، شکل انتزاعی وابستگی‌های مختلف بین کمیت‌های واقعی را، به طور کلی، بازتاب می‌دهد.

انگلس با جمع‌بندی همهٔ این‌ها به این نتیجهٔ اساسی می‌رسد که: ***موضوع ریاضیات، مصالح معین کاملاً واقعی است، ولی ریاضیات این مصالح را جدا از محتوای مشخص و ویژگی‌های کیفی آن‌ها بررسی می‌کند.*** و در همین جاست که ریاضیات از دانش‌های طبیعی جدا می‌شود.

امکان این‌که موضوع ریاضیات را به روش انتزاعی بررسی کنیم، در خودِ موضوع ریاضیات پایه‌ای عینی دارد. این شکل‌ها، نسبت‌ها، رابطه‌های متقابل و قانون‌هایی که مستقل از ویژگی‌های کیفی و یا محتوای مشخص آن‌ها در ریاضیات بازتاب می‌شود، به طور عینی و جدا از اندیشهٔ ما وجود دارد، تنها به این علت که عدد به منزلهٔ ویژگی عینی مجموعهٔ چیزهاست و به این علت که رابطه‌های بین عددها، جدا از ویژگی‌های کیفی چیزهاست و به سبب غنای رابطه‌هاست که به وجود آمدن حساب ممکن شده است. جایی که یک چنین شکل‌ها و رابطه‌های کلی، شکل‌ها و رابطه‌هایی که جدا از محتوای آن‌ها باشد، وجود نداشته باشد، بررسی ریاضیات هم ممکن نیست.

۳. ویژگی اساسی که برای ریاضیات یادآور شدیم، ویژگی‌های دیگری که خصلت ریاضیات را معین می‌کند و ما در بند دوم این بخش، بعضی از آن‌ها را به طور خاص، روی نمونهٔ حساب بررسی کردیم، به دنبال دارد. این ویژگی‌ها عبارت‌اند از «زبان فرمولی» ویژهٔ ریاضی، گسترش کاربرد آن، و این‌که نتیجه‌گیری ریاضی، جدا از آزمایش به دست می‌آید و سرانجام ویژگی الزامی‌بودن و متقاعد کننده بودن این نتیجه‌گیری‌ها.

این ویژگی ریاضیات، که موشکاف و دقیق است، همیشه از ویژگی‌های اساسی ریاضی بوده است و به همین علت آن را گسترده‌تر بررسی می‌کنیم.

اگر مفهوم عدد را، از جنبهٔ مشخص آن جدا کنیم و عددهای درست را به طور کلی و صرف‌نظر از رابطه‌هایی که با این و یا آن مجموعهٔ مشخص دارد بررسی کنیم، به خودی خود

روشن است که نخواهیم توانست دربارهٔ چنین عددهای انتزاعی، آزمایش کنیم. اگر در این سطح انتزاعی بمانیم و به چیزهای مشخص برنگردیم، تنها از روش استدلال، استدلالی که از خود مفهوم عدد سرچشمه می‌گیرد، می‌توان به نتیجه‌های تازه‌ای دربارهٔ عددها رسید. البته همهٔ نتیجه‌گیری‌ها دیگر ریاضیات هم به همین ترتیب‌اند. اگر در مرزهای هندسهٔ خالص باقی بمانیم، یعنی اگر شکل‌های هندسی را به صورت انتزاعی، انتزاع از هرگونه مضمون کیفی و مشخص، بررسی کنیم، به جز روش استدلالی که از خود **مفهوم** این و یا آن شکل و از خود مفهوم‌های بنیانی و یا اصل‌های هندسی ناشی شده باشد، راه دیگری برای رسیدن به نتیجه‌های تازه وجود نخواهد داشت. از جمله، ویژگی دایره، به عنوان مکان هندسی نقطه‌هایی که از یک نقطهٔ داده شده به یک فاصله‌اند، از خود مفهوم گردی گرفته شده است. هیچ‌کس دربارهٔ تحقیق درستی یک قضیه به روش آزمایش، حتی فکر هم نمی‌کند.

بنابراین ویژگی انتزاعی‌بودن ریاضیات، این حقیقت را از پیش مشخص می‌کند که قضیه‌های ریاضی، ***تنها از راه استدلالی که ناشی از خود مفهوم‌های ریاضی است، اثبات می‌شود.***

می‌توان گفت که ریاضیات، رابطه‌های کمّی را با توجه به آن‌چه در تعریف‌های آن‌ها وجود دارد بررسی می‌کند. بنابراین نتیجه‌گیری‌های ریاضی را از روش استدلالی که از تعریف سرچشمه می‌گیرد، به دست می‌آورند. البته این مطلب را نباید به طور سطحی فهمید و گمان کرد که پیش از به وجود آمدن نظریهٔ ریاضی، تعریف‌های دقیق و منظمی از مفهوم‌های آن نظریه وجود دارد. در حقیقت، خود مفهوم‌ها همراه با پیشرفت نظریه، و در نتیجهٔ این پیشرفت، دقیق‌تر می‌شود. تحلیل عمیق مفهوم عدد درست، و همچنین تنظیم دقیق اصل‌های هندسی، در آخرهای سدهٔ نوزدهم داده شد، نه در دوران کهن. اشتباه است، اگر گمان کنیم که گویا مفهوم معین و دقیقی در ریاضیات وجود دارد. هر مفهومی، گرچه از نظر تعریف دقیق به نظر برسد، باز هم تغییر می‌کند و همراه با پیشرفت دانش، تکامل می‌یابد و دقیق‌تر می‌شود. پیشرفت ریاضیات، نه تنها در این‌باره، بلکه دربارهٔ تمام مفهوم‌های ریاضیات مؤید این نظر است و به این ترتیب یکبار دیگر، این اصل اساسی دیالکتیک ثابت می‌شود که در جهان هیچ چیز بدون حرکت و بدون روند پیشرفت وجود ندارد. بنابراین دربارهٔ مفهوم‌های ریاضی هم باید گفت که نخست، تا حدی که برای ما کافی است، مشخص‌اند نه به طور کامل. دوم، دقت و روشنی تعریف‌ها و عمق تجزیه و تحلیل آن‌ها، ضمن پیشرفت ریاضیات، به سوی کمال می‌رود. دربارهٔ تغییر مفهوم‌های ریاضی، در

قسمت بعدی این بخش گفت‌وگو خواهیم کرد و اکنون با توجه به آن‌چه که گفته شد، به ویژه روی این مسأله تکیه می‌کنیم که این مفهوم‌ها تا آن حد که برای ما کافی است، مشخص‌اند.

به ویژه، همین مشخص‌بودن مفهوم‌های ریاضیات همراه با منطق (منطقی که همه‌جا کارایی خود را نشان می‌دهد)، این ویژگی را برای ریاضیات به وجود آورده است که نتیجه‌گیری‌های آن متقاعدکننده است و ضرورت منطقی دارد. همین ضروری‌بودن نتیجه‌گیری‌های ریاضی است که زمینه را برای این تصور اشتباه فراهم آورده است که گویا پایهٔ ریاضیات بر تفکر خالص گذاشته شده است و گویا ریاضیات علمی حضوری است و از آزمایش به دست نیامده است و گویا واقعیت‌ها را بازتاب نمی‌دهد. ***کانت*** فیلسوف مشهور آلمانی هم به همین نتیجه‌ها رسید. این یک تصور کاملاً اشتباه و غیرعلمی است که به ویژه ناشی از آن است که ریاضیات را نه به صورتی که در واقع به وجود آمده و پیشرفت کرده است، بلکه به صورت حاضر و آمادهٔ آن بررسی کنند. ولی یک چنین برداشتی، دست‌کم به این علت که با واقعیت نمی‌سازد، نمی‌تواند دارای ارزش باشد. این مطلب که ریاضیات حضوری نیست، بلکه متکی بر آزمایش است، واقعیتی انکارناپذیر است. در ضمن ***اودموس رودسی*** هم دربارهٔ به وجود آمدن هندسه همین نظر را داشت و ما نظر او را پیش از این نقل کرده‌ایم.

نه تنها خود مفهوم‌های ریاضیات، بلکه نتیجه‌ها و روش‌های آن هم بازتابی از واقعیت است. این کیفیت مهم را، انگلس هم روشن می‌کند، زمانی که می‌نویسد: «نتیجه گرفتن کمیت‌های ریاضی از یکدیگر، که حضوری به نظر می‌رسد، حضوری‌بودن سرچشمهٔ آن را ثابت نمی‌کند، بلکه تنها عقلانی‌بودن رابطه‌های آن‌ها را می‌رساند». نتیجه‌گیری‌ها و استدلال‌های ریاضی بازتابی از رابطه‌های واقعی هستند که مردم ضمن آزمایش‌های خود ملاحظه می‌کنند: جمع عددها بازتابی است از اجتماع واقعی چند مجموعه به صورت یک مجموعهٔ واحد. سرچشمهٔ اثبات مشهور قضیهٔ برابری مثلث‌ها، که در آن از روی هم‌گذاشتن آن‌ها صحبت می‌شود، بدون تردید در آن‌جاست که برای مقایسهٔ اندازه‌های چیزها، همیشه آن‌ها را پهلوی هم قرار می‌دهند؛ محاسبهٔ حجم‌ها به وسیلهٔ انتگرال، این امکان را که می‌توان جسم را مجموعه‌ای از قشرهای نازک دانست، و یا آن را به قشرهای نازک بخش کرد، به طور انتزاعی بازتاب می‌دهد. برهان‌های پیچیده‌تر ریاضیات نتیجه‌ای از پیشرفت بعدی ریاضیات است که از این گونه پایه‌های مادی سرچشمه می‌گیرد.

۴. انتزاع کامل موضوع ریاضی از هر چیز مشخص، و عقلانی و ذهنی‌بودن نتیجه‌گیری‌های آن، که بر پایهٔ این انتزاع قرار دارد، ویژگی مهم دیگری از ریاضیات را به دنبال خود می‌آورد: در ریاضیات، نه تنها آن گونه رابطه‌های کمّی و شکل‌های فضایی که به طور مستقیم «از واقعیت جدا شده است» بررسی می‌شود، بلکه آن رابطه‌ها و شکل‌هایی هم که در داخل خود ریاضیات و بر پایهٔ اجتماع مفهوم‌ها و نظریه‌های ریاضی معین شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. *انگلس* به ویژه به همین ویژگی ریاضیات توجه دارد، زمانی که دربارهٔ به وجود آمدن مفهوم‌های نقطه، خط، و کمیت‌های ثابت و متغیر می‌گوید: « ... تنها پس از این‌هاست که به محصول‌های آزاد مخلوق خود فکر، و به ویژه به کمیت‌های موهومی می‌رسیم». این یک واقعیت تاریخی است که عددهای موهومی درست به همان ترتیبی که دربارهٔ عددهای درست گفتیم، از واقعیت گرفته نشده‌اند. آن‌ها، نخست در داخل خود ریاضیات و از پیشرفت ضروری جبر، به عنوان ریشه‌های معادلهٔ به صورت $x^2 = -a$ (زمانی که $a>0$ باشد) به وجود آمده است و اگرچه به تدریج عمل کردن با آن‌ها را با آزادی کامل شروع کردند، مفهوم واقعی آن‌ها تا مدت‌ها مجهول باقی ماند و به همین علت هم هست که نام «موهومی» روی آن‌ها گذاشته شد. ولی بعد، تعبیر هندسی آن‌ها کشف شد و کاربردهای مهم زیادی هم پیدا کرد. درست به همین ترتیب، هندسهٔ *لباچوسکی* هم آفریدهٔ فکر بزرگ این دانشمند بود. او به اهمیت واقعی این هندسه پی‌نبرد و به همین علت آن را هندسه «تخیلی» نامید. ولی این هندسه، یک بازی آزاد ذهنی نبود، بلکه مفهوم‌های اساسی هندسه، ناگزیر به آن‌جا می‌رسید و *لباچوسکی* هم آن را همچون نظریهٔ ممکن شکل‌ها و رابطه‌های فضایی بررسی کرد. بنابراین، «خلق و تصور آزادانه»ای که *انگلس* دربارهٔ آن صحبت می‌کند، نباید به عنوان تحمیل سادهٔ ذهن به حساب آید. خلق آزاد در علم، عبارت از یک ضرورت منطقی و آگاهانه است و این ضرورت هم، از مفهوم‌ها و حکم‌هایی ناشی می‌شود که متکی بر آزمایش‌اند.

در دورهٔ تازهٔ پیشرفت ریاضیات، که با ساختمان هندسهٔ *لباچوسکی* و نظریهٔ دقیق عددهای موهومی آغاز می‌شود، مفهوم‌ها و نظریه‌های تازه‌ای به وجود آمده است و باز هم به وجود می‌آید که به طور مستقیم از واقعیت گرفته نشده است، بلکه بر پایهٔ مفهوم‌ها و نظریه‌هایی قرار دارد که پیش از آن‌ها وجود داشته است. ریاضیات، شکل‌های ممکن واقعیت را تعیین و بررسی می‌کند و همین مطلب یکی از ویژگی‌های تعیین‌کنندهٔ دورهٔ اخیر تکامل ریاضیات است.

درک درست این ویژگی به وسیلهٔ شناخت ماتریالیسم دیالکتیک انجام می‌گیرد. نویسندهٔ «دفاتر فلسفی» می‌نویسد: «شناخت عبارت است از بازتاب طبیعت به وسیلهٔ انسان. ولی این بازتاب ساده، مستقیم و تمام و کمال نیست، بلکه جریانی است که از یک سلسله تجرید، تنظیم و تشکیل مفهوم‌ها و قانون‌ها به وجود آمده است ...». ماتریالیسم متافیزیک هم شناخت را به همین ترتیب قبول دارد و به ویژه ریاضیات را بازتابی از طبیعت می‌داند، ولی همان طور که نویسندهٔ بالا یادآور می‌شود: کمبود ماتریالیسم متافیزیک در این است که منطق دیالکتیک را در نظریهٔ انعکاس، با عدم مهارت به‌کار می‌برد. ماتریالیسم متافیزیک پیچیدگی این انعکاس را نمی‌فهمد، نمی‌فهمد که این انعکاس از راه یک سلسله انتزاع‌ها، از راه تنظیم مفهوم‌های تازه و ساختن نظریه‌های تازه براساس مفهوم‌ها و نظریه‌هایی که تا آن زمان شکل گرفته است و نه تنها از راه آن‌چه به وسیلهٔ آزمایش داده می‌شود، بلکه همچنین از راه آن‌چه می‌تواند ممکن باشد، به دست می‌آید. این گونه گذار از داده‌ها به ممکن، دربارهٔ به وجود آمدن مفهوم‌هایی از قبیل عدد درست دلخواه و خط نامحدود هم دیده می‌شود، زیرا از آزمایش، نه عددهایی که به اندازهٔ کافی بزرگ باشد و نه خط‌های نامحدود، به دست نمی‌آید. اما زمانی که مفهوم عدد جان می‌گرفت، از خود مفهوم آن و از قانون تشکیل عددها به وجود آمد. به همین ترتیب، از رسم خط‌های راست، امکان ادامهٔ نامحدود خط راست به وجود آمد که در اصل موضوع (پوستولات) اقلیدس چنین بیان شده است: «هر خط می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند». سیر بعدی انتزاع، منجر به مفهوم‌های کاملی از قبیل سلسلهٔ طبیعی عددها و خط نامحدود شد. در دورهٔ اخیر تکامل ریاضیات، ساختمان نظریه‌ها با کیفیت تازه از راه یک سلسله انتزاع‌ها و تعمیم مفهوم‌ها انجام گرفت. اما با همهٔ این‌که ریاضیات، به این درجه از انتزاع رسید، باز هم از واقعیت به‌کلی جدا نشد. هر مفهوم تازه بر این اساس که بازتابی از واقعیت است، به‌کمک منطق داخلی خود ریاضیات، رشد می‌کند و به ویژه به همین جهت است که ضمن کاربردی که در مسأله‌های فیزیک و صنعت دارد، به واقعیت بر می‌گردد. همین مطلب دربارهٔ عددهای موهومی و هر نظریهٔ دیگر ریاضی (هر قدر انتزاعی باشد) نیز درست است.

فضاهای مختلف چند بعدی نمونهٔ مشخصی از این قبیل است. این فضاها همراه با پیشرفت جبر و آنالیز، تحت تأثیر مکانیک و فیزیک، و به عنوان تعمیم هندسهٔ اقلیدسی، به وجود آمد و با توجه به این اندیشه‌ها، *ریمان* یک هندسهٔ عمومی به وجود آورد که بعدها به وسیلهٔ سایر ریاضی‌دانان تکامل یافت و کاربردهای مهم زیادی پیدا کرد. همین هندسهٔ

ریمانی سرانجام به عنوان یک دستگاه آمادهٔ ریاضی، برای ساختن نظریهٔ نسبیت عمومی ***اینشتین*** و یا اگر دقیق‌تر بگوییم نظریهٔ جاذبه به‌کار رفت. نظریه‌های انتزاعی هندسه یکباره، و یا در نتیجهٔ «هم‌آهنگی قبلی طبیعت و ذهن» نبود که چنین کاربرد درخشانی پیدا کرد، بلکه در نتیجهٔ این بود که این نظریه‌ها بر زمینهٔ هندسه‌ای که به طور مستقیم از آزمایش گرفته شده بود به‌وجود آمد و رشد کرد، و هم به این علت بود که به‌وجود آورندگان این نظریه‌ها، نظریه‌های خود را با مسأله‌های مربوط به فضای واقعی ارتباط می‌دادند، به‌ویژه، ***ریمان*** ارتباط نظریهٔ خودش را با نظریهٔ جاذبه پیش‌بینی کرد.

به این ترتیب، در پیشرفت ریاضیات، قانون تحرک شناخت، که به وسیلهٔ نویسندهٔ «دفاتر فلسفی» تنظیم شده است، تحقق پیدا می‌کند. او می‌نویسد: «تفکر، ضمن انتقال از مشخص به مجرد (به شرطی که این تفکر درست باشد)، از حقیقت دور نمی‌شود، بلکه به آن نزدیک می‌شود. تجرید ***ماده***، تجرید ***قانون*** طبیعت، تجرید ***ارزش*** و غیره، در یک کلمه ***همهٔ*** تجریدهای علمی (به شرطی که این تجریدها درست و جدی باشد نه پرت و پلا)، طبیعت را عمیق‌تر، درست‌تر و کامل‌تر منعکس می‌کند از تفکر دربارهٔ چیزهای واقعی، به طرف تفکر انتزاعی رفتن و از ***آن‌جا*** به ***سمت عمل*** بازگشتن؛ چنین است راه عملی شناخت ***حقیقت***، شناخت واقعیت عینی».

آن‌چه گفته شد، نادرست‌بودن این دیدگاه را ثابت می‌کند که گویا نظریه‌های ریاضی تنها عبارت از طرح‌های قراردادی هستند که وظیفه‌شان شرح نتیجه‌های آزمایش‌ها، و یا «تنظیم جریان احساس» بر پایهٔ «اصل اقتصاد در تفکر» می‌باشد.

انگلس یادآور می‌شود (نقل قول صفحه‌های پیشین را ببینید) که حکم‌های ریاضی با وجودی که از دنیای واقع جدا شده است، به نحوی در مقابل آن قرار گرفته و به عنوان طرح حاضر و آماده‌ای برای بررسی آن به‌کار می‌رود. از جمله، از حساب استفاده می‌کنیم و آن را به صورت حاضر و آماده‌ای به‌کار می‌بریم. این مطلب دربارهٔ نظریه‌هایی که در درجهٔ بالاتری از انتزاع به‌وجود آمده است، نیز درست است. برای نمونه، به خاطر می‌آوریم که هندسهٔ ریمانی، به عنوان یک طرح آمادهٔ ریاضی مورد استفادهٔ نظریهٔ جاذبه قرار گرفت. ولی ***انگلس*** روشن می‌کند که امکان یک چنین کاربرد گسترده‌ای، که ریاضیات در بررسی‌های دنیای واقع پیدا می‌کند، بر این اساس است که ریاضیات از خود این جهان به دست آمده است و تنها بخشی از شکل‌های ارتباطی واقعی مربوط به جهان را بازتاب می‌دهد، و به ویژه ***تنها*** به ***همین علت است*** که می‌تواند به طور کلی کاربرد پیدا کند. این حقیقت، که بسیاری از

نظریه‌ها در داخل خود ریاضی و ضمن پیشرفت آن به وجود می‌آید، به هیچوجه قراردادی نیست، زیرا به ناچار و در نتیجه منطقی که مربوط به موضوع آنهاست بـه وجـود مـی‌آید و به ویژه به همین علت است که کاربرد پیدا می‌کند. نظریه‌های ریاضی در هر حال واقعیت را بازتاب می‌دهند و اختلافشان تنها در این است که این بازتاب در بعضی حالت‌ها مستقیم‌تر است و در حالت‌های دیگر از راه یک سلسله انتزاع و تشکیل مفهوم‌ها و غیره انجام می‌گیرد.

۵. از ویژگی‌های آخرین دورهٔ پیشرفت ریاضیات، نه تنها این است که انتزاع‌های آن در درجه‌های بالاتری قرار گرفته است، بلکه این هم هست کـه مـوضوع آن بـه طـور اسـاسی گسترش پیدا کرده است و از چارچوب مفهوم‌های مقدماتی رابطه‌های کـمی و شکـل‌های فضایی خارج شده است.

البته شکل‌های مربوط به فضاهای چند بعدی و بی‌نهایت بعدی، آن‌گونه که از شکل‌های فضای واقعی معمولی (و نه از فضای انتزاعی ریاضی) می‌فهمیم شکل‌های فضایی عـادی نیستند. این فضاها معنا و مفهوم واقعی دارند و شکل‌های مشخصی از واقعیت را به صورت انتزاعی بازتاب می‌دهند، ولی تنها شباهتی با شکل‌های فضایی دارند و به همین عـلت در مقایسه با فضای واقعی می‌توان آن‌ها را «شبه‌فضا» نامید. زمانی که ما از فضای چند بعدی و شکل‌های واقع در آن گفت‌وگو می‌کنیم، به هر حال به مفهوم فضا مضمون تازه‌ای می‌دهیم و بنابراین لازم است که بین دو مفهوم فضا: مفهوم کلی و انتزاعی فضا در ریاضیات از یک سو، و مفهوم فضا به معنای شکل‌های معمولی وجود ماده از سوی دیگر، تفاوت اساسی قایل شویم.

برای این نمونهٔ دیگری از این مطلب، که موضوع ریاضیات از مرز شکل‌های فضایی و رابطه‌های کمّی (به مفهوم مقدماتی این واژه‌ها)تجاوز کرده است را یادآور شویم، می‌توان از اصل‌های تازه منطق ریاضی نام برد که در آخرهای سدهٔ نوزدهم به وجود آمد و اکنون به طور گسترده‌ای پیشرفت کرده است. موضوع منطق ریاضی، بررسی ساختمان و نتیجه‌گیری‌های ریاضی است به زبان دیگر، منطق ریاضی در این باره بررسی می‌کند که با وسیله‌های داده شده، چه حکم‌هایی را می‌توان از داده‌ها نتیجه گرفت. روش منطق ریاضی هم همان روشی است که ویژهٔ ریاضیات است، یعنی موضوع مورد بررسی خود را از محتوایش جدا می‌کند و به این ترتیب به جای حکم‌ها، فرمول‌ها و به جای قانون‌های عقلانی، قانون‌هایی که به وسیلهٔ این فرمول‌ها معین می‌شود قرار می‌دهد. البته، رابطه‌های بین داده‌ها و نتیجه‌ها، رابطه‌های بین اصل‌ها و قانون‌ها، منجر به شکل‌های فضایی و رابطه‌های کمّی به مفهوم معمولی خود

(مثل رابطهٔ حجمی دو یا چند مفهوم) نمی‌شود.

نمونهٔ دیگری از این قبیل، نظریهٔ گروه است که می‌توان از آن به عنوان نظریه‌ای که دربارهٔ تقارن، به صورت کلی آن بحث می‌کند، نام برد. ولی تغییر تقارن بلورها و در مثل انتقال گوگرد از شکل متوازی‌السطوح به شکل منشور، به معنی یک تغییر اساسی در کیفیت شیء است. بنابراین نظریهٔ گروه عبارت است از دانش کمیت‌ها و دانش تعین و تشخص (Determination) چیزها، آن‌چنان کمیت‌ها و آن‌چنان تعینی که تغییر آن‌ها باعث تغییر اساسی در خود شیء می‌شود.

به این ترتیب گسترش موضوع ریاضیات، منجر به‌گسترش اساسی دو مفهوم «رابطه‌های کمّی» و «شکل‌های فضایی» شد: ببینیم خط‌های عمومی و تعیین کنندهٔ موضوع ریاضیات، موضوعی که تا این حد گسترش یافته، کدام است؟

اگر بخواهیم پاسخ این پرسش را فهرست‌وار بدهیم و کوشش کنیم وارد ماهیت موضوع بشویم و آن چیزی را که ویژهٔ موضوع ریاضیات است و برای جانب‌های مختلف آن مشترک است معین کنیم، می‌توانیم پاسخ را در کتاب «ضد دورینگ» پیدا کنیم. کافی است به جز آنچه که نویسندهٔ این کتاب دربارهٔ موضوع ریاضیات گفته است، آنچه را هم که درباره وسیلهٔ بررسی آن، یعنی انتزاع کامل شکل و رابطه از مضمون یادآور شده است، در نظر بگیریم. این انتزاع که ویژهٔ ریاضی است، در عین حال، موضوع آن‌را هم تعریف می‌کند.

موضوع ریاضیات، عبارت است از شکل‌ها و رابطه‌هایی از واقعیت که نسبت به مضمون بی‌تفاوت باشد. این بی‌تفاوتی تاآن‌جا پیش می‌رود که شکل‌ها و رابطه‌ها از مضمون به‌کلی جدا می‌شود و به صورت‌کلی درمی‌آید، ولی در عین حال چنان روشن و دقیق است و رابطه‌های آن چنان پرثمر و غنی است که می‌تواند پایه و اساس پیشرفت منطقی نظریه قرار گیرد.

اگر این رابطه‌ها و شکل‌ها را هم کمّی (به معنای کلی این واژه) بنامیم، می‌توانیم بگوییم که موضوع ریاضیات عبارت‌است از آن شکل‌ها و رابطه‌های کمّی که به صورت خالص درآمده است.

انتزاع به هیچوجه ویژهٔ ریاضیات نیست و در سایر دانش‌ها هم وجود دارد، ولی دانش‌های دیگر پیش از همه به این مسأله علاقه‌مندند که طرح‌های انتزاعی موجود تا چه حد در پدیده‌های مفروض و معین، کاربرد دارد و چگونه می‌توان دستگاه انتزاعی موجود را با دستگاه مناسب‌تری عوض کرد. ریاضیات، برعکس، ضمن این‌که ویژگی‌های کلی را از

پدیده‌های مشخص جدا می‌کند، خود این دستگاه‌های انتزاعی را هم به حالت کلی و انتزاعی بررسی می‌کند، بدون این‌که به حد کاربرد آن‌ها در پدیدهای مشخص جداگانه کار داشته باشد. می‌توان گفت که نوعی مطلق بودن انتزاع‌ها، از ویژگی‌های ریاضیات است.

به ویژه به همین علت است که شکل‌های مورد بررسی ریاضیات، نسبت به مضمون خود بی‌اعتناست، ویژگی‌های اساسی ریاضیات یعنی عقلانی بودن و ضرورت منطقی آن را معین می‌کند و باعث می‌شود که نتیجه‌های داخلی مفهوم‌ها و نظریه‌های ریاضی غیرقابل تغییر به نظر برسد. همین بی‌تفاوتی نسبت به مضمون است که نوع کاربرد ریاضیات را معین می‌کند. زمانی که ما بتوانیم یک مسألهٔ عملی را به زبان ریاضی درآوریم، خواهیم توانست با کنارگذاشتن تمام ویژگی‌های درجهٔ دوم مسأله و با به‌کاربردن فرمول‌ها و نتیجه‌گیری‌های کلی، به هدف مشخص خود برسیم. بنابراین، انتزاع، نیروی اصلی ریاضیات و در عمل ضروری است.

۶. اگر اینک به داوری *انگلس* دربارهٔ ریاضیات برگردیم، متوجه می‌شویم که مضمون این داوری چقدر عمیق و پرمایه است و تا چه حد می‌توان آن را گسترش داد. اگر می‌بینیم که این نویسنده با وجودی که ریاضی‌دان نبود، تجزیه و تحلیل عمیقی از پایه‌های این دانش می‌کند، نه تنها به این علت است که او یک متفکر نابغه بود، بلکه مهم‌تر از همه به این علت است که به ماتریالیسم دیالکتیک چیره بود و آن را برای روشن کردن ماهیت ریاضیات، راهنمای خود قرار می‌داد. بنابراین نباید در شگفت بود که پیش از او هیچ‌کس نتوانست یک چنین راه‌حل عمیق و درستی از این مسأله ارائه دهد. بزرگترین ریاضی‌دانان هم نمی‌توانستند در یک چنین حجم فشرده‌ای به این موفقیت برسند.

به همین ترتیب، بعدها، نویسندهٔ «دفاتر فلسفی» هم، چنان تجزیه و تحلیلی از موضوع فیزیک به دست داد که بر همهٔ تجزیه و تحلیل‌های مشابهش برتری دارد.

این مطلب یکبار دیگر اهمیت و نیروی ماتریالیسم دیالکتیک را ثابت می‌کند و نشان می‌دهد که برای چیرگی بر یک دانش کافی نیست خدمت‌گذار خلاقی برای آن باشیم، بلکه علاوه بر این‌ها، لازم است به روش کلی و درست استدلال، یعنی به ماتریالیسم دیالکتیک، چیره باشیم. بدون این چیرگی، نتیجه‌گیری‌های دانش یا به صورت یک تودهٔ بی‌شکل به نظر می‌رسد و یا به‌کلی از شکل می‌افتد و به جای این‌که درک درستی از دانش به‌دست بیاوریم، دچار تصورهای اشتباه ماورای طبیعی و ذهنی دربارهٔ آن می‌شویم. بسیاری از ریاضیدانانی

که با این روش استدلال آشنا نیستند یا اصولاً نمی‌توانند در مسأله‌های عمومی مربوط به دانش خودشان، جهت‌یابی کنند و یا این مسأله‌ها را به‌کلی نادرست بیان می‌کنند[۱].

۹. قانون‌های پیشرفت ریاضیات

در پایان کوشش می‌کنیم تا قانون‌های کلی پیشرفت ریاضیات را به طور مختصر تعیین کنیم:

۱. ریاضیات، دریک دورهٔ تاریخی و به‌وسیلهٔ یک ملت به‌وجود نیامد بلکه محصول زمان‌های متوالی و نتیجهٔ کار نسل‌های زیادی است. همان‌طور که دیدیم نخستین مفهوم‌ها و حکم‌های ریاضی در دوره‌های خیلی باستانی به‌وجود آمد و بیش از دو هزار سال پیش به‌صورت دستگاه استواری درآمد؛ با وجود آن‌که، ضمن عبور از یک دوره به دورهٔ دیگر، تغییرهایی در ریاضیات به‌وجود می‌آید، مفهوم‌ها و نتیجه‌گیری‌های آن (مثل قانون‌های حساب و قضیهٔ فیثاغورس) به‌قوت خود باقی می‌ماند. نظریه‌های تازه شامل موفقیت‌های پیشین هم هست، ولی آن‌ها را دقیق‌تر، کامل‌تر و کلی‌تر می‌کند.

همچنین از شرح کوتاه تاریخی که آوردیم روشن می‌شود که پیشرفت ریاضیات تنها به‌این‌جا نمی‌رسد که قضیه‌های تازه را به طور ساده روی هم انبار کند، بلکه به تغییرهای اساسی و کیفی در ریاضیات می‌رسد. بنابراین پیشرفت ریاضیات به دوره‌هایی بخش می‌شود که عبور از یکی به دیگری، درست به معنای تغییر اساسی و ریشه‌ای در موضوع و یا ساختمان این دانش است.

رابطه‌های کمّی واقعیت، در همهٔ زمینه‌های تازهٔ خود، میدان عمل ریاضیات را تشکیل می‌دهد و ضمن این‌که مهم‌ترین موضوع ریاضیات، شکل‌های فضایی و رابطه‌های کمّی (به طور ساده و همان‌گونه که به طور مستقیم از این واژه فهمیده می‌شود) بوده است و هنوز هم هست، مفهوم ریاضی دادن به رابطه‌ها و نسبت‌های تازه براساس مجموعهٔ تصورهای علمی،

---

۱. یادآوری این مطلب جالب است که دو نفر از دانشمندان مشهور هندسه یعنی وبلن و وایتهد، که هر دو امریکایی هستند، درکتابشان به نام «اصول هندسهٔ دیفرانسیلی» کوشش می‌کنند تعریفی برای هندسه پیدا کنند و سرانجام به این نتیجه می‌رسند که تعریف این دانش ممکن نیست. مگر این‌که بگوییم: «هندسه آن چیزی است که ویژه‌کاران آن را هندسه می‌نامند».

که دربارهٔ فضا و کمیت داریم، انجام می‌گیرد.

سرانجام، جمع‌شدن نتیجه‌های ریاضی، همان طور که به ناچار به درجه‌های تازه‌ای از انتزاع می‌رسد و مفهوم‌های تعمیم‌دهندهٔ تازه‌ای به وجود می‌آورد، همان طور هم به تحلیل عمیق‌تری از اصل‌ها و مفهوم‌های مقدماتی ریاضیات می‌رسد.

همان طور که درخت بلوط در رشد نیرومندش، شاخه‌های کهن را به وسیلهٔ قشرهای تازه‌ای می‌پوشاند، شاخه‌های تازه به بار می‌آورد، به سمت بالا قد می‌کشد و به سوی پایین ریشه می‌دواند، ریاضیات هم در پیشرفت خود، مصالح تازه‌ای به رشته‌های موجود اضافه می‌کند، رشته‌های تازه‌ای به وجود می‌آورد، به طرف قله‌های تازهٔ انتزاع بالا می‌رود و در اصل‌های خود عمیق‌تر می‌شود.

۲. موضوع ریاضیات عبارت است از شکل‌ها و رابطه‌های حقیقی واقعیت، ولی همان‌طور که انگلس می‌گوید برای این‌که این شکل‌ها و رابطه‌ها را به صورت خالص بررسی کنیم، لازم است آنها را از مضمون خود جدا کنیم و این مضمون را به عنوان چیزی که مورد استفادهٔ ما نیست به‌کناری بگذاریم. ولی شکل و رابطه، خارج از مضمون خود وجود ندارد و شکل‌ها و رابطه‌های ریاضی هم نمی‌توانند نسبت به محتوی، به طور مطلق، بی‌تفاوت باشند. بنابراین ریاضیات که به مناسبت ماهیت خود کوشش می‌کند این جدایی را به وجود آورد، به انجام امر محالی دست می‌زند. ***این هم یکی از تضادهای اساسی در ماهیت ریاضیات است*** که تظاهری از تضاد کلی مربوط به شناخت، دربارهٔ ریاضیات می‌باشد. بازتاب هر پدیده، هر جنبه و هر عنصری از واقعیت در ذهن، آن‌را عمیق‌تر و ساده‌تر می‌کند و از رابطه‌های عمومی طبیعت، جدا می‌سازد. زمانی که مردم ضمن بررسی ویژگی‌های فضا به این نتیجه رسیدند که این فضا ویژگی‌های هندسهٔ اقلیدسی را دارد، از نظر شناخت عمل بسیار مهمی انجام گرفت، ولی در این شناخت هم اشتباهی وجود داشت. زیرا ویژگی‌های حقیقی فضا، ساده‌تر، خلاصه‌تر و جدا از ماده در نظر گرفته شده بود. ولی بدون این عمل هم هندسه‌ای نمی‌توانست وجود داشته باشد و به ویژه برزمینهٔ همین انتزاع بود که نظریه‌های تازهٔ هندسی به وجود آمد و مستحکم شد (خواه این انتزاع در داخل بررسی‌های هندسی انجام گرفته باشد، خواه از راه مقایسهٔ نتیجه‌های ریاضی با داده‌های تازهٔ مربوط به دانش‌های دیگر).

از بین رفتن و به وجود آمدن دایمی این تضاد، در مرحله‌ای از شناخت که به ترتیب به واقعیت نزدیک و نزدیکتر می‌شود، نیز ماهیت پیشرفت شناخت را نشان می‌دهد. البته در

این میان، جنبهٔ مثبت شناخت، یعنی وجود عنصرهای حقیقت محض در آن، نقش تعیین کننده را برای شناخت بازی می‌کند. شناخت، روی یک منحنی صعودی بالا می‌رود، نه آن‌که به طور ساده با اشتباه‌هایی آمیخته باشد و در جای خود درجا بزند. تغییر شناخت یعنی چیرگی دایمی بر عدم دقت‌ها و محدودیت‌هایی که در آن است.

تضاد اساسی یادشده، تضادهای دیگری را به دنبال دارد و ما این مطلب را ضمن روبه رو کردن مفهوم‌های پیوسته و ناپیوسته دیدیم (در طبیعت بین مفهوم‌های پیوسته و ناپیوسته، خط فاصل مطلق وجود ندارد و تقسیم آن‌ها در ریاضیات به ناچار مفهوم‌های تازه‌ای را به وجود آورد که واقعیت را عمیق‌تر بازتاب کرد و در عین حال برکمبودهای داخلی نظریه‌های موجود ریاضی چیره شد). درست به همین ترتیب، تضاد بین محدود و نامحدود، مجرد و مشخص، شکل و محتوی و غیره تظاهری از تضاد اساسی و درونی ریاضیات می‌باشد. اما تظاهر تعیین‌کنندهٔ تضاد ریاضیات، در این‌جاست که در عین حال.که ریاضیات از حالت‌های مشخص جدا می‌شود و دور یک سلسله مفهوم‌های انتزاعی چرخ می‌خورد و خود را از آزمایش و عمل کنار می‌کشد، در عین حال تا جایی به عنوان دانش شناخته می‌شود (یعنی ارزش شناخت دارد) که بر عمل تکیه داشته باشد و به عنوان ریاضیات کاربردی از آب درآمده باشد، نه ریاضیات خالص. اگر از زبان *هِگِل* بگوییم: ***ریاضیات خالص، دایم خودش را از نظر خالص‌بودن «نفی می‌کند». ریاضیات بدون این نفی نمی‌تواند معنای دانش داشته باشد، نمی‌تواند پیشرفت کند و نمی‌تواند بر دشواری‌هایی که بدون تردید در درون آن به وجود می‌آید، چیره شود.***

نظریه‌های ریاضی، به صورت ظاهر خود، به عنوان طرح‌هایی که برای نتیجه‌گیری‌های مشخص ریخته شده است در مقابل محتوای خود قرار می‌گیرد، در حالی که همین ریاضیات، به عنوان روش تنظیم قانون‌های کمّی دانش‌های طبیعی و به عنوان دستگاهی برای عمل‌آوردن نظریه‌های آن، و به عنوان وسیلهٔ حل مسأله‌های دانش‌های طبیعی و صنعت به‌کار می‌رود. اهمیت ریاضیات خالص، در دوران کنونی پیش از همه بسته به روش آن است. همان‌طور که موجودیت و پیشرفت هر روشی تنها بر اساس کاربرد آن و مربوط به مضمونی است که باآن سرو کار دارد، ریاضیات هم، بدون کاربرد، نه می‌تواند وجود داشته باشد و نه می‌تواند پیشرفت کند. در این‌جا، یکبار دیگر اجتماع تضادها دیده می‌شود: روش کلی به عنوان یک وسیلهٔ عمومی در مقابل حالت‌ها و مسأله‌های مشخص قرار می‌گیرد، در حالی که خودش از تعمیم همین حالت‌های مشخص به وجود آمده است و موجودیت و پیشرفت و

تأیید آن، تنها مربوط به حل همین مسأله‌های مشخص است.

۳. عمل اجتماعی، در پیشرفت ریاضیات از سه جهت نقش تعیین‌کننده‌ای بازی می‌کند: نخست مسأله‌های تازه‌ای در برابر ریاضیات قرار می‌دهد، دوم انگیزهٔ پیشرفت آن در جهت معینی می‌شود و سرانجام درستی نتیجه‌گیری‌های آن را تصدیق می‌کند.

این مطلب به صورت روشنی دربارهٔ پیدایش آنالیز دیده می‌شود: نخست ــ به ویژه پیشرفت مکانیك و صنعت، رابطه‌های کمیت‌های متغیر را به صورت کلی مطرح کرد. **ارشمیدس** با وجودی که به آستانهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال رسید، در چارچوب مسأله‌های استاتیك باقی ماند، در حالی که در عصر جدید، به ویژه بررسی حرکت بود که مفهوم‌های متغیر و تابع را به وجود آورد و باعث تنظیم آنالیز شد. **نیوتن** بدون یاری روش‌های ریاضی نمی‌توانست مکانیک را به پیش ببرد.

دوم: به ویژه، نیازهای تولیدی اجتماع بود که دانشمندان را وادار کرد تا روی همهٔ این مسأله‌ها توقف و آن‌ها را حل کنند. نه در دوران باستان و نه در جامعهٔ سده‌های میانه، یک چنین انگیزه‌ای وجود نداشت. سرانجام، این ویژگی‌های آنالیز ریاضی است که نتیجه‌گیری‌های آن، در زمان به وجود آمدن و تولدشان متکی به عمل بود و تنها به همین علت است که آنالیز ریاضی، بدون این‌که تعریف دقیقی از مفهوم‌های اساسی آن (متغیر، تابع، حد) بشود، توانست پیشرفت کند (این تعریف‌ها بعدها داده شد). کاربرد آنالیز در مکانیک، فیزیک و صنعت درستی آن را تأیید کرد.

آن‌چه گفته شد، دربارهٔ تمام دوره‌های پیشرفت ریاضیات درست است. از همان سدهٔ هفدهم، فیزیک نظری و مسأله‌های صنعت تازه، همراه با مکانیک، تأثیر مستقیم‌تری روی پیشرفت ریاضیات داشت. مکانیک «محیط یکپارچه» و سپس نظریهٔ میدان (انتقال حرارت، الکتریسیته، جاذبه) باعث پیشرفت نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی به طرف معادله‌های با مشتق‌های جزئی شد. به وجود آمدن نظریهٔ مولکولی و به طور کلی فیزیک آماری، که ابتدای آن از آخرهای سدهٔ نوزدهم آغاز می‌شود، انگیزهٔ جدی برای پیشرفت نظریهٔ احتمال و به ویژه نظریهٔ جریان‌های اتفاقی بود. نظریهٔ نسبیت نقش تعیین‌کننده‌ای در پیشرفت هندسهٔ ریمانی و روش‌های تحلیلی (آنالیتیک) آن و تعمیم آن بازی کرد.

در زمان ما پیشرفت نظریه‌های تازهٔ ریاضی، مثل آنالیز تابعی و غیره، به وسیلهٔ مسأله‌های مکانیک کوآنتایی و الکترودینامیک و به وسیلهٔ مسأله‌های مربوط به فن محاسبه و پرسش‌های آماری فیزیک و صنعت و غیره و غیره تحریک می‌شود. فیزیک و صنعت نه تنها

مسأله‌های تازه‌ای رو به روی ریاضیات قرار می‌دهد و نظر آن را به موضوع‌های تازه‌ای جلب می‌کند، بلکه رشته‌هایی از ریاضیات را که برای پیشرفت فیزیک و صنعت لازم است، و در ابتدا تا حد زیادی در داخل خود ریاضیات به وجود آمده است (مثل هندسهٔ ریمانی)، بیدار می‌کند. کوتاه سخن، برای این‌که دانش، به طور شایسته‌ای پیشرفت کند، نه تنها باید در آستانهٔ حل مسأله‌های تازه‌ای قرار گیرد، بلکه باید نیازهای پیشرفت اجتماع نیز حل این مسأله‌ها را ضروری بشناسد.

در دوران اخیر نظریه‌های زیادی در ریاضیات به وجود آمده است، ولی تنها آن نظریه‌هایی پیشرفت می‌کند و با استواری وارد دانش می‌شود که یا در دانش‌های طبیعی و صنعت کاربرد پیدا کند و یا در نظریه‌هایی که چنین کاربردهایی دارد نقش تعمیم‌دهندهٔ عمده‌ای داشته باشد. و نیز سایر نظریه‌ها به حال سکون باقی می‌ماند، مانند برخی از هندسه‌های خالص (هندسه‌های غیر دزارکی و غیر ارشمیدسی) که کاربرد اساسی پیدا نکرده است.

نتیجه‌گیری‌های ریاضی، درست و واقعی‌اند، ولی پایه و تکیه‌گاه اساسی این درستی در تعریف‌ها و اصل‌های کلی و یا در دقت ظاهری اثبات این نتیجه‌گیری‌ها نیست، بلکه این تکیه‌گاه در کاربرد واقعی آن‌ها و در تحلیل آخر، در عمل به دست می‌آید.

به طور کلی، پیشرفت ریاضیات را پیش از همه باید نتیجهٔ تأثیر متقابل سه عامل دانست: نخست منطق موضوع ریاضی (که در منطق درونی ریاضیات منعکس شده است)، دوم تأثیر تولید در ریاضیات و سوم رابطهٔ ریاضیات با دانش‌های طبیعی. و این پیشرفت از راه پرپیچ و خم مبارزهٔ تضادها عبور می‌کند و باعث تغییر اساسی، هم در مضمون ریاضیات و هم در فرم‌های اساسی آن، می‌شود. پیشرفت ریاضیات، بسته به مضمونی است که در موضوع آن وجود دارد. در تحلیل آخر، محرک اصلی این پیشرفت نیازهای تولیدی است.

چنین است قانون اساسی پیشرفت ریاضیات.

البته نباید فراموش کرد که گفت‌وگو تنها بر سر قانون اساسی است و خود همین رابطهٔ ریاضیات با تولید هم پیچیده است. از آن‌چه گفته شد روشن می‌شود که ساده‌لوحی است اگر بخواهیم به وجود آمدن هر نظریهٔ ریاضی معینی را به طور مستقیم از «قانون تولید» نتیجه بگیریم. ریاضیات هم مانند همهٔ دانش‌ها، دارای استقلال و منطق داخلی مربوط به خودش (که به طوری که گفتیم بازتابی است از ماتریالیسم دیالکتیک) است، یعنی قانونی که مربوط به موضوع آن است.

۴. ریاضیات نه تنها همیشه زیر تأثیر جدی تولید اجتماع است، بلکه در عین حال از مجموعهٔ شرط‌های اجتماعی متأثر می‌شود. پیشرفت درخشان ریاضیات در دورهٔ اوج یونان باستان، موفقیت‌های جبر در دورهٔ رستاخیز (رنسانس) در ایتالیا، پیشرفت آنالیز در دورهٔ پس از انقلاب انگلستان، موفقیت‌های ریاضیات در فرانسه در دورانی که از انقلاب فرانسه آغاز می‌شود، همهٔ این‌ها به طور متقاعدکننده‌ای بستگی جدانشدنی پیشرفت ریاضیات را با پیشرفت عمومی اجتماع در زمینهٔ صنعت، فرهنگ و سیاست نشان می‌دهد.

همین مطلب را به روشنی دربارهٔ پیشرفت ریاضیات در روسیه هم می‌توان دید. مستقل‌شدن مکتب ریاضیات روسیه را که از زمان ***لباچوسکی***، ***استروگرادسکی*** و ***چبیشف*** آغاز می‌شود، نمی‌توان از پیشرفت اجتماع روسیه به طور کلی جدا کرد. دورهٔ ***لباچوسکی***، دورهٔ ***پوشکین*** و ***گلینکا*** و ***دکابریست‌ها*** است و شکفتگی یکی از عنصرهای اجتماع را نشان می‌دهد.

تأثیر پیشرفت اجتماع در دورهٔ بعد از ۷ نوامبر، از این هم بیشتر متقاعدکننده است. زیرا در این دوره است که بررسی‌های پراهمیت و عمیق، با سرعت شگفت‌آوری، یکی پس از دیگری و در تمام جهت‌ها: در نظریهٔ مجموعه‌ها، مکان‌شناسی (توپولوژی)، نظریهٔ عددها، نظریهٔ احتمال، نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی، آنالیز تابعی و جبر و هندسه انجام گرفت.

سرانجام، ریاضیات همیشه زیر تأثیر جدی طرز تفکر (ایده‌ئولوژی) بوده است و هنوز هم هست. محتوی عینی ریاضیات هم مثل همهٔ دانش‌ها به وسیلهٔ ریاضی‌دانان و فیلسوفان، در چارچوب این و یا آن طرز تفکر درک و تفسیر می‌شود.

کوتاه سخن، همیشه محتوی عینی دانش در یک شکل ایده‌ئولوژیک، مثل سایر دانش‌ها، نقش با اهمیتی در پیشرفت ریاضیات دارد.

مبارزه بین ماده‌گرایی که با محتوی عینی دانش منطبق است و فلسفهٔ ذهنی، که در مقابل آن قرار دارد و مفهوم آن را مقلوب می‌کند، در تمام تاریخ ریاضیات جریان دارد. این مبارزه در یونان باستان هم وجود داشت، جایی که در مقابل فلسفهٔ مادی ***تالس***، ***دموکریت***، و دیگر فلسفه‌هایی که ریاضیات یونانی را به وجود آوردند، فلسفهٔ ذهنی ***فیثاغورس***، ***سقراط*** و ***افلاطون*** وجود داشت. با پیشرفت نظام بردگی، قشر بالای اجتماع از شرکت در تولید جدا می‌شد به طوری که آن را کار طبقهٔ پست می‌دانست و همین مطلب شکاف بین دانش «خالص» و عمل را به وجود آورد. آن‌چه که برای یک فیلسوف واقعی قابل قبول بود، تنها هندسهٔ نظری بود. به عنوان یک نمونهٔ مشخص می‌توان یادآوری کرد که ***افلاطون*** بررسی

بعضی منحنی‌های مکانیکی و حتی مقطع‌های مخروطی را خارج از هندسه به شمار می‌آورد، زیرا این منحنی‌ها «اندیشه‌های» جاودانی و روحانی نیستند «و مستلزم استفاده از یک حرفهٔ مبتذل‌تری می‌باشند».

نمونهٔ درخشان مبارزهٔ فلسفهٔ مادی علیه فلسفهٔ ذهنی در ریاضیات عبارت است از کوشش ***لباچوسکی*** که درک علمی ریاضیات را در مقابل نظریهٔ ذهنی طرفداران **کانت** طرح و از آن دفاع کرد.

به طور کلی، علمی‌بودن از سنت‌های مکتب ریاضیات روسیه است. از جمله **چبیشف** روی اهمیت اساسی و تعیین‌کنندهٔ عمل تکیه می‌کند و ***لیاپونوف*** سبک مکتب ریاضی روسیه را با جمله‌های جالب زیر بیان می‌کند: «بررسی گستردهٔ مسأله‌ها، هم از دیدگاه به‌کاربردن آن‌ها و هم بررسی گستردهٔ دشواری‌هایی که این مسأله‌ها به‌وجود می‌آورد و در نتیجهٔ این بررسی، کشف روش‌های تازه وبالابردن آن‌ها تا سطح دانش. وسپس عمومی‌کردن نتیجه‌هایی که به دست می‌آید و از این راه به دست آوردن نظریهٔ کم و بیش کلی. زمانی که تعمیم و انتزاع، به خودی خود انجام نگیرد و با مصالح مشخص سروکار داشته باشد، زمانی که قضیه و نظریه، نه به خودی خود، بلکه دربستگی کلی با دانش به‌وجود آید، در تحلیل آخر به عمل می‌رسد، و این همان چیزی است که در حقیقت، هم مهم است و هم آینده دارد[۱]».

هدف دانشمندان بزرگی مثل ***گوس*** و ***ریمان*** هم همین بوده است.

با پیشرفت سرمایه‌داری در اروپا، نقطه‌نظر علمی، که بازتابی از طرز تفکر پیشرو بورژوازی تازه به دوران رسیدهٔ سدهٔ شانزدهم تا ابتدای سدهٔ نوزدهم بود، جای خود را به نظریه‌های ذهنی داد. از جمله ***کانتور*** (۱۸۴۶-۱۹۱۸) که نظریهٔ مجموعه‌های بی‌پایان را طرح کرد، به طور مستقیم به نیرویی ناشناخته متوسل می‌شود و می‌گوید که وجود مطلق مجموعه‌های بی‌پایان، در عقل کل، یعنی جدا از ما می‌باشد. ***پوانکاره***، ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی که در آخرهای سدهٔ نوزدهم و نخستین سالهای سدهٔ بیستم می‌زیست، نظریهٔ ذهنی کنوانسیونالیسم را پیش کشید که بنابر آن ریاضیات عبارت از قراردادهایی است که بر طبق آن‌ها می‌توان شرح تجربه‌ها را راحت‌تر بیان کرد. طبق نظریهٔ ***پوانکاره*** اصل‌های هندسهٔ اقلیدسی، چیزی جز یک سلسله قرارداد نیست و اهمیت آن‌ها به علت تطبیق آن‌ها با واقعیت

---

۱. درک این مطلب که رشته‌های مختلف ریاضیات با هم و با دانش‌های طبیعی و عمل، رابطه‌های نزدیک و ضروری دارد، نه تنها از این جهت که دربارهٔ خود ریاضیات نقطه‌نظر درستی داشته باشیم لازم است، بلکه برای این‌که دانشمندان بتوانند در گزینش راه و موضوع مورد بررسی خود جهت‌یابی کنند نیز اهمیت بسیار دارد.

نیست، بلکه به جهت سادگی و راحتی آن‌هاست. **پوانکاره** می‌گوید از قانون انتشار مستقیم نور در فیزیک زودتر می‌توان گذشت تا از هندسهٔ اقلیدسی. ولی این دیدگاه با پیشرفت نظریهٔ نسبیت رد شد و از تطبیق کلی نظریهٔ نسبیت با اندیشه‌های علمی **لباچوسکی** و **ریمان** به این نتیجه رسیدند که با همهٔ «سادگی» و «راحتی» که هندسهٔ اقلیدسی دارد، هندسهٔ واقعی فضا، هندسهٔ اقلیدسی نیست.

بر زمینهٔ دشواری‌هایی که در نظریهٔ مجموعه‌ها به وجود آمد و به خاطر نیازی که مفهوم‌های اساسی ریاضیات به آزمایش و تحلیل داشتند، در نخستین سال‌های سدهٔ بیستم بین ریاضی‌دانان، جریان‌های فکری مختلف به وجود آمد. اتفاق در درک محتوی ریاضیات از بین رفت و ریاضی‌دانان مختلف نه تنها اصل‌های کلی را به راه‌های مختلف بررسی می‌کردند (اختلافی که از پیش وجود داشت)، بلکه حتی مفهوم و اهمیت نتیجه‌ها و برهان‌های مشخص جداگانه را هم با روش‌های مختلف ارزیابی می‌کردند. نتیجه‌هایی که از نظر عده‌ای دارای مفهوم و محتوی بود، از نظر بعضی دیگر، بی‌مفهوم و بی‌معنا اعلام می‌شد و جریان‌های ذهنی و غیرعلمی «اصالت منطق»، «اشراق»، «اصالت شکل» و غیره به وجود آمد.

طرفداران اصالت منطق تأکید می‌کنند که مجموعهٔ ریاضیات نتیجه‌ای است از مفهوم‌های منطق. اشراقیون سرچشمهٔ ریاضیات را در اشراق می‌بینند و تنها چیزهایی را که از راه اشراق قابل درک است مفهوم می‌دانند. به این ترتیب، آن‌ها به‌کلی منکر اهمیت نظریهٔ **کانتور** دربارهٔ مجموعه‌های بی‌پایان می‌شوند. از این هم بالاتر، اشراقیون حتی منکر مفهوم سادهٔ قضیه‌ای می‌شوند که طبق آن هر معادلهٔ جبری درجهٔ nام دارای n جواب است. برای آن‌ها تا زمانی که نتوان ریشه‌های عددی معادله را حساب کرد، این حکم معنایی ندارد. به این ترتیب، نفی کامل مفهوم عینی ریاضیات، اشراقیون را به پوچی می‌کشاند به طوری که بخش مهمی از موفقیت‌های ریاضی را «بدون مفهوم» می‌دانند. متعصب‌ترین آن‌ها تا آن‌جا پیش می‌روند که می‌گویند به تعداد ریاضی‌دانان، ریاضیات وجود دارد.

هیلبرت، بزرگترین ریاضی‌دان ابتدای سدهٔ ما، به‌گمان خود برای نجات ریاضیات از چنین حمله‌هایی اقدام‌هایی را آغاز کرد. نتیجهٔ اندیشه‌های **هیلبرت** به این‌جا می‌رسید که نظریه‌ها را به عمل‌هایی تبدیل کنند که تنها جنبهٔ فُرم داشته باشد و بر طبق قاعده‌هایی که از پیش تعیین‌شده، روی نشانه‌ها انجام شود. این طور حساب می‌شد که چنین برداشتی که مربوط به فرم است، همهٔ دشواری‌ها را از بین خواهد برد. زیرا در این صورت موضوع

ریاضیات عبارت از نشانه‌ها و قانون‌های مربوط به آن‌ها، و بدون هر گونه بستگی با مفهوم آن‌ها، خواهد بود. و این هم عبارت است از فرمالیسم در ریاضیات. طبق گفتهٔ ***براور*** اشراقی: برای فرمالیست، حقیقت ریاضی روی کاغذ است، در صورتی که برای اشراقی این حقیقت در مغز ریاضی‌دان وجود دارد.

درک این مسأله دشوار نیست که هیچ‌یک از این دو دسته محق نیستند. زیرا ریاضیات و همهٔ آن‌چه دربارهٔ آن روی کاغذ نوشته می‌شود، و آن‌چه ریاضی‌دان فکر می‌کند، بازتابی از واقعیت است و درستی و حقیقت ریاضی هم ناشی از آن است که با واقعیت عینی تطبیق می‌کند. همهٔ این جریان‌ها با جداکردن ریاضیات از واقعیت مادی، به فلسفهٔ ذهنی و غیر دیالکتیکی کشانده شدند.

اندیشه‌های ***هیلبرت***، در اثر پیشرفت خود دچار شکست شد. ریاضی‌دان اطریشی ***گودل***، ثابت کرد که حتی حساب را، آن طور که ***هیلبرت*** خیال می‌کرد، نمی‌توان به قالب فرم درآورد. نتیجه‌گیری‌های ***گودل*** منطق درونی ریاضیات را به روشنی نشان داد، منطقی که اجازه نمی‌دهد هیچ‌یک از رشته‌های ریاضی را با محاسبه‌هایی که در قالب فُرم باقی‌مانده است، به انجام برسانیم. دستگاه تکمیل‌شدهٔ نشانه‌ها و عمل‌های مربوط به آن‌ها، حتی نتوانست کار سلسلهٔ عددهای طبیعی و بی‌نهایت را به پایان برساند و به این ترتیب آن‌چه را که ***انگلس*** در جمله‌های زیر به طور کلی بیان کرده است، به طریق ریاضی ثابت کرد:

«بی‌نهایت تضاد است .... از بین‌بردن این تضاد، به معنای از بین‌بردن خود بی‌نهایت است».

هیلبرت می‌خواست بی‌نهایت ریاضی را در کادر طرح‌های محدود جا بدهد و به این وسیله همهٔ تضادها و دشواری‌ها را حل کند و این هم غیر ممکن بود.

ولی در شرایط موجود اجتماعی، نه تنها کنوانسیونالیسم، اشراق، فُرمالیسم و جریان‌هایی شبیه آن‌ها از بین نرفتند، بلکه گونه‌های تازهٔ نظریه‌های ذهنی ریاضی هم به آن‌ها اضافه شد. نظریهٔ مربوط به تجزیه و تحلیل منطقی اصل‌های ریاضی به طور جدی مورد استفادهٔ بعضی از گونه‌های فلسفهٔ ذهنی قرار گرفت. در زمان حاضر فلسفهٔ ذهنی به همان اندازه که از فیزیک استفاده می‌کند، از ریاضی و به ویژه منطق ریاضی هم استفاده می‌کند و به همین علت است که مسألهٔ درک اصل‌های ریاضی اهمیت زیادی کسب کرده است.

به این ترتیب، دشواری‌هایی که در راه پیشرفت ریاضیات وجود داشت، در شرایط موجود اجتماعی یک بحران فکری به وجود آورد. اساس این بحران شبیه به بحرانی است که

در فیزیک هم به وجود آمده بود. البته این بحران این معنی را نمی‌دهد که پیشرفت ریاضیات در کشورهایی که دارای شرایط اجتماعی کهنه هستند، به‌کلی متوقف شده است. یک عده از دانشمندانی که در موضع ذهن‌گرایانه قرار دارند، گاهی موفقیت‌های برجسته و بارزی در حل مسأله‌های مشخص ریاضی و پیشرفت نظریه‌های تازه به دست می‌آورند. در این باره کافی است به پیشرفت درخشان منطق ریاضی اشاره کنیم.

عیب اساسی نظریه‌های منتشره در این گونه کشورها دربارهٔ ریاضی، مربوط به فلسفهٔ ذهنی و ماوراءالطبیعی آن است. عیب اصلی در این‌جاست که ریاضیات را جدا از واقعیت در نظر می‌گیرند و به این مطلب که پیشرفت ریاضیات یک پیشرفت حقیقی و رئال است بی‌توجه‌اند. طرفداران اصالت منطق، اشراق، فُرمالیسم و سایر جریان‌هایی شبیه به آن‌ها، هر کدام یکی از جنبه‌های ریاضیات را که مربوط به منطق، یا روشنی اشراقی، و یا دقت صوری و غیره است جدا کرده و بدون حق دربارهٔ آن زیاده‌روی می‌کنند، به آن مفهوم مطلق می‌دهند، آن را از واقعیت جدا می‌کنند و با این عمل خود، مجموعهٔ ریاضیات را تحت‌الشعاع آن قرار می‌دهند و از نظر می‌اندازند. به ویژه به علت همین یک‌طرفه‌بودن کار آن‌هاست که هیچ‌یک از این جریان‌ها، با همهٔ دقت و عمقی که در نتیجه‌گیری‌های جداگانهٔ آن‌ها وجود دارد، نمی‌توانند به درک درست ریاضیات برسند. ماتریالیسم دیالکتیک (بر خلاف جریان‌های مختلفی که رنگ ذهنی و ماوراءالطبیعی دارد)، ریاضیات را مثل همه دانش‌های دیگر در مجموعهٔ خود و همان طور که هست، با همهٔ غنا و پیچیدگی که در رابطه‌ها و پیشرفت آن وجود دارد، بررسی می‌کند و به ویژه از آن‌جا که این دیدگاه فلسفی می‌کوشد تا همهٔ غنا و پیچیدگی رابطه‌های دانش را با واقعیت درک کند و همهٔ پیچیدگی پیشرفت آن را (از تعمیم سادهٔ تجربه تا تجرد کامل و دوباره از تجرد تا عمل) بفهمد و به ویژه از آن‌جا که در برداشت‌های خود، همیشه مضمون عینی دانش و کشفهای تازه آن را درنظر می‌گیرد، تنها فلسفهٔ علمی است که ما را به درک درست دانش به طور کلی و در حالت خاص، ریاضیات، راهنمایی می‌کند.

بخش دوم

آنالیز

م. ا. لاورنتیف ـ س. م. نیکولسکی

(قسمت اساسی پیش از آغاز به وسیلهٔ ب. ن. دِلُن)

۱. پیش از آغاز

پدیدآمدن رابطه‌های تولیدی تازه، یعنی مایه‌های سرمایه‌داری که در آخرهای سده‌های میانه کم‌کم جانشین نظام فئودالی می‌شد، همراه با کشف‌ها و بررسی‌های بزرگ جغرافیایی بود. در سال ۱۴۹۲ *کریستف کلمب*، براساس اندیشهٔ کروی‌بودن زمین، «دنیای تازه» را کشف کرد. کشف *کلمب* حدود دنیایی را که تا آن زمان شناخته شده بود گسترش داد و در اندیشهٔ بشر دگرگونی‌هایی به وجود آورد. در سال‌های آخر سدهٔ پانزدهم و نخستین سال‌های سدهٔ شانزدهم *لئونارد داوینچی*، *رافائل* و *میکل‌آنژ*، نقاشان زبردست و انسان‌گرا به بازسازی هنر پرداختند. در سال ۱۵۴۳ اثر **کوپرنیک** به نام «دربارهٔ گردش دایره‌های فلکی» منتشر شد که سیمای دانش اخترشناسی را به‌کلی دگرگون کرد. در سال ۱۶۰۹ کتاب «اخترشناسی تازهٔ» *کپلر* منتشر شد که شامل قانون‌های اول و دوم حرکت سیاره‌ها به دور خورشید بود در سال ۱۶۱۸ کتاب او به نام «هماهنگی جهان» که شامل قانون سوم حرکت سیاره‌ها بود، منتشر شد. *گالیله* با بررسی کارهای *ارشمیدس* و انجام آزمایش‌های دلیرانه، پایه‌های مکانیک تازه‌ای را گذاشت که برای صنعتی که تازه پدید می‌آمد، ضروری بود. در سال ۱۶۰۹ *گالیله* با تلسکوپ ناقص و کوچکی که خود ساخته بود، آسمان شبانه را مشاهده کرد: یک نظر از درون تلسکوپ کافی بود کره‌های آسمانی ذهنی ارسطو و جزم مربوط به‌کامل‌بودن جسم‌های آسمانی را ویران کند. به نظر می‌رسید که رویهٔ ماه پوشیده از کوه‌ها است و به وسیلهٔ دهانهٔ آتشفشان، آبله‌گون شده است، زهره شکل‌هایی شبیه به ماه به خود می‌گرفت، مشتری با چهار قمر همراه بود که به دور او می‌چرخید و نمونهٔ کوچکی از دستگاه شمسی را به دست می‌داد، روشن شد کهکشان از ستارگان جداگانه‌ای تشکیل شده است و برای نخستین‌بار با شگفتی تمام، دوری بیش از اندازهٔ ستارگان احساس شد. هرگز یک

کشف علمی، چنین تأثیری روی جهان متمدن نگذاشته بود[1].

پیشرفت کشتی‌رانی و امکان دست‌یابی به نقطه‌های دوردست و بررسی‌های اخترشناسی که برای چنین کشتی‌رانی لازم بود، همچنین پیشرفت صنعت تازه و همراه با آن پیشرفت مکانیک، ایجاب می‌کرد در جست‌وجوی روش‌هایی برای حل مسأله‌هایی باشند که تازه در ریاضیات طرح شده بود. این مسأله‌ها بیشتر در این باره بود که قانون‌های حرکت را به مفهوم گستردهٔ این واژه در برابر بررسی‌های ریاضیات قرار می‌داد.

آرامش و سکون با طبیعت ناسازگار است. همان طور که ***انگلس*** یادآور می‌شود تمام طبیعت از کوچکترین ذرهٔ آن تا بزرگترین جسم‌ها، در حال به وجود آمدن و نابودشدن همیشگی، در جریان دایمی حرکت و تغییر خستگی‌ناپذیری به سر می‌برد. هر دانش مربوط به طبیعت، در تحلیل آخر، این و یا آن جنبه، این و یا آن شکل حرکت را بررسی می‌کند. آنالیز ریاضی بخشی از ریاضیات است که روش‌هایی برای بررسی کمّی جریان‌های مختلف تغییر و حرکت، و رابطهٔ بین بعضی از مقدارها، با مقدارهای دیگر را به دست می‌دهد. اتفاقی نیست که آنالیز ریاضی در دوره‌ای به وجود آمد که پیشرفت مکانیک و اخترشناسی (که مسأله‌های مربوط به صنعت و کشتی‌رانی انگیزهٔ آن بود) منجر به انباشته‌شدن نتیجهٔ مشاهده‌ها و اندازه‌گیری‌ها و فرضیه‌های زیادی شده بود و همراه با آن دانش را به بررسی کمّی ساده‌ترین شکل‌های حرکت کشانده بود.

نام آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها، مطلبی دربارهٔ موضوعی که بررسی می‌کنیم به دست نمی‌دهد، بلکه روی روشی که در این بخش از ریاضیات به‌کار می‌رود تکیه می‌کند. صحبت بر سر روش ویژهٔ ریاضی بی‌نهایت کوچک‌ها و یا به صورت امروزی آن، صحبت بر سر روش حدها است ما در این‌جا چند نمونه را که در آن‌ها روش حد به‌کار رفته است، می‌آوریم و سپس در بندهای بعدی، مفهوم‌های لازم را به طور دقیق بیان می‌کنیم:

نمونهٔ ۱ـ همان طور که ***گالیله*** به‌کمک آزمایش ثابت کرد، مسافت s که یک جسم در زمان t، ضمن سقوط آزاد در خلاء می‌پیماید به وسیلهٔ این دستور بیان می‌شود:

$$s=\frac{g\cdot t^{۲}}{۲} \qquad (۱)$$

---

۱. در این بخش از مقالهٔ عالی آکادمیسین س. ای. واویلوف به‌نام «گالیله» (چاپ ۱۹۵۲) استفادهٔ اساسی شده است.

(g مقداری است ثابت و برابر با ۹٫۸۱ متر بر مجذور ثانیه)[1]. سرعت جسم سقوط‌کننده در هر یک از نقطه‌های مسیر خود چقدر می‌شود؟

فرض می‌کنیم جسم، در لحظهٔ t از نقطهٔ A عبور کند. ببینیم پس از فاصلهٔ زمانی کوتاهی به اندازهٔ Δt یعنی از زمان t تا $t+\Delta t$ چه پیش می‌آید؟ مسافت پیموده شده نموی مانند Δs به دست می‌آورد، مسافت پیشین $s_1 = \frac{g\cdot t^2}{2}$ و مسافت پس از $t+\Delta t$ چنین خواهد بود:

$$s_2 = \frac{g\cdot(t+\Delta t)^2}{2} = \frac{g\cdot t^2}{2} + \frac{g}{2}(2t\cdot\Delta t + \Delta t^2)$$

و از آن‌جا نمو مسافت به دست می‌آید:

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{g}{2}(2t\cdot\Delta t + \Delta t^2)$$

این نمو، عبارت است از مسافت پیموده شده در فاصلهٔ زمانی از t تا $t+\Delta t$. برای پیداکردن سرعت متوسط راه Δs، باید Δs را بر Δt بخش کنیم:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = g\cdot t + \frac{g}{2}\Delta t$$

اگر Δt را به سمت صفر میل دهیم، این سرعت متوسط، مرتب به سرعت حقیقی نقطهٔ A نزدیک‌تر می‌شود. از طرف دیگر می‌بینیم که جملهٔ دوم سمت راست برابری اخیر با کوچک‌شدن Δt به سمت صفر میل می‌کند، طوری که v_m به سمت مقدار $g.t$ نزدیک می‌شود، که به طور معمول آن را چنین می‌نویسند:

$$v = \underset{\Delta t\to 0}{\text{حد}}\, v_m = \underset{\Delta t\to 0}{\text{حد}}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \underset{\Delta t\to 0}{\text{حد}}\left(gt + \frac{g}{2}\Delta t\right) = gt$$

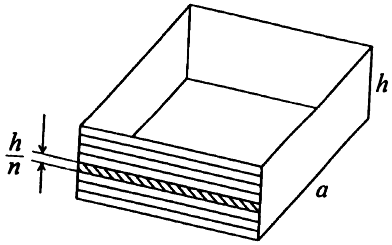
بنابراین، $g\cdot t$ عبارت است از سرعت حقیقی جسم درلحظهٔ t.

نمونهٔ ۲. تا لبهٔ مخزنی که کف مربع شکل آن به ضلع a و دیواره‌های عمودی آن به بلندی h است از آب پرشده است (شکل ۱). آب با چه نیروی کلی بر دیوارهای مخزن فشار می‌آورد؟

سطح دیواره را به n قشر افقی به بلندی $\frac{h}{n}$، تقسیم می‌کنیم. به طوری که معلوم است،

---

۱. دستور (۱) را امروز از قانون‌های عمومی مکانیک نتیجه می‌گیرند، ولی از نظر تاریخی، این دستور به‌ویژه از راه‌های آزمایشی به دست آمده است و بخشی از آزمایش‌هایی است که بعدها منجر به قانون‌های عمومی شد.



شکل ۱

فشار در هر نقطهٔ ظرف، برابر با فشار ستون مایعی است که در بالای آن قرار گرفته است. بنابراین فشار درکرانهٔ پایینی هریک ازفشارها (برحسب واحد مربوط) به‌ترتیب برابراست با:

$$\frac{h}{n},\ \frac{۲h}{n},\ \frac{۳h}{n},\ \dots,\ \frac{(n-۱)h}{n},\ h$$

اگر فشار را در دو کرانهٔ هر قشر ثابت بگیریم، مقدار تقریبی نیروی P را به‌دست خواهیم آورد. بنابراین مقدار تقریبی P برابر خواهد بود با:

$$P \approx \frac{a\cdot h}{n}\cdot\frac{h}{n} + \frac{a\cdot h}{n}\cdot\frac{۲h}{n} + \cdots + \frac{a\cdot h}{n}\cdot\frac{(n-۱)\cdot h}{n} + \frac{a\cdot h}{n}\cdot h$$

$$= \frac{a\cdot h^{۲}}{n^{۲}}\left[۱ + ۲ + \cdots + (n-۱) + n\right] = \frac{a\cdot h^{۲}}{n^{۲}}\cdot\frac{n\,(n+۱)}{۲} = \frac{a\cdot h^{۲}}{۲}\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)$$

برای این که مقدار این نیرو را به‌دست آوریم، با بزرگ کردن n، بدنهٔ مخزن را به قشرهای باریکتر و باریکتری بخش می‌کنیم. با بزرگ شدن n، مقدار $\frac{۱}{n}$ در رابطهٔ اخیر کوچک و کوچکتر می‌شود و در حد، این دستور دقیق به‌دست می‌آید:

$$P = \frac{a\cdot h^{۲}}{۲}$$

روش استفاده از حد ساده و چنین است: برای این که مقداری را معین کنیم، ابتدا خود آن را به‌دست نمی‌آوریم، بلکه تقریبی از آن را معین می‌کنیم. و نیز، نه یک تقریب، بلکه یک رشتهٔ متوالی از تقریب‌ها که مرتب دقیق و دقیقتر می‌شود. پس از مشاهدهٔ این رشته تقریب‌ها، یعنی از مشاهدهٔ روند تقریب، مقدار دقیق کمیت را معین می‌کنیم. درحقیقت به‌کمک روشی که با دیالکتیک تطبیق می‌کند، هر چیز پایدار و ثابت به‌عنوان نتیجهٔ یک سیر تکاملی و یک حرکت شناخته می‌شود.

این روش ریاضی، درنتیجهٔ کوشش پیگیر نسل‌های بسیار روی مسأله‌هایی که از راه‌های سادهٔ حساب، جبر و هندسهٔ مقدماتی قابل حل نبود به‌وجود آمد.

ببینیم مسأله‌هایی که حل آن‌ها باعث به‌وجود آمدن مفهوم‌های آنالیز شد کدام‌اند و راه‌حل این مسأله‌ها چگونه به‌دست آمد؟

ریاضی‌دانان سال‌های ۱۶۰۰، به‌تدریج کشف کردند که بسیاری از مسأله‌های مربوط به بررسی گونه‌های مختلف حرکت و بسیاری از مسأله‌های مربوط به رابطهٔ کمیت‌هایی با کمیت‌های دیگر، همچنین بعضی مسأله‌های هندسی که قابل حل نبود، به دو دسته بخش می‌شود: روشن‌ترین و ساده‌ترین مسأله‌های گونهٔ اول چنین است: مسألهٔ پیدا کردن سرعت حرکت غیر یکنواخت در لحظهٔ داده شده و مسأله‌هایی شبیه آن، دربارهٔ سرعت کمیت‌های متغیر و همچنین مسألهٔ مربوط به رسم مماس بر منحنی. این مسأله‌ها (که نخستین مثال ما هم جزو آن‌هاست) منجر به رشته‌ای از آنالیز شد که نام «حساب دیفرانسیل» را به خود گرفت. از ساده‌ترین نمونهٔ مسأله‌های گروه دوم، می‌توان جست‌وجوی مساحت شکل‌های منحنی‌الخط، پیدا کردن مسافتی را که ضمن حرکت غیریکنواخت پیموده می‌شود، و به‌طور کلی، یافتن نتیجهٔ عمل کمیتی که به‌طور دایم در تغییر است، نام برد (دومین مثال ما، که در آغاز این بند آوردیم، جزو این دسته است). این دسته مسأله‌ها، منجر به رشتهٔ دیگری از آنالیز، به‌نام «حساب انتگرال» شد. به این ترتیب، دو گونه مسألهٔ اساسی و متمایز به‌وجود آمد: مسأله‌های مربوط به مماس و مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ مساحت.

در این بخش به‌طور گسترده‌ای شرح خواهیم داد که چه اندیشه‌هایی منجر به حل هر دو گونهٔ این مسأله‌ها شد. در این‌باره، به‌ویژه قضیهٔ *نیوتن* و *لایب‌نیتس* مهم است که برحسب آن، مسألهٔ مربوط به محاسبهٔ مساحت، درواقع، وارون مسألهٔ مربوط به مماس است. برای حل مسألهٔ مربوط به مماس و مسأله‌هایی که به آن منجر می‌شود، الگوریتم (= روش کلی) محاسبه‌ای ساده و کاملاً عمومی، یعنی روش مشتق‌گیری، روش دیفرانسیل‌گیری، پیدا شد که ما را دانسته و آگاهانه به حل مسأله راهنمایی می‌کند.

تاریخ به‌وجود آمدن و پیشرفت آنالیز و نقشی که هندسهٔ تحلیلی (که به‌وسیلهٔ *دکارت* به‌وجود آمد) در باروری آن بازی کرد، در بخش اول بیان شده است. دیدیم که در نیمهٔ دوم سال‌های ۱۶۰۰ و نیمهٔ اول سال‌های ۱۷۰۰ در مجموعهٔ ریاضیات، دگرگونی‌های اساسی به‌وجود آمد و به رشته‌های موجود ریاضیات (حساب، هندسهٔ مقدماتی، مقدمات جبر و مثلثات)، روش‌های عمومی‌تری مانند هندسهٔ تحلیلی، حساب دیفرانسیل و انتگرال و نظریهٔ

ساده‌ترین معادله‌های دیفرانسیلی اضافه شد و به این ترتیب حل مسأله‌هایی که پیش از آن، آرزوی حل آن‌ها را هم نمی‌شد کرد، قابل حل از آب درآمد.

اگر رفتار منحنی پیچیده نباشد، همیشه می‌توان بر هر نقطهٔ آن مماسی رسم کرد. برای این عمل کافی است به‌یاری قاعده‌های حساب دیفرانسیل از تابع این منحنی مشتق بگیریم، کاری که اغلب بیش از چند دقیقه وقت لازم ندارد. قبل از آن، تنها مماس بر دایره و دو سه منحنی دیگر را می‌توانستند رسم کنند و هرگز انتظار نداشتند که راه‌حل کلی برای این مسأله وجود داشته باشد.

اگر مسافتی که پس از مدت داده شده‌ای پیموده می‌شود معلوم باشد، به‌وسیلهٔ همین حساب دیفرانسیل می‌توان سرعت نقطه و یا شتاب آن را، در هر لحظه، پیدا کرد. برعکس، با در دست داشتن شتاب، می‌توان سرعت و مسافت را با استفاده از انتگرال (وارون دیفرانسیل) به‌دست آورد. از همین راه است که با دانستن ویژگی‌های هندسی و با استفاده از قانون‌های نیوتنی حرکت و قانون جاذبهٔ عمومی، به‌سادگی نتیجه می‌شود که سیاره‌ها باید روی مدار بیضی و طبق قانون‌های کپلر، دور خورشید حرکت کنند.

مسأله‌های مربوط به حداکثر و حداقل، یا به‌اصطلاح مسأله‌های مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم، نیز اهمیت بسیار دارد. نمونه‌ای بیاوریم: می‌خواهیم از تیر گردی به‌شعاع داده‌شده، تیری با مقطع مستطیل‌شکل بتراشیم، به‌طوری که حداکثر مقاومت خمشی را داشته باشد. ضلع‌های آن را به چه نسبتی باید درآورد؟ با بحث مختصری دربارهٔ مقاومت تیری که مقطعی به‌شکل مستطیل دارد (با استفاده از ملاحظه‌های سادهٔ حساب انتگرال) و سپس حل مسألهٔ ماکزیمم (که برای آن از مشتق استفاده می‌شود)، این پاسخ به‌دست می‌آید که: حداکثر مقاومت برای مقطع مستطیلی، وقتی است که نسبت بلندی آن به قاعده‌اش، مانند $\sqrt{۲}$ به ۱ باشد. به این ترتیب مسأله‌های مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم هم، به همان سادگی مسأله‌های مربوط به رسم مماس، حل می‌شود.

خمیدگی نقطه‌های مختلف یک منحنی (اگر خط راست یا دایره نباشد) در حالت کلی، متفاوت است. شعاع دایره‌ای را که خمیدگی منحنی آن همان خمیدگی منحنی در نزدیکی نقطهٔ داده‌شده باشد، به‌عبارت دیگر شعاع انحنای منحنی را در نقطهٔ داده‌شده، چگونه محاسبه می‌کنند؟ حل این مسأله هم ساده است، تنها باید عمل دیفرانسیل‌گیری را دومرتبه انجام داد. شعاع انحنا نقش بزرگی در بسیاری از مسأله‌های مکانیک دارد.

پیش از کشف روش‌های تازهٔ محاسبه، تنها می‌توانستند مساحت چندضلعی‌ها، دایره،

قطاع، قطعه دایره و دو سه شکل دیگر را پیدا کنند. به‌جز آن، ارشمیدس وسیلهٔ محاسبهٔ مساحت یک قطعه سهمی را به‌دست آورده بود. وسیله‌ای که ارشمیدس در این محاسبه، به‌کار می‌برد، برپایهٔ ویژگی‌هایی بود که تنها به سهمی بستگی دارد و بسیار داهیانه و هوشمندانه بود. موفقیت ارشمیدس، این اندیشه را به‌وجود آورد که برای محاسبهٔ مساحت هر منحنی تازه باید پژوهشی دشوار و داهیانه، که بستگی به همان منحنی دارد، انجام داد. چقدر موجب تحسین ریاضی‌دانان شد، زمانی‌که قضیهٔ **نیوتن** و **لایب‌نیتس** امکان محاسبهٔ مساحت‌هایی را که محدود به منحنی‌های به‌کلی مختلف است به‌وجود آورد (این قضیه دربارهٔ مسألهٔ تربیع، یعنی وارون مسألهٔ مماس است). به این ترتیب، روشن شد که یک وسیلهٔ عمومی کلی وجود دارد که برای حل تعداد بسیار زیادی از مختلف‌ترین مسأله‌ها مناسب است: محاسبه حجم، مساحت، طول منحنی، جرم جسم‌های ناهمگون وغیره هم به همین مسأله مربوط است.

روش تازه، در مکانیک موفقیت‌های باز هم بیشتری کسب کرده است: چنین به‌نظر می‌رسد که هیچ مسأله‌ای در مکانیک وجود ندارد که به‌یاری محاسبه‌های تازه، روشن و حل نشود.

پاسکال روشن کرد که مقدار خلأ ***تریچلی*** ضمن بالا رفتن از کوه زیاد می‌شود و این جریان به این علت است که ضمن بالا رفتن، فشار جو کم می‌شود. اما این تنزل فشار طبق چه قانونی است؟ این مسأله هم امروز از راه بررسی معادلهٔ دیفرانسیلی ساده‌ای حل می‌شود.

دریانوردان خوب می‌دانند که کافی است یکی دو بار طناب را دور تیر اسکله بپیچانند تا یک نفر بتواند کشتی بزرگی را در لنگرگاه نگه دارد. چرا چنین است؟ این مسأله هم از نظر ریاضی به‌تقریب همان مسألهٔ پیشین است و خیلی زود حل می‌شود.

به این ترتیب پس از به‌وجود آمدن آنالیز، دوره‌ای قرار دارد که در آن راه‌های به‌کار بردن آنالیز در مختلف‌ترین رشته‌های صنعت و دانش‌های طبیعی، پیشرفت شگفت‌انگیزی کرده است. آنالیز ریاضی که از راه انتزاع از حالت‌های مشخص به‌وجود آمده است و با ویژگی‌هایی که خاص مسأله‌های معین و جداگانه است کاری ندارد، ویژگی‌های عمیق و درضمن واقعی جهان مادی را بازتاب می‌دهد و به‌ویژه به همین علت است که به‌عنوان وسیله‌ای برای بررسی مسأله‌هایی که تا این حد گسترده و مختلف است به‌کار می‌رود. حرکت مکانیکی جسم‌های جامد، حرکت آب‌گونه‌ها و گازها، حرکت جزءهای جداگانهٔ آن‌ها و قانون‌های جریان توده و مجموعهٔ آن‌ها، پدیده‌های حرارتی و الکتریکی، واکنش‌های

شیمیایی وغیره، همه در چارچوب دانش‌های مربوط به خود و با استفاده از دستگاه آنالیز ریاضی بررسی می‌شود.

درعین حال گسترش کاربرد آنالیز باعث شد که خودِ آنالیز ریاضی هم بی‌اندازه غنی شود و رشته‌هایی از آن، مانند نظریهٔ رشته‌ها، به‌کار بردن آنالیز در هندسه و نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی به‌وجود آید و پیشرفت کند.

بین ریاضی‌دانان میانه‌های سال‌های ۱۷۰۰ این فکر رواج کامل داشت که هر مسأله از دانش‌های طبیعی را، به‌شرط این که بتوان به آن مفهوم ریاضی داد، یعنی بتوان بیان درست ریاضی آن را پیدا کرد، می‌توان به‌کمک هندسهٔ تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال حل کرد.

کم‌کم مسأله‌های مربوط به دانش‌های طبیعی و صنعت دشوارتر و پیچیده‌تر می‌شد و لازم بود روش‌های یادشده تکامل یابد. برای حل این مسأله‌های تازه، رشته‌های بعدی ریاضی یعنی: حساب واریانت، نظریهٔ تابع‌های متغیر مختلط، نظریهٔ میدان، معادله‌های انتگرالی و آنالیز تابعی، پشت‌سرهم به‌وجود آمد. ولی همهٔ این روش‌های تازهٔ محاسبه، درحقیقت ادامه و تکامل مستقیم روش‌هایی بود که در سدهٔ هفدهم کشف شده بود. بزرگترین ریاضی‌دانان سدهٔ هیجدهم؛ د. *برنولی* (۱۷۰۰-۱۷۸۲) ، *ل. اولر* (۱۷۰۷-۱۷۸۳) و ***لاگرانژ*** (۱۷۳۶-۱۸۱۳) درحالی که راه‌های تازه‌ای در مقابل دانش می‌گشودند، همواره از مسأله‌های حیاتی «دانش‌های پایه» الهام می‌گرفتند. پیشرفت پرجوش و خروش آنالیز در سدهٔ نوزدهم نیز ادامه داشت، سده‌ای که در آن دانشمندان مشهوری مانند ***گوس*** (۱۷۷۷-۱۸۵۵) ، ***کوشی*** (۱۷۸۹-۱۸۵۷) ، م. و. ***استروگرادسکی*** (۱۸۰۱-۱۸۶۱) ، ***چبیشف*** (۱۸۲۱-۱۸۹۴) ، ***ریمان*** (۱۸۲۶-۱۸۶۶) ، ***آبل*** (۱۸۰۲-۱۸۲۹) و ***وایرشتراس*** (۱۸۱۵-۱۸۹۷) زندگی می‌کردند و در پیشرفت آنالیز ریاضی سهم به‌سزایی داشتند.

ریاضی‌دان نابغهٔ روس، ***ن. ای. لباچوسکی*** هم در پیشرفت بعضی از مسأله‌های مربوط به آنالیز ریاضی تأثیر زیادی داشته است.

بزرگترین ریاضی‌دانان مربوط به سده‌های نوزدهم و بیستم را هم یادآور شویم: ***آ. آ. مارکوف*** (۱۸۵۶-۱۹۲۲) ، ***آ. م. لیاپونوف*** (۱۸۵۷-۱۹۱۸)، ***آ. پوانکاره*** (۱۸۵۴-۱۹۱۲) ، ***ف. کلین*** (۱۸۴۹-۱۹۲۵) و د. ***هیلبرت*** (۱۸۶۲-۱۹۴۳).

در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم، بازبینی و دقت انتقادی در اصل‌های آنالیز به‌عمل آمد. روش‌های نیرومند و مختلف آنالیز که تا آن زمان پدید آمده بود، شالودهٔ واحد منظمی

به‌دست آورد که با میزان رشد «دقت ریاضی» سازگار بود. این‌ها عبارت از روش‌هایی است که انسان می‌تواند به‌یاری آن‌ها و روش‌های پیشین مربوط به حساب، جبر و مثلثات به دنیای دور و بر خود مفهوم ریاضی بدهد، پدیده‌های موجود را بیان کند و مسأله‌های عملی مهم مربوط به این پدیده‌ها را حل کند.

به‌ویژه پس از اکتبر ۱۹۱۷ آنالیز همراه با سایر شاخه‌های دانش ریاضی در کشور شوروی پیشرفت همه‌جانبه‌ای یافت. هندسهٔ تحلیلی، حساب دیفرانسیل و انتگرال و نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی، ضمن برنامهٔ همهٔ رشته‌های مختلف علمی جای گرفته است، به‌طوری که میلیون‌ها نفر با این رشته‌های ریاضی آشنایی دارند. دانستنی‌های مقدماتی مربوط به این دانش‌ها جزو برنامهٔ بسیاری از مدرسه‌های فنی است و در زمان حاضر این مسأله مطرح است که این دانش‌ها را ضمن برنامهٔ دبیرستانی قرار دهند.

در زمانی نزدیکتر به ما، به‌کار بردن شمارگرهای بزرگ با کار سریع خود، پیچ تازه‌ای در دانش ریاضی به‌وجود آورد. این شمارگرها، همراه با سایر رشته‌های ریاضی که از آن‌ها یاد شد، توانست نیرو و امکان بیشتری به بشر بدهد.

امروز آنالیز، با همهٔ رشته‌هایی که از آن جدا شده، عبارت است از شاخه‌های مختلف زیادی که با هم رابطه‌های نزدیک دارند و به‌طور جداگانه هم، هریک از آن‌ها تکمیل می‌شود و به جلو می‌رود. این را هم باید دانست که بخش اساسی این موفقیت‌ها به دانشمندان شوروی تعلق دارد.

امروز بیش از هر زمان دیگر، نیروی راهنمای آنالیز، نیازهای زندگی و مسأله‌هایی است که به گسترش بسیار زیاد صنعت بستگی دارد. در برابر ما مسأله‌های ریاضی آیرودینامیک سرعت‌های بالای صوت قرار دارد و کم‌کم هم باموفقیت حل می‌شود.

دشوارترین مسأله‌های فیزیک ریاضی امروز، در چنان مرحله‌ای هستند که خواهند توانست به نتیجه‌های عددی عملی برسند. در فیزیک امروز نه‌تنها برای حل مسأله‌های نظریه‌هایی چون مکانیک کوانتایی (و مسأله‌های مربوط به درک پدیده‌های جهان میکروسکپی که به آن مربوط است) به عالی‌ترین بخش‌های آنالیز ریاضی امروزی نیاز است، بلکه بدون این آنالیز اصلاً نمی‌توان مفهوم‌های اساسی این نظرها را هم تنظیم کرد.

هدف بخش دوم این است که خواننده را (خواننده‌ای که با ریاضیات مقدماتی آشناست) به‌شکل ساده و قابل فهم با به وجود آمدن و کاربردهای سادهٔ مفهوم‌های مقدماتی و اساسی آنالیز، مثل تابع، حد، مشتق و انتگرال آشنا کند. رشته‌های ویژهٔ آنالیز در بخش‌های دیگر این

کتاب شرح داده شده است.

از آن‌جا که این بخش خیلی مقدماتی است، خواننده‌ای که با دورهٔ معمولی آنالیز آشناست می‌تواند از آن چشم بپوشد، بدون این که به فهم بخش‌های بعدی لطمه‌ای وارد آید.

۲. تابع

مفهوم تابع. در طبیعت چیزها و پدیده‌هایی وجود دارد که از نظر ساختمانی به یکدیگر مربوط‌اند. ساده‌ترین و ثابت‌ترین این رابطه‌ها از زمان‌های پیش بررسی می‌شده است و آگاهی‌های مربوط به آن‌ها، به‌عنوان قانون‌های فیزیکی جمع‌آوری و تنظیم می‌شده است. در بسیاری حالت‌ها، وجود این رابطه‌ها به این معنی است که چند کمیت مختلف، که مربوط به اندازهٔ چند پدیدهٔ مختلف است، به‌طور کامل به هم مربوط است و مقدار هریک از آن‌ها به مقدار دیگران بستگی دارد. برای نمونه، اندازهٔ ضلع‌های یک مستطیل، مساحت آن را معین می‌کند، حجم گاز در حرارت معین، بسته به فشار وارد بر آن است و انبساط طولی یک میلهٔ فلزی، به‌وسیلهٔ حرارت آن معین می‌شود وغیره. قانون‌های مشابه دیگری هم وجود دارد که می‌توان آن‌ها را سرچشمهٔ مفهوم تابع دانست.

در دستورها و رابطه‌های جبری هم که به‌ازای هر مقدار معین از کمیت داده‌شده (که به‌صورت مقدارهای حرفی وجود دارد)، می‌توان کمیت دیگری را (که به‌وسیلهٔ دستور بیان شده است) معین کرد، مفهوم تابع وجود داشت.

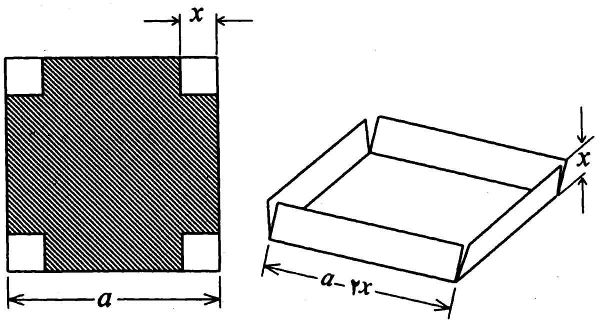
چند نمونه را یادآوری می‌کنیم:

۱. فرض کنید در مبدأ زمان، نقطهٔ مادی به‌حال سکون باشد و سپس با تأثیر نیروی جاذبهٔ زمین آغاز به فرود آمدن کند. مسافت s، که به‌وسیلهٔ نقطه در مدت‌زمان t پیموده شده است، به‌وسیلهٔ این دستور بیان می‌شود.

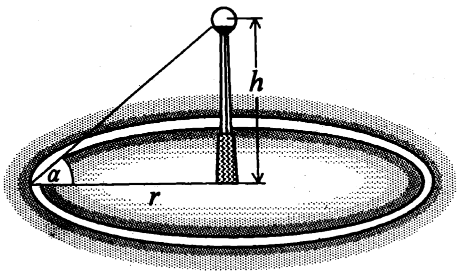
$$s = \frac{g \cdot t^{۲}}{۲} \qquad (۱)$$

که در آن g شتاب نیروی ثقل است.

۲. می‌خواهیم از مربع به‌ضلع a، قوطی مکعب‌مستطیل روبازی بسازیم که بلندی آن x



شکل ۲



شکل ۳

باشد (شکل ۲). حجم V قوطی به‌وسیلهٔ این دستور محاسبه می‌شود:

$$V = x(a - ۲x)^۲ \quad (۲)$$

رابطهٔ (۲) اجازه می‌دهد که برای هر بلندی x (که باید در نابرابری $\frac{a}{۲} \leq x \leq ۰$ صدق کند)، حجم قوطی را پیدا کنیم.

۳. فرض کنیم در مرکز باند دایره‌ای‌شکل بازی روی یخ، دیرکی فرو کرده و روی آن در بلندی h فانوسی قرار داده باشیم (شکل ۳). روشنایی T باند به‌وسیلهٔ این دستور بیان می‌شود:

$$T = \frac{A \cdot \sin\alpha}{h^۲ + r^۲} \quad (۳)$$

که در آن r شعاع باند و $\tan\alpha = \frac{h}{r}$ و A ضریبی است که با توجه به شدت نور فانوس، معین می‌شود. با داشتن بلندی h می‌توانیم طبق دستور (۳)، T را محاسبه کنیم.

۴. ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$x^{۲} + px - ۱ = ۰ \qquad (۴)$$

به‌وسیلهٔ این دستور داده می‌شود:

$$x = -\frac{p}{۲} \pm \sqrt{۱+\frac{p^{۲}}{۴}} \qquad (۵)$$

به‌طور کلی در هر دستور (و از جمله در دستورهای بالا)، این ویژگی وجود دارد که می‌توان به‌ازای هر مقدار داده‌شده از کمیتی، که متغیر مستقل نامیده می‌شود (زمان t، بلندی x، بلندی h، ضریب p معادله)، مقدار کمیت دیگر را، که متغیر وابسته یا تابع نامیده می‌شود (مسافت s، حجم V، روشنایی T، ریشهٔ x معادله)، محاسبه کرد.

هریک از دستورهایی که در بالا آوردیم نمونه‌ای از تابع را به‌دست می‌دهد. مسافت s که به‌وسیلهٔ نقطه پیموده شده است تابعی است از زمان t؛ حجم V قوطی تابعی است از بلندی x آن؛ روشنایی T باند میدان بازی روی یخ تابعی است از بلندی h دیرک و ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم (۴) تابعی است از ضریب p آن.

باید یادآوری کرد که در برخی حالت‌ها متغیر مستقل می‌تواند هر مقدار عددی داده‌شده را بپذیرد. به‌عنوان مثال، نمونهٔ (۴) از این قبیل است: ضریب p معادلهٔ درجهٔ دوم (۴)، متغیر مستقلی است که می‌تواند مقدار دل‌خواهی از یک مجموعهٔ عددی را (که از پیش معین شده است) قبول کند. در نمونهٔ (۲)، حجم قوطی تابعی است از بلندی x آن و این بلندی می‌تواند هر عدد دل‌خواه از مجموعهٔ عددهایی که در نابرابری $۰ \le x \le \frac{a}{۲}$ صدق می‌کند قبول کند. به همین ترتیب در نمونهٔ (۳)، روشنایی T باند، تابعی است از بلندی h دیرک، که به‌طور نظری می‌تواند هر مقدار دل‌خواهی که در نابرابری $h > ۰$ صدق می‌کند، قبول کند و در آن مقدار h با توجه به امکان‌های فنی مقام‌های اداره‌کنندهٔ میدان بازیِ روی یخ، معین می‌شود.

باز هم از این‌گونه نمونه‌ها را می‌آوریم. دستور

$$y = \sqrt{۱ - x^{۲}}$$

یک دستور واقعی است که بستگی بین عددهای x و y را معین می‌کند، ولی نه به‌ازای همهٔ مقدارهای x، بلکه تنها به‌ازای مقدارهایی از x که در نابرابری $-۱ \le x \le ۱$ صدق کند.

همچنین دستور

$$y = \log(1 - x^2)$$

نیز به‌ازای مقدارهایی از x که در نابرابری $-1 < x < 1$ صدق کند، مقداری برای y به‌دست می‌دهد.

بنابراین، ناچاریم این وضع را به‌حساب آوریم که تابع‌های مشخص به‌ازای هر مقدار عددی دل‌خواه، معین نیستند بلکه تنها به‌ازای مقدارهایی از x معین می‌شوند که اغلب پاره‌خطی از محور xها را پر می‌کند (که ممکن است پایان داشته باشد و یا بی‌پایان باشد).

اکنون دیگر می‌توانیم تعریفی از مفهوم تابع را، که در زمان ما در ریاضیات پذیرفته شده است، بیان کنیم:

کمیت y تابعی است از کمیت (مستقل) x، به‌شرطی که قانونی وجود داشته باشد که به‌وسیلهٔ آن هر مقدار x (که متعلق به مجموعه‌ای از عددهاست) متناظر با مقدار معینی از y باشد.

مجموعهٔ مقدارهای x (که در این تعریف از آن نام بردیم)، ***دامنه*** (یا ***حوزهٔ تعریف***) ***تابع*** نامیده می‌شود.

هر مفهوم تازه، اغلب به نماد و نشانهٔ تازه‌ای نیاز دارد. گذار از حساب به جبر، عبارت است از امکان ساختن دستورهایی که برای داده‌های عددی دل‌خواه مناسب باشد (جست‌وجوی راه‌حل‌های کلی، به ایجاد نمادها منجر می‌شود).

موضوع آنالیز، عبارت است از بررسی تابع‌ها (بستگی کمیت‌هایی با کمیت‌های دیگر). همان‌طور که در جبر، عدد مشخص را به عدد دل‌خواه تبدیل کردند، در آنالیز هم از دستورهای مشخص به تابع‌ها می‌رسیم. جملهٔ «y تابعی است از x» را بنابر قرارداد چنین می‌نویسند:

$$y = f(x)$$

همان‌طور که در جبر لازم است برای عددهای مختلف حرف‌های مختلفی برگزیده شود، در آنالیز هم برای نشانه‌گذاری بستگی‌های مختلف (تابع‌ها) باید نشانه‌های مختلف در نظر گرفته شود:

$$y = F(x)\ ,\ \ y = \varphi(x)\ ,\ \ \ldots$$

نمودار یا منحنی نمایش تغییرات تابع‌ها. یکی از ثمربخش‌ترین و درخشان‌ترین اندیشه‌های نیمهٔ دوم سدهٔ هفدهم، اندیشهٔ بستگی بین مفهوم تابع و شکل هندسی خط است. این بستگی به‌وسیلهٔ دستگاه مختصات قائم دکارتی تحقق پیدا کرد؛ دستگاهی که خواننده از دورهٔ دبیرستانی، با روش‌های کلی آن آشنایی دارد.

دستگاه مختصات دکارتی را روی صفحه نشان می‌دهیم. یعنی روی صفحه، دو خط راست عمود بر هم انتخاب (محور طول‌ها و محور عرض‌ها) و روی هریک از آن‌ها جهت مثبت را معین می‌کنیم. سپس به هر نقطهٔ M می‌توان دو عدد x و y نسبت داد که مختصات M است و با توجه به واحدی که برگزیده‌ایم فاصله‌های نقطهٔ M را از محور طول‌ها و محور عرض‌ها (با نشانه‌های مربوط) نشان می‌دهد[1].

به‌یاری دستگاه مختصات می‌توان نمایش هندسی تغییر تابع را به‌صورت یک خط نشان داد. فرض کنیم تابعی مانند

$$y = f(x) \tag{۶}$$

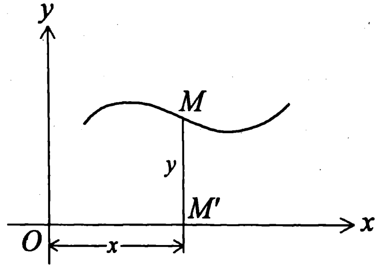
داده شده باشد. همان‌طور که می‌دانیم این به آن معنی است که برای هر مقدار x (که در داخل حوزهٔ تعریف تابعِ داده‌شده واقع باشد)، می‌توان مقدار متناظر y را به‌نحوی (و در مثل به‌کمک محاسبه) معین کرد. به x همهٔ مقدارهای عددی ممکن را می‌دهیم. برای هر مقدار x طبق رابطهٔ (۶)، مقدار y را معین می‌کنیم و در صفحه، نقطه‌ای با مختصات (x,y) مشخص می‌کنیم. بنابراین به‌ازای هر نقطهٔ M' از محور xها (شکل ۴)، نقطه‌ای مانند M به‌مختصات x و $y=f(x)$ وجود دارد. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های M، خطی را مشخص می‌کند که منحنی نمایش تغییرات یا نمودار تابع $y=f(x)$ نامیده می‌شود.

به این ترتیب، منحنی نمایش تغییرات تابع $f(x)$ (یا نمودار این تابع)، مکان هندسی نقطه‌هایی است که مختصات آن‌ها در معادلهٔ (۶) صدق کند.

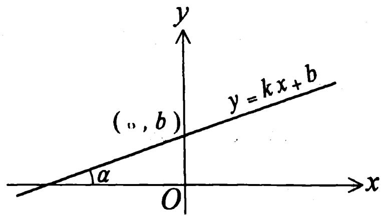
در دبیرستان، با نمودار ساده‌ترین تابع‌ها آشنا شده‌ایم. بسیار ممکن است، خواننده بداند که منحنی نمایش تغییرات تابع $y=kx+b$، که در آن k و b عددهای ثابتی هستند، به‌وسیلهٔ خط راستی نشان داده می‌شود (شکل ۵) که با جهت مثبت محور xها زاویهٔ α را می‌سازد، به‌نحوی که $\tan\alpha = k$ باشد و محور yها را در نقطهٔ $(0, b)$ قطع می‌کند. این تابع را تابع خطی نامند.

---

۱. عدد x را طول و عدد y را عرض نقطهٔ M گویند.



شکل ۴



شکل ۵

تابع‌های خطی کاربرد فراوان دارد. به‌یاد بیاوریم که بسیاری از قانون‌های فیزیکی به‌وسیلهٔ تابع‌های خطی بیان می‌شود (که به‌اندازهٔ کافی دقیق است). برای نمونه، طول l جسم، با تقریب کافی، به‌عنوان یک تابع خطی نسبت به درجهٔ حرارت آن، بررسی می‌شود:

$$l = l_0 + \alpha l_0 t$$

که در آن α ضریب انبساط طولی و l_0 طول جسم به‌ازای $t = 0$ است. اگر x معرف زمان و y طول راهی باشد که نقطه‌ای در این زمان پیموده است، تابع خطی $y = kx + b$ بیان می‌کند که در این حالت حرکت نقطه، یکنواخت و با سرعت k است. عدد b معرف فاصلهٔ نقطه از مبداء در لحظهٔ $x_0 = 0$ است (یعنی نقطه‌ای که حرکت را از آن‌جا آغاز می‌کنیم).

نخست، به این علت که اغلب می‌توان تغییرهای لازم را (ولو در فاصلهٔ کوچکی هم باشد) به‌طور تقریب به‌صورت یکنواخت بررسی کرد و دوم، به این علت که تابع‌های خطی تابع‌های ساده‌ای هستند، باعث شده است که این‌گونه تابع‌ها کاربرد فراوان پیدا کند.

در حالت‌های دیگر لازم است رابطه‌های تابعی دیگری را به‌کار بریم. در مثل، قانون **بویل ـ ماریوت** را به‌خاطر بیاوریم:

$$V = \frac{c}{p}$$

که در آن بستگی بین V و p، به‌صورت عکس نسبت مقدارهای آن‌ها داده شده است. نمودار چنین رابطه‌ای، یک هذلولی است (شکل ۶).

از خود قانونِ فیزیکی بویل ـ ماریوت برمی‌آید که p و V مثبت‌اند، بنابراین شاخه‌ای از منحنی که در ربع اول قرار دارد، نمایندهٔ این قانون است.

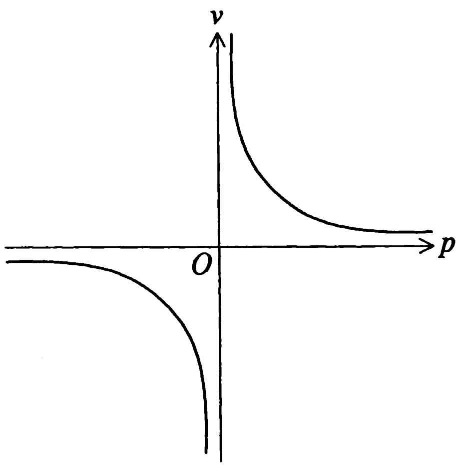
پدیده‌های نوسانی، که با حرکت‌های دوره‌ای همراه است، اغلب با تابع‌های مثلثاتی نمایش داده می‌شود، زیرا همان‌طور که می‌دانیم تابع مثلثاتی به‌طور دوره‌ای تغییر می‌کند.

به‌عنوان نمونه، اگر فنر آویزانی را از حالت تعادل آن خارج کنیم و تا حد ممکن آن را بکشیم، نقطهٔ A از آن، نوسان‌هایی در جهت قائم انجام خواهد داد که به‌وسیلهٔ قانون زیر که به‌اندازهٔ کافی (و نه به‌طور مطلق) دقیق است بیان می‌شود:

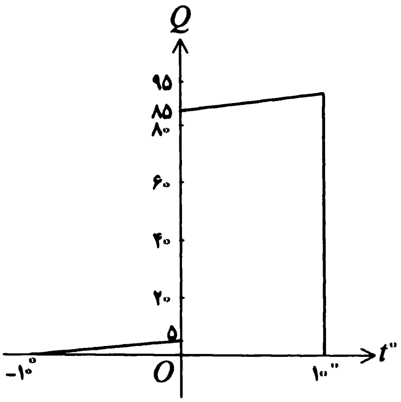
$$x = a\cos(pt+\alpha)$$

که در آن، x انحراف نقطهٔ A از وضع تعادل، t زمان و عددهای α و p و a مقدارهای ثابتی هستند که به نوع فنر فلز و اندازهٔ آن و درجهٔ کشش نخستین آن مربوط می‌شود.

باید توجه داشت که ممکن است تابع در فاصله‌های مختلف به‌وسیلهٔ دستورهای مختلف بیان شود و این دستورها را حالت‌های مختلف عمل، معین کند؛ رابطهٔ $Q=f(t)$، یعنی رابطهٔ بین درجهٔ حرارت t یک گرم آب (یخ) و مقدار حرارت Q که در آن است، زمانی که t بین ۱۰− درجه و ۱۰+ درجه تغییر کند، تابع معینی است که بادشواری به‌وسیلهٔ یک دستور بیان می‌شود[1]، ولی با دو دستور می‌توان به‌سادگی این تابع را معین کرد. از آن‌جا که



شکل ۶



شکل ۷

۱. این به‌معنای آن نیست که چنین تصوری ناممکن است. در بخش دوازدهم نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان دستور واحدی برای این تابع به‌دست آورد.

ظرفیت حرارتی یخ برابر ۵ر۰ و ظرفیت حرارتی آب برابر ۱ است، این تابع به‌صورت زیر بیان می‌شود (به‌شرطی که برای ۱۰ − درجه، مقدار ۰ = Q گرفته باشیم):

$$Q = ۰/۵t + ۵$$

که در آن t در فاصلهٔ $-۱۰^\circ \leq t < ۰^\circ$ تغییر می‌کند و دستور

$$Q = t + ۸۵$$

که در آن t در فاصلهٔ $۰^\circ < t \leq ۱۰^\circ$ تغییر می‌کند. برای ۰ = t این تابع مبهم است و دارای بی‌نهایت جواب است: می‌توان برای راحتی کار شرط کرد که برای ۰ = t، تابع مقدار معینی را قبول کند و در مثل داشته باشیم: $f(۰) = ۴۵$.

نمودار تابع $Q = f(t)$ در شکل ۷ نشان داده شده است.

ما نمونه‌های زیادی از تابع‌ها را آوردیم که به‌وسیلهٔ دستور بیان شده است. بیان تابع‌ها به‌کمک دستور از دیدگاه ریاضی اهمیت بسیار دارد، زیرا این، وسیلهٔ خوبی برای بررسی ویژگی‌های تابع با روش ریاضی است.

ولی نباید گمان کرد که دستور تنها وسیلهٔ بیان تابع است. وسیله‌های زیاد دیگری وجود دارد که بین آن‌ها نمایش تغییرات تابع اهمیت ویژه‌ای دارد، زیرا تصور هندسی را جلو چشم ما قرار می‌دهد. نمونهٔ زیر می‌تواند این مطلب را به‌خوبی روشن کند.

برای این که تغییر درجهٔ حرارت هوا را در جریان شبانه‌روز بدانیم در ایستگاه‌های هواشناسی از وسیله‌ای به‌نام *ترموگراف* استفاده می‌کنند. ترموگراف تشکیل شده است از استوانه‌ای که به‌کمک یک دستگاه ساعتی، دور محورش می‌چرخد، و یک قوطی برنجی خم‌شده‌ای که نسبت به تغییر درجهٔ حرارت حساسیت دارد. در اثر بالا رفتن درجهٔ حرارت، این قوطی باز می‌شود و درنتیجهٔ این انبساط، قلمی که به‌وسیلهٔ یک اهرم کوچک به آن بسته شده است بالا می‌رود. برعکس در اثر پایین آمدن درجهٔ حرارت، قلم هم پایین می‌آید. روی استوانه یک باند کاغذی شطرنجی به‌طور مناسب چسبانده شده است که روی آن به‌وسیلهٔ قلم خطی رسم می‌شود که همان نمایش تغییرات تابع $T = f(t)$ می‌باشد و بستگی بین زمان و درجهٔ حرارت هوا را بیان می‌کند. با کمک منحنی به‌دست‌آمده می‌توان بدون هیچ محاسبه‌ای، مقدار درجه حرارت T را در هر لحظهٔ زمانی t معین کرد.

نمونه‌ای را که آوردیم روشن می‌کند که نمودار، به‌خودی خود تابع را معین می‌کند و این تعیین، مستقل از آن است که دستوری برای تابع داده شده باشد یا نه.

ما بعد به این پرسش برخواهیم گشت (بخش دوازدهم) و درستی حکم بسیار مهم زیر را نشان خواهیم داد: هر منحنی نمایش تغییراتی را که پیوسته باشد، می‌توان به‌وسیلهٔ یک دستور ویا به‌زبان دیگر به‌وسیلهٔ بیان تحلیلی آن نشان داد. همین مطلب دربارهٔ بسیاری از نمودارهای ناپیوسته هم درست است[1].

یادآور می‌شویم، تنها در میانه‌های سدهٔ گذشته بود که این حکم (که اهمیت خیلی اساسی دارد)، به‌طور کامل در ریاضیات مفهوم شد. تا آن زمان تحت عنوان اصطلاح «تابع»، تنها یک بیان تحلیلی (دستور) را می‌فهمیدند. ولی درضمن به‌اشتباه گمان می‌کردند که هر منحنی نمایش تغییرات پیوسته، متناظر با یک بیان تحلیلی نیست وگمان می‌کردند که منحنی نمایش تغییرات تابع‌هایی که دستور تحلیلی آن‌ها داده شده باشد، باید نسبت به سایر منحنی‌ها ویژگی‌های ممتازتری داشته باشد.

باری، در سدهٔ نوزدهم کشف شد که همهٔ منحنی‌های پیوسته را می‌توان به‌وسیلهٔ دستوری (که یکی نسبت به دیگری، کمتر یا بیشتر، پیچیده است) بیان کرد. به این ترتیب، نقش استثنایی و فوق‌العادهٔ «بیان تحلیلی» که تنها وسیلهٔ تعیین و بیان تابع به‌شمار می‌رفت، متزلزل شد و درنتیجه تعریف تازه و قابل انعطاف‌تری برای مفهوم تابع تنظیم شد که ما در بالا از آن یاد کردیم. به‌موجب این تعریف: متغیر y را تابعی از متغیر x گویند به‌شرطی که قانونی وجود داشته باشد که طبق آن هر مقدار x (که مربوط به دامنهٔ این تابع است) با مقدار معینی از y، و تنها یک مقدار، متناظر باشد. در این‌جا این مطلب مهم نیست که قانون مزبور به چه وسیله داده شده است: دستور، منحنی، جدول و یا هر وسیلهٔ دیگری از این قبیل می‌تواند راهی برای بیان این قانون باشد.

در تاریخ ریاضیات، این تعریف را اغلب به **دیریکله** ریاضی‌دان نسبت می‌دهند، ولی باید یادآور شد که این تعریف را **لباچوسکی** هم هم‌زمان با **دیریکله** و مستقل از او پیشنهاد کرد.

در پایان پیشنهاد می‌کنیم، تابع‌های زیر را به‌عنوان تمرین رسم کنید:

$$x^{۳}\ ,\ \sqrt{x}\ ,\ \sin x\ ,\ \sin ۲x\ ,\ \sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)$$

$$\ln x\ ,\ \ln(۱+x)\ ,\ |x-۳|\ ,\ \frac{x+|x|}{۲}$$

---

۱. البته این حکم برای خواننده زمانی به‌خوبی روشن خواهد شد که اصطلاح «دستور» و «بیان تحلیلی» در ریاضیات، برای او به‌طور دقیق تعریف و روشن شود.

باید به این مسأله هم توجه کرد که نمودار تابعی که برای تمام مقدارهای x در رابطهٔ

$$f(-x) = f(x)$$

صدق کند، نسبت به محور yها متقارن است و در حالتی که در رابطهٔ

$$f(-x) = -f(x)$$

صدق کند، نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

فکر کنید که منحنی تابع $f(a+x)$، زمانی که a مقدار ثابتی است، از روی تابع $f(x)$ چگونه به‌دست می‌آید. سرانجام، این مسأله را حل کنید که چگونه با استفاده از روی نمودارهای تابع‌های $f(x)$ و $\varphi(x)$ می‌توان مقدار تابع مرکب

$$y = f[\varphi(x)]$$

را به‌دست آورد.

۳. حد

در بند اول این بخش گفتیم که آنالیز ریاضی امروزی، با روش ویژه‌ای کار می‌کند که محصول سده‌های متمادی و به‌عنوان وسیلهٔ اساسی داوری، در خدمت آنالیز قرار گرفته است. منظور ما روش بی‌نهایت کوچک‌ها و یا به‌زبان دیگر روش حد است. کوشش می‌کنیم که تصویری دربارهٔ این مفهوم‌ها به‌دست بدهیم.

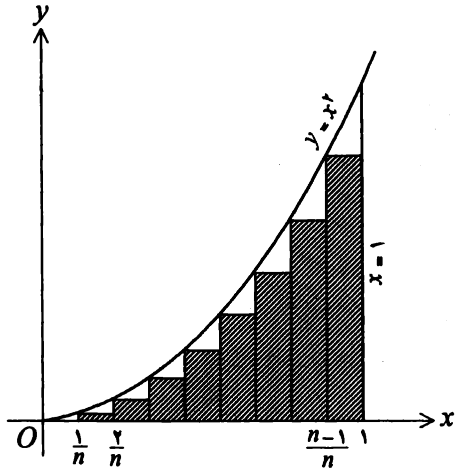
به این نمونه توجه کنیم:

می‌خواهیم مساحت محدود بین سهمی به‌معادلهٔ $y=x^۲$ و محور xها و خط $x=۱$ را محاسبه کنیم (شکل ۸). ریاضیات مقدماتی وسیله‌ای برای حل این مسأله به ما نمی‌دهد ولی می‌توان به‌روش زیر عمل کرد:

پاره‌خط راست $[۰, ۱]$ از محور xها را به‌وسیلهٔ نقطه‌های

$$۰, \frac{۱}{n}, \frac{۲}{n}, \ldots, \frac{n-۱}{n}, ۱$$

به n قسمت برابر بخش می‌کنیم و روی هریک از این بخش‌ها مستطیلی می‌سازیم که رأس زاویهٔ بالا و سمت چپ آن، روی سهمی باشد. درنتیجه، مستطیل‌های سایه‌خوردهٔ شکل ۸ را



شکل ۸

به‌دست می‌آوریم که S_n، یعنی مجموع مساحت‌های آن‌ها برابر است با

$$S_n = ۰ \times \frac{۱}{n} + \left(\frac{۱}{n}\right)^۲ \times \frac{۱}{n} + \left(\frac{۲}{n}\right)^۲ \times \frac{۱}{n} + \cdots + \left(\frac{n-۱}{n}\right)^۲ \times \frac{۱}{n}$$

$$= \frac{۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + (n-۱)^۲}{n^۳} = \frac{(n-۱)\, n\, (۲n-۱)^*}{۶n^۳}$$

مقدار S_n را به این صورت نشان می‌دهیم:

$$S_n = \frac{۱}{۳} + \left(\frac{۱}{۶n^۲} - \frac{۱}{۲n}\right) = \frac{۱}{۳} + \alpha_n \qquad (۷)$$

مقدار α_n به n مربوط است و گرچه در ظاهر مفصل است، ولی ویژگی جالبی دارد. اگر n

---

* اگر در تساوی روشن $(k+۱)^۳ - k^۳ = ۳k^۲ + ۳k + ۱$، به‌ازای مقدارهای $k = ۱, ۲, \ldots, (n-۱)$ بخش‌های سمت راست و چپ را به‌طور جداگانه با هم جمع کنید، معادلهٔ

$$n^۳ - ۱ = ۳\sigma_n + \frac{(n-۱)\, n}{۳} + n - ۱$$

که در آن $\sigma_n = ۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + (n-۱)^۲$ می‌باشد، به‌دست می‌آید و با حل این معادله، رابطهٔ زیر پیدا می‌شود:

$$\sigma_n = \frac{(n-۱)\, n\, (۲n-۱)}{۶}$$

به‌طور نامحدود بزرگ شود α_n به‌سمت صفر میل می‌کند. این ویژگی را می‌توان به این ترتیب هم بیان کرد: اگر عدد ثابت دل‌خواهی مانند ε داده شده باشد، می‌توان عدد مناسبی مانند N به‌دست آورد، به‌طوری که برای هر عدد n که بزرگتر از N باشد، عدد α_n، از نظر قدرمطلق از ε کوچکتر باشد[1].

در شکل ۸ دیده می‌شود که اگر n را به‌طور نامحدود بزرگ کنیم مجموع S_n (مساحت‌های مستطیل‌های سایه‌خورده) به‌سمت مساحت شکل منحنی‌الخطی که جست‌وجو می‌کردیم، میل می‌کند. از سوی دیگر از آن‌جا که در برابری (۷)، با میل n به‌سمت بی‌نهایت، α_n به‌سمت صفر میل می‌کند، ثابت می‌شود که مجموع S_n به‌سمت $\frac{1}{3}$ میل می‌کند. از آن‌جا، نتیجه می‌شود که مساحت لازم، یعنی S برابر $\frac{1}{3}$ است و به این ترتیب، مسأله را حل کردیم.

بنابراین، روش یادشده به این‌جا منجر می‌شود که برای پیدا کردن مقداری مانند S، مقدار دیگری مانند S_n که متغیر است و به‌سمت S میل می‌کند، در نظر بگیریم. S_n می‌تواند مقدارهایی مانند S_1 و S_2 و S_3 و... ، که بنا بر قانون معینی با عددهای طبیعی n(۱، ۲، ۳، ...) بستگی دارد، به‌خود بگیرد. سپس، همان‌طور که متوجه شدیم، مقدار متغیر S_n می‌تواند به‌صورت مجموع عدد ثابت $\frac{1}{3}$ و مقدار بی‌نهایت کوچک α_n درآید و ما ثابت کردیم که S_n به‌سمت $\frac{1}{3}$ میل می‌کند و بنابراین $S=\frac{1}{3}$. با زبان «نظریهٔ حد»، در این حالت می‌توان گفت که مقدار متغیر S_n، زمانی که n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند، برابر است با $\frac{1}{3}$.

---

۱. برای نمونه، اگر $\varepsilon = 0{,}001$ باشد، می‌توان N را مساوی ۵۰۰ گرفت. درواقع، از آن‌جا که داریم: $\frac{1}{2n} > \frac{1}{6n^2}$، اگر n عددی درست و مثبت باشد، به‌دست می‌آید:

$$|\alpha_n| = \left| \frac{1}{6n^2} - \frac{1}{2n} \right| = \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} < \frac{1}{2n}$$

و برای $n > 500$ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2n} < 0{,}001$$

به همین ترتیب می‌توان هر مقدار کوچکی برای ε برگزید.

$$\varepsilon_1 = 0{,}0001 \quad , \quad \varepsilon_2 = 0{,}00001 \quad , \quad \dots$$

و متناظر با آن‌ها عددهای به‌اندازهٔ کافی بزرگ $N = N_1, N_2, \dots$ را به‌دست آورد.

اکنون به تعریف دقیق این مفهوم‌ها می‌پردازیم:

اگر مقدار متغیر α_n ($n = ۱, ۲, ...$) دارای چنان ویژگی باشد که برای هر عدد مثبت ε، که به‌اندازهٔ دل‌خواه کوچک است، بتوان عدد N را به‌قدر کافی بزرگ برگزید به‌طوری که اگر $n > N$، آن‌وقت نابرابری $|\alpha_n| < \varepsilon$ هم برقرار باشد. در این صورت، می‌گویند، α_n ***مقدار بی‌نهایت کوچکی*** است و می‌نویسند:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \alpha_n = ۰ \quad \text{یا} \quad \alpha_n \to ۰$$

از سوی دیگر، اگر متغیری مانند x_n را بتوان به‌صورت این مجموع نوشت:

$$x_n = a + \alpha_n$$

که در آن a عدد ثابت و α_n مقدار بی‌نهایت کوچکی باشد، در این صورت می‌گویند متغیر x_n زمانی که n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، به‌سمت عدد a میل می‌کند و می‌نویسند:

$$\text{حد}\ x_n = a \quad \text{یا} \quad x_n \to a$$

عدد a را حد x_n گویند. به‌ویژه روشن است که حد مقدارهای بی‌نهایت کوچک برابر صفر است.

نمونه‌هایی از مقدارهای متغیر را بررسی کنیم:

$$x_n = \frac{۱}{n}\ ,\ y_n = -\frac{۱}{n^۲}\ ,\ z_n = \frac{(-۱)^n}{n^n}\ , \qquad (n = ۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳\ ,\ ...)$$

$$u_n = \frac{n-۱}{n} = ۱ - \frac{۱}{n}\ ,\ v_n = (-۱)^n$$

روشن است که مقدارهای x_n و y_n و z_n مقدارهای بی‌نهایت کوچک‌اند: x_n به‌طور نزولی به‌سمت صفر میل می‌کند، y_n به‌طور صعودی به‌سمت صفر میل می‌کند (درحالی که همیشه مقدارهای منفی را می‌پذیرد) و z_n، درحالی به‌سمت صفر میل می‌کند که دور صفر نوسان می‌کند. همچنین $u_n \to ۱$ میل می‌کند ولی v_n دارای حدی نیست، زیرا با نمو n به هیچ عدد ثابتی نزدیک نمی‌شود و همیشه یکی از دو مقدار ۱ و ۱− را می‌پذیرد.

در آنالیز، مفهوم ***بی‌نهایت بزرگ*** هم اهمیت ویژه‌ای دارد. اگر x_n ($n = ۱, ۲, ...$) مقدار بی‌نهایت بزرگ باشد، باید برای هر عدد مثبت M که به‌اندازهٔ دل‌خواه بزرگ است، عددی مانند N وجود داشته باشد که اگر $n > N$، آن‌وقت

$$|x_n| > M$$

این حقیقت که مقدار x_n بی‌نهایت بزرگ است، چنین نوشته می‌شود:

$$\text{حد}\ x_n = \infty \quad \text{یا} \quad x_n \to \infty$$

در این‌گونه حالت‌ها، می‌گویند x_n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. اگر مقدار x_n، ضمن این میل، مثبت یا منفی باشد، آن را چنین می‌نویسند: $x_n \to +\infty$ ($x_n \to -\infty$)، به‌عنوان نمونه، برای $n = ۱, ۲, ...$ داریم:

$$\text{حد}\ n^۲ = +\infty \quad \text{و} \quad \text{حد}\ (-n^۲) = -\infty$$

$$\text{حد}\ \log \frac{۱}{n} = -\infty \quad \text{و} \quad \text{حد}\ \tan\left(\frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{n}\right) = -\infty$$

به‌سادگی دیده می‌شود، اگر α_n بی‌نهایت بزرگ باشد، $\beta_n = \frac{۱}{\alpha_n}$ بی‌نهایت کوچک خواهد بود و برعکس.

دو مقدار متغیر x_n و y_n را می‌توان جمع، تفریق، ضرب یا بخش کرد و در حالت کلی مقدارهای متغیر تازه‌ای به‌دست آورد: مقدارهای خاص مجموع $x_n + y_n$، تفاضل $x_n - y_n$، حاصل‌ضرب $x_n . y_n$ و خارج‌قسمت $\frac{x_n}{y_n}$، متناظر با این مقدارهاست:

$$x_۱ \pm y_۱\ ,\ x_۲ \pm y_۲\ ,\ x_۳ \pm y_۳\ ,\ ...$$

$$x_۱ . y_۱\ ,\ x_۲ . y_۲\ ,\ x_۳ . y_۳\ ,\ ...$$

$$\frac{x_۱}{y_۱}\ ,\ \frac{x_۲}{y_۲}\ ,\ \frac{x_۳}{y_۳}\ ,\ ...$$

از این‌جا این حقیقت، که به‌خودی خود هم روشن است، ثابت می‌شود که اگر متغیرهای x_n و y_n به‌سمت حد معینی میل کند، مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت آن‌ها هم به‌سمت حدی که برابر با مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و خارج‌قسمت حدهای آن‌هاست میل خواهد کرد. این مطلب را می‌توان چنین نوشت:

$$\text{حد}\ (x_n \pm y_n) = \text{حد}\ x_n \pm \text{حد}\ y_n\ ,$$

$$\text{حد}\ (x_n . y_n) = \text{حد}\ x_n . \text{حد}\ y_n\ ,$$

$$\text{حد}\ \frac{x_n}{y_n} = \frac{\text{حد}\ x_n}{\text{حد}\ y_n}$$

تنها در حالت خارج‌قسمت، باید فرض کرد که حد مخرج ($\text{حد}\ y_n$)، برابر صفر نباشد اگر $\text{حد}\ y_n = ۰$، و $\text{حد}\ x_n \neq ۰$ باشد، در آن صورت نسبت x_n به y_n به‌سمت حد معینی میل

نمی‌کند، بلکه به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند حالتی هم که صورت و مخرج با هم به‌سمت صفر میل کنند، حالت جالب و مهمی است در این حالت از پیش نمی‌توان گفت که آیا نسبت $\frac{x_n}{y_n}$ به‌سمت حدی میل می‌کند یا نه و اگر چنین حدی وجود دارد، این حد کدام است؟ زیرا پاسخ به این پرسش، به نوع میل x_n و y_n به‌سمت صفر بستگی دارد؛ اگر داشته باشیم:

$$x_n = \frac{1}{n} \ , y_n = \frac{1}{n^2} \ , z_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad (n = 1 , 2 , ...)$$

در آن صورت:

$$\frac{y_n}{x_n} = \frac{1}{n} \to 0 \ , \quad \frac{x_n}{y_n} = n \to \infty$$

از سوی دیگر، روشن است که مقدار

$$\frac{x_n}{z_n} = (-1)^n$$

به‌سمت هیچ حدی میل نمی‌کند.

بنابراین، زمانی که صورت و مخرج کسری، هردو به‌سمت صفر میل می‌کند از پیش نمی‌توان آن را مانند یک قضیهٔ کلی بررسی کرد. در این حالت برای هر کسر جداگانه، باید بررسی جداگانه‌ای انجام داد.

بعد خواهیم دید که مسألهٔ اساسی حساب دیفرانسیل، که می‌توان آن را به‌عنوان مسألهٔ پیدا کردن سرعت حرکت غیریکنواخت در لحظهٔ مفروض، بررسی کرد، به تعیین حد نسبت دو مقدار بی‌نهایت کوچک، یعنی نسبت نمو مسافت به نمو زمان منجر می‌شود.

ما متغیر x_n را بررسی کردیم. این متغیر، مقدارهای عددی x_1، x_2، ... را پشت سر هم‌قبول می‌کرد. در این‌جا n از دنبالهٔ عددهای طبیعی $(n = 1, 2, 3, ...)$ می‌گذشت، ولی می‌توان فرض کرد که n به‌طور پیوسته تغییر می‌کند، مثل زمان، و با توجه به آن از راهی شبیه آن‌چه که در پیش گفتیم حد متغیر x_n را معین کرد. ویژگی این‌گونه حدها هم شبیه ویژگی متغیرهای ناپیوسته است. یادآور می‌شویم که در این‌جا (یعنی درحالی که n به‌طور پیوسته تغییر می‌کند)، لزومی ندارد که n به‌سمت بی‌نهایت میل کند، بلکه می‌تواند به مقدار داده‌شده‌ای مانند n_0 نزدیک شود.

برای نمونه، تغییر $\frac{\sin x}{x}$ را، زمانی که x به صفر نزدیک می‌شود، دنبال می‌کنیم. اندازهٔ آن به‌ازای بعضی از مقدارهای x چنین است:

x	$\frac{\sin x}{x}$
۰٫۵۰	...۰٫۹۵۸۹
۰٫۱۰	...۰٫۹۹۸۳
۰٫۰۵	...۰٫۹۹۹۶
...	...

(مقدار x برحسب رادیان بیان شده است).

همان‌طور که دیده می‌شود، با نزدیک شدن x به صفر، مقدار $\frac{\sin x}{x}$ به ۱ نزدیک می‌شود. ولی البته لازم است که این مطلب را بادقت اثبات کنیم. اثبات را می‌توان به‌عنوان نمونه، از نابرابری زیر به‌دست آورد این نابرابری برای همهٔ کمان‌های غیرصفری که انتهای آن‌ها در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی باشد درست است:

$$\sin x < x < \tan x$$

اگر تمام جمله‌های نابرابری را به $\sin x$ بخش کنیم ($\sin x > ۰$)، چنین خواهیم داشت:

$$۱ < \frac{x}{\sin x} < \frac{۱}{\cos x}$$

و از آن‌جا، نتیجه می‌شود:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < ۱$$

اما از آن‌جا که با میل x به‌سمت صفر، $\cos x$ به‌سمت ۱ میل می‌کند مقدار $\frac{\sin x}{x}$ هم که بین مقدارهای $\cos x$ و ۱ قرار دارد به‌سمت ۱ میل می‌کند، یعنی

$$\underset{x \to ۰}{\text{حد}} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

کاربرد این حد را بعد خواهیم دید.

این برابری را برای حالتی ثابت کردیم که x درعین‌حال که همیشه مثبت است، به‌سمت صفر میل می‌کند. با تغییر ظاهری برهان می‌توان همین برابری را برای حالتی هم که x با قبول مقدارهای منفی به‌سمت صفر میل می‌کند، ثابت کرد.

اکنون پرسش دیگری را مطرح کنیم. یک کمیت متغیر می‌تواند دارای حدی باشد و یا نباشد. این پرسش پیش می‌آید که آیا نمی‌توان راهی پیدا کرد که به‌یاری آن بتوان وجود حد

را برای متغیر ثابت کرد. حالت مهم و عمومی را در نظر می‌گیریم، و این حالتی است که می‌توانیم چنین راهی را برای آن پیدا کنیم.

فرض کنید کمیت متغیر x_n، صعودی و یا لااقل غیرنزولی باشد، یعنی این نابرابری‌ها را داشته باشیم:

$$x_۱ \leq x_۲ \leq x_۳ \leq \dots ,$$

و فرض کنید همچنین کشف کرده باشیم که تمام مقدارهای x_n از عددی مانند M تجاوز نکند، یعنی $x_n \leq M$ $(n = ۱, ۲, ۳, \dots)$. اگر مقدار x_n و عدد M را روی محور xها نشان دهیم، نقطهٔ متغیر x_n روی محور به‌سوی راست جلو می‌رود، درحالی که همیشه سمت چپ نقطهٔ M قرار دارد. به‌اندازهٔ کافی روشن است که نقطهٔ متغیر x_n باید به‌ناچار به‌سوی یک نقطهٔ حدی مانند a میل کند که یا در سمت چپ M واقع است ویا حداکثر بر M منطبق می‌شود. بنابراین، در این حالت متغیر دارای حدی خواهد بود:

$$\text{حد}\; x_n = a$$

در برهان بالا از روشنی مطلب استفاده کردیم، ولی نمی‌توان آن را به‌عنوان اثبات قبول کرد. در دورهٔ تازهٔ آنالیز ریاضی، براساس نظریهٔ عددهای حقیقی، برهان درست این حکم داده شده است.

به‌عنوان نمونه این متغیر را بررسی می‌کنیم:

$$U_n = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n \qquad (n = ۱, ۲, ۳, \dots)$$

نخستین مقدارهای U_n چنین است:

$$U_۱ = ۲\,,\;\; U_۲ = ۲٫۲۵\,,\;\; U_۳ \approx ۲٫۳۷\,,\;\; U_۴ \approx ۲٫۴۴\,, \dots$$

همان‌طور که دیده می‌شود این متغیر صعودی است. به‌طور کلی با بازکردن U_n، بنا بر قانون دوجمله‌ای نیوتن، می‌توان ثابت کرد که این متغیر برای همهٔ مقدارهای n صعودی است. به‌جز آن به‌سادگی ثابت می‌شود که برای هر مقدار n نابرابری $U_n < ۳$ درست است. در این حالت، متغیر ما دارای حدی است که از عدد ۳ تجاوز نمی‌کند. به‌طوری که بعد خواهیم دید این عدد نقش بسیار مهمی در آنالیز ریاضی دارد و از بعضی جنبه‌ها، طبیعی‌ترین پایه، برای لگاریتم عددهاست. حد این متغیر را با حرف e نشان می‌دهند و برابر است با:

$$e = \underset{n \to \infty}{\text{حد}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = ۲٫۷۱۸\ ۲۸۱\ ۸۲۸\ ۴۵۹\ ۰۴۵ \ldots$$

با بررسی‌های بیشتری، ثابت می‌کنند که عدد e عددی گویا نیست[۱].

همچنین، می‌توان ثابت کرد که نه‌تنها زمانی که $n \to +\infty$، بلکه موقعی هم که $n \to -\infty$، حد مزبور برابر e می‌شود. و نیز در هر دو حالت می‌توان n را عددهای نادرست هم به‌حساب آورد.

ما روی نقش اساسی مفهوم حد در دانش‌های طبیعی می‌ایستیم. این نقش در این واقعیت جالب نهفته است که تنها به‌کمک مفهوم حد (عبور یا انتقال حدی) است که می‌توان کمیت‌های مشخصی را، که در دانش‌های طبیعی به آن‌ها برخورد می‌کنیم، به‌طور دقیق و کامل تعریف کرد.

حالت زیر را که یک نمونهٔ هندسی است بررسی می‌کنیم. در دورهٔ هندسهٔ دبیرستانی، ابتدا شکل‌هایی بررسی می‌شود که محدود به پاره‌خط‌های راست باشند و سپس به مسألهٔ پیچیده‌تر مربوط به پیدا کردن طول محیط دایره با شعاع داده‌شده می‌رسیم. اگر دشواری‌هایی را که به حل این مسأله مربوط‌اند تحلیل کنیم، می‌توانیم آن‌ها را به این صورت جمع‌بندی کنیم:

باید به این مطلب توجه کنیم که طول محیط دایره چیست، یعنی تعریف دقیق آن را پیدا کنیم. اصل مسأله این است که هم تعریف را به پاره‌خط‌های راست منجر کنیم و هم با این تعریف راهی برای محاسبهٔ محیط دایره جست‌وجو کنیم.

روشن است نتیجهٔ عددی باید با عمل تطبیق کند. در مثل اگر دایره‌ای برگزینیم که از نخ واقعی درست شده باشد، با قطع نخ و کشیدن آن باید پاره‌خط راستی به‌دست آوریم که در حد دقت اندازه‌گیری، طول آن با محاسبه تطبیق کند.

به‌طوری که از دورهٔ دبیرستانی می‌دانیم حل این مسأله به تعریف زیر می‌رسد:

محیط دایره عبارت است از حدی که محیط یک چندضلعی منتظم[۲] محاط در این دایره،

---

۱. در وابستگی با این مطلب باید یادآوری کرد که با انجام عمل‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم (اگر تقسیم بر صفر را کنار بگذاریم) روی عددهای گویا، یعنی عددهایی که به‌صورت $\frac{p}{q}$ باشند (p و q عددهایی درست‌اند)، دوباره به عددی گویا می‌رسیم. ولی دربارهٔ عمل‌های مربوط به حد این‌طور نیست. حد توالی عددهای گویا، ممکن است عددی گنگ باشد.

۲. منتظم بودن چندضلعی مهم نیست. آن‌چه در این‌جا مهم است، این است که بزرگترین ضلع چندضلعی محاط در دایره به سمت صفر میل کند.

زمانی که تعداد ضلع‌های آن بی‌نهایت زیاد می‌شود، به‌سمت آن میل می‌کند. به این ترتیب، حل این مسأله برپایهٔ مفهوم حد قرار می‌گیرد. به روش مشابهی، طول منحنی مسطح دلخواه را تعریف می‌کنند.

ما در پیش، و در همین بند اخیر، یک‌رشته نمونه‌های مربوط به کمیت‌های فیزیکی و ریاضی دیدیم که تعریف دقیق آن‌ها را تنها به‌کمک به‌کاربردن مفهوم حد می‌توان پیدا کرد.

تنها در ابتدای سدهٔ نوزدهم بود که مفهوم‌های حد و بی‌نهایت کوچک، به‌طور قطع تنظیم شد. تعریفی از این مفهوم‌ها که در پیش آوردیم، با نام **کوشی** همراه است. پیش از **کوشی** با مفهوم‌هایی که کمتر دقیق بودند سر و کار داشتند.

تعریف امروزی حد و بی‌نهایت کوچک، به‌عنوان کمیت متغیر، و همچنین تعریف عددهای حقیقی، نتیجهٔ پیشرفت آنالیز ریاضی و به‌یاری تنظیم و تثبیت موفقیت‌های آن به‌دست آمده است.

۴. تابع‌های پیوسته

تابع‌های پیوسته بخش اساسی تابع‌هایی را تشکیل می‌دهند که سر و کار آنالیز ریاضی با آن‌هاست. تصور دربارهٔ تابع‌های پیوسته را می‌توان به این ترتیب به‌دست آورد که بگوییم منحنی نمایش تغییرات یا نمودار آن‌ها پیوسته است، یعنی می‌توان منحنی آن‌ها را رسم کرد بدون این که مداد را از کاغذ جدا کرد.

از نظر ریاضی، تابع‌های پیوسته چنان ویژگی را بیان می‌کنند که در عمل اغلب با آن‌ها سر و کار داریم. این ویژگی چنین است: هر نمو کوچک در متغیر مستقل، متناظر است با نمو کوچکی از متغیری که به آن وابسته است (تابع). بهترین نمونهٔ تابع‌های پیوسته، قانون‌های مختلف حرکت جسم است: $S=f(t)$، که بستگی بین مسافت S که به‌وسیلهٔ جسم پیموده شده است و زمان t را بیان می‌کند.

زمان و فضا پیوسته‌اند و بنابراین قانون حرکت جسم، یعنی $S=f(t)$، که رابطهٔ معینی را بین زمان و فضا معین می‌کند، دارای این ویژگی است که هر نمو کوچک زمان متناظر با نمو کوچکی از مسافت است.

بشر از راه مشاهده و بررسی محیط‌های پیوسته (جامد، مایع ویا گازی‌شکل) که او را احاطه کرده است همچون فلزها، آب و هوا، به مفهوم انتزاعی پیوستگی رسید. درحقیقت آن‌طور که اکنون روشن شده است هر محیط فیزیکی عبارت است از تراکم تعداد زیادی ذره‌های جداگانه و متحرک. ولی این ذره‌ها و فاصله‌های بین آن‌ها، در سنجش با حجمی از محیط که در پدیده‌های فیزیکی میکروسکوپی سر و کار داریم، آن‌قدر کوچک است که اگر محیط مورد بررسی را بدون فاصله در نظر بگیریم و چنان فرض کنیم که در فضایی که اشغال‌کرده است به‌طور پیوسته مستقر شده است، در بسیاری حالت‌ها به بررسی ما لطمه‌ای نخواهد زد. بسیاری از اصل‌های فیزیکی، مانند هیدرودینامیک، آیرودینامیک و نظریهٔ جهمندی (الاستیسیته)، برپایهٔ همین فرض بنا شده است. مفهوم ریاضی پیوستگی دربارهٔ این اصل‌ها هم مثل بسیاری حالت‌های دیگر نقش عمده‌ای به‌عهده دارد.

تابع $y=f(x)$، و مقدار معینی برای متغیر مستقل، مانند $x_\circ$ را در نظر می‌گیریم. اگر تابع بازتابی از یک جریان پیوسته باشد، باید به‌مقداری از x که تفاوت کمی با $x_\circ$ دارد، مقداری از تابع $f(x)$ متناظر باشد که با $f(x_\circ)$ در نقطهٔ $x_\circ$، تفاوت کمی داشته باشد. بنابراین اگر نمو متغیر مستقل، یعنی $x-x_\circ$ کوچک باشد، باید نمو تابع متناظر آن، یعنی $f(x)-f(x_\circ)$ هم کوچک باشد. به‌زبان دیگر، اگر نمو متغیر مستقل، یعنی $x-x_\circ$ به‌سمت صفر میل کند، نمو $f(x)-f(x_\circ)$ تابع هم به‌نوبت خود باید به‌سمت صفر میل‌کندکه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\lim_{x-x_\circ \to \circ} [f(x)-f(x_\circ)] = \circ \qquad (\text{۸})$$

درواقع، این رابطه، تعریف پیوسته بودن تابع در نقطهٔ $x_\circ$ است.

تابع $f(x)$ را **در نقطهٔ $x_\circ$ پیوسته گویند**، زمانی که برابری (۸) برقرار باشد.

تعریف دیگری را هم یادآور می‌شویم:

تابع $f(x)$ را ***به‌ازای همهٔ مقدارهای واقع بر پاره‌خط راست داده‌شده‌ای پیوسته گویند***، زمانی که در هر نقطهٔ $x_\circ$ از این پاره‌خط راست، پیوسته باشد، یعنی برای هر نقطهٔ آن برابری (۸) برقرار باشد.

بنابراین، برای این که به تعریف ریاضی خاصیتی از تابع برسیم که به این ترتیب بیان می‌شود: اگر نمودار تابع، یک منحنی پیوسته (به معنی معمولی این اصطلاح) باشد، لازم

است نخست ویژگی موضعی پیوستگی را تعریف کنیم (پیوستگی در نقطهٔ $x_{\circ}$)، سپس براساس آن، پیوستگی تابع را روی یک پاره‌خط کامل تعریف کنیم.

این تعریف که در نخستین سال‌های سدهٔ نوزدهم و به‌وسیلهٔ کوشی داده شد در آنالیز ریاضی امروزی مورد قبول همه است. بررسی نمونه‌های مشخص زیاد، نشان داد که این تعریف با تصوری که در عمل از تابع‌های پیوسته داریم، و در مثل، تصور منحنی‌های پیوسته، سازگار است.

به‌عنوان نمونهٔ تابع‌های پیوسته، می‌توان از تابع‌های x^n، $\sin x$، $\cos x$، a^x، $\log x$، $\arcsin x$، $\arccos x$، که از دورهٔ ریاضیات مقدماتی دبیرستانی برای خواننده روشن شده است، نام برد. همهٔ تابع‌های نام‌برده، به‌ازای نقطه‌های واقع بر پاره‌خط‌هایی که مقدارهای x را معین می‌کند، پیوسته است.

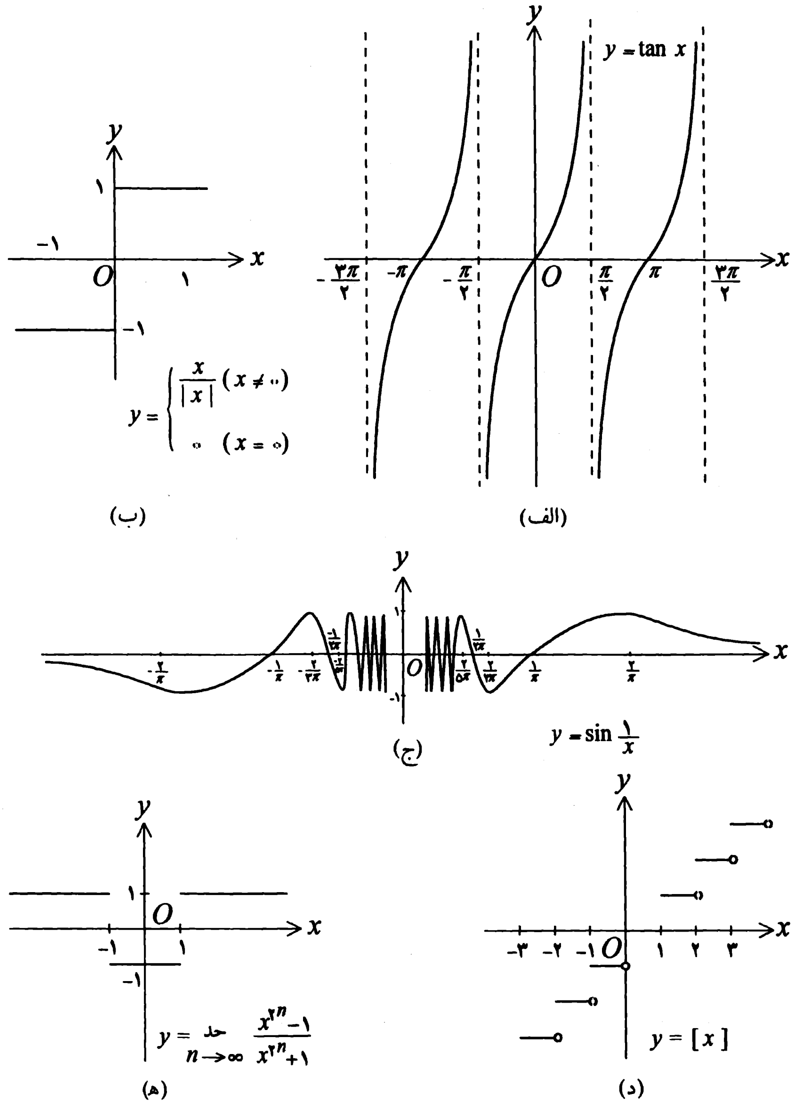
اگر تابع‌های پیوسته را جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم کنیم (البته در تقسیم به‌ازای مقدارهایی که مخرج را برابر صفر نکند)، دوباره تابع‌های پیوسته به‌دست خواهیم آورد. ولی در تقسیم برای مقدارهایی مانند $x_{\circ}$ که به‌ازای آن‌ها مخرج برابر صفر می‌شود، پیوسته بودن تابع از بین می‌رود. نتیجهٔ چنین تقسیمی این است که تابع در نقطهٔ $x_{\circ}$ ناپیوسته می‌شود.

تابع $y=\frac{1}{x}$ را می‌توان نمونه‌ای از این‌گونه تابع‌ها دانست، این تابع در نقطهٔ $x=\circ$ ناپیوسته است. نمودار تعدادی از تابع‌های ناپیوستهٔ دیگر در شکل ۹ داده شده است.

به خواننده سفارش می‌کنیم این منحنی‌ها را بادقت بررسی کند. یادآور می‌شویم که تابع‌های ناپیوسته مختلف‌اند: گاهی با نزدیک شدن x به نقطهٔ $x_{\circ}$ (که در آن‌جا تابع ناپیوسته است)، برای $f(x)$ حدی وجود دارد، ولی این حد با $f(x_{\circ})$ مخالف است و گاهی چنین حدی وجود ندارد ($y=\sin\frac{1}{x}$: شکل ۹-ج). گاهی ممکن است، اگر x از یک جهت به $x_{\circ}$ نزدیک شود، $f(x)-f(x_{\circ})$ به‌سمت صفر میل کند، ولی اگر از سوی دیگر $x \to x_{\circ}$، مقدار $f(x)-f(x_{\circ})$ به‌سمت صفر میل نکند. البته در این‌جا هم تابع ناپیوسته است (گرچه در این نقطه «از یک‌سو پیوسته» است).

به‌عنوان تمرین، خواننده به این پرسش پاسخ بدهد که تابع‌های $\frac{\sin x}{x}$، $\frac{1-\cos x}{x^2}$، $\frac{x^3-1}{x-1}$ و $\frac{\tan x}{x}$ در نقطه‌هایی که مبهم‌اند (در نقطه‌هایی که مخرج را برابر صفر می‌کند) باید برابر چه مقداری شوند تا این که پیوسته باشند و آیا چنین عددهایی را می‌توان برای تابع‌های $\tan x$، $\frac{1}{x-1}$ و $\frac{x-2}{x^2-4}$ پیدا کرد؟

تابع‌های ناپیوسته، بسیاری از جریان‌های جهشی را که در طبیعت با آن‌ها برخورد



شکل ۹

می‌کنیم، بازتاب می‌دهند. برای نمونه، مقدار سرعت جسم در اثر ضربه به‌شکل جهشی تغییر پیدا می‌کند. غالب تغییرهای کیفی به‌شکل جهشی انجام می‌شود. در بند دوم این بخش، نمونه‌ای از تابع $Q=f(t)$ را یادآور شدیم که رابطهٔ بین مقدار حرارت و مقدار معینی از آب (یا یخ) را با درجهٔ حرارت بیان می‌کند. در حوالی نقطهٔ ذوب یخ با تغییر t مقدار حرارت $Q=f(t)$ به‌شکل جهشی تغییر می‌کند.

در آنالیز، اغلب با تابع‌های ناپیوسته هم مانند تابع‌های پیوسته سر و کار داریم. به‌عنوان نمونه‌ای از تابع‌های پیچیده‌تر، می‌توان از تابع **ریمان** که دارای بی‌نهایت نقطهٔ ناپیوستگی است، نام برد. این تابع به‌ازای کلیهٔ مقدارهای گنگ برابر با صفر، و به‌ازای کلیهٔ مقدارهای گویا که به‌شکل $x=\frac{p}{q}$ باشد (p و q نسبت به هم اولند) برابر با $\frac{1}{q}$ است. این تابع در نقطه‌های گویا ناپیوسته و در نقطه‌های گنگ پیوسته است.

با کمی تغییر در این تابع، به‌سادگی می‌توان نمونهٔ تابعی را به‌دست آورد که در تمام نقطه‌هایش ناپیوسته باشد[1].

یادآور می‌شویم که آنالیز امروزی حتی دربارهٔ این‌گونه تابع‌های پیچیده هم قانون‌های جالبی کشف کرده است که در رشتهٔ مستقلی از آنالیز به‌نام نظریهٔ تابع‌های با متغیر حقیقی بررسی می‌شود. ریاضی‌دانان شوروی، سپردهٔ بزرگی در این رشتهٔ ریاضی که در ۷۰ سال اخیر با سرعت بیش از حدی پیشرفت می‌کند، باقی گذاشته‌اند.

۵. مشتق

یکی دیگر از مفهوم‌های اساسی آنالیز، مشتق است. دو مسأله را که مشتق از حل آن‌ها به‌وجود آمده است برمی‌گزینیم:

سرعت. در مقدمهٔ این بخش، سرعت جسمی را که درحال سقوط آزاد باشد معین کردیم. برای این کار نخست سرعت متوسط را در مسافت کوچکی پیدا کردیم و سپس با انتقال حدی، به سرعت در مکان و زمان داده‌شده رسیدیم. برای تعیین سرعت لحظه‌ای هر حرکت غیریکنواخت دیگری هم، می‌توان از همین روش استفاده کرد. درحقیقت فرض کنید تابع

$$s=f(t)$$

رابطهٔ مسافت پیموده‌شدهٔ s یک نقطهٔ مادی را با زمان t بیان کند. برای پیدا کردن سرعت در لحظهٔ $t=t_0$، فاصلهٔ زمانی از t_0 تا t_0+h را بررسی می‌کنیم. پس از این زمان، نقطهٔ مادی به‌اندازهٔ مسافت

---

۱. کافی است فرض کنیم که در نقطه‌های گنگ برابر با صفر نباشد و در مثل برابر با واحد باشد.

$$\Delta s = f(t_\circ + h) - f(t_\circ)$$

راه پیموده است. سرعت متوسط v_m در این فاصله به h مربوط است:

$$v_m = \frac{\Delta s}{h} = \frac{1}{h}\,[f(t_\circ + h) - f(t_\circ)]$$

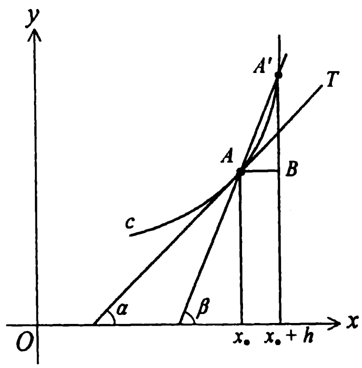
با کوچک کردن h، به سرعت واقعی در لحظهٔ $t_\circ$ نزدیکتر می‌شویم. از آن‌جا نتیجه می‌شود سرعت حقیقی در لحظهٔ $t_\circ$ برابر است با نسبت نمو مسافت به نمو زمان، به‌شرطی که نمو زمان به‌سمت صفر میل کند (درحالی که همیشه مخالف صفر باقی بماند):

$$v = \underset{h \to \circ}{\text{حد}}\ \frac{f(t_\circ + h) - f(t_\circ)}{h}$$

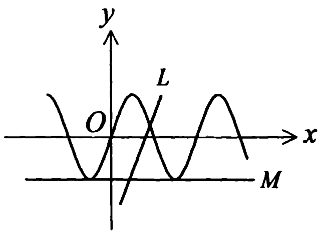
محاسبهٔ سرعت حرکت‌های مختلف، موکول به این می‌شود که بتوانیم این حد را برای تابع‌های مختلف $f(t)$ پیدا کنیم.

مماس. برای جست‌وجوی حدی شبیه به آن‌چه گفته شد، نمونهٔ دیگری می‌آوریم. این مرتبه به‌سراغ هندسه می‌رویم و دربارهٔ رسم‌مماس بر منحنی دل‌خواه روی صفحه، بحث می‌کنیم.

فرض کنیم C منحنی نمایش تغییر تابع $y = f(x)$ و A نقطه‌ای از منحنی C به‌طول $x_\circ$ باشد (شکل ۱۰). چه خطی در نقطهٔ A بر منحنی C مماس است؟ در هندسهٔ مقدماتی، این پرسش وجود ندارد. برای یکی از منحنی‌هایی که در هندسهٔ مقدماتی بررسی می‌شود، یعنی دایره، مماس عبارت از خط راستی است که تنها یک نقطهٔ مشترک با دایره داشته باشد. ولی برای سایر منحنی‌ها، این تعریف با تصور روشنی که از نقطهٔ «تماس» داریم، تطبیق



شکل ۱۰



شکل ۱۱

نمی‌کند. برای نمونه، روشن است که از دو خط راست L و M که در شکل ۱۱ نشان داده شده است، اولی بر منحنی داده‌شده (که یک منحنی سینوسی است) مماس نیست، گرچه تنها یک نقطهٔ مشترک با آن دارد، ولی خط دوم با منحنی نقطه‌های مشترک زیادی دارد و باوجود این در هریک از این نقطه‌ها بر منحنی مماس است.

برای این که تعریف مماس را پیدا کنیم، روی منحنی C (شکل ۱۰) نقطهٔ دیگری مانند A' جدا از A و به‌طول $x_\circ + h$ در نظر می‌گیریم: قاطع AA' را رسم می‌کنیم و زاویه‌ای را که این قاطع با محور xها تشکیل می‌دهد β می‌نامیم. اکنون نقطهٔ A' را روی منحنی C به نقطهٔ A نزدیک می‌کنیم. اگر ضمن این عمل، قاطع AA' به‌سمت یک وضع حدی میل کند، در آن صورت خط T که این وضع حدی را دارد، مماس در نقطهٔ A نامیده می‌شود. روشن است که زاویهٔ α، یعنی زاویه‌ای که خط T با محور xها تشکیل می‌دهد، باید برابر با حد زاویهٔ متغیر β باشد: مقدار $\tan\beta$ از مثلث ABA' (شکل ۱۰) به‌سادگی معین می‌شود:

$$\tan\beta = \frac{BA'}{AB} = \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h}$$

و برای حالت حد باید داشته باشیم:

$$\tan\alpha = \underset{A' \to A}{\text{حد}} \tan\beta = \underset{h \to \circ}{\text{حد}} \frac{f(x_\circ + h) - f(x_\circ)}{h}$$

یعنی تانژانت زاویهٔ میل مماس، برابر است با حد نسبت نمو تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_\circ$ به نمو متغیر مربوطه، وقتی که نمو متغیر به‌سمت صفر میل کند (درحالی که همیشه مخالف صفر باقی می‌ماند).

باز هم نمونهٔ دیگری را که به جست‌وجوی حدی شبیه به حد بالا می‌رسد، یادآور می‌شویم: از سیمی شدت‌جریان متغیری عبور می‌کند. فرض کنیم تابع $Q = f(t)$ معین باشد و مقدار الکتریسیته‌ای را که از مقطع ثابت سیم عبور می‌کند برحسب زمان t بیان کند. در فاصلهٔ زمانی از $t_\circ$ تا $t_\circ + h$، مقدار الکتریسیته ΔQ برابر با $f(t_\circ + h) - f(t_\circ)$ از این مقطع عبور می‌کند. شدت‌جریان متوسط در این مدت برابر است با:

$$I_m = \frac{\Delta Q}{h} = \frac{f(t_\circ + h) - f(t_\circ)}{h}$$

حد این نسبت، وقتی که $h \to \circ$، شدت‌جریان را در لحظهٔ زمانی $t_\circ$ به ما می‌دهد:

$$I = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$$

هر سه مسأله‌ای که آوردیم، گرچه مربوط به رشته‌های مختلف دانش بشری بود: مکانیک، هندسه و نظریهٔ الکتریسیته، منجر به یک عمل خاص ریاضی شد که باید روی تابع انجام داد: باید حد نسبت نمو تابع را به h (نمو متغیر متناظر با آن)، وقتی که $h \to 0$ پیدا کرد. به‌سادگی می‌توانیم مسأله‌های مختلف دیگری هم به آن‌چه گفتیم اضافه کنیم به‌نحوی که حل آن‌ها به همین عمل برسد. از جمله، پرسش مربوط به سرعت واکنش‌های شیمیایی و پرسش مربوط به تراکم و غلظت ماده‌ای که به‌طور یک‌نواخت تقسیم نشده وغیره، به همین عمل می‌رسد. به‌مناسبت همین نقش بسیار زیادی که این عمل در تابع‌ها به‌عهده دارد، اسم ویژه‌ای به‌نام دیفرانسیل‌گیری تابع، روی آن نهاده‌اند. نتیجهٔ این عمل را **مشتق** می‌نامند.

به این ترتیب ***مشتق تابع*** $y=f(x)$ و یا دقیق‌تر، ***مقدار مشتق در نقطهٔ دادهٔشدهٔ*** x، عبارت است از حد[1] نسبت نمو $f(x+h)-f(x)$ تابع به h، یعنی نمو متغیر، وقتی که نمو متغیر به‌سمت صفر میل کند. اغلب h را به Δx و $f(x+h)-f(x)$ را به Δy نشان می‌دهند و در این صورت تعریف مشتق را به‌طور خلاصه چنین می‌نویسند:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

روشن است که مقدار مشتق مربوط به مقداری از x است که مشتق در آن‌جا پیدا شده است. بنابراین مشتق تابع $y=f(x)$ به‌نوبهٔ خود تابعی است از x. برای مشتق نشانهٔ زیر را قبول کرده‌اند:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (8)$$

یادآور می‌شویم که نشانه‌های دیگری هم برای مشتق پذیرفته شده است:

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ یا } \frac{dy}{dx} \text{ یا } y' \text{ یا } y'_x$$

باید یادآور شد که نشانهٔ $\frac{dy}{dx}$ از نظر نوشتن مثل کسر است، گرچه به‌عنوان نماد واحدی

---

۱. روشن است این تعریف برای زمانی است که این حد وجود داشته باشد، در غیر این صورت می‌گویند که تابع در نقطهٔ مورد بررسی x، دارای مشتق نیست.

برای مشتق به‌حساب می‌آید. در بند بعد خواهیم دید که صورت و مخرج این «کسر» مفهوم مستقلی دارند که درعین حال نسبت آن‌ها با مشتق تطبیق می‌کند و به این ترتیب، این شکل نوشتن را قانونی می‌کند.

اکنون نتیجهٔ مثال‌هایی را که در بالا آوردیم، می‌توان به این ترتیب تنظیم کرد:

سرعت نقطه‌ای که مسافت پیموده‌شده به‌وسیلهٔ آن، یعنی s، تابعی از زمان باشد: $s=f(t)$، برابر است با مشتق این تابع:

$$V = s' = f'(t)$$

سخن کوتاه: سرعت عبارت است از مشتق مسافت نسبت به زمان.

تانژانت زاویهٔ میل مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ به‌طول x برابر است با مشتق تابع $f(x)$ در این نقطه:

$$\tan\alpha = y' = f'(x)$$

شدت‌جریان I در لحظهٔ t، اگر $Q=f(t)$ رابطه‌ای باشد که به‌کمک آن بتوان مقدار الکتریسیته‌ای را که در مدت t از مقطع سیم عبور کرده است معین کرد، برابر است با مشتق آن:

$$I = Q' = f'(t)$$

این مطلب را یادآور می‌شویم که سرعت حرکت غیریکنواخت در لحظهٔ داده‌شده، یک مفهوم فیزیکی است که نتیجه‌ای از عمل است و بشر درنتیجهٔ ملاحظه و بررسی تعداد زیادی حرکت‌های مشخص مختلف، به آن رسیده است.

بررسی حرکت غیریکنواخت جسم در قسمت‌های مختلف مسیر آن، مقایسهٔ حرکت‌های مختلفی که در آن واحد صورت می‌گیرد، و به‌ویژه بررسی پدیدهٔ برخورد جسم‌ها؛ این‌ها مصالح واقعی هستند که ما را به شناخت مفهوم فیزیکی سرعت حرکت غیریکنواخت در لحظهٔ داده‌شده رسانده است. ولی تعریف دقیق سرعت ایجاب می‌کرد که وسیلهٔ تعیین مقدار عددی این سرعت هم فراهم شود. انجام این کار به‌کمک مفهوم مشتق امکان‌پذیر شد.

در مکانیک، طبق تعریفی که از سرعت شده است: مقدار سرعت جسمی که طبق قانون $s=f(t)$ حرکت می‌کند، در لحظهٔ t برابر است با مشتق تابع $f(t)$ به‌ازای مقدار t.

استدلال‌های ابتدای این بند، از یک‌سو ضروری بودن وجود مشتق را ثابت کرد و از سوی دیگر تعریف سرعت را در لحظهٔ معین، به‌شکلی که در بالا تنظیم کردیم، پایه گذاشت.

زمانی که مسألهٔ مربوط به جست‌وجوی سرعت نقطه‌ای را، که دارای حرکت غیریکنواخت است، مطرح کردیم تنها یک تصور تجربی دربارهٔ مقدار آن داشتیم و تعریف دقیق آن را نمی‌دانستیم؛ ولی درنتیجهٔ یک تجزیه و تحلیل مناسب به تعریف دقیق مقدار سرعت، در لحظهٔ داده‌شده، رسیدیم. این مقدار عبارت است از مشتق مسافت نسبت به زمان. نتیجهٔ به‌دست‌آمده اهمیت عملی بسیار زیادی دارد، زیرا براساس این تعریف، تصور تجربی ما دربارهٔ سرعت کامل‌تر شد و امکان محاسبهٔ آن هم به‌دست آمد.

بدیهی است آن‌چه هم که دربارهٔ شدت‌جریان و بسیاری از مفهوم‌های دیگر گفتیم، سرعت این و یا آن روند (روند فیزیکی، شیمیایی وغیره) را معین می‌کند.

حالتی را که هم‌اکنون یادآور شدیم، نمونه‌ای از حالت‌های فراوان شبیه به آن است و نشان می‌دهد که چگونه عمل، ما را به مفهوم معینی که جنبهٔ واقعی دارد (مانند سرعت، کار، تراکم، مساحت وغیره)، هدایت می‌کند. ریاضیات هم کمک می‌کند تا این مفهوم هرچه دقیق‌تر تعریف شود. پس از این مرحله‌هاست که امکان پیدا می‌کنیم در محاسبه‌های خود با این مفهوم‌ها عمل کنیم.

در آغاز بخش یادآور شدیم که مفهوم مشتق، پیش از همه به‌عنوان نتیجهٔ کوششی که صدها سال در جهت حل مسأله‌های مربوط به رسم مماس بر منحنی و پیدا کردن سرعت حرکت غیریکنواخت انجام می‌گرفت، به‌وجود آمد. مسأله‌هایی شبیه به آن‌چه گفته شد و مسألهٔ مربوط به محاسبهٔ مساحت‌ها، که دربارهٔ آن‌ها صحبت شد، علاقهٔ ریاضی‌دانان را از همان دوره‌های باستانی جلب کرده بود. با وجود این، حتی در سدهٔ شانزدهم، چه نحوهٔ طرح این مسأله‌ها، و چه روش حل آن‌ها مربوط به حالت‌های خاص بود. مصالح و مواد نخستین فراوانی که در این جهت جمع‌آوری شده بود، به‌تدریج به‌صورت دستگاهی درآمد و در سدهٔ هفدهم در کارهای ***نیوتن*** و ***لایب‌نیتس*** به‌صورت یک نظریه تنظیم شد. البته ***اولر*** هم در سازمان دادن به اساس آنالیز امروزی سهم زیادی داشت.

ولی پایه‌هایی که ***نیوتن*** و ***لایب‌نیتس*** و همدوره‌های آن‌ها، برای این کشف‌های بزرگ ریاضی گذاشتند از نظر منطقی ضعیف بود. در روش داوری آن‌ها و در مفهوم‌هایی که آن‌ها به‌کار می‌بردند ابهام‌های زیادی، از دید امروزی ما، وجود داشت. خود ریاضی‌دانان آن

زمان هم این مطلب را می‌دانستند. گواه این مطلب بحث و مجادلهٔ شدیدی است که دربارهٔ این مسأله‌ها به‌وسیلهٔ نامه بین آن‌ها جریان داشته است. ریاضی‌دانان آن زمان (سده‌های هفدهم و هیجدهم)، به‌ویژه کوشش‌های ریاضی خود را با کوشش‌های تحقیقی در رشته‌های مختلف دانش‌های طبیعی (فیزیک، مکانیک، شیمی و صنعت) به‌طور جدی مربوط می‌کردند. طرح مسأله‌های ریاضی، از نیازهای عملی زمان آن‌ها، و از آرزوی آن‌ها به فهم پدیده‌های مختلف طبیعی سرچشمه می‌گرفت. پس از آن که مسأله حل می‌شد مورد تحقیق عملی قرار می‌گرفت و به‌ویژه همین وضع، جهت جست‌وجوهای ریاضی را معین می‌کرد.

نمونه‌هایی از محاسبهٔ مشتق. تعریف مشتق به‌عنوان:

$$f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{حد}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{۹}$$

امکان می‌دهد که مشتق هر تابع مشخصی را پیدا کنیم.

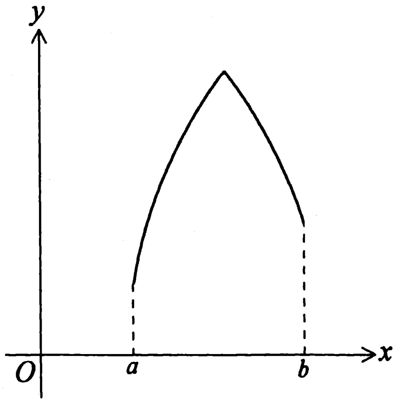
این مطلب را باید گفت که ممکن است حالت‌هایی وجود داشته باشد که تابع در این و یا آن نقطه، و یا حتی در بسیاری نقطه‌ها مشتق نداشته باشد. یعنی نسبت $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ زمانی که $h \to 0$، به‌سمت یک حد نهایی میل نکند. همان‌طور که می‌دانیم این حالت برای هر نقطهٔ ناپیوسته تابع $f(x)$ درست است، زیرا در آن‌جا در نسبت

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \tag{۱۰}$$

وقتی که مخرج بی‌نهایت کوچک شود، صورت به‌سمت صفر میل نمی‌کند.

مشتق می‌تواند در نقطه‌ای هم که تابع پیوسته است وجود نداشته باشد. نمونهٔ سادهٔ این نقطه، نقطهٔ شکستگی (زاویه‌ای) روی نمودار تابع است (شکل ۱۲). در این نقطه، منحنی نمایش تغییرات مماس معینی ندارد و متناظر با آن، تابع هم مشتق نخواهد داشت. در چنین نقطه‌هایی برحسب این که h از سوی راست و یا از سوی چپ به‌سمت صفر میل کند، رابطهٔ (۱۰) به مقدارهای مختلفی نزدیک می‌شود و اگر h به‌طور دل‌خواه به‌سمت صفر میل کند، نسبت (۱۰) دارای هیچ حدی نیست.

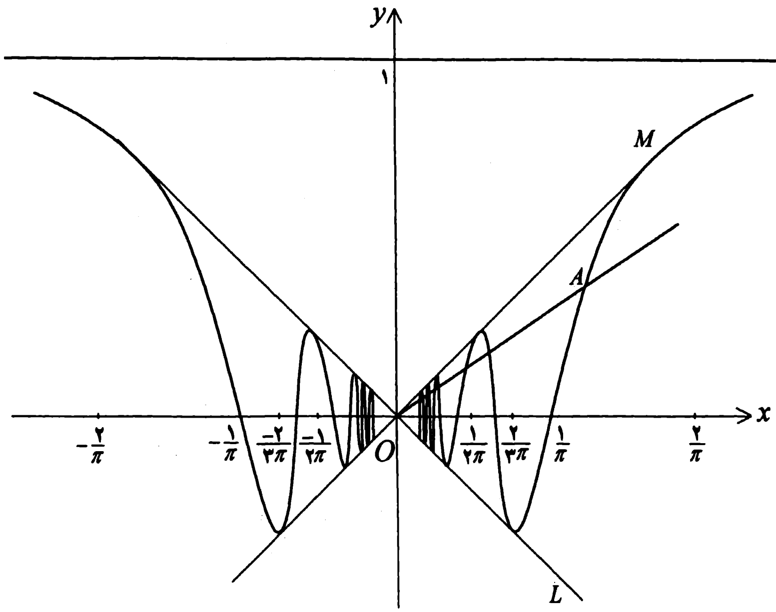
نمونهٔ پیچیده‌تر از تابع‌هایی که دارای مشتق نیستند، تابع زیر است:



شکل ۱۲

$$y=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & (x\neq \cdot) \\ \cdot & (x=\cdot) \end{cases}$$

نمودار این تابع، در شکل ۱۳ نشان داده شده است. این تابع، در نقطهٔ $x=\cdot$ دارای مشتق نیست، زیرا همانطور که از منحنی نمایش تغییرات آن دیده می‌شود، در این حالت حتی زمانی که $A\to\cdot$ (درحالی که از یک‌سو به صفر نزدیک می‌شود) قاطع OA به سمت وضع



شکل ۱۳

معینی میل نمی‌کند، بلکه همیشه بین OM و OL نوسان می‌کند و برعکس. بنابراین نسبت (۱۰) در این حالت دارای حدی نیست، حتی زمانی که h، با حفظ علامت خود، به‌سمت صفر میل کند.

سرانجام یادآور می‌شویم که می‌توان تابع پیوسته‌ای پیدا کرد که به‌شکل تحلیلی و به‌کمک دستور بیان شده باشد، ولی در هیچ‌یک از نقطه‌های خود دارای مشتق نباشد. نمونهٔ چنین تابعی برای نخستین بار در سدهٔ گذشته و به‌وسیلهٔ ریاضی‌دان مشهور آلمانی ***وایرشتراس*** داده شد.

به این ترتیب، مجموعهٔ تابع‌هایی که قابل دیفرانسیل‌گیری هستند، خیلی محدودتر از مجموعهٔ تابع‌های پیوسته است.

محاسبهٔ مشخص مشتق تابع‌های ساده را می‌آوریم.

۱. $y = c$؛ وقتی که c مقدار ثابت باشد. مقدار ثابت را می‌توان به‌عنوان حالت ویژه‌ای از تابع فرض کرد که در آن به‌ازای هر مقدار دل‌خواه x، مقدار تابع برابر با همان مقدار ثابت باشد. نمایش تغییرات این تابع، خط راستی است موازی با محور xها و به فاصلهٔ c از آن. این خط با محور xها زاویهٔ $\alpha = ۰$ را تشکیل می‌دهد واز آن‌جا مشتق مقدار ثابت، برابر با صفر می‌شود:

$$y' = (c)' = ۰$$

از دیدگاه مکانیک، این برابری به این معناست که سرعت یک نقطهٔ ساکن برابر با صفر است.

۲. $y = x^۲$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^۲ - x^۲}{h} = ۲x + h$$

وقتی که $h \to ۰$، در حد، مقدار $۲x$ را به‌دست می‌آوریم[1]. بنابراین:

$$y' = (x^۲)' = ۲x$$

۳. $y = x^n$ (n عددی است درست و مثبت).

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

---

۱. همیشه فرض ما این است که $h \neq ۰$ است.

$$= \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h}$$

$$= nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\cdot h + \cdots + h^{n-1}$$

وقتی که $h \to 0$، همهٔ جمله‌ها، از جملهٔ دوم به‌بعد به‌سمت صفر میل می‌کند، بنابراین:

$$y' = (x^n)' = nx^{n-1}$$

این رابطه، برای هر مقدار دل‌خواه n: مثبت، منفی، کسری و حتی گنگ هم درست است (اگرچه راه اثبات آن با روش دیگری است) و ما از این حقیقت بدون این که آن را ثابت کنیم، استفاده می‌کنیم، بنابراین:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x > 0)$$

$$(\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \qquad (x \neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1(x^{-2}) = -\frac{1}{x^2} \qquad (x \neq 0)$$

$$(x^\pi)' = \pi x^{\pi-1} \qquad (x > 0)$$

۴. $y = \sin x$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

اما همان‌طور که در پیش روشن کردیم، وقتی $h \to 0$، کسر اول به‌سمت واحد و $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$ به‌سمت $\cos x$ میل می‌کند. بنابراین مشتق سینوس برابر است با کسینوس:

$$y' = (\sin x)' = \cos x$$

برهان این مطلب را که شبیه برهان بالاست، به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم تا ثابت کند که:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

۵. پیش از این نشان دادیم که:

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828\ldots$$

همچنین روشن کردیم که برای محاسبهٔ این حد، این وضع که n مقدار درست و مثبتی باشد دارای نقش اساسی نیست. این مطلب مهم است که مقدار بی‌نهایت کوچک $\frac{1}{n}$ (که به واحد اضافه می‌شود) و قدرمطلق نمای n که تا بی‌نهایت صعودی است، وارونهٔ یکدیگرند. با قبول این حکم، به‌سادگی می‌توان مشتق $y = \log_a x$ را پیدا کرد:

$$\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h} = \frac{1}{h}\log_a \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x}\log_a \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}$$

پیوسته بودن لگاریتم اجازه می‌دهد که در حد، مقدار جلو نشانهٔ لگاریتم را به حد آن که برابر e است، تبدیل کنیم:

$$\lim_{h \to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = e$$

(در این حالت نقش $n \to \infty$ را مقدار $\frac{x}{h}$ که صعودی است به‌عهده دارد). درنتیجه، قاعدهٔ دیفرانسیل‌گیری لگاریتم به‌دست می‌آید:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x}\log_a e$$

این رابطه، به‌ویژه در حالتی که خود عدد e به‌عنوان پایهٔ لگاریتم قبول شود، خیلی ساده می‌شود. لگاریتم در این پایه، ***لگاریتم طبیعی*** نامیده می‌شود و به‌صورت $\ln x$ نشان داده می‌شود. می‌توان نوشت:

$$(\log_e x)' = \frac{1}{x} \quad \text{و یا} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

۶. روش‌های دیفرانسیل‌گیری

از نمونه‌هایی که آوردیم، ممکن است چنین به‌نظر برسد که محاسبهٔ مشتق هر تابع تازه،

مستلزم کشف روش‌های تازه است. اما این‌طور نیست. این وضع که ما امکان داریم به‌وسیلهٔ روش ساده و واحدی مشتق هر تابع «مقدماتی» را به‌دست آوریم (تابع مقدماتی یعنی تابعی که بتوان آن را به‌وسیلهٔ دستوری بیان کرد که از ترکیب عمل‌های اساسی جبر، تابع‌های مثلثاتی، به‌توان رساندن و لگاریتم گرفتن تشکیل شده باشد)، به پیشرفت ریاضیات کمک زیادی کرد. اساس این روش همان چیزی است که ***روش‌های دیفرانسیل‌گیری*** نامیده می‌شود. این روش‌ها از یک‌سلسله قضیه‌ها تشکیل شده است که به‌کمک آنها می‌توان مسأله‌های پیچیده‌تر را به مسأله‌های ساده‌تر تبدیل کرد.

ما در این‌جا روش‌های دیفرانسیل‌گیری را یادآور می‌شویم و کوشش می‌کنیم در نتیجه‌گیری‌های آن به‌کوتاهی سخن بگوییم. اگر خواننده مایل است که از این بخش تنها یک تصور کلی دربارهٔ آنالیز به‌دست آورد، می‌تواند از این بند بگذرد و تنها یک مطلب را به‌خاطر داشته باشد که وسیلهٔ مشخصی برای پیداکردن مشتق هر تابع مقدماتی وجود دارد. البته در این صورت باید به‌ناچار به محاسبه‌هایی که در مثال‌های بعدی خواهد آمد اعتماد کند.

مشتق مجموع. فرض کنیم y تابعی است از x که به این ترتیب بیان شده است:

$$y = \varphi(x) + \psi(x)$$

که در آن $u=\varphi(x)$ و $v=\psi(x)$، تابع‌های معینی از x هستند. به‌جز این، فرض می‌کنیم بتوانیم مشتق تابع‌های u و v را به‌دست آوریم. مشتق تابع y را چگونه باید پیدا کرد؟ جواب آن ساده است:

$$y' = (u+v)' = u' + v' \qquad (۱۱)$$

درواقع، به x نموی مانند Δx می‌دهیم، u و v و y به‌نوبهٔ خود، نموهایی مانند Δu و Δv و Δy به‌دست می‌آورند که در برابری زیر صدق می‌کنند:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v$$

از آنجا[1]

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

---

۱. در این‌جا همیشه فرض بر این است که: $\Delta x \neq 0$.

و پس از آن که $\Delta x \to 0$، در حد، درست همان دستور (۱۱) را به‌دست خواهیم آورد و البته این به‌شرطی است که تابع‌های u و v هم دارای مشتق باشند.

با روش مشابهی، می‌توان قاعدهٔ دیفرانسیل‌گیری تفاضل دو تابع را به‌دست آورد:

$$(u-v)' = u' - v' \tag{۱۲}$$

مشتق حاصل‌ضرب. تنظیم روش مشتق حاصل‌ضرب، اندکی پیچیده‌تر است. حاصل‌ضرب دو تابع (که خود آن‌ها دارای مشتق باشند) دارای مشتق است و این مشتق برابر است با مجموع حاصل‌ضرب تابع نخست در مشتق تابع دوم و حاصل‌ضرب تابع دوم در مشتق تابع نخست، یعنی

$$(u \cdot v)' = u \cdot v' + v \cdot u' \tag{۱۳}$$

درواقع به x نموی مانند Δx می‌دهیم، در این صورت برای تابع‌های u، v و $y = u \cdot v$ هم نموهای Δu، Δv و Δy که در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند به‌دست می‌آید:

$$\Delta y = (u+\Delta u) \cdot (v+\Delta v) - u \cdot v = u \cdot \Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

که از آن‌جا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

در حد، یعنی پس از آن که $\Delta x \to 0$، دو جملهٔ نخست طرف راست رابطهٔ بالا، برابر با دو جملهٔ طرف راست رابطهٔ (۱۳) می‌شود و جملهٔ سوم از بین می‌رود[1]. و به این ترتیب در حد، رابطهٔ (۱۳) را به‌دست می‌آوریم.

در حالت ویژه، زمانی که داشته باشیم: مقدار ثابت $= c = v$، خواهیم داشت:

$$(c \cdot u)' = c \cdot u' + u \cdot c' = c \cdot u' \tag{۱۴}$$

زیرا مشتق مقدار ثابت برابر با صفر است.

---

۱. وقتی $\Delta x \to 0$، به این علت جملهٔ آخر به‌سمت صفر میل می‌کند که $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ به‌سمت عدد معینی که برابر با v' است میل می‌کند (و در ابتدای کار فرض کردیم که v' وجود دارد) و $\Delta u \to 0$ (زیرا تابع u، بنا بر شرط، دارای مشتق و پیوسته بود).

مشتق خارج‌قسمت. فرض کنید $y=\frac{u}{v}$ که در آن u و v تابع‌هایی باشند که برای مقدار داده‌شدهٔ x دارای مشتق‌اند، همچنین به‌ازای این مقدار x ، $v \neq ۰$ باشد. روشن است که

$$\Delta y = \frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\cdot\Delta u - u\cdot\Delta v}{(v+\Delta v)\, v}$$

و از آن‌جا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)\, v} \to \frac{vu' - uv'}{v^۲} \qquad (\Delta x \to ۰)$$

این‌جا هم دوباره از این مطلب استفاده کردیم که برای تابع v، که دارای مشتق است، وقتی که $\Delta x \to ۰$، آن‌وقت Δv هم به‌سمت صفر میل می‌کند. بنابراین

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^۲} \qquad (۱۵)$$

چند مثال:

$$(۲x^۳ - ۵)' = ۲(x^۳)' - (۵)' = ۲\times ۳x^۲ - ۰ = ۶x^۲ ,$$

$$(x^۲\cdot \sin x)' = x^۲(\sin x)' + (x^۲)'\cdot \sin x = x^۲\cos x + ۲x\sin x$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^۲ x} =$$

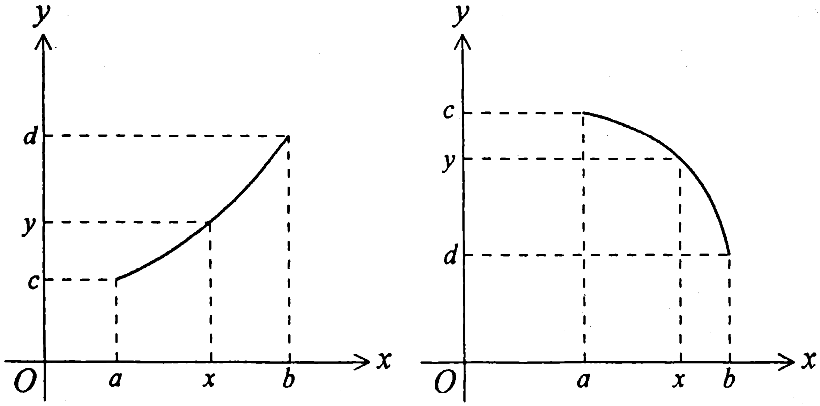
$$= \frac{\cos x\cdot\cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^۲ x} = \frac{۱}{\cos^۲ x} = \sec^۲ x$$

به‌عهدهٔ خواننده می‌گذاریم که رابطهٔ زیر را ثابت کند:

$$(\cot x)' = -\mathrm{cosec}^۲ x$$

مشتق عکس تابع. تابع $y=f(x)$ را که در فاصلهٔ $[a,b]$ پیوسته و صعودی (یا نزولی) است در نظر می‌گیریم؛ بعد خواهیم دید در فاصلهٔ $[a,b]$ هر مقدار بزرگتری از x، متناظر با مقدار بزرگتری (یا کوچکتری) از y است (شکل ۱۴).

فرض کنیم که $c=f(a)$ و $d=f(b)$ روی شکل ۱۴ دیده می‌شود. هر مقدار y که در فاصلهٔ $[c,d]$ واقع باشد، با یک مقدار x از فاصلهٔ $[a,b]$ که در رابطهٔ $y=f(x)$ صدق کند تطبیق می‌کند. به این وسیله، در فاصلهٔ $[c,d]$ تابع مشخص $x=\varphi(y)$ را در نظر می‌گیریم که تابع



شکل ۱۴

عکس $y=f(x)$ نامیده می‌شود. روی شکل ۱۴ دیده می‌شود که تابع $\varphi(y)$ پیوسته است. در آنالیز امروزی همین مطلب را براساس تحلیلی و به‌طور دقیق ثابت می‌کنند. اکنون فرض کنید Δx و Δy به‌ترتیب نموهای x و y باشد. روشن است که

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \qquad (\Delta y \neq 0)$$

رابطهٔ بالا در حد، نسبت میان مشتق تابع و مشتق عکس تابع را به ما می‌دهد:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} \tag{۱۶}$$

از این رابطه، برای پیدا کردن مشتق تابع $y=a^x$ استفاده می‌کنیم. این تابع، تابع عکس $x=\log_a y$ است (که در پیش دیفرانسیل آن را حساب کردیم) و بنابراین می‌توان نوشت:

$$(a^x)'_x = \frac{1}{(\log_a y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y}\ \log_a e} = y \cdot \log_e a = a^x \ln a \tag{۱۷}$$

و در حالت خاص: $(e^x)' = e^x$

نمونهٔ دیگر: $y=\arcsin x$. تابع عکس آن $x=\sin y$ است. بنابراین

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

جدول مشتق‌ها. مشتق تابع‌های مقدماتی و ساده را می‌آوریم:

y	y'	y	y'	y	y'
c	0	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\tan x$	$\sec^2 x$
x^a	ax^{a-1}	$\log_a x$	$\frac{1}{x}\log_a e$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
a^x	$a^x \ln a$	$\cos x$	$-\sin x$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

همهٔ این دستورها را به‌دست آوردیم و روشن کردیم، به‌جز دو دستور آخری که خواننده اگر بخواهد می‌تواند با استفاده از روش دیفرانسیل‌گیری تابع عکس، آن‌ها را به‌دست آورد.

مشتق تابع تابع. بررسی آخرین قاعدهٔ دیفرانسیل‌گیری که دشوارترین آن‌هاست باقی مانده است. کسی که بر این قاعده و قاعده‌هایی که در جدول آمده است چیره باشد، می‌تواند مطمئن باشد که می‌تواند از هر تابع مقدماتی مشتق بگیرد.

برای به‌کار بردن قاعده‌ای که می‌خواهیم بیاوریم باید به‌روشنی پیش خود مجسم کنیم تابعی که باید دیفرانسیل آن گرفته شود، چگونه ساخته شده است، چه عمل‌هایی و به چه ترتیب روی متغیر مستقل x انجام گرفته است تا به تابع y رسیده است.

به‌عنوان نمونه، برای محاسبهٔ تابع

$$y = \sin x^2$$

نخست باید x را به توان ۲ برسانید، سپس از مقدار به‌دست‌آمده سینوس بگیرید. این تابع را می‌توان به‌شکل $y=\sin u$ هم نوشت که در آن $u=x^2$ است. برعکس برای محاسبهٔ تابع:

$$y = \sin^2 x$$

باید نخست از x سینوس گرفت و سپس مقدار به‌دست‌آمده را به توان ۲ رسانید، و بنابراین، می‌توان آن را به این ترتیب هم نوشت: $y=u^2$، که در آن $u=\sin x$ است.

باز هم نمونه‌های دیگری:

۱) $y=(3x+4)^3 \quad ; \quad y=u^3 \quad , \quad u=3x+4$

۲) $y=\sqrt{1-x^2} \; ; \quad y=u^{\frac{1}{2}} \quad , \quad u=1-x^2$

$$۳)\ y=e^{kx} \quad ; \quad y=e^{u} \quad , \quad u=kx$$

در حالت‌های پیچیده‌تر، یک زنجیر از بستگی‌های ساده به‌دست می‌آید که دارای چند حلقه وابستگی است. مثال:

$$۴)\ y=\cos^{3}x^{2}\ ;\ y=u^{3}\ ,\ u=\cos v\ ,\ v=x^{2}$$

اگر y متغیری از تابع u باشد.

$$y=y(u) \qquad (۱۸)$$

و u به‌نوبهٔ خود، تابعی از متغیر x باشد:

$$u=u(x) \qquad (۱۹)$$

در این صورت y، که تابعی از u بود، تابعی از x خواهد شد، و آن را می‌توان چنین نوشت:

$$y=F(x)=y\,[u(x)] \qquad (۲۰)$$

با پیچیده‌تر کردن این روند، می‌توان به‌عنوان نمونه، این تابع را به‌دست آورد:

$$y=\Phi(x)=f\{\varphi[\Psi(x)]\}$$

که هم‌ارز با برابری‌های زیر است:

$$y=f(u) \quad , \quad u=\varphi(v) \quad , \quad v=\Psi(x)$$

و یا تابع‌های باز هم پیچیده‌تری که منجر به زنجیری از این‌گونه برابری‌ها می‌شود.

اکنون نشان می‌دهیم که مشتق تابع $F(x)$ که با رابطهٔ (۲۰) معین شده است، زمانی که مشتق $y(u)$ نسبت u و مشتق $u(x)$ نسبت به x معلوم باشد، چگونه محاسبه می‌شود.

به x نموی مانند Δx می‌دهیم با توجه به رابطهٔ (۱۹)، نمو Δu برای u و با توجه به رابطهٔ (۱۸) نمو Δy برای y به‌دست می‌آید؛ می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

اکنون فرض کنید Δx به‌سمت صفر میل کند. درضمن $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ هم به‌سمت u'_x میل می‌کند به‌جز این، به‌مناسبت پیوسته بودن u، نمو $\Delta u \to ۰$ و بنابراین $\frac{\Delta y}{\Delta u}\to y'_u$ (طبق فرض مشتق‌های y'_u و u'_x وجود داشتند). به این ترتیب، دستور مهم مربوط به مشتق تابع تابع

به‌دست می‌آید[1].

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \qquad (۲۱)$$

اکنون مشتق تابع‌هایی راکه در این‌جا به‌عنوان نمونه آورده بودیم با استفاده از رابطهٔ (۲۱) و جدول مشتق‌ها به‌دست می‌آوریم:

$$(۱)\qquad \begin{cases} y = (۳x+۴)^{۳} = u^{۳} \\ y'_x = (u^{۳})'_u \cdot (۳x+۴)'_x = ۳u^{۲} \times ۳ = ۹(۳x+۴)^{۲} \end{cases}$$

$$(۲)\qquad \begin{cases} y = \sqrt{۱-x^{۲}} = u^{\frac{۱}{۲}}, \\ y'_x = (u^{\frac{۱}{۲}})'_u \cdot (۱-x^{۲})'_x = \frac{۱}{۲} u^{-\frac{۱}{۲}}(-۲x) = -\frac{x}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \end{cases}$$

$$(۳)\qquad \begin{cases} y = e^{k \cdot x} = e^{u}, \\ y'_x = (e^{u})'_u \cdot u'_x = e^{u} \cdot k = k \cdot e^{k \cdot x} \end{cases}$$

اگر $y=f(u)$ و $u=\varphi(v)$ و $v=\psi(x)$ باشد، خواهیم داشت:

$$y'_x = y'_u u'_x = y'_u(u'_v \cdot v'_x) = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

به‌سادگی می‌توان این رابطه را برای حالتی که تعدادی دل‌خواه (ولی محدود) از یک‌سلسله تابع‌ها داشته باشیم، تعمیم داد.

مثال:

$$(۴)\qquad \begin{cases} y = \cos^{۳}x^{۲}, \\ y'_x = (u^{۳})'_u \cdot (\cos v)'_v \cdot (x^{۲})'_x = ۳u^{۲}(-\sin v) \cdot ۲x = -۶x \cos^{۲}x^{۲} \cdot \sin x^{۲} \end{cases}$$

ما برای این که نشان دهیم چگونه مشتق تابع تابع را حساب می‌کنند، به متغیرهای واسطه u و v و... متوسل شدیم، ولی پس از آن که اندکی ورزیدگی پیدا کنیم، می‌توانیم خود را از این واسطه‌ها رها کنیم و آن‌ها را در ذهن به‌حساب آوریم.

---

۱. برای به‌دست آوردن این رابطه به‌طور ضمنی فرض کردیم که با میل Δx به‌سمت صفر، Δu همیشه مخالف صفر باقی می‌ماند. ولی درواقع، اگر این حکم هم وجود نداشته باشد باز هم به همان نتیجه خواهیم رسید.

تابع‌های مقدماتی. در پایان این بند یادآور می‌شویم تابع‌هایی که فهرست مشتق‌های آن‌ها را آوردیم، می‌تواند در اساس به‌عنوان تعریف تابع‌های مقدماتی پذیرفته شود. به‌ویژه، همه تابع‌هایی که از این تابع‌های ساده، به‌کمک چهار عمل اصلی حساب و عمل تابع تابع (به‌شرطی که به‌تعداد معین انجام گرفته باشد) به‌دست می‌آید، ***مقدماتی*** نامیده می‌شود.

برای نمونه چندجمله‌ای $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ تابعی مقدماتی است، زیرا از تابع‌هایی به‌صورت x^k و به‌کمک عمل‌های حسابی به‌دست می‌آید. تابع $\ln\sqrt{1-x^2}$ هم مقدماتی است، زیرا از چندجمله‌ای $u = 1 - x^2$ به‌کمک عمل $v = u^{\frac{1}{2}}$ و سپس عمل $\ln v$ به‌دست آمده است.

به‌شرطی که مشتق‌های ساده‌ترین تابع‌های مقدماتی را بدانیم، قاعده‌های دیفرانسیل‌گیری که در بالا از آن‌ها یاد شد، برای پیدا کردن مشتق هر تابع مقدماتی کافی است.

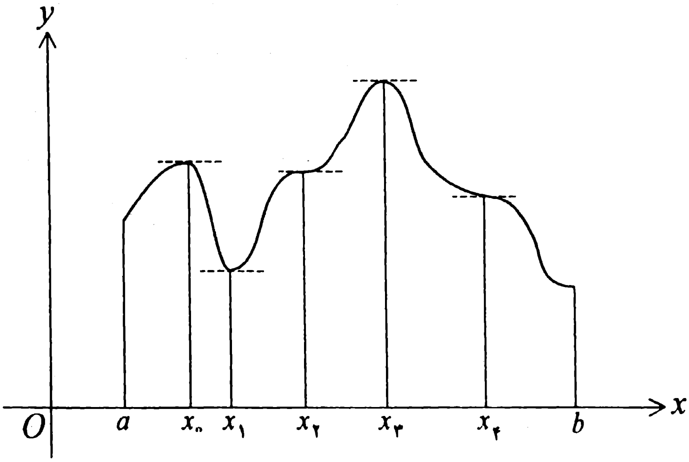
۷. ماکزیمم و می‌نیمم

جست‌وجوی نمودار تابع

یکی از ساده‌ترین و مهم‌ترین کاربردهای مشتق، در نظریهٔ ماکزیمم و می‌نیمم است. فرض کنیم تابع $y = f(x)$ در فاصلهٔ $a \le x \le b$ داده شده باشد و فرض می‌کنیم که تابع در این فاصله نه‌تنها پیوسته باشد، بلکه در تمام نقطه‌هایش دارای مشتق هم باشد.

محاسبهٔ مشتق به ما امکان می‌دهد که به‌روشنی، نمودار تابع را پیش خود تصور کنیم. در فاصله‌ای که مشتق همیشه مثبت است، مماس بر منحنی رو به بالا می‌رود. تابع در این فاصله صعودی است، یعنی هر مقدار بزرگتر a متناظر با مقدار بزرگتری از $f(x)$ است. برعکس، در فاصله‌ای که مشتق منفی است، تابع نزولی است و منحنی رو به پایین می‌آید.

ماکزیمم و می‌نیمم. در شکل ۱۵ منحنی نمایش تغییرات تابع $y = f(x)$ که در فاصلهٔ $[a, b]$ معین است، نشان داده شده است. نقطه‌هایی از منحنی که دارای طول‌های x_0، x_1 و x_2 هستند، نقطه‌های ویژه‌ای هستند.



شکل ۱۵

می‌گویند تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x_\circ$ ماکزیمم نسبی (یا موضعی) دارد، و آن را این‌طور هم می‌توان بیان کرد: در نقطهٔ $x_\circ$، مقدار تابع $f(x)$ بزرگتر از مقدار تابع در نقطه‌های مجاورش می‌باشد ویا دقیق‌تر: به‌ازای همهٔ مقدارهای x، در فاصله‌ای که مجاور نقطهٔ $x_\circ$ قرار دارد، $f(x_\circ) \geq f(x)$ است. به همین ترتیب، می‌نیمم نسبی (یا موضعی) تعریف می‌شود. در تابع ما، ماکزیمم نسبی در نقطه‌های $x_\circ$ و $x_۳$ و می‌نیمم نسبی در نقطهٔ $x_۱$ است. در نقطهٔ ماکزیمم یا می‌نیمم باید مشتق برابر صفر باشد، به‌شرطی که این نقطه در داخل فاصلهٔ $[a,b]$ واقع باشد، یعنی بر دو انتهای a و b منطبق نباشد.

مطلب اخیر، که خیلی هم مهم است، از خود تعریف مشتق به‌عنوان حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نتیجه می‌شود. درواقع با حرکت کوچکی از نقطهٔ ماکزیمم، $\Delta y \leq ۰$ می‌شود. بنابراین برای مقدارهای مثبت Δx، نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ مثبت نیست و برای مقدارهای منفی Δx، نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ منفی نیست و حد این نسبت (که طبق فرض وجود دارد)، نمی‌تواند نه مثبت باشد و نه منفی، و تنها این می‌ماند که صفر باشد. این مطلب متناظر با آن است که بگوییم، مماس بر منحنی در نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم (واژهٔ «نسبی» را حذف می‌کنیم، گرچه آن را در ذهن به‌خاطر داریم) افقی است. در شکل ۱۵ دیده می‌شود که مماس بر منحنی در نقطه‌های $x_۲$ و $x_۴$، هم مانند نقطه‌های $x_\circ$ و $x_۱$ و $x_۳$ افقی است؛ گرچه در این نقطه‌ها، ماکزیمم و می‌نیممی وجود ندارد. به‌طور کلی، نقطه‌هایی که در آن‌ها مشتق برابر صفر است (نقطه‌های ساکن)، اغلب ممکن است که نقطه‌های ماکزیمم یا می‌نیمم باشد.

جست‌وجوی حداکثر و حداقل مقدار تابع. در بسیاری از مسأله‌های مختلف مربوط به صنعت، نیاز پیدا می‌کنیم بدانیم تابع $f(x)$ به‌ازای چه مقداری از x (از یک فاصلهٔ معین)، حداکثر و یا حداقل مقدار خود را دارد.

در حالتی که بزرگترین مقدار تابع لازم است، باید در فاصلهٔ $[a,b]$ نقطه‌ای مانند $x_\circ$ چنان پیدا کرد که برای تمام مقدارهای x، که در بازهٔ $[a,b]$ واقع است، نابرابری $f(x_\circ)\geq f(x)$ درست باشد.

در این‌جا یک مسألهٔ اساسی مطرح می‌شود: آیا به‌طور کلی چنین نقطه‌ای وجود دارد؟ به‌کمک آنالیز ریاضی می‌توان قضیهٔ وجود این نقطه را ثابت کرد: اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ داده‌شده پیوسته باشد، دست‌کم یک نقطه وجود دارد که تابع به‌ازای آن ماکزیمم (یا می‌نیمم) است.

از آن‌چه گفتیم نتیجه می‌شود که نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم را پیش از همه، باید بین نقطه‌های «ساکن» جست‌وجو کرد. با استناد به این مطلب، وسیلهٔ جالب زیر برای جست‌وجوی ماکزیمم و می‌نیمم به‌دست می‌آید:

مشتق $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم و برابر صفر قرار می‌دهیم. معادله‌ای را که به‌دست می‌آید حل می‌کنیم:

$$f'(x)=\circ$$

اگر x_1، x_2، ... و x_n، ریشه‌های این معادله باشد، عددهای $f(x_1)$، $f(x_2)$، ... و $f(x_n)$ را با هم می‌سنجیم. البته این مطلب را باید به‌حساب آورد که ممکن است ماکزیمم و می‌نیمم در داخل بازهٔ $[a,b]$ نباشد، بلکه در مرز آن (همان‌گونه که در شکل ۱۵؛ چنین می‌نیممی وجود دارد) و یا در نقطه‌ای که تابع دارای مشتق نیست (شکل ۱۲)، باشد. بنابراین، باید به نقطه‌های x_1، x_2، ... و x_n، نقطه‌های مرزی a و b، و نقطه‌هایی را هم که به‌ازای آن‌ها، مشتق وجود ندارد (اگر چنین نقطه‌هایی وجود داشته باشد)، اضافه کنیم. پس از آن، این مطلب می‌ماند که مقدارهای تابع را در این نقطه‌ها با هم بسنجیم و بین آن‌ها، بیشترین و یا کمترین مقدار را برگزینیم.

این مطلب مهم را باید اضافه کرد: در حالتی که تابع $f(x)$ تنها در فاصلهٔ باز (a,b)، یعنی به‌ازای مجموعهٔ نقطه‌هایی که در نابرابری $a<x<b$ صدق کند، پیوسته است، قضیهٔ وجود حداکثر و حداقل تابع، درستی خود را از دست می‌دهد. کافی است در برابر خواننده تابع $\frac{1}{x}$ را قرار دهیم که در بازهٔ $(\circ\,,1)$ نه ماکزیمم دارد و نه می‌نیمم.

چند نمونه بیاوریم:

می‌خواهیم از یک قطعه آهن سفید مربع‌شکل به‌ضلع a، قوطی مکعب‌مستطیل روبازی با بیشترین حجم ممکن بسازیم. اگر از گوشه‌های قطعه آهن سفید، مربع‌هایی به‌ضلع aببریم (در بند دوم همین بخش، مثال ۲ را ببینید) یک قوطی به‌حجم زیر به‌دست خواهیم آورد:

$$V = x\,(a - ۲x)^۲$$

مسأله به این‌جا می‌رسد که باید x را طوری پیدا کنیم که به‌ازای آن، تابع $V(x)$ حداکثر مقدار را در فاصلهٔ $\frac{a}{۲} \le x \le ۰$ داشته باشد. به‌کمک قاعده‌هایی که می‌دانیم، مشتق تابع بالا را پیدا می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$V'(x) = (a - ۲x)^۲ - ۴x\,(a - ۲x) = ۰$$

پس از حل این معادله، دو ریشه به‌دست می‌آید:

$$x_۱ = \frac{a}{۲} \quad , \quad x_۲ = \frac{a}{۶}$$

به این ریشه‌ها، انتهای چپ پاره‌خطی را که $V(x)$ به‌ازای نقطه‌های آن داده است، اضافه می‌کنیم (انتهای راست بر $x_۱$ منطبق است)، و مقدار تابع را در این نقطه‌ها، با هم مقایسه می‌کنیم:

$$V(۰) = ۰\ ,\ V\left(\frac{a}{۶}\right) = \frac{۲}{۲۷}a^۳\ ,\ V\left(\frac{a}{۲}\right) = ۰$$

به این ترتیب در حالتی که بلندی قوطی $x = \frac{a}{۶}$ باشد، دارای حداکثر حجم که برابر $\frac{۲}{۲۷}a^۳$ است می‌شود.

مسأله مربوط به فانوس را (بند دوم همین بخش، مثال ۳) به‌عنوان نمونهٔ دوم برمی‌گزینیم. فانوس را در چه بلندی h آویزان کنیم تا به باند میدان بازیِ روی یخ، حداکثر روشنایی بتابد؟

به‌کمک رابطهٔ (۳)، مسأله به این‌جا می‌رسد که h چه مقداری باشد تا $T = \frac{A\cdot\sin\alpha}{h^۲ + r^۲}$ حداکثر بشود؟ به‌جای h می‌توان زاویهٔ α را پیدا کرد (شکل ۳ را در همان‌جا ببینید). داریم:

$$h = r\tan\alpha$$

درنتیجه

$$T = \frac{A}{r^۲}\cdot\frac{\sin\alpha}{۱ + \tan^۲\alpha} = \frac{A}{r^۲}\cdot\sin\alpha\cdot\cos^۲\alpha$$

باید ماکزیمم تابع $T(\alpha)$ را بین مقدارهایی از α که در نابرابری $\frac{\pi}{۲} > \alpha > ۰$ صدق می‌کند پیدا

کرد. مشتق تابع را پیدا می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$T'(\alpha) = \frac{A}{r^{۲}} (\cos^{۳}\alpha - ۲\sin^{۲}\alpha \,.\, \cos\alpha) = ۰$$

این معادله، به دو معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\cos\alpha = ۰ \ , \ \ \cos^{۲}\alpha - ۲\sin^{۲}\alpha = ۰$$

معادلهٔ اول، ریشهٔ $\alpha = \frac{\pi}{۲}$ را می‌دهد که در انتهای فاصلهٔ $\left(۰ \,,\, \frac{\pi}{۲}\right)$ قرار دارد. معادلهٔ دوم را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\tan^{۲}\alpha = \frac{۱}{۲}$$

ولی اگر $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$، آن‌وقت $\alpha \approx ۳۵° \ ۱۵'$. و این مقدار از α است که به‌ازای آن، تابع $T(\alpha)$ ماکزیمم می‌شود (در انتهای فاصله تابع کوچکتر است، زیرا $T\left(\frac{\pi}{۲}\right) = ۰$). بلندی مجهول h هم برابر می‌شود با:

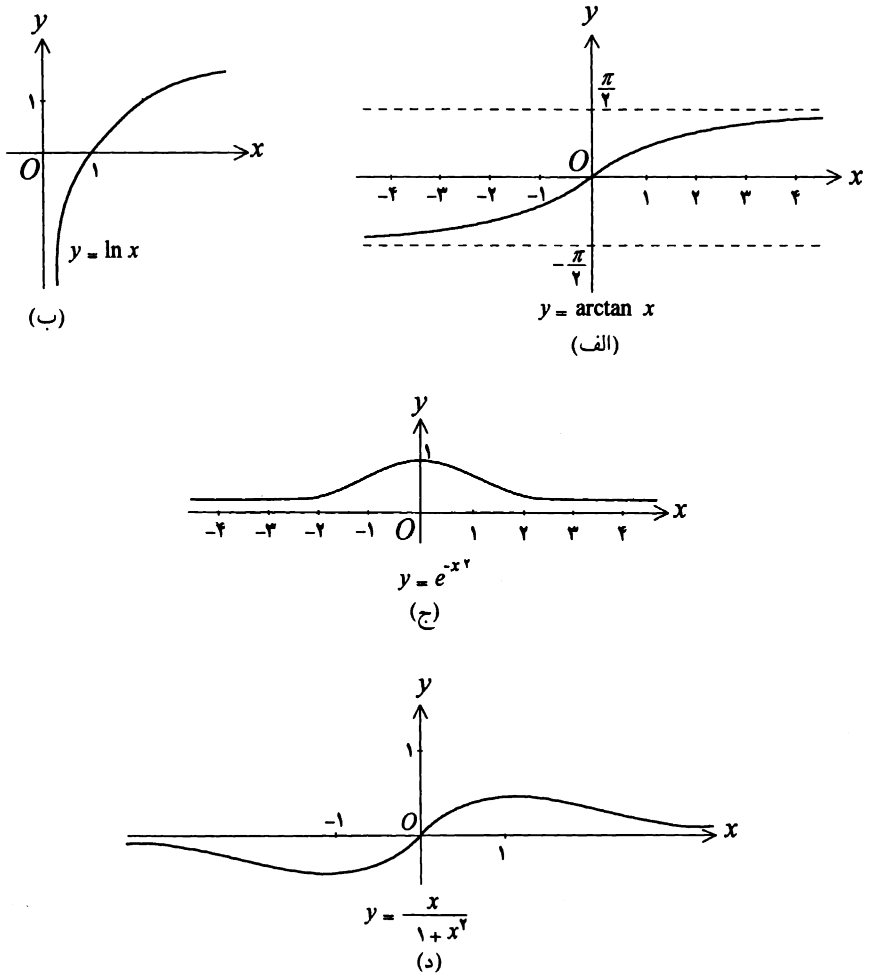
$$h = r \cdot \tan\alpha = \frac{r}{\sqrt{۲}} \approx ۰{,}۷r$$

برای این که حداکثر روشنایی به یخ برسد، باید فانوس را تا بلندی $۰{,}۷r$ بالا ببریم.

اکنون فرض کنیم امکان‌های موجود اجازه ندهد فانوس را از یک بلندی مانند H بالاتر ببریم، در این صورت، زاویهٔ α نمی‌تواند از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر کند، بلکه در مرزهای تنگ‌تری تغییر می‌کند: $۰ < \alpha < \arctan\frac{H}{r}$. برای مثال، فرض کنید که $r = ۱۲$ (متر) و $H = ۹$ (متر) باشد. در این حالت می‌توان فانوس را در بلندی $h = \frac{r}{\sqrt{۲}}$ قرار داد، زیرا این مقدار اندکی بیش از ۸ متر است که در مرز امکان ماست. اما اگر H کوچکتر از ۸ متر باشد (مثل زمانی که بخواهیم برای استقرار فانوس از تیری به‌طول ۶ متر استفاده کنیم)، در این صورت مشتق تابع $T(\alpha)$ در فاصلهٔ $\left[۰ \,,\, \arctan\frac{H}{r}\right]$ برابر صفر نمی‌شود. در این حالت مقدار حداکثر در مرز این فاصله به‌دست می‌آید و فانوس را باید تا حداکثر بلندی ممکن، یعنی $h = ۶$(متر) بالا برد.

تا این‌جا تابع را در فاصلهٔ محدود در نظر گرفتیم اگر فاصله بی‌نهایت باشد، حتی در حالت‌هایی هم که تابع پیوسته است، ممکن است دارای مقدار حداکثر و یا حداقل نباشد و با میل x به‌سمت بی‌نهایت، تابع همیشه صعودی و یا نزولی باشد.

از جمله، تابع‌های $y = kx + b$ ،$y = \arctan x$ (شکل ۱۶ـالف)، $y = \ln x$ (شکل ۱۶ـب)،



شکل ۱۶

هرگز ماکزیمم یا می‌نیمم نخواهند داشت. تابع $y=e^{-x^2}$(شکل ۱۶-ج) در نقطهٔ $x=0$ دارای ماکزیمم است، ولی هیچ‌وقت می‌نیمم نمی‌شود. سرانجام، تابع $y=\frac{x}{1+x^2}$(شکل ۱۶-د) در نقطهٔ $x=-1$ می‌نیمم و در نقطهٔ $x=1$ ماکزیمم است.

در حالتی که فاصله، بی‌نهایت باشد، جست‌وجوی حداکثر و حداقل از همان روش معمولی به‌دست می‌آید، تنها به‌جای $f(a)$ و $f(b)$ باید این مرزها را در نظر گرفت:

$$A = \underset{x\to -\infty}{\text{حد}}\, f(x) \quad \text{و} \quad B = \underset{x\to +\infty}{\text{حد}}\, f(x)$$

مشتق‌های از مرتبهٔ بالاتر. برای این که نمودار تابع را بیشتر بررسی کنیم، باید روند تغییر $f'(x)$، یعنی مشتق تابع $f(x)$ را (که بررسی می‌کنیم) مطالعه کنیم. $f'(x)$ به‌نوبهٔ خود تابعی است از x و از آن می‌توان مشتق گرفت. مشتق مشتق را مشتق دوم می‌نامند و چنین می‌نویسند:

$$[y']' = y'' \quad \text{یا} \quad [f'(x)]' = f''(x)$$

به همین ترتیب، می‌توان مشتق سوم را هم حساب کرد:

$$[y'']' = y''' \quad \text{یا} \quad [f''(x)]' = f'''(x)$$

وغیره. به‌طور کلی، مشتق nام ویا به‌اصطلاح مشتق مرتبهٔ nام را به این شکل می‌نویسند:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x)$$

البته باید در نظر داشت که این رشته می‌تواند برای مقداری از x (و یا حتی همهٔ مقدارهای x) در مرتبه‌ای از مشتق، مانند مرتبهٔ r، قطع شود: ممکن است $f^{(k)}(x)$ وجود داشته باشد، ولی مشتق $f^{(k+۱)}(x)$ دیگر وجود نداشته باشد. مشتق‌های مرتبه‌های بالاتر را کمی بعد، در بند ۹، ضمن بررسی رابطهٔ تیلور، به‌کار خواهیم برد و در این‌جا روی مشتق دوم تکیه می‌کنیم.

مفهوم مشتق دوم، کوژی و کاوی (تحدب و تقعر). مشتق دوم، یک مفهوم ساده مکانیکی دارد. فرض کنید $s=f(t)$، قانون حرکت مستقیم‌الخط نقطه‌ای باشد. آن‌وقت s' سرعت و s'' «سرعت تغییر سرعت» ویا ساده‌تر، شتاب نقطه در لحظهٔ زمانی t می‌شود. در حالت سقوط آزاد جسم:

$$s = \frac{۱}{۲} g t^{۲} + v_{\circ} t + s_{\circ}$$

$$s' = gt + v_{\circ}$$

$$s'' = g$$

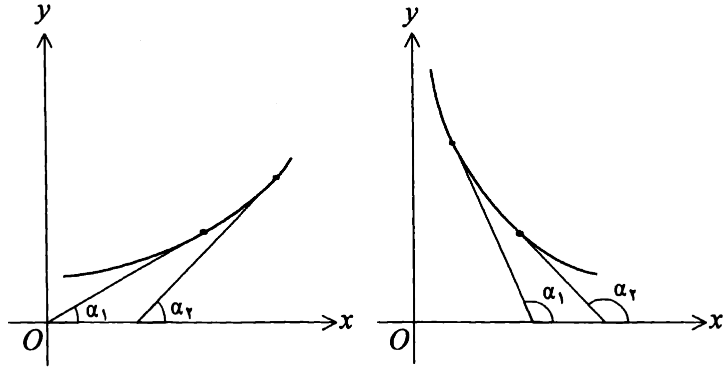
یعنی شتاب جسمی که درحال سقوط آزاد است، مقداری است ثابت.

همچنین مشتق دوم، معنای سادهٔ هندسی دارد: همان‌طور که از قانون مشتق اول می‌توان صعودی یا نزولی بودن تابع را معین کرد، همان‌طور هم از روی قانون مشتق دوم می‌توان

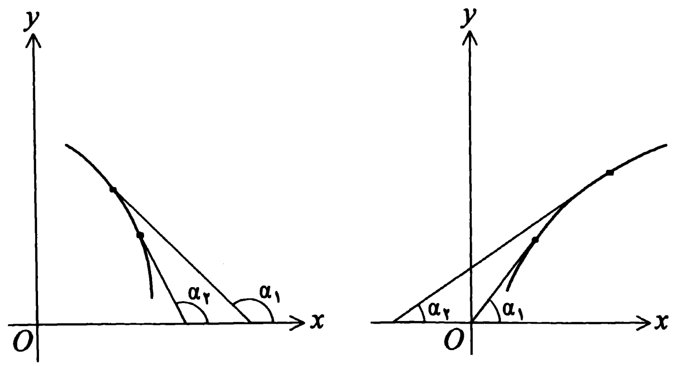
دانست که منحنی نمایش تغییر تابع، در چه جهتی دارای انحناست.

وقتی مشتق دوم در فاصله‌ای همیشه مثبت باشد، به این معنی است که مشتق اول در این فاصله صعودی است و بنابراین $f'(x) = \tan\alpha$ صعودی است و از آن‌جا خود زاویهٔ α، یعنی میل مماس بر منحنی (شکل ۱۷) هم صعودی است. درضمن به همین ترتیب که در طول منحنی جلو می‌رویم و از نقطه‌های پشت‌سرهم عبور می‌کنیم، منحنی همیشه در یک جهت خم می‌شود و به‌اصطلاح «انحنای آن به‌سمت پایین» (یعنی کوژی آن به سمت پایین) است.

برعکس، در فاصله‌ای که مشتق دوم همیشه منفی است (شکل ۱۸)، منحنی نمایش تغییر تابع با «انحنای به‌سمت بالا» پیش می‌رود[1].



شکل ۱۷



شکل ۱۸

---

۱. اگر دقیق‌تر تعریف کنیم: «انحنای به‌سمت بالا» چنان ویژگی از منحنی است که اگر دو نقطهٔ دل‌خواه آن را به‌هم وصل کنیم، منحنی در بالای این وتر قرار گیرد (یا دقیق‌تر در پایین آن نباشد). به همین ترتیب، برای «انحنای به‌سمت پایین» و یا به‌طور خلاصه «تقعر»، منحنی از بالای وترهایش عبور نمی‌کند.

نشانه‌های ماکزیمم و می‌نیمم. جست‌وجوی نمودار تابع. اگر کوژی منحنی در طول تمام پاره‌خط داده شدهٔ تغییر x، به‌سمت بالا باشد و در نقطه‌ای مانند $x_{\circ}$ از این پاره‌خط مشتقی برابر صفر داشته باشد، در این نقطه به‌ناچار ماکزیمم، و در حالتی که کوژی به‌سوی پایین باشد دارای می‌نیمم خواهد بود. این ملاحظهٔ ساده، اغلب اجازه می‌دهد کشف کنیم نقطه‌ای را که در آن مشتق برابر صفر است، ماکزیمم نسبی است یا می‌نیمم نسبی[1].

مثال ۱. ببینیم نمودار تابع زیر را چگونه نمایش می‌دهند:

$$f(x) = \frac{x^{۳}}{۳} - \frac{۵x^{۲}}{۲} + ۶x - ۲$$

مشتق اول آن را می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$f'(x) = x^{۲} - ۵x + ۶ = \circ$$

ریشه‌های این معادله: $x_{۱} = ۲$ و $x_{۲} = ۳$ است. مقدارهای متناظر تابع را پیدا می‌کنیم:

$$f(۲) = ۲\frac{۲}{۳} \quad \text{و} \quad f(۳) = ۲\frac{۱}{۲}$$

دو نقطه‌ای را، که به این ترتیب به‌دست می‌آید، روی دستگاه محورهای مختصات معین می‌کنیم. به آن‌ها می‌توان، نقطهٔ با طول $x = \circ$ و عرض $y = f(\circ) = -۲$، که در آن‌جا منحنی محور yها را قطع می‌کند، اضافه کرد. مشتق دوم برابر است با $f''(x) = ۲x - ۵$ که به‌ازای $x = \frac{۵}{۲}$ برابر صفر می‌شود. همچنین:

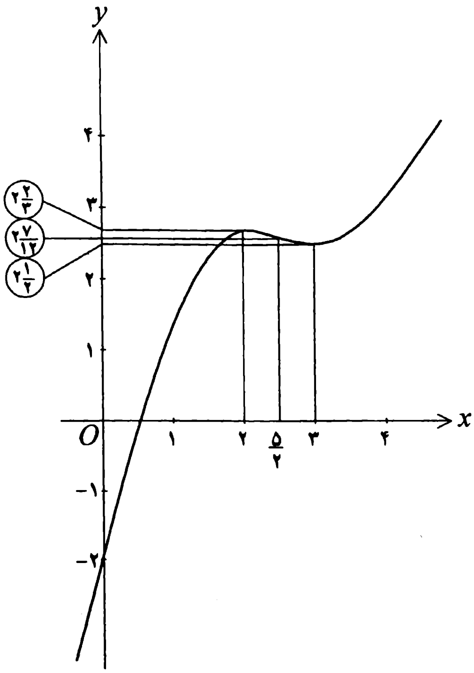
$$\text{برای } x > \frac{۵}{۲} \text{ داریم: } f''(x) > \circ$$

$$\text{برای } x < \frac{۵}{۲} \text{ داریم: } f''(x) < \circ$$

نقطهٔ $x = \frac{۵}{۲}$ و $y = f\left(\frac{۵}{۲}\right) = ۲\frac{۷}{۱۲}$، **نقطهٔ عطف** منحنی است. در سمت چپ آن، کوژی منحنی به‌سوی بالا و در سمت راست آن، کوژی منحنی به‌سوی پایین است. اکنون دیگر روشن است که نقطهٔ $x = ۲$، نقطهٔ ماکزیمم و نقطهٔ $x = ۳$ نقطهٔ می‌نیمم تابع است.

---

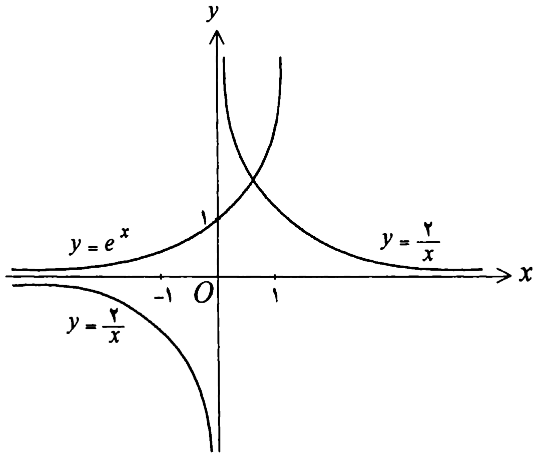
۱. در حالت‌های پیچیده‌تر، زمانی که مشتق دوم هم خودش تغییر نشانه می‌دهد، مسألهٔ روشن کردن ویژگی نقطه‌های ساکن، به‌کمک رابطه‌های تیلور حل می‌شود (به بند ۹ مراجعه شود).



شکل ۱۹

براساس آن‌چه به‌دست آوردیم، نتیجه می‌گیریم که منحنی نمایش تغییر تابع $y=f(x)$ به‌صورتی که در شکل ۱۹ نشان داده‌ایم درمی‌آید. منحنی از نقطهٔ $(۰ ,-۲)$ می‌گذرد، درحالی که کوژی (تحدب) آن به‌سوی بالاست و در نقطهٔ $(۲\frac{۲}{۳} ,۲)$ ماکزیمم خود را به‌دست می‌آورد و سپس به‌طرف پایین فرود می‌آید. در نقطه $(۲\frac{۷}{۱۲} ,۲\frac{۱}{۲})$، که در آن‌جا $f''(x)=۰$ است کوژی به کاوی تبدیل می‌شود. سپس در نقطهٔ $(۲\frac{۱}{۲} ,۳)$ می‌نیمم منحنی به‌دست می‌آید و سرانجام با نمو x، منحنی تا بی‌نهایت نمو می‌کند. حکم اخیر ناشی از آن است که جملهٔ نخست تابع، که شامل بزرگترین درجهٔ x (درجهٔ سوم) است، سریع‌تر از جمله‌های دوم و سوم به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. به همین ترتیب زمانی که به x مقدار منفی بدهیم و قدرمطلق آن را نمو دهیم، منحنی نمایش تغییر تابع به‌سمت $-\infty$ میل می‌کند.

مثال ۲. ثابت‌می‌کنیم نابرابری $e^x \geq ۱+x$، برای‌هر مقدار دل‌خواهی از x، درست است. برای اثبات این حکم، تابع $f(x)=e^x-x-۱$ را در نظر می‌گیریم. مشتق اول آن $f'(x)=e^x-۱$



شکل ۲۰

است و تنها به‌ازای $x = ۰$، برابر صفر می‌شود. مشتق دوم آن $f''(x) = e^x$ به‌ازای تمام مقدارهای x، مثبت است. بنابراین، کوژی (یا تحدب) منحنی نمایش تغییر تابع $f(x)$ به‌سوی پایین است. مقدار $f(۰) = ۰$ می‌نیمم تابع است و بنابراین $e^x - x - ۱ \geq ۰$ (برای تمام مقدارهای x).

منحنی نمایش تغییر تابع‌ها را برای منظورهای مختلف می‌توان به‌کار برد. از جمله، به‌کمک آن‌ها اغلب می‌توان ریشه‌های حقیقی این و یا آن معادله را به‌دست آورد. در مثل، برای اثبات این که معادلهٔ $x \cdot e^x = \frac{۲}{x}$ تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد، می‌توان منحنی نمایش تغییر تابع‌های $y = e^x$ و $y = \frac{۲}{x}$ را پیدا کرد (این دو منحنی در شکل ۲۰ نشان داده شده است). به‌سادگی دیده می‌شود که منحنی‌های این تابع‌ها، تنها در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و درنتیجه، معادلهٔ $e^x = \frac{۲}{x}$، تنها یک ریشهٔ حقیقی دارد.

روش آنالیز، به‌طور گسترده‌ای برای محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های معادله‌ها به‌کار می‌رود، که دربارهٔ آن می‌توانید به بند ۵ از بخش چهارم مراجعه کنید.

۸. نمو و دیفرانسیل تابع

دیفرانسیل تابع. تابع $y = f(x)$ را که دارای مشتق است در نظر می‌گیریم. نمو این تابع

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

که متناظر با نمو متغیر Δx می‌باشد، دارای این ویژگی است که نسبت $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ به‌سمت حدی میل می‌کند که برابر با مشتق است:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x)$$

همین رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

که در آن α مقداری است وابسته به Δx. همچنین وقتی $\Delta x \to 0$ ، α هم به‌سمت صفر میل می‌کند. از آن‌جا نمو تابع به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$$

که در آن $\alpha \to 0$، وقتی که $\Delta x \to 0$.

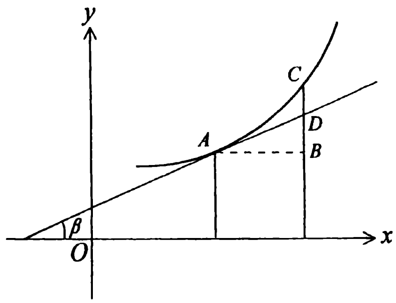
جملهٔ نخست سمت راست این برابری، به‌صورت ساده‌ای به Δx بستگی دارد، به‌ویژه متناسب با Δx است، آن را ***دیفرانسیل*** تابع برای مقدار ساده‌شدهٔ x می‌نامند که متناظر با نمو متغیر Δx است و به‌صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x$$

وجه امتیاز جملهٔ دوم این است که وقتی $\Delta x \to 0$، به‌دلیل این که در α ضرب شده است، سریع‌تر به‌سمت صفر میل می‌کند. می‌گویند که جملهٔ دوم نسبت به Δx (و همچنین در حالتی که $f'(x) \neq 0$ باشد نسبت به جملهٔ نخست)، بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر است. به این ترتیب می‌توان گفت که برای مقدارهای Δx که به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد، نه‌تنها خود جملهٔ دوم، بلکه نسبت آن به Δx هم به‌اندازهٔ دل‌خواه کوچک می‌شود.

تجزیهٔ Δy را به دو جمله، که نخستین جملهٔ آن (و درحقیقت جزء مهم آن) به‌طور خطی وابسته به Δx است و جملهٔ دوم که برای مقدارهای کوچک Δy جزئی و بی‌اهمیت است، می‌توان در شکل ۲۱ دید.

پاره‌خط راست $|BC| = \Delta y$ و نیز $|BC| = |BD| + |DC|$، که در آن $|BD| = \tan\beta \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x = dy$، و $|DC|$ بی‌نهایت کوچکی است که نسبت آن به Δx از



شکل ۲۱

مرتبهٔ بالاتری است.

درعمل از دیفرانسیل برای تصور تقریبی نمو تابع استفاده می‌شود. فرض کنید لازم باشد حجم جداری که یک قوطی مکعب‌شکل را پوشانده است معین کنیم. اندازه‌های داخلی این قوطی برابر ۱۰×۱۰×۱۰ سانتی‌متر و ضخامت جدار ۰٫۵ سانتی‌متر است. اگر دقت ویژه‌ای لازم نباشد، می‌توان چنین استدلال کرد: حجم جدار قوطی عبارت است از نمو Δy تابع $y=x^{3}$، به‌ازای $x=10$، زمانی که $\Delta x=0.1$ باشد. به‌طور تقریبی چنین خواهیم داشت:

$$\Delta y \approx dy = (x^{3})' \cdot \Delta x = 3x^{2} \cdot \Delta x = 3 \times 10^{2} \times 0.1 = 30 \text{ (سانتی‌مترمکعب)}$$

به‌منظور تقارن، نمو Δx متغیر مستقل را هم به dx نشان می‌دهیم و آن را دیفرانسیل x می‌نامیم. به این ترتیب، نشانهٔ دیفرانسیل تابع این‌طور نوشته می‌شود:

$$dy = f'(x) \cdot dx$$

از آن‌جا، مشتق عبارت است از نسبت دیفرانسیل تابع به دیفرانسیل متغیر مستقل، یعنی

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

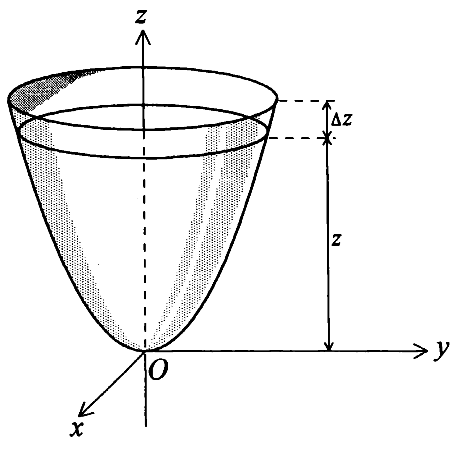
دیفرانسیل تابع، از نظر تاریخی از مفهوم «غیرقابل‌بخش‌ها» سرچشمه می‌گیرد. این مفهوم که از نظر ریاضی‌دان امروزی معنا و مفهوم روشنی ندارد، در زمان خود یعنی در سدهٔ هفدهم، اساس آنالیز ریاضی به‌شمار می‌رفت. در تصور این مفهوم، در جریان چند سده، دگرگونی‌های جدی داده شد. «غیرقابل‌بخش» و سپس «دیفرانسیل» تابع را به‌عنوان مقدار بی‌نهایت کوچک موجودی در نظر می‌گرفتند که با مقدار ثابت خیلی کوچکی، که درعین‌حال

برابر صفر نیست، شباهت داشت. بالاتر، تعریف دیفرانسیل، همان‌طور که در آنالیز امروزی فهمیده می‌شود، داده شد. طبق این تعریف، دیفرانسیل عبارت است از مقدار معینی که به‌ازای هر نمو متغیر Δx به‌دست می‌آید و نیز متناسب با آن هم هست. ویژگی اساسی دیفرانسیل (که تفاوت آن را با Δy نشان می‌دهد) تنها در پرتو حرکت و تغییر دیده می‌شود. اگر نمو Δx را که به‌سمت صفر میل می‌کند (یعنی بی‌نهایت کوچک می‌شود) بررسی کنیم، تفاوت بین dy و Δy، حتی نسبت به Δx، به‌اندازهٔ دل‌خواه کوچک می‌شود.

در همین تبدیل نموهای کوچک به دیفرانسیل‌ها، اساس و ریشهٔ اغلب کاربردهای آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها در بررسی پدیده‌های طبیعی قرار دارد. خواننده به‌ویژه، این مطلب را با روشنی تمام دربارهٔ معادله‌های دیفرانسیلی که در این کتاب در بخش‌های پنجم و ششم بیان شده است، خواهد دید.

برای شناختن تابعی که روند داده‌شده‌ای را بیان می‌کند، کوشش می‌کنند معادله‌ای که این تابع را با مشتق‌های مرتبه‌های مختلف آن، به‌شکل معینی مربوط می‌کند، به‌دست آورند. روش به‌دست آوردن این‌گونه معادله‌ها که روش دیفرانسیلی نامیده می‌شود اغلب به این‌جا می‌رسد که به‌جای نمو تابع، دیفرانسیل‌های متناظر آنها را قرار دهیم.

به‌عنوان نمونه، مسألهٔ زیر را حل می‌کنیم: در فضایی که به‌وسیلهٔ دستگاه مختصات قائم $Oxyz$ مشخص شده است، سطحی را که از دوران سهمی به‌معادلهٔ $z=y^2$ (در صفحهٔ Oyz) به‌دست آمده است بررسی می‌کنیم. این سطح، سهموی (پارابولوئید) دوار نامیده می‌شود (شکل ۲۲). فرض کنید V، حجم جسمی که محدود به سهمی و صفحه‌ای که بـه‌فاصلهٔ z



شکل ۲۲

موازی با صفحه Oxy رسم شده است، باشد. روشن است که V تابعی است از z $(z > 0)$.

برای این که بدانیم تابع برابر با چیست، تلاش می‌کنیم دیفرانسیل آن dV را پیدا کنیم. نمو ΔV تابع V در نقطهٔ z برابر با حجمی است که به‌وسیلهٔ سهموی و در صفحهٔ موازی Oxy که در فاصله‌های z و $z + \Delta z$ از آن قرار گرفته است، محدود باشد.

به‌سادگی دیده می‌شود که مقدار ΔV بزرگتر از حجم استوانه دوار به‌شعاع $\sqrt{z}$ و بلندی Δz و کوچکتر از حجم استوانهٔ دوار به‌شعاع $\sqrt{z + \Delta z}$ و بلندی Δz است. بنابراین

$$\pi z \Delta z < \Delta V < \pi (z + \Delta z) \cdot \Delta z$$

از آن‌جا

$$\Delta V = \pi (z + \theta \Delta z) \Delta z = \pi z \Delta z + \pi \theta (\Delta z)^2$$

که در آن، θ عددی است که به Δz مربوط است و در نابرابری $0 < \theta < 1$ صدق می‌کند.

به این ترتیب موفق شدیم که نمو ΔV را به‌صورت مجموعی بنویسیم که جملهٔ نخستین آن متناسب با Δz و جملهٔ دوم آن بی‌نهایت کوچکی است که نسبت به Δz از مرتبهٔ بالاتر است (وقتی که $\Delta z \to 0$)؛ از این‌جا نتیجه می‌شود که جملهٔ نخست، دیفرانسیل تابع V است:

$$dV = \pi z \Delta z$$

یا

$$dV = \pi z dz$$

زیرا، برای متغیر مستقل z برابری $\Delta z = dz$ درست است.

این برابری، رابطهٔ بین دیفرانسیل‌های dV و dz (از متغیرهای V و z) را معین می‌کند و به همین علت، معادلهٔ دیفرانسیلی نامیده می‌شود. می‌دانیم که

$$\frac{dV}{dz} = V'$$

که در آن V' مشتق V نسبت به متغیر z است. بنابراین معادلهٔ دیفرانسیلی بالا را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$V' = \pi . z$$

حل این معادلهٔ سادهٔ دیفرانسیلی به پیدا کردن تابعی از z می‌رسد که مشتق آن برابر $\pi \cdot z$

است. مسأله‌هایی از این قبیل را به‌طور کلی در بندهای ۱۰ و ۱۱ همین بخش روشن خواهیم کرد. اکنون با تکیه به اعتماد خواننده می‌گوییم که جواب این مسأله عبارت است از تابع

$$V = \frac{\pi \cdot z^{۲}}{۲} + C$$

که در آن به‌جای C می‌توان هر عدد ثابت دل‌خواه در نظر گرفت[۱]. در حالت داده‌شدهٔ تابع، روشن است که حجم جسم به‌ازای $z = ۰$ برابر صفر است (شکل ۲۲ را ببینید) و از آن‌جا $C = ۰$ می‌شود. بنابراین تابع به‌وسیلهٔ رابطهٔ $V = \frac{\pi \cdot z^{۲}}{۲}$ معین می‌شود.

قضیهٔ میانه و نمونه‌هایی از کاربرد آن. دیفرانسیل، مقدار تقریبی نمو تابع را به‌ازای نمو متغیر مستقل و مشتق را در نقطهٔ شروع می‌دهد. اگر گفت‌وگو بر سر نمو در فاصلهٔ از $x = a$ تا $x = b$ باشد، در این صورت:

$$f(b) - f(a) \approx f'(a)(b-a)$$

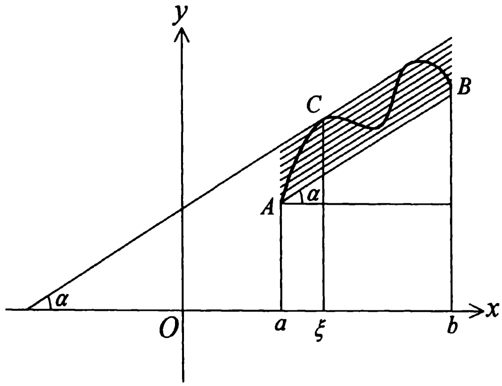
برابری دقیق را در این باره وقتی می‌توان به‌دست آورد که مشتق $f'(a)$ در نقطهٔ شروع را با مشتق نقطهٔ میانه‌ای که به‌طور مناسب و در فاصلهٔ (a, b) برگزیده شده باشد، عوض کنیم. مطلب را دقیق‌تر می‌توان چنین بیان کرد: ***اگر $y = f(x)$ تابعی باشد که در فاصلهٔ $a \le x \le b$ قابل دیفرانسیل‌گیری است، در داخل این فاصله نقطه‌ای مانند ξ وجود دارد که در رابطهٔ زیر صدق می‌کند:***

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \qquad (۲۲)$$

مفهوم هندسی «قضیهٔ میانه» که به‌نام **دستور *لاگرانژ***، یا **دستور *نموهای محدود***، مشهور شده است، بسیار ساده است. فرض کنید روی منحنی نمایش تغییر تابع $f(x)$، نقطه‌های A و B متناظر با مقدارهای $x = a$ و $x = b$ باشد. این دو نقطه را به‌وسیلهٔ وتر AB به‌هم می‌پیوندیم (شکل ۲۳). خط AB راست را موازی خود به‌سوی بالا یا پایین می‌بریم. در لحظه‌ای که خط ما برای آخرین بار منحنی را قطع کند، در نقطه‌ای مانند C بر آن مماس خواهد شد. در این نقطه (که طول آن را $x = \xi$ فرض می‌کنیم) مماس دارای همان زاویهٔ تمایل α است که وتر AB داشت. اما دربارهٔ وتر داریم:

---

۱. و به این ترتیب، مسأله به‌طور کامل حل شده است (نخستین زیرنویس بند مربوط به انتگرال را ببینید).



شکل ۲۳

$$\tan\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

از سوی دیگر، در نقطهٔ C داریم:

$$\tan\alpha = f'(\xi)$$

و برابری

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

هم درست همان قضیهٔ میانه را بیان می‌کند[۱].

دستور (۲۲) دارای این ویژگی است که معرف نقطهٔ مجهول ξ است، نقطه‌ای که دربارهٔ آن تنها این را می‌دانیم که «جایی در فاصلهٔ (a,b)» قرار گرفته است، ولی با وجود این دشواری (مشخص نبودن ξ)، این دستور دارای اهمیت نظری زیادی است و به‌وسیلهٔ آن بسیاری از قضیه‌های آنالیز ثابت می‌شود. اهمیت عملی و مستقیم این دستور هم زیاد است، زیرا امکان می‌دهد تا نمو تابع را در حالتی که حدود نوسان مشتق آن معلوم باشد، حدس بزنیم. از جمله

$$|\sin b - \sin a| = |\cos\xi|\,(b - a) \leq b - a$$

۱. البته این ملاحظه‌ها، تنها مفهوم هندسی قضیه را نشان می‌دهد و آن را نمی‌توان به‌عنوان اثبات دقیق قضیه به‌حساب آورد.

در این‌جا a و b و ξ زاویه‌هایی هستند که برحسب رادیان داده شده‌اند، ξ مقداری است بین a و b. مقدار ξ معلوم نیست، ولی می‌دانیم که $|\cos \xi| \leq ۱$.

از دستور (۲۲) روشن می‌شود تابعی که مشتق آن همیشه برابر صفر است، باید مقدار ثابتی باشد. چنین تابعی در هیچ فاصله‌ای نمی‌تواند نموی مخالف صفر به‌دست آورد. خواننده می‌تواند به‌روش مشابه و به‌سادگی ثابت کند تابعی که مشتق آن همیشه مثبت باشد، بی‌شک صعودی است و برای زمانی که مشتق منفی باشد، نزولی است. به یکی از حالت‌های کلی‌تر قضیهٔ میانه، بدون اثبات اشاره می‌کنیم:

برای تابع‌های $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ که در $[a , b]$ قابل دیفرانسیل‌گیری باشند (تنها اگر $\psi'(x)$ در (a , b) مخالف صفر باشد) برابری زیر درست است[۱]:

$$\frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \qquad (۲۳)$$

که در آن ξ نقطه‌ای واقع در فاصلهٔ (a , b) است[۲].

از حکم بالا می‌توان روش کلی محاسبه حدهایی به‌شکل

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \qquad (۲۴)$$

وقتی که در آن $\varphi(۰) = \psi(۰) = ۰$ باشد، به‌دست آورد. با استفاده از دستور (۲۳) یادآور می‌شویم که

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(۰)}{\psi(x) - \psi(۰)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

که در آن ξ بین ۰ و x واقع است و بنابراین همراه x، مقدار ξ هم به‌سمت صفر میل می‌کند. این مطلب اجازه می‌دهد که به‌جای حد (۲۴)، $\lim_{x \to ۰} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ را حساب کنیم، که در اغلب حالت‌ها، محاسبهٔ حد را آسان می‌کند[۳].

---

۱. رابطهٔ (۲۳) را می‌توان با به‌کار بردن سادهٔ قضیهٔ میانه در تابع‌ها به‌دست آورد:

$$f(x) = \varphi(x) - \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{\psi(b) - \psi(a)} \psi(x)$$

۲. نشانه‌های $[a,b]$ و (a,b) را به‌ترتیب برای مقدارهایی از x که در رابطهٔ $a \leq x \leq b$ و $b > x > a$ صدق کند، به‌کار می‌بریم.

۳. همین روش، دربارهٔ جست‌وجوی حد کسرهایی هم که صورت و مخرج آن‌ها با هم به‌سمت بی‌نهایت میل ←

مثال. حد کسر $\frac{x-\sin x}{x^۳}$ را وقتی که x به‌سمت صفر میل کند پیدا کنید.

اگر روش بالا را سه مرتبه به‌کار ببریم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^۳}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{۳x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{۶x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cos x}{۶}=\frac{۱}{۶}$$

۹. دستور تیلور

تابع $P(x)=a_۰+a_۱x+a_۲x^۲+\ldots+a_nx^n$، که در آن a_n عدد ثابتی مخالف صفر است، چندجمله‌ای درجهٔ n نامیده می‌شود. در حالت خاص، تابع $y=ax+b$ چندجمله‌ای درجهٔ اول و $y=ax^۲+bx+c$ چندجمله‌ای درجهٔ دوم است. چندجمله‌ای‌ها را می‌توان ساده‌ترین تابع‌ها دانست. برای محاسبهٔ چنین تابع‌هایی، وقتی که x معلوم باشد، جمع و تفریق و ضرب کفایت می‌کند و حتی نیازی به تقسیم نیست. چندجمله‌ای‌ها به‌ازای تمام مقدارهای x پیوسته‌اند و از هر مرتبه‌ای که باشند دارای مشتق‌اند. مشتق یک چندجمله‌ای، به‌نوبهٔ خود یک چندجمله‌ای است که یک درجه پایین‌تر از خود چندجمله‌ای است. مشتق مرتبهٔ $(n+۱)$ام و بالاتر از آن، از چندجمله‌ای درجهٔ n، برابر با صفر است.

اگر به چندجمله‌ای‌ها، تابع به‌شکل

$$y=\frac{a_۰+a_۱x+\cdots+a_nx^n}{b_۰+b_۱x+\cdots+b_nx^n}$$

را که برای محاسبهٔ آن، تقسیم هم لازم است و تابع‌های $\sqrt{x}$ و $\sqrt[۳]{x}$ و سرانجام تابع‌هایی را که از ترکیب حسابی این تابع‌ها به‌دست می‌آید اضافه کنیم، مجموعهٔ تابع‌هایی را به‌دست می‌آوریم که با کمک روش‌های دورهٔ دبیرستانی قابل محاسبه‌اند.

روی همان نیمکت دبیرستان، دربارهٔ یک‌سلسله تابع‌های دیگر از قبیل $\sqrt[۵]{x}, \tan x, \sin x, \arctan x$ هم تصورهایی به‌دست آورده‌ایم و ویژگی‌های مهم آن‌ها را یاد گرفته‌ایم، ولی ریاضیات مقدماتی، جواب این پرسش را که: چگونه این تابع‌ها را محاسبه می‌کنند، نمی‌دهد. از جمله، چه عمل‌هایی روی x باید انجام داد تا $\tan x$ یا $\sin x$ به‌دست آید.

←

می‌کند درست است. این روش، که برای پیدا کردن این‌گونه حدها (و یا به‌اصطلاح برای رفع ابهام) بسیار مفید است، در بند ۳ بخش ۱۲ هم از آن استفاده خواهد شد.

پاسخ این پرسش را روش‌هایی که در آنالیز به‌وجود آمده است، می‌دهد. دربارهٔ یکی از این روش‌ها با تفصیل بیشتری گفت‌وگو می‌کنیم.

دستور تیلور. فرض کنید در فاصله‌ای که نقطهٔ a در داخل آن قرار دارد، تابع $f(x)$ داده شده باشد و مشتق‌های آن از هر مرتبه‌ای در دست باشد. چندجمله‌ای درجه اول

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a)$$

در نقطهٔ $x=a$ بر $f(x)$ منطبق است و به‌سادگی می‌توان روشن کرد که مشتق این چندجمله‌ای درجهٔ اول هم، در این نقطه همان مشتق $f(x)$ است. نمودار این تابع خط راستی است که در نقطهٔ a بر منحنی $f(x)$ مماس است.

می‌توان چندجمله‌ای درجهٔ دومی مانند

$$P_2(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

برگزید که در نقطهٔ $x=a$ با $f(x)$ مقدار مشترکی دارد و مشتق‌های اول و دوم آن‌ها هم یکی باشد. نمودار این تابع درجهٔ دوم، در نزدیکی نقطهٔ a، به منحنی $f(x)$ چسبیده‌تر و به آن نزدیک‌تر است.

طبیعی است باید انتظار داشته باشیم اگر چندجمله‌ای بسازیم که n مشتق اول آن به‌ازای $x=a$، با n مشتق اول $f(x)$ در همین نقطه یکی باشد، در این صورت چندجمله‌ای به‌ازای مقدارهایی از x که به a نزدیک‌اند به $f(x)$ به‌اندازهٔ کافی نزدیک خواهد بود.

به این ترتیب، برابری تقریبی زیر که دستور تیلور را بیان می‌کند به‌دست می‌آید:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (25)$$

سمت راست این رابطه، یک چندجمله‌ای درجهٔ nام نسبت به $x-a$ می‌باشد و برای هر مقدار x، به‌شرطی که $f(a)$ و $f'(a)$ و... و $f^{(n)}(a)$ معلوم باشد، می‌توان $f(x)$ را حساب کرد.

به‌سادگی می‌توان ثابت کرد برای تابعی که $n+1$ مشتق آن در دست باشد، تفاوت سمت راست این رابطه از سمت چپ آن مقدار کوچکی است که سریع‌تر از $(x-a)^n$ به‌سمت صفر میل می‌کند. به‌جز آن، این تنها چندجمله‌ای ممکن از درجهٔ nام است که اختلاف آن با $f(x)$ به‌ازای مقدارهای نزدیک به a، مقدار کوچکی است که وقتی $x \to a$، سریع‌تر از $(x-a)^n$

به‌سمت صفر میل می‌کند. در حالتی که $f(x)$ یک چندجمله‌ای جبری درجهٔ n باشد، برابری تقریبی (۲۵) به یک برابری واقعی تبدیل می‌شود.

سرانجام این مطلب هم مهم است که موفق شویم اندازهٔ اختلاف سمت راست رابطهٔ (۲۵) را با $f(x)$، به شکل ساده‌ای بیان کنیم. برای اینکه برابری (۲۵) دقیق شود باید به سمت راست آن جمله‌ای که «جملهٔ باقی‌ماندهٔ» دستور نامیده می‌شود اضافه کرد:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \qquad (۲۶)$$

جملهٔ تکمیلی اخیر[1]، یعنی

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

دارای این ویژگی است که باید مشتق را، نه در خود a، بلکه در نقطهٔ غیرمشخصی مانند ξ که به‌روش ویژه‌ای (و در فاصله a و x) از پیش برگزیده شده است، حساب کرد.

اثبات برابری (۲۶) به‌اندازهٔ کافی مفصل است، ولی درواقع دشوار نیست. یک نوع برهان سطحی، ولی کوتاه، را در این‌جا می‌آوریم:

برای این که ببینیم در برابری تقریبی (۲۵)، سمت چپ با سمت راست چقدر اختلاف دارد، نسبت تفاضل سمت راست از سمت چپ برابری (۲۵) را به $-(x-a)^{n+1}$، بررسی می‌کنیم:

$$\frac{f(x) - \left[f(a) + f'(a)\,(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n\right]}{-(x-a)^{n+1}} \qquad (۲۷)$$

خواننده را به بررسی تابع زیر هم وادار می‌کنیم:

$$\varphi(u) = f(u) + f'(u)\,(x-u) + \cdots + \frac{f^{(n)}(u)}{n!}\,(x-u)^n$$

که تابعی است از متغیر u و در آن x، مقدار ثابتی به‌حساب آمده است. به این ترتیب، صورت کسر (۲۷)، چیزی جز نمو این تابع، ضمن انتقال از $u=a$ به $u=x$ نیست. مخرج آن هم، نمو تابع

$$\psi(u) = (x-u)^{n+1}$$

---

۱. این تنها یکی از گونه‌های ممکن بیان جملهٔ باقی‌ماندهٔ $R_{n+1}(x)$ است.

در همین فاصله است. اکنون از تعمیم قضیهٔ میانه، که در بند پیش یادآوری کردیم، استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

با انجام دیفرانسیل‌گیری از تابع‌های $\varphi(u)$ و $\psi(u)$ نسبت به u (همچنین باید به‌خاطر داشت که x مقدار ثابتی است، یعنی آن را ثابت فرض کردیم) چنین خواهیم داشت:

$$\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} = -\frac{f^{(n+۱)}(\xi)}{(n+۱)!}$$

با برابر قرار دادن جملهٔ اخیر با مقدار قبلی (۲۷)، دستور تیلور به‌صورت (۲۶) به‌دست می‌آید.

دستور تیلور، به صورت اخیر ان (۲۶)، نه‌تنها وسیله‌ای برای محاسبهٔ تقریبی $f(x)$ به‌دست می‌دهد، بلکه اجازه می‌دهد که خطای به‌دست‌آمده را هم تخمین بزنیم.

نمونهٔ ساده‌ای می‌آوریم:

$$y = \sin x$$

مقدار تابع $\sin x$ و مشتق‌های پشت‌سرهم آن را به‌ازای $x = ۰$ می‌دانیم. با استفاده از این مطلب، رابطهٔ تیلور را برای $\sin x$ می‌نویسیم و فرض می‌کنیم‌که $a = ۰$ و $n = ۴$ باشد. درنتیجه:

$$\begin{array}{lll} f(x) = \sin x & f'(x) = \cos x & f''(x) = -\sin x \\ f'''(x) = -\cos x & f^{IV}(x) = \sin x & f^{V}(x) = \cos x \\ f(۰) = ۰ & f'(۰) = ۱ & f''(۰) = ۰ \\ f'''(۰) = -۱ & f^{IV}(۰) = ۰ & f^{V}(\xi) = \cos \xi \end{array}$$

بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$\sin x = x - \frac{x^۳}{۶} + R_۵ \qquad \left(R_۵ = \frac{x^۵}{۱۲۰}\cos\xi\right)$$

اگرچه مقدار دقیق $R_۵$ برای ما معلوم نیست، ولی به‌سادگی دیده می‌شود که $|\cos\xi| \leq ۱$.

اگر مقدارهای x را از صفر تا $\frac{\pi}{۴}$ محدود کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$|R_5| = \left|\frac{x^5}{120}\cos\xi\right| \leq \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{4}\right)^5 < \frac{1}{400}$$

بنابراین، در فاصلهٔ $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ می‌توان تابع $\sin x$ را با دقت $\frac{1}{400}$، به‌صورت برابری چندجمله‌ای درجه سوم زیر نوشت:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3$$

اگر در تجزیهٔ $\sin x$، طبق دستور تیلور جمله‌های بیشتری بگیریم، چندجمله‌ای از درجهٔ بالاتر به‌دست می‌آید که دقیق‌تر و به $\sin x$ نزدیک‌تر است.

با همین روش است که جدول‌های مثلثاتی و بسیاری از جدول‌های دیگر محاسبه می‌شود.

این یک قانون است که قانون‌های طبیعت، با تقریب کافی به‌وسیلهٔ تابع‌هایی بیان می‌شود که می‌توان از آن‌ها تا هر مرتبه‌ای که لازم باشد دیفرانسیل گرفت. این دیفرانسیل‌ها هم به‌نوبهٔ خود می‌توانند به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای‌های تقریبی بیان شوند؛ گزینش درجهٔ چندجمله‌ای مربوط به این است که تا چه اندازه دقت لازم داریم.

رشتهٔ تیلور. اگر در دستور (۲۵) عدهٔ جمله‌ها را زیاد و زیادتر کنیم، تفاوت بخش سمت راست از $f(x)$، که به‌وسیلهٔ باقی‌ماندهٔ $R_{n+1}(x)$ بیان می‌شود، ممکن است به‌سمت صفر میل کند. البته این مطلب برای هر مقدار x و هر تابع غیرمشخص ممکن نیست. ولی دستهٔ بزرگی از تابع‌ها (به‌نام ***تابع‌های تحلیلی***) وجود دارد که در آن‌ها دست‌کم برای مقدارهایی از x (در فاصله‌ای که شامل a هم هست) وقتی که $n \to \infty$، جملهٔ باقی‌مانده $R_{n+1}(x)$ هم به‌سمت صفر میل می‌کند. به‌ویژه دربارهٔ چنین تابع‌هایی می‌توان با کمک دستور تیلور، تابع $f(x)$ را با دقت دل‌خواه محاسبه کرد. دربارهٔ این تابع‌ها بیشتر بحث می‌کنیم:

اگر زمانی که $n \to \infty$، جملهٔ $R_{n+1}(x)$ به‌سمت صفر میل کند، از رابطهٔ (۲۶) نتیجه می‌شود:

$$f(x) = \underset{n \to \infty}{\text{حد}} \left[f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right]$$

دراین‌حالت می‌گویند $f(x)$ به‌صورت یک رشتهٔ هم‌گرای بی‌پایان (متقارب)، تجزیه می‌شود:

$$f(x) = f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}\,(x-a)^{۲} + \cdots$$

که به‌صورت توان‌های پشت‌سرهم $x-a$ است و **رشتهٔ تیلور** نامیده می‌شود. همچنین $f(x)$ را مجموع این رشته گویند. چند نمونه از تابع‌های مشهور را به رشتهٔ تیلور تبدیل می‌کنیم (در این نمونه‌ها، $a = ۰$ است).

۱) $$(۱+x)^n = ۱ + nx + \frac{n(n-۱)}{۲!}x^{۲} + \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}x^{۳} + \cdots$$

(این رابطه برای $|x| < ۱$ و n عددی حقیقی، درست است).

۲) $$\sin x = x - \frac{x^{۳}}{۳!} + \frac{x^{۵}}{۵!} - \frac{x^{۷}}{۷!} + \cdots$$ (برای هر مقدار دل‌خواه x)

۳) $$\cos x = ۱ - \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۴}}{۴!} - \frac{x^{۶}}{۶!} + \cdots$$ (برای هر مقدار دل‌خواه x)

۴) $$e^x = ۱ + x + \frac{x^{۲}}{۲!} + \frac{x^{۳}}{۳!} + \cdots$$ (برای هر مقدار دل‌خواه x)

۵) $$\arctan x = x - \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۵}}{۵} + \cdots$$ (برای مقادیر $|x| \leq ۱$)

نمونهٔ اول (که به دوجمله‌ای **نیوتن** مشهور است) به‌وسیلهٔ نیوتن برای مقدارهای دیگر n تعمیم داده شد (قبل از نیوتن، تنها برای مقدارهای درست n قبول شده بود). این مثال، نمونه‌ای است که کاربرد دستور کلی تیلور را نشان می‌دهد. به‌کمک دو نمونهٔ آخر، به‌ازای $x = ۱$ می‌توان مقدارهای e و π را با دقت لازم محاسبه کرد.

اهمیت عملی دستور تیلور، که راه‌های محاسبه‌ای زیادی در بخش‌های آنالیز نشان داد، بسیار زیاد است.

تابع‌هایی که به رشتهٔ تیلور قابل تجزیه‌اند، می‌توانند بسیاری از قانون‌های طبیعی، مانند قانون‌های فیزیکی، جریان‌های شیمیایی و قانون‌های حرکت جسم وغیره را با دقت زیاد بیان کنند. اگر تابع‌هایی که بیان ریاضی این نظریه‌ها را می‌دهد، به‌عنوان تابع‌هایی با متغیر مختلط بررسی کنیم، بحث روشن‌تر می‌شود و تابع، دارای ویژگی‌های کلی‌تر و کامل‌تری خواهد شد. نظریهٔ این تابع‌ها در جای خود (بخش نهم) خواهد آمد.

فکر بیان تقریبی تابع‌ها به‌وسیلهٔ چندجمله‌ای‌ها، و مسألهٔ تصور تابع به‌صورت بی‌نهایت جملهٔ ساده، پیشرفت زیادی در آنالیز پیدا کرد و به‌صورت شاخهٔ مستقلی از آنالیز به‌نام نظریهٔ تقریب تابع‌ها درآمد (بخش دوازدهم).

۱۰. انتگرال

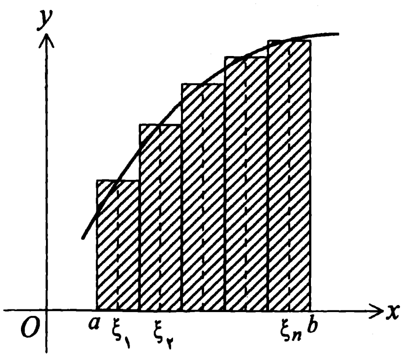
در بخش اول و بند اول همین بخش دیدیم که از نظر تاریخی، مفهوم انتگرال و به‌طور کلی محاسبهٔ انتگرالی، از ضرورت حل مسأله‌های معینی که نمونهٔ ممتاز و مشخص آن مربوط به پیدا کردن مساحت شکل‌های منحنی‌الخط است، به‌وجود آمد. اکنون می‌خواهیم این مسأله را روشن‌تر کنیم و ببینیم چه وابستگی بین مسأله‌های مربوط به محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی وجود دارد، چنان بستگی که به‌طور کامل تنها در سدهٔ هیجدهم روشن شد.

مساحت. فرض کنید منحنی که دربالای محور xها رسم شده است، نمودار تابع $y=f(x)$ باشد. کوشش می‌کنیم مساحت S قطعه‌ای را که به منحنی $y=f(x)$، محور xها و خط‌های راستی که از نقطه‌های $x=a$ و $x=b$ موازی محور yها رسم شده، محدود می‌باشد، پیدا کنیم.

برای حل این مسأله‌ها به‌روش زیر عمل می‌کنیم: پاره‌خط $[a,b]$ را به n قسمت بخش می‌کنیم (لزومی ندارد که قسمت‌ها برابر باشد). طول قطعه‌خط نخست را $\Delta x_۱$ و قطعه‌خط دوم را $\Delta x_۲$ و... و قطعهٔ آخر را Δx_n می‌نامیم. هر قطعه را به‌وسیلهٔ نقطه‌های $\xi_۱$، $\xi_۲$، ... و ξ_n مشخص می‌کنیم و سپس مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$S_n = f(\xi_۱)\,\Delta x_۱ + f(\xi_۲)\,\Delta x_۲ + \cdots + f(\xi_n)\,\Delta x_n \qquad (۲۸)$$

روشن است S_n برابر است با مجموع مساحت‌های مستطیل‌هایی که در شکل ۲۴ هاشور زده شده است.



شکل ۲۴

هرقدر فاصلهٔ $[a,b]$ را به قطعه‌های کوچکتری بخش کنیم، S_n به مساحت S نزدیکتر خواهد شد. اگر این عمل را ادامه دهیم، با بخش فاصلهٔ $[a,b]$ به قطعه‌های کوچکتر، مجموع S_n به‌سمت S میل خواهد کرد.

امکان بخش $[a,b]$ به قطعه‌های نابرابر، ما را مجبور می‌کند تا آن‌چه را زیر عنوان «قطعه‌هایی که به‌ترتیب کوچک می‌شوند» می‌فهمیم، دقیق‌تر کنیم. فرض کنیم نه‌تنها n به‌طور نامحدود رشد کند، بلکه بزرگترین طول Δx_i هم به‌سمت صفر میل کند. بنابراین

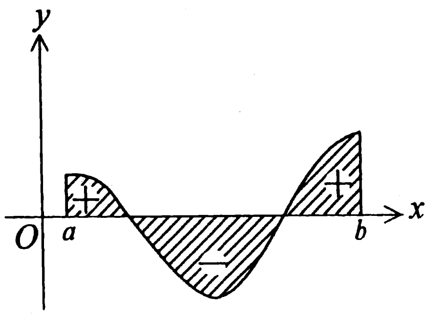
$$S = \underset{\text{Max } \Delta x_i \to 0}{\text{حد}} [f(\xi_1)\,\Delta x_1 + f(\xi_2)\,\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\,\Delta x_n] =$$

$$= \underset{\text{Max } \Delta x_i \to 0}{\text{حد}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (۲۹)$$

محاسبهٔ مساحت، به جست‌وجوی حد (۲۹) منجر می‌شود.

یادآور می‌شویم زمانی که مسأله را طرح می‌کردیم، تنها یک تصور تجربی دربارهٔ مساحت شکل منحنی‌الخط داشتیم و تعیین دقیق آن را نمی‌دانستیم. درنتیجهٔ برهان بالا، تعریف دقیق مفهوم مساحت را به‌دست آوردیم که عبارت است از حد (۲۹). اکنون دیگر تنها یک تصور ظاهری و تجربی دربارهٔ مساحت نداریم، بلکه آن را به‌صورت یک تعریف ریاضی منظم کرده‌ایم، تعریفی که اجازه می‌دهد مساحت را محاسبه کنیم (با آن‌چه که در پایان بند ۲ دربارهٔ طول محیط دایره و سرعت بیان کردیم، مقایسه کنید).

ما در این‌جا فرض کردیم که $f(x) \geq 0$ باشد. اگر علامت $f(x)$ تغییر کند (مانند شکل ۲۵)، حد (۲۹) مجموع جبری مساحت قطعه‌هایی را که بین منحنی $y=f(x)$ و محور x ها



شکل ۲۵

واقع است به‌دست می‌دهد. همچنین مساحت قطعه‌هایی که زیر محور xها واقع است با علامت منفی محاسبه می‌شود.

انتگرال معین. وجود بسیاری مسأله‌های دیگر هم ضرورت محاسبهٔ حد (۲۹) را نشان می‌دهد. فرض کنید نقطه‌ای با سرعت متغیر $V=f(t)$ روی خط راستی حرکت کند. فاصلهٔ S را که نقطهٔ مزبور، در فاصلهٔ از $t=a$ تا $t=b$ را می‌پیماید، چگونه می‌توان معین کرد؟

فرض کنید تابع $f(t)$ پیوسته باشد، یعنی در فاصلهٔ زمانی کوچک، سرعت هم مقدار کوچکی تغییر کند. $[a,b]$ را به n بخش به طول‌های $\Delta t_۱$، $\Delta t_۲$، ...، Δt_n تقسیم می‌کنیم. برای این که مسافت پیموده‌شده در هریک از این فاصله‌های Δt_i را به‌طور تقریب محاسبه کنیم فرض می‌کنیم که سرعت هریک از این فاصله‌ها، ثابت و برابر با سرعت لحظهٔ دل‌خواهی از آن مانند ξ_i باشد. به‌این ترتیب، تمام مسافت پیموده‌شده به‌تقریب برابر مجموع زیر خواهد بود:

$$s_n = \sum_{i=۱}^{n} f(\xi_i)\ \Delta t_i$$

برای این که مسافت s را، که در فاصلهٔ زمانی از a تا b پیموده شده است، به‌طور دقیق حساب کنیم، باید حد این مجموع را وقتی که فاصله‌های تقسیم بسیار کوچک باشد پیدا کنیم و این همان حد به‌صورت (۲۹) است:

$$s = \underset{\text{Max } \Delta t_i \to ۰}{\text{حد}} \sum_{i=۱}^{n} f(\xi_i)\ \Delta t_i$$

می‌توان مسأله‌های مشخص بسیاری را طرح کرد که حل آن‌ها به محاسبهٔ همین حد منجر شود. ما باز هم به مسأله‌هایی از این نوع برخورد خواهیم کرد، ولی همین اندازه هم که تا این‌جا گفتیم به‌اندازهٔ کافی اهمیت این حد را روشن می‌کند. حد (۲۹) را ***انتگرال معین*** تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ گویند و به این صورت نشان می‌دهند:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

جملهٔ $f(x)\,dx$ را جملهٔ زیر انتگرال و a و b را مرزهای انتگرال‌گیری، a را حد پایین و b را حد بالا، گویند.

بستگی حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال. مثال ۲ بند ۱ همین بخش را می‌توان به‌عنوان نمونه‌ای

برای محاسبهٔ مستقیم انتگرال معین برگزید. اکنون می‌توان گفت مسأله‌ای را که در آن‌جا ملاحظه کردیم به محاسبهٔ این انتگرال معین می‌رسد:

$$\int_{0}^{h} ax\,dx$$

نمونهٔ دیگری از این قبیل را در بند ۲ این بخش ملاحظه کردیم، که حل مسألهٔ مربوط به پیدا کردن مساحتی را که به‌وسیلهٔ سهمی $y=x^2$ محدود شده باشد، طرح کرده بود. در این‌جا جواب این مسأله، منجر به محاسبهٔ این انتگرال می‌شود:

$$\int_{0}^{1} x^2 dx$$

ما به این علت توانستیم این هر دو حد را محاسبه کنیم که دستور ساده‌ای برای مجموع n عدد پشت‌سرهم در سلسلهٔ عددهای طبیعی و مجموع مربع‌های این عددها می‌دانستیم. ولی برای تابع $f(x)$ نخواهیم توانست مجموع (۲۸) را به‌دست آوریم، یعنی این مجموع را به‌وسیلهٔ دستورهای ساده‌ای بیان کنیم. در (۲۸) نقطه‌های ξ_i و نموهای Δx_i به‌وسیلهٔ قانون‌های مختلفی داده شده است. از این گذشته در حالت‌هایی هم که بتوان جمع (۲۸) را انجام داد، یک راه‌حل و روش عمومی وجود ندارد. بلکه با کمک روش‌های مختلفی که هریک به‌صورت ویژهٔ خود می‌باشد، انجام می‌گیرد و مانند این است که برای هر مسأله‌ای راه‌حل جداگانهٔ مخصوص به آن وجود دارد.

بنابراین، مسألهٔ پیدا کردن یک روش عمومی برای محاسبهٔ انتگرال معین، مطرح می‌شود. از نظر تاریخی مدت‌هاست این مسأله به‌شکل مسأله‌های مشخصی از قبیل یافتن روش کلی برای محاسبهٔ مساحت شکل‌های منحنی‌الخط و حجم‌هایی که به‌وسیلهٔ سطح‌های منحنی محدود شده است وغیره در مقابل ریاضی‌دانان قرار دارد.

پیش از این هم یادآور شدیم که *ارشمیدس* توانست به‌جز مساحت دایره، مساحت بعضی از شکل‌های دیگر را هم محاسبه کند. بعدها مسأله‌های مشابه دیگری مربوط به محاسبهٔ مساحت، حجم و گرانیگاه (مرکزثقل) جسم‌ها وغیره، کم‌کم حل و به میراث *ارشمیدس* اضافه شد. ولی جریان پیدا کردن روش کلی حل این مسأله‌ها نخست خیلی به‌کندی پیش می‌رفت. درحقیقت زمانی این روش به‌وجود آمد که مصالح و مواد اولیهٔ نظری و محاسبه‌ای (که به‌نوبهٔ خود در بستگی کامل و نزدیک با نیازهای مربوط به عمل، پدید آمده بود) به‌اندازهٔ کافی روی هم جمع شد. تنها در آخرهای سده‌های میانه بود که این

جریانِ جمع‌آوری و تعمیم، به‌طور جدی سرعت گرفت و با حرارت زیادی پیشرفت کرد و این زمانی بود که به‌علت پیشرفت شدید نیروهای تولیدی در اروپا، رابطه‌های تولیدی پیشین (فئودالیسم) درهم می‌شکست و رابطه‌های تولیدی تازه (سرمایه‌داری) به‌وجود می‌آمد.

جمع‌آوری حالت‌های مختلف مسأله‌های مربوط به محاسبهٔ انتگرال‌های معین، موازی بررسی‌هایی بود که دربارهٔ مسأله‌های مربوط به پیدا کردن مشتق تابع‌ها انجام می‌گرفت. خواننده با بررسی بند اول این بخش می‌داند که کار این جمع‌آوری بزرگ در سدهٔ هفدهم و در کارهای **نیوتن** و **لایب‌نیتس** به‌پایان رسید. به این مفهوم، می‌توان **نیوتن** و **لایب‌نیتس** را کاشف و به‌وجودآورندهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال دانست.

یکی از خدمت‌های اساسی **نیوتن** و **لایب‌نیتس** این است که در اثرهای خود، به‌طور قطعی، بستگی عمیقی را که بین حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال وجود دارد، روشن کردند. به‌ویژه همین بستگی بود که روش عمومی محاسبهٔ انتگرال‌های معین را برای دستهٔ بزرگی از تابع‌ها به‌دست داد.

برای بیان این بستگی، به نمونه‌ای از مکانیک برگردیم.

فرض کنیم یک نقطهٔ مادی با سرعت $V=f(t)$ روی خط راستی حرکت کند (t نمایندهٔ زمان است). می‌دانیم که مسافت σ، که نقطهٔ داده‌شده در فاصلهٔ زمانی $t=t_۱$ و $t=t_۲$ می‌پیماید، برابر با انتگرال معین زیر است:

$$\sigma=\int_{t_۱}^{t_۲} f(t)\,dt$$

به‌جز این، فرض می‌کنیم قانون حرکت نقطه، یعنی تابع $s=F(t)$ روشن باشد. این تابع، رابطهٔ بین زمان و مسافت s را بیان می‌کند و نسبت به مبدأ A، که روی خط مسیر برگزیده شده است، به‌دست آمده است. روشن است که مسافت σ، که در فاصلهٔ زمانی $[t_۱,t_۲]$ پیموده شده است، برابر با این تفاضل است:

$$\sigma = F(t_۲) - F(t_۱)$$

بنابراین از یک مفهوم فیزیکی، به برابری

$$\int_{t_۱}^{t_۲} f(t)\,dt = F(t_۲) - F(t_۱)$$

می‌رسیم، که رابطهٔ بین قانون حرکت نقطهٔ مادی و سرعت آن را بیان می‌کند.

از دیدگاه ریاضی، همان‌طور که در بند ۵ این بخش دیدیم، تابع $F(t)$ تابعی است که مشتق آن به‌ازای همهٔ مقدارهای مورد بررسی t، برابر $f(t)$ باشد، یعنی:

$$F'(t) = f(t)$$

چنین تابعی را ***تابع اولیهٔ*** $f(t)$ گویند.

باید در نظر داشت اگر تابع $f(t)$، دست‌کم یک تابع اولیه داشته باشد، دارای بی‌نهایت تابع اولیه خواهد بود. زیرا اگر $F(t)$ تابع اولیهٔ $f(t)$ باشد، $F(t)+C$ هم تابع اولیهٔ $f(t)$ خواهد بود که در آن C مقدار ثابتی است.

باری، به این وسیله جواب تمام تابع‌های اولیهٔ $f(t)$ را به‌دست می‌آوریم، زیرا اگر $F_1(t)$ و $F_2(t)$ دو تابع اولیهٔ $f(t)$ باشد، تفاضل آن‌ها $\varphi(t) = F_1(t) - F_2(t)$، در فاصلهٔ تغییر t، دارای مشتق $\varphi'(t)$ می‌باشد که برابر صفر است و بنابراین $\varphi(t)$ مقدار ثابتی است[1].

از دیدگاه فیزیکی، مقدارهای مختلف مقدار ثابت C، متناظر با حالت‌های مختلف انتخاب نقطهٔ مبدأ O، در قانون حرکت است (قانونی که مسافت را معین می‌کند).

از آن‌چه گفته شد به این نتیجه می‌رسیم که اگر شرط‌های کلی برای تابع $f(x)$ در فاصله $[a,b]$ داده شده باشد، در حالتی از این شرط‌ها، که تابع $f(x)$ بتواند همچون سرعت حرکت نقطه‌ای در لحظهٔ زمانی x بررسی شود، این برابری درست است[2]:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (۳۰)$$

که در آن $F(x)$ یکی از تابع‌های اولیهٔ $f(x)$ است.

این برابری، **دستور مشهور نیوتن و لایب‌نیتس** هم هست که پرسش مربوط به محاسبهٔ انتگرال معین از تابع را، به جست‌وجوی تابع اولیهٔ آن می‌رساند و بنابراین، محاسبهٔ دیفرانسیلی و محاسبهٔ انتگرالی را به هم بستگی می‌دهد.

---

۱. طبق قضیهٔ میانه:

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi'(\nu)(t-t_0) = 0$$

که در آن ν بین t و t_0 قرار دارد و از آن‌جا $\varphi(t) = \varphi(t_0)$ برای تمام مقدارهای t، مقدار ثابتی است.

۲. می‌توان با روش ریاضی، و بدون توسل به نمونه‌ای از مکانیک، ثابت کرد، اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ (a,b) پیوسته باشد (و حتی در حالتی که ناپیوسته باشد، ولی طبق دستور *لوبگ* قابل جمع کردن باشد ـ بخش پانزدهم)، تابع اولیه‌ای مانند $F(x)$ وجود دارد که در برابری (۳۰) صدق کند.

بسیاری از مسأله‌های ویژه و مشخصی که موضوع بررسی بسیاری از ریاضی‌دانان بود، به‌کمک این دستور خودبه‌خود حل شد. این دستور بیان می‌کند که انتگرال معین از تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ برابر است با تفاضل تابع‌های اولیهٔ این تابع به‌ازای مقدارهای انتهای سمت راست و انتهای سمت چپ فاصله[1].

تفاضل (۳۰) به این صورت هم نوشته می‌شود:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال ۱. برابری

$$\left(\frac{x^۳}{۳}\right)' = x^۲$$

نشان می‌دهد که تابع $\frac{x^۳}{۳}$ تابع اولیهٔ $x^۲$ است. ازآن‌جا، براساس دستور **نیوتن ـ لایب‌نیتس**، داریم:

$$\int_۰^a x^۲ dx = \frac{x^۳}{۳}\Big|_۰^a = \frac{a^۳}{۳} - \frac{۰}{۳} = \frac{a^۳}{۳}$$

مثال ۲. c و c' را دو بار الکتریکی به‌فاصلهٔ r، روی خط راستی فرض می‌کنیم. نیروی متقابل F بین آن‌ها در امتداد این خط و برابر است با

$$F = \frac{a}{r^۲}$$

($a = kcc'$، که در آن k مقدار ثابتی است). کار W این نیرو را، زمانی که بار c ثابت و بار c' در فاصلهٔ $[R_۱, R_۲]$ تغییرمکان دهد، می‌توان حساب کرد (با بخش فاصلهٔ $[R_۱, R_۲]$ به پاره‌های Δr_i). نیرو را در هریک از این پاره‌ها ثابت می‌گیریم و بنابراین مقدار کار در این‌گونه پاره‌ها، برابر $\frac{a}{r^۲}\Delta r_i$ خواهد بود. اگر هریک از پاره‌های بخش را، بی‌نهایت کوچک بگیریم، به این نتیجه می‌رسیم که کار W برابر با این انتگرال است:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=۱}^{n} \frac{a}{r_i^۲}\Delta r_i = \int_{R_۱}^{R_۲} \frac{a}{r^۲} dr$$

---

۱. این دستور، به صورت‌های مختلفی تعمیم پیدا کرده است (از جمله در بند ۱۳ همین بخش، دستور استروگرادسکی را ببینید).

این انتگرال را می‌توانیم فوری پیدا کنیم. با توجه به این که

$$\frac{a}{r^{2}} = \left(-\frac{a}{r}\right)'$$

خواهیم داشت:

$$W = -\frac{a}{r}\Big|_{R_1}^{R_2} = a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

به‌ویژه، کاری که نیروی F، ضمن انتقال بار c'، در فاصله‌ای که ابتدای آن R_1 از بار c تا بی‌نهایت انجام می‌شود، برابر است با:

$$W = \lim_{R_2 \to \infty} a\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{a}{R_1}$$

از مفهومی که به‌یاری آن به‌دستور **نیوتن** و **لایب‌نیتس** رسیدیم، دیده می‌شود که این دستور از نظر ریاضی بستگی عمیق و مشخصی را بیان می‌کند که در واقع امر، و به‌طور عینی وجود دارد. دستور **نیوتن** و **لایب‌نیتس**، نمونهٔ عالی و درعین حال مهمی از این مطلب است که ریاضیات قانون‌های عینی را بازتاب می‌دهد.

باید خاطرنشان کرد که **نیوتن** در بررسی‌های ریاضی خود به دیدگاه‌های فیزیکی متکی بود. کوشش‌های او به‌خاطر ایجاد اصل‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال، از کوشش‌هایی که به‌خاطر ایجاد اصل‌های مکانیک می‌کرد جدا نبود.

خود مفهوم‌های آنالیز ریاضی، مانند مشتق و انتگرال، به‌گمان **نیوتن** و هم‌دوره‌های او، به‌طور کامل از متناظرهای فیزیکی و هندسی آن‌ها (سرعت و مساحت)، «جدا نبود». درحقیقت، این مفهوم‌ها دارای چنان ویژگی‌هایی بودند که نیمی ریاضی و نیمی فیزیکی بود. مطلب بر سر این است که تعریف‌هایی که در آن زمان از این مفهوم‌ها قابل قبول بود، از دیدگاه ریاضیات قابل قبول نبود و بنابراین کسی که این مفهوم‌ها را بررسی و روی آن‌ها عمل می‌کرد، در حالت‌های پیچیده، لازم بود در هر گامی که برمی‌دارد از جنبهٔ عملی مسأله جدا نشود.

از این دیدگاه، بین کارهای **نیوتن** و **لایب‌نیتس**، اختلافی وجود دارد[1]. **نیوتن**، در تمام مرحله‌های بررسی‌های خود دیدگاه‌های فیزیکی را راهنمای خود قرار داده بود، درحالی که

۱. کشفهای نیوتن و لایب‌نیتس بدون بستگی با یکدیگر انجام گرفت.

بررسی‌های **لایب‌نیتس**، چنین بستگی مستقیم و نزدیکی با فیزیک نداشت و به‌سبب نبودن تعریف‌های دقیق ریاضی، گاهی در برخی از مرحله‌های بررسیهایش به نتیجه‌گیری‌های اشتباه‌آمیزی رسید. از سوی دیگر از ویژگی‌های اساسی کارهای **لایب‌نیتس** میل به‌سوی تعمیم، به‌سوی یافتن روش‌های کلی‌تر برای حل مسأله‌های آنالیز ریاضی بود.

مهم‌ترین خدمت **لایب‌نیتس**، طرح و پیشنهاد نمادهای ریاضی است که بازتاب‌کنندهٔ نوع عملی است که باید انجام شود. می‌توان نمادهای اساسی آنالیز، یعنی dx برای دیفرانسیل x، d^2x برای دیفرانسیل دوم، $\int$ برای انتگرال و $\frac{d}{dx}$ برای مشتق، را یادآور شد، که همه به‌وسیلهٔ **لایب‌نیتس** پیشنهاد شده است. این واقعیت که تا امروز هم همین نمادها را به‌کار می‌برند، گواه بر این است که تا چه‌اندازه، خوب و به‌جا برگزیده شده است.

این نمادها که خوب و مناسب برگزیده شده است، به سرعت و سهولتِ محاسبه و برهان، کمک فراوان می‌کند. از این بالاتر، این نمادها در بعضی حالت‌ها، حتی جلو دریافت‌های اشتباه‌آمیز ما را هم می‌گیرد. **لایب‌نیتس** که اهمیت نماد را به‌خوبی احساس می‌کرد، در اثر خود، دقت زیادی دربارهٔ گزینش آن‌ها به‌کار برده است.

البته، مفهوم‌های آنالیز ریاضی (مشتق، انتگرال وغیره) پیشرفت می‌کرد و پس از **نیوتن** و **لایب‌نیتس** هم، تا زمان ما هم‌چنان راه پیشرفت خود را می‌پیماید. ولی شایان توجه است که دورهٔ تعیین‌کنندهٔ پیشرفت آنالیز ریاضی را، نخستین سال‌های سدهٔ نوزدهم تشکیل می‌دهد و بیش از همه به کارهای **کوشی** مربوط است.

کوشی به‌طور دقیق و روشن مفهوم حد را تعریف کرد وبراساس آن مفهوم‌های پیوستگی، مشتق، دیفرانسیل و انتگرال را هم تعریف کرد، که ما آن‌ها را به موقع خود در همین بخش خواهیم آورد. از این تعریف‌ها در آنالیز امروزی به‌طور گسترده‌ای استفاده می‌شود.

اهمیت این موفقیت‌ها در این است که روشن می‌شود، نه‌تنها در حساب و جبر و هندسه مقدماتی می‌توان به‌شکل فرمولی عمل‌کرد، بلکه در رشتهٔ تازه وکاملاً گستردهٔ ریاضی، یعنی آنالیز ریاضی هم، می‌توان به همان ترتیب عمل کرد و نتیجه‌های درستی هم به‌دست آورد.

اکنون با توجه به این که بخش اساسی نتیجه‌های آنالیز ریاضی کاربرد عملی پیدا کرده است، می‌توان گفت: اگر داده‌های نخستین از نظر عمل درست است، باید نتیجه‌هایی هم که به‌کمک برهان‌های ریاضی به‌دست می‌آید، درست باشد. اگر ما ایمان داریم که داده‌های نخستین به‌اندازهٔ کافی دقیق است، در این صورت لزومی ندارد که درستی نتیجه‌هایی که از

آن‌ها به‌دست می‌آید دوباره در عمل به‌ثبوت برسد، بلکه تنها کافی است به درستی برهان‌های خود ایمان داشته باشیم.

روشن است، برای آن‌چه گفتیم باید شرط‌های زیر را در نظر داشت: داده‌های نخستینی که از عمل برگزیده شده و مورد استفاده قرار می‌گیرد، از دیدگاه داوری ریاضی، با تقریب معینی دقیق است (یعنی دقت مطلق ندارد) از این‌جا به این نتیجه می‌رسیم که در هر مرحله از برهان ریاضی خود، دربارهٔ این داده‌ها، نتیجه‌ای به‌دست می‌آوریم که به‌نوبهٔ خود دارای اشتباه معینی است و به این ترتیب به‌اندازهٔ دفعه‌هایی که داوری می‌کنیم، اشتباه‌هایی روی هم جمع می‌شود[1].

دوباره به انتگرال معین برگردیم و روی یک مطلب آن‌که اهمیت اساسی دارد، تکیه کنیم: تابع $f(x)$ چگونه باشد تا در فاصلهٔ $[a,b]$ انتگرال معین $\int_a^b f(x)\,dx$ وجود داشته باشد. یعنی در کدام حالت، عددی وجود دارد که مجموع $\sum_1^n f(\xi_i)\,\Delta x_i$ وقتی که $\operatorname{Max}\Delta x_i \to 0$، به سمت آن عدد میل کند؟ یادآور می‌شویم که این عدد باید برای هر نوع تقسیم فاصلهٔ $[a,b]$ و هر نوع گزینش عدد دل‌خواه ξ_i وجود داشته باشد.

برای تابع‌هایی که دارای انتگرال معین هستند، یعنی برای آن‌ها که حد (۲۹) وجود دارد، گویند که در فاصلهٔ $[a,b]$ قابل انتگرال‌گیری هستند. بررسیهایی که در سدهٔ ۱۹ انجام گرفت، نشان داد که کلیهٔ تابع‌های پیوسته، قابل انتگرال‌گیری هستند.

تابع‌های ناپیوسته هم که انتگرال‌پذیر باشند، وجود دارد، از آن جمله می‌توان تابع‌های محدودی را نام برد که در فاصلهٔ $[a,b]$ صعودی یا نزولی‌اند.

تابعی که به‌ازای عددهای گویای فاصلهٔ $[a,b]$ برابر صفر و به‌ازای عددهای گنگ این فاصله، برابر واحد باشد، می‌تواند به‌عنوان تابعی که دارای انتگرال نیست (یعنی غیرقابل انتگرال‌گیری است) نام برده شود، زیرا برای هر تقسیم دل‌خواهی از فاصلهٔ انتگرال، بسته به این که به‌جای ξ_i عدد گویا ویا گنگی برگزینیم، مجموع s_n برابر صفر و یا واحد می‌شود.

ملاحظه می‌شود که اغلب در پاسخ به این پرسش که چگونه می‌توان انتگرال معین را پیدا کرد، می‌توان رابطهٔ **نیوتن ـ لایب‌نیتس** را ارائه داد. ولی در این صورت مسألهٔ پیدا کردن تابع اولیهٔ یک تابع داده‌شده، یعنی پیدا کردن تابعی که مشتق آن معلوم باشد، مطرح می‌شود و ما

---

۱. از جمله از $a=b$ و $b=c$ به‌سادگی نتیجه می‌شود که $a=c$، ولی درعمل اگر $a=b$ با تقریب ε و $b=c$ با تقریب ε باشد، $a=c$ با تقریب 2ε خواهد بود.

هم به همین مسأله می‌پردازیم. همچنین، یادآور می‌شویم که جست‌وجوی تابع اولیه، در سایر رشته‌های ریاضی و به‌ویژه در حل معادله‌های دیفرانسیلی هم اهمیت زیادی دارد.

۱۱. انتگرال‌های نامعین ـ روش انتگرال‌گیری

در ریاضیات معمول است که تابع اولیهٔ یک تابع داده‌شدهٔ دل‌خواه، مانند $f(x)$ را، ***انتگرال نامعین*** $f(x)$ می‌نامند و به‌صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$\int f(x)\,dx$$

به این ترتیب اگر $F(x)$ تابع اولیهٔ نامعینی برای $f(x)$ باشد، در این صورت انتگرال نامعین $f(x)$ برابر است با

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \qquad (۳۱)$$

که در آن C مقدار ثابت دل‌خواهی است.

همچنین یادآور می‌شویم اگر تابع $f(x)$ در فاصلهٔ $[a,b]$ داده شده باشد و $F(x)$ تابع اولیهٔ آن و x نقطه‌ای متعلق به فاصلهٔ $[a,b]$ باشد، براساس رابطهٔ «**نیوتن ـ لایب‌نیتس**» می‌توان نوشت:

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt \qquad (۳۲)$$

بنابراین، انتگرالی که در سمت راست این برابری قرار دارد، تنها به اندازهٔ مقدار ثابت $F(a)$ با تابع $F(x)$ [تابع اولیهٔ $f(x)$] اختلاف دارد. در این حالت یعنی زمانی که این انتگرال به عنوان انتگرالی که حد بالای آن x است درنظر گرفته شود (x متغیر است)، تابع اولیهٔ معینی از $f(x)$ خواهد بود و بنابراین انتگرال نامعین $f(x)$ را به صورت زیر هم می‌توان نوشت.

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C$$

که در آن C مقدار ثابتی است.

دراین‌جا، جدولی ازانتگرال‌های نامعین مهم راکه همان جدول مشتق‌ها می‌باشد، می آوریم:

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+۱}}{a+۱} + C \qquad (a \neq -۱)$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \ * \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int \sec^۲ x\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{۱-x^۲}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_۱ \qquad \left(C_۱ - C = \frac{\pi}{۲}\right)$$

$$\int \frac{dx}{۱+x^۲} = \arctan x + C$$

ویژگی‌های کلی انتگرال‌های نامعین را می‌توان براساس ویژگی‌های مشتق‌های متناظر آن‌ها درک کرد. از جمله از روش دیفرانسیل‌گیری مجموع، این رابطه به‌دست می‌آید:

$$\int [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx + C$$

و از این روش مشتق‌گیری، که اگر تابعی در مقدار ثابت kضرب شده باشد برای مشتق گرفتن می‌توان kرا در مشتق تابع ضرب کرد، نتیجه می‌شود:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + C$$

به این ترتیب:

$$\int \left(۳x^۲ + ۲x - \frac{۳}{\sqrt{x}} + \frac{۴}{x} - ۱\right)dx$$

$$= ۳\,\frac{x^۳}{۳} + ۲\,\frac{x^۲}{۲} - ۳\,\frac{x^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱} + ۴\ln|x| + C$$

راه‌های زیادی برای محاسبهٔ انتگرال نامعین وجود دارد و ما روی بعضی از آن‌ها و به‌ویژه، روی ***روش تبدیل*** یا تغییر متغیر تکیه می‌کنیم که براساس این برابری قرار دارد:

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt + C \qquad (۳۳)$$

$x=\varphi(t)$ تابعی است که بتوان دیفرانسیل آن را محاسبه کرد. برابری (۳۳) باید به این معنا فهمیده شود که اگر در تابع

---

* برای $x>۰$: $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{۱}{x}$ و برای $x<۰$: $(\ln|x|)' = [(\ln(-x))]' = \frac{۱}{-x}(-۱) = \frac{۱}{x}$.

$$F(x)=\int f(x)\,dx$$

که برابر جزء سمت چپ برابری (۳۳) است، به‌جای x، $\varphi(t)$ را قرار دهیم، تابعی مانند $F[\varphi(t)]$ به‌دست آوریم که مشتق آن نسبت به t برابر جملهٔ زیر علامت انتگرال سمت راست برابری (۳۳) باشد و این هم به‌طور مستقیم از قضیهٔ مشتق تابع تابع نتیجه می‌شود.

چند مثال، براساس به‌کار بردن روش تبدیل می‌آوریم:

$$\int e^{kx}\,dx=\int e^{t}\,\frac{۱}{k}dt=\frac{۱}{k}\int e^{t}\,dt=\frac{۱}{k}e^{t}+C=\frac{e^{kx}}{k}+C$$

(تبدیل $t=kx$ و از آن‌جا $dt=k\,dx$).

$$\int\frac{x\,.dx}{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}}=-\int dt=-t+C=-\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}+C$$

(تبدیل $t=\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}$ و از آن‌جا $dt=-\frac{x\,dx}{\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}}$).

$$\int\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\,dx=\int\sqrt{a^{۲}-a^{۲}\sin^{۲}u}\;.\,a\cos u\,du=a^{۲}\int\cos^{۲}u\,du$$

$$=a^{۲}\int\frac{۱+\cos ۲u}{۲}du=\frac{a^{۲}}{۲}\left(u+\frac{\sin ۲u}{۲}\right)+C=\frac{a^{۲}}{۲}(u+\sin u\,\cos u)+C$$

$$=\frac{a^{۲}}{۲}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a^{۲}}\sqrt{a^{۲}-x^{۲}}\right)+C$$

(تبدیل $x=a\sin u$).

همان‌طوری که از نمونه‌های یادشده دیده می‌شود، روش تغییر متغیر به‌طور عمده آن دسته از تابع‌های مقدماتی را بسط می‌دهد که قابل انتگرال‌گیری هستند، یعنی می‌توانیم تابع اولیهٔ آن‌ها را به‌دست آوریم. این تابع‌ها، پس از تغییر متغیر باز هم به‌صورت تابع‌های مقدماتی درخواهند آمد. به‌هرصورت باید در نظر داشت که از دیدگاه محاسبه، سروکار داشتن با انتگرال‌گیری، به‌مراتب دشوارتر از سر و کار داشتن با دیفرانسیل‌گیری است.

در بند ۶ همین بخش روشن شد که مشتق هر تابع مقدماتی، تابع مقدماتی دیگری است که می‌توان آن را با استفاده از روش‌های دیفرانسیل‌گیری به‌طور مشخص به‌دست آورد. اما عکس این مسأله همیشه درست نیست. زیرا تابع‌های مقدماتی وجود دارد که انتگرال نامعین آن‌ها به‌نوبهٔ خود یک تابع مقدماتی نیست. از جمله می‌توان از $e^{-x^{۲}}$ و $\frac{۱}{\ln x}$ و $\frac{\sin x}{x}$ و غیره نام برد که برای به‌دست آوردن انتگرال آن‌ها باید از روش‌های تقریبی استفاده کرد که اغلب

منجر به تابع‌های مقدماتی نمی‌شود. ما روی این مطلب زیاد بحث نمی‌کنیم، ولی همین‌قدر یادآوری می‌کنیم که در ریاضیات مقدماتی می‌توان نمونه‌های فراوانی در این زمینه پیدا کرد که اگر بتوان عملی را دربارهٔ دسته‌ای از عددها انجام داد، انجام عکس آن عمل دربارهٔ همین دسته عددها ممکن نباشد. از جمله مجذور هر عدد مثبت و گویا به‌نوبهٔ خود عددی است گویا، درحالی که جذر هر عدد گویا، همیشه عددی مثبت و گویا نیست. به همین ترتیب، دیفرانسیل تابع‌های مقدماتی، به‌نوبهٔ خود تابع‌هایی مقدماتی هستند، درحالی که انتگرال آن‌ها ممکن است از این دسته تابع‌ها نباشد.

بعضی از انتگرال‌هایی که نمی‌توانند به‌صورت تابع‌های مقدماتی محاسبه شوند، در ریاضیات و جاهایی که به ریاضیات بستگی دارد، اهمیت به‌سزایی دارند. از آن قبیل می‌توان انتگرال زیر را نام برد:

$$\int_{۰}^{x} e^{-t^{۲}}\, dt$$

که در نظریهٔ احتمال نقش بسیار مهمی دارد (بخش یازدهم دیده شود). همچنین به انتگرال‌های زیر اشاره می‌کنیم:

$$\int_{۰}^{\varphi}\frac{d\theta}{\sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}\theta}} \quad \text{و} \quad \int_{۰}^{\varphi}\sqrt{۱-k^{۲}\sin^{۲}\theta}\, d\theta \qquad (k^{۲}<۱)$$

که به ***انتگرال‌های الیپتیک*** نوع اول و دوم موسوم است و بسیاری از مسأله‌های مکانیک و فیزیک، منجر به محاسبهٔ آن‌ها می‌شود (به بخش پنجم، بند ۱، مثال ۳، مراجعه شود). جدول‌هایی تشکیل داده‌اند که مقدارهای این انتگرال‌ها را به‌ازای مقدارهای مختلف آوندهای θ و φ (آوند = آرگومان) با روش تقریبی، ولی با دقت زیاد، به‌دست می‌دهد.

این مطلب را تأکید می‌کنیم که اثبات جداگانهٔ این حقیقت، که این و یا آن تابع مقدماتی، که پس از انتگرال گرفتن، به یک تابع مقدماتی تبدیل نمی‌شود، کار بسیار دشواری است. این مسأله، که حل آن در پیشرفت آنالیز نقش اساسی دارد، اندیشهٔ برجسته‌ترین ریاضی‌دانانی را که در آنالیز کار می‌کردند، در سدهٔ گذشته به خود مشغول داشته بود. در این زمینه **چبیشف**، به نتیجه‌های اساسی رسید. او به‌ویژه دربارهٔ امکان تبدیل انتگرال

$$\int x^{m}\left(a+bx^{s}\right)^{p} dx$$

به تابع‌های مقدماتی بررسی می‌کرد که در آن m و s و p عددهایی گویا هستند. پیش از

چبیشف، و به‌وسیلهٔ **نیوتن**، سه رابطه بین نماهای m و s و p به‌دست آمده بود که در آن صورت این انتگرال قابل محاسبه به‌صورت تابع‌های مقدماتی بود. **چبیشف** ثابت کرد که در بقیهٔ حالت‌های دیگر، این انتگرال به‌وسیلهٔ تابع‌های مقدماتی قابل بیان نیست.

روش دیگری از انتگرال‌گیری، یعنی روش جزء به جزء را یادآور می‌شویم. این روش براساس رابطهٔ زیر که برای خواننده روشن است قرار دارد:

$$(uv)' = uv' + u'v$$

این رابطه را به این ترتیب هم می‌توان نوشت:

$$uv' = (uv)' - u'v$$

اکنون، اگر از دو طرف این رابطهٔ انتگرال بگیریم، با توجه به این که

$$\int (uv)'\, dx = uv + C$$

به این برابری می‌رسیم:

$$\int uv'\, dx = uv - \int u'v\, dx$$

که دستور ***انتگرال‌گیری جزء به جزء*** نام دارد (در این رابطه، مقدار ثابت C را ننوشته‌ایم، زیرا می‌توان آن را جزء یکی از انتگرال‌های نامعین این برابری دانست).

نمونه‌هایی از به‌کار بردن این رابطه را می‌آوریم.

می‌خواهیم $\int xe^x dx$ را محاسبه کنیم، که در آن $u = x$ و $v' = e^x$ می‌گیریم. در این صورت $u' = ۱$ و $v = e^x$ خواهد شد و درنتیجه:

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

در $\int \ln x dx$ به‌روش مشابهی $u = \ln x$ و $v' = ۱$ می‌گیریم، در این صورت $u' = \frac{۱}{x}$ و $v = x$ خواهد شد و

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$$

همچنین، نمونهٔ زیر، چنان نمونه‌ای است که در آن، دومرتبه از انتگرال جزء به جزء استفاده می‌شود و سپس انتگرال اصلی از معادله‌ای که به‌دست می‌آید پیدا می‌شود:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx$$

و از آنجا

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{۲} (\sin x - \cos x) + C$$

با این نمونه، این بند را تمام می‌کنیم. از این بحث، خواننده تنها یک تصور سطحی دربارهٔ انتگرال‌گیری به‌دست آورد. ما دربارهٔ بسیاری از روش‌های این نظریه صحبتی نکردیم. به‌ویژه، در بحث بسیار جالب انتگرال‌گیری کسرهای گنگ وارد نشدیم، بحثی که دانشمند ریاضی و مکانیک سدهٔ ۱۹، *م. و. اوستروگرادسکی* سپردهٔ زیادی دربارهٔ آن، از خود به‌جا گذاشته است.

۱۲. تابع‌های با چند متغیر

تا این‌جا، دربارهٔ تابع‌هایی گفت‌وگو کردیم که دارای یک متغیرند، درحالی که درعمل اغلب به تابع‌هایی برمی‌خوریم که به دو، سه یا به‌طور کلی چند متغیر بستگی دارند. از جمله مساحت مستطیل تابعی است از قاعدهٔ آن x و بلندی آن y

$$S = x \cdot y$$

حجم مکعب‌مستطیل تابعی است از سه بعد آن

$$V = x \cdot y \cdot z$$

فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B تابعی است از مختصات این نقطه‌ها (۶ متغیر):

$$r = \sqrt{(x_۱ - x_۲)^۲ + (y_۱ - y_۲)^۲ + (z_۱ - z_۲)^۲}$$

و دستور مشهور

$$P \cdot V = R \cdot T$$

بستگی بین V، حجم گاز در فشار P، و درجهٔ حرارت مطلق T را بیان می‌کند.

تابع‌های با چند متغیر هم مانند تابع‌های با یک متغیر، اغلب برای مقدارهای معینی از متغیرها داده می‌شود، نه هر مقدار دل‌خواه. از جمله تابع

$$u = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2) \qquad (۳۴)$$

تنها برای مقدارهایی از x و y و z که در شرط

$$x^2 + y^2 + z^2 < 1 \qquad (۳۵)$$

صدق کند، داده شده است (به‌ازای سایر مقدارهای x ، y و z، عددهای حقیقی به‌دست نمی‌آید). مجموعهٔ نقطه‌هایی از فضا که مختصات آن‌ها در نابرابری (۳۵) صدق می‌کند، در داخل کره‌ای قرار دارد که مرکز آن منطبق بر مبدأ مختصات، و شعاع آن برابر واحد است. نقطه‌های واقع بر سطح کره را نمی‌توان به این نقطه‌ها (یعنی نقطه‌های واقع در داخل کره) اضافه کرد و مانند این است که سطح کره را از آن جدا کرده باشند: چنین کره‌ای را کرهٔ باز گویند. تابع (۳۴) تنها برای عددهایی از (x,y,z) معین است که مختصات نقطه‌هایی از این کره باز باشند. به‌طور خلاصه معمول است که می‌گویند: تابع (۳۴) برای نقطه‌های داخل کرهٔ باز معین است.

نمونهٔ دیگری می‌آوریم: درجهٔ حرارت حجم V، که به‌طور غیریکنواخت گرم شده است، تابعی از x، y و z، یعنی مختصات نقطه‌های این جسم می‌باشد. این تابع هم برای تمام عددهای سه‌گانه x، y و z معین است، به‌شرطی که بتواند مختصات یکی از نقطه‌های جسم داده‌شدهٔ V باشد.

سرانجام، به‌عنوان نمونهٔ سوم تابع

$$u = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)$$

را بررسی می‌کنیم که در آن φ تابعی است با یک متغیر که در فاصلهٔ $[0 , 1]$ معین است. روشن است که تابع u برای آن دسته از عددهای (x,y,z) مفروض خواهد بود که بتواند مختصات نقطه‌های واقع در داخل این مکعب باشند:

$$0 \leq x \leq 1 \quad و \quad 0 \leq y \leq 1 \quad و \quad 0 \leq z \leq 1$$

تابع با سه متغیر را تعریف کنیم: فرض کنیم مجموعهٔ E از عددهای سه‌گانه (x,y,z) تشکیل شده باشد (نقطه‌هایی از فضا)، به‌شرطی که هر دسته از عددهای E (هر نقطهٔ مجموعهٔ E)، طبق قانون معینی به عدد مشخص u مربوط باشد. گویند u تابعی است از x و y و z (نقطه‌ها) که در مجموعهٔ E تعریف شده است و به این صورت نمایش داده می‌شود:

$$u = F(x,y,z)$$

به‌جای F می‌توان از حرف‌های دیگر مانند f و φ و ψ هم استفاده کرد.

درعمل، به‌عنوان مجموعهٔ E، نقطه‌هایی را مجسم می‌کنند که یک جسم هندسی (یا یک میدان) را پر کند: کره، مکعب، حلقه وغیره و آن وقت به‌طور خلاصه می‌گویند که تابع در این جسم (یا در این میدان) معین است. به همین ترتیب، تابع‌های با دو متغیر، چهار متغیر وغیره را تعریف می‌کنند.

تابع‌های ضمنی. یادآوری می‌کنیم که تابع با دو متغیر، وقتی مقدار آن معلوم باشد، نمونهٔ خوبی برای به‌دست آوردن تابع با یک متغیر است. تابع با دو متغیر $F(x,y)$ را در نظر می‌گیریم و معادلهٔ

$$F(x,y) = 0 \qquad (۳۶)$$

را تشکیل می‌دهیم. این معادله، به‌طور کلی مجموعه‌ای از نقطه‌های صفحه را معین می‌کند که به‌ازای (x,y) آن نقطه‌ها، تابع برابر صفر باشد. در اغلب حالت‌ها، این مجموعهٔ نقطه‌ها تشکیل منحنی‌هایی را می‌دهد که می‌توان آن‌ها را منحنی نمایش تغییر یک ویا چند تابع یک‌ارزشی با یک متغیر، به‌شکل $y=\varphi(x)$ و یا $x=\psi(y)$ دانست. در این حالت گویند که این تابع‌ها به‌کمک معادلهٔ (۳۶) به‌طور ضمنی معین شده است. از جمله معادلهٔ

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

به‌طور ضمنی، دو تابع با یک متغیر را معین می‌کند

$$y = +\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{و} \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2}$$

ولی باید در نظر داشت که ممکن است معادلهٔ به‌صورت (۳۶) معرف هیچ تابعی نباشد. برای نمونه، روشن است که معادلهٔ

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

هیچ تابع حقیقی را به‌دست نمی‌دهد، زیرا نمی‌توان دو عدد حقیقی پیدا کرد که در این معادله صدق کند.

نمایش هندسی. تابع‌های با دو متغیر را می‌توان به‌صورت یک سطح (یعنی به‌صورتی که محسوس و قابل درک باشد) در دستگاه مختصات فضایی نمایش داد، به این ترتیب که تابع

$$z = f(x,y) \tag{۳۷}$$

در دستگاه مختصات قائم سه‌بعدی، به‌صورت یک سطح نمایش داده می‌شود. این سطح عبارت است از مکان هندسی نقطهٔ M که مختصات (x,y,z) آن در معادلهٔ (۳۷) صدق کند (شکل ۲۶).

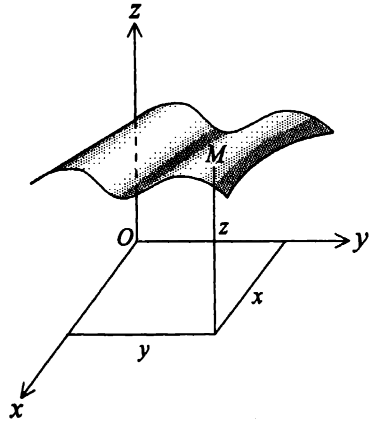
وسیلهٔ بسیار راحت دیگری هم برای نمایش تابع (۳۷) وجود دارد که در عمل کاربرد فراوان پیدا کرده است. یک‌رشته عددهای z_1 و z_2 و... انتخاب می‌کنیم و روی صفحهٔ Oxy منحنی‌های

$$z_1 = f(x,y) \quad , \quad z_2 = f(x,y) \quad , \quad ...$$

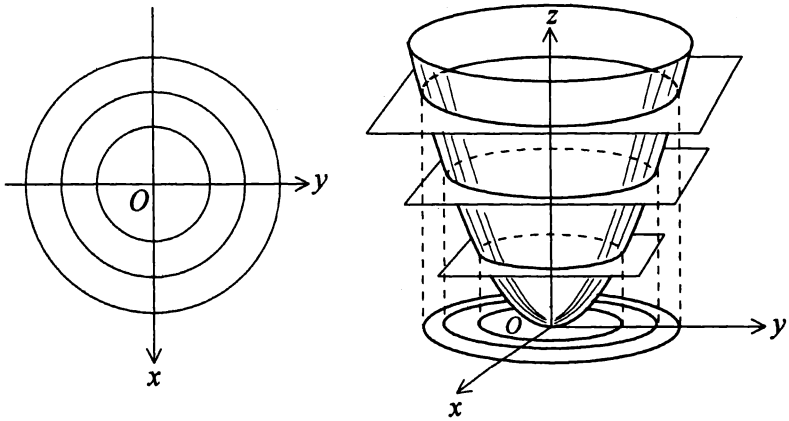
را رسم می‌کنیم، که منحنی‌های مسطح تابع $f(x,y)$ نامیده می‌شود. اگر این منحنی‌های مسطح به‌وسیلهٔ مقدارهای مختلف z، که به‌اندازهٔ کافی به‌هم نزدیک‌اند رسم شوند، می‌تواند وسیلهٔ خوبی برای داوری دربارهٔ تغییر تابع $f(x,y)$ باشد. در نقشه‌کشی هم برای داوری دربارهٔ تغییر نقطه‌های برجسته از همین وسیله استفاده می‌کنند.

در شکل ۲۷، منحنی‌های مسطح تابع $z=x^2+y^2$ نمایش داده شده است. در شکل ۵۰ از بخش سوم، نمونهٔ مشابهی دربارهٔ منحنی‌های مسطح تابع $z=x \cdot y$ نشان داده شده است.

مشتق جزئی و دیفرانسیل. چند ملاحظه دربارهٔ دیفرانسیل‌گیری تابع‌های با چند متغیر یادآور می‌شویم. به‌عنوان نمونه، تابع با دو متغیر



شکل ۲۶



شکل ۲۷

$$z = f(x,y)$$

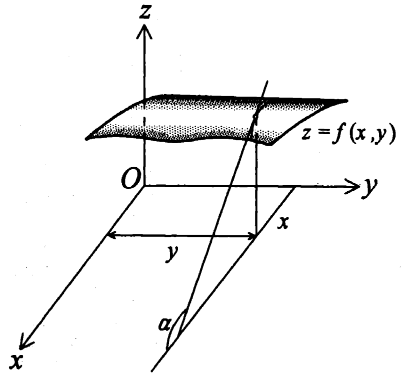
را برمی‌گزینیم. اگر y را ثابت بگیریم، یعنی فرض کنیم که y تغییر نمی‌کند، تابع با دو متغیر به تابعی از یک متغیر x تبدیل می‌شود. در این صورت مشتق آن (اگر وجود داشته باشد)، **مشتق جزئی** نسبت به x نامیده می‌شود و به یکی از صورت‌های زیر نشان داده می‌شود:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \quad \text{یا} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{یا} \quad f'_x(x,y)$$

نشانه‌گذاری آخر، یعنی $f'_x(x,y)$، نشان می‌دهد که مشتق جزئی نسبت به x در حالت کلی تابعی از x و y است. به‌روش مشابهی می‌توان مشتق جزئی نسبت به y را هم تعریف کرد.

از نظر هندسی، تابع ما در دستگاه مختصات قائم فضایی به‌وسیلهٔ یک سطح نمایش داده می‌شود. وقتی که در این تابع، y را مقدار ثابتی فرض کنیم، تابعی از x به‌دست می‌آید که به‌وسیلهٔ یک منحنی مسطح نمایش داده می‌شود (شکل ۲۸) که از برخورد سطح با صفحه‌ای موازی Oxz و به‌فاصلهٔ y از آن، به‌دست می‌آید. روشن است که مشتق جزئی $\frac{\partial z}{\partial x}$ برابر است با تانژانت زاویه‌ای که مماس بر این منحنی در نقطهٔ (x,y) با جهت مثبت محور xها می‌سازد. به‌طور کلی، اگر تابع $z=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ از متغیرهای x_1 و x_2 و ... و x_n داده شده باشد، مشتق جزئی $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ عبارت است از مشتق این تابع نسبت به x_i، زمانی که سایر متغیرهای

$$x_1 , x_2 , \ldots , x_{i-1} , x_{i+1} , \ldots , x_n$$



شکل ۲۸

ثابت فرض شود.

می‌توان گفت که مشتق جزئی تابع نسبت به متغیر x_i عبارت است از سرعت تغییر این تابع در جهت متغیر x_i. همچنین می‌توان مشتق را در جهت داده‌شدهٔ دل‌خواهی که قابل انطباق با هیچ‌یک از محورهای مختصات نباشد، به‌دست آورد. ولی ما در این باره بحث نمی‌کنیم.

چند مثال.

$$1)\ z = \frac{x}{y};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$$

$$2)\ u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

گاهی لازم می‌شود، از مشتق جزئی هم به‌نوبهٔ خود مشتق‌های جزئی گرفته شود. در این حالت گویند که مشتق جزئی از مرتبهٔ دوم به‌دست آمده است. برای تابع‌های با دو متغیر چهار مشتق جزئی از مرتبهٔ دوم وجود دارد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ولی می‌توان ثابت کرد که برای تابع‌های پیوسته $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ و $\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$ (که مشتق‌های مختلط نامیده می‌شود) باهم برابرند:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$$

از جمله در مثال ۱ که در بالا آوردیم، داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{1}{y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = -\frac{1}{y^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}$$

و همان‌طور که دیده می‌شود، مشتق‌های مختلط آن‌ها با هم برابر شده است.

شبیه آن‌چه دربارهٔ تابع‌های با یک متغیر گفتیم، می‌توان مفهوم دیفرانسیل را برای تابع‌های با چند متغیر هم بیان کرد.

برای روشن شدن مطلب تابع با دو متغیر

$$z = f(x,y)$$

را در نظر می‌گیریم. اگر این تابع دارای مشتق‌های جزئی پیوسته باشد، می‌توان ثابت کرد که نمو آن یعنی

$$\Delta z = f\,(x+\Delta x\,,\,y+\Delta y) - f\,(x,y)$$

را که متناظر با نمو Δx و Δy است، می‌توان به‌صورت

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y + \alpha\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

نوشت، که در آن $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$ مشتق‌های جزئی تابع در نقطهٔ (x,y) می‌باشد و α مقداری است که به Δx و Δy بستگی دارد. همچنین اگر $\Delta x \to 0$ و $\Delta y \to 0$، مقدار α هم به‌سمت صفر میل می‌کند.

مجموع دو جملهٔ نخست این برابری یعنی

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y$$

که به‌طور خطی[1] به Δx و Δy مربوط‌اند، ***دیفرانسیل تابع*** نامیده می‌شود. جملهٔ آخر که با

---

۱. به‌طور کلی تابع $Ax + By + C$، که در آن A و B و C مقدارهای ثابتی هستند، تابعی خطی از x و y نامیده می‌شود. اگر $C = 0$ باشد، آن را تابع خطی همگن نامند. در این‌جا واژهٔ «همگن» را حذف کرده‌ایم.

وجود ضرب دو عامل α، همراه با Δx و Δy به‌سمت صفر میل می‌کند، نسبت به مقدار

$$\rho = \sqrt{\Delta x^{۲} + \Delta y^{۲}}$$

بی‌نهایت کوچکی از مرتبهٔ بالاتر است.

نمونه‌ای از کاربرد دیفرانسیل را می‌آوریم. دورهٔ نوسان پاندول از روی رابطهٔ

$$T = ۲\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

محاسبه می‌شود، که در آن l طول پاندول و g شتاب نیروی ثقل است. فرض کنیم که l و g با خطاهایی به‌اندازهٔ Δl و Δg برای ما معلوم باشد. در آن صورت خطایی که در محاسبهٔ T دست می‌دهد، برابر با نمو ΔT خواهد بود که متناظر با نمو آرگومان‌های Δl و Δg می‌باشد. با تبدیل تقریبی ΔT به dT خواهیم داشت:

$$\Delta T \approx dT = \pi\left(\frac{\Delta l}{\sqrt{lg}} - \frac{\sqrt{l}\,\Delta g}{\sqrt{g^{۳}}}\right)$$

خطاهای Δl و Δg برای ما معلوم نیست، ولی می‌توان ΔT را با کمک این نابرابری ارزیابی کرد:

$$|\Delta T| \leq \pi\left(\frac{|\Delta l|}{\sqrt{lg}} + \sqrt{\frac{l}{g^{۳}}}\ |\Delta g|\right)$$

که از آن، پس از بخش دو طرف بر T، به‌دست می‌آید:

$$\frac{|\Delta T|}{T} \leq \left(\frac{|\Delta l|}{l} + \frac{|\Delta g|}{g}\right)$$

و از این‌جا درعمل می‌توان خطای نسبی را برای T، برابر مجموع خطاهای نسبی برای l و g دانست.

برای این که در نشانه‌گذاری رعایت تقارن بشود، نموهای مستقل Δx و Δy را هم با نشانه‌های dx و dy نشان می‌دهیم و آن‌ها را هم دیفرانسیل‌های x و y می‌نامیم. به این ترتیب دیفرانسیل تابع $u = f(x, y, z)$ به این صورت نشان داده می‌شود:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

مشتق جزئی همیشه در تابع‌های با چند متغیر، نقشی اساسی دارد (و این در حالت‌های بسیار زیادی است که آنالیز در مسأله‌های مربوط به صنعت و فیزیک کاربرد پیدا می‌کند). در بخش ششم، باز هم دربارهٔ ویژگی‌های مشتق‌های جزئی گفت‌وگو خواهیم کرد.

در زیر نمونه‌های ساده‌ای از کاربرد مشتق‌های جزئی را در آنالیز می‌آوریم.

دیفرانسیل تابع‌های ضمنی. فرض می‌کنیم بخواهیم مشتق تابع y را نسبت به x، در حالتی که تابع به‌صورت ضمنی

$$F(x\,,y) = 0 \qquad (۳۸)$$

داده شده است، پیدا کنیم. اگر x و y در رابطهٔ (۳۸) صدق کند و ما به x نموی مانند Δx بدهیم، برای y نموی مانند Δy به‌دست می‌آید، طوری که $x+\Delta x$ و $y+\Delta y$ هم در رابطهٔ (۳۸) صدق خواهد کرد. درنتیجه[1]

$$F(x+\Delta x\,,y+\Delta y) - F(x\,,y) = \frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \alpha\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0$$

از این‌جا، اگر تنها فرض کنیم $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$، آن‌وقت خواهیم داشت:

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{حد}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

و به این ترتیب، توانستیم وسیله‌ای برای محاسبهٔ مشتق تابع‌های ضمنی پیدا کنیم، بدون این که معادلهٔ (۳۸) را نسبت به y حل کرده باشیم.

مسأله‌های مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم. اگر تابع با دو متغیر $z=f(x,y)$ در نقطهٔ $(x_0\,,y_0)$ ماکزیمم باشد، یعنی اگر نابرابری $f(x_0\,,y_0) \geq f(x,y)$ برای تمام نقطه‌های (x,y) که به $(x_0\,,y_0)$ نزدیک‌اند، درست باشد، در این صورت همین نقطه باید نقطهٔ حداکثر صعود، برای منحنی باشد که از برخورد سطح $z=f(x,y)$ با صفحهٔ موازی با Oxz یا Oyz به‌دست آمده است.

---

۱. فرض می‌کنیم که $F(x,y)$ دارای مشتق‌های پیوسته‌ای از x و y باشد.

بنابراین در چنین نقطه‌ای باید شرط‌های

$$f'_x(x\,,y)=\text{۰} \quad \text{و} \quad f'_y(x\,,y)=\text{۰} \tag{۳۹}$$

برقرار باشد. همچنین برای نقطهٔ می‌نیمم نسبی هم باید همین دو شرط برقرار باشد. بنابراین، مقدارهای حداکثر و حداقل تابع را باید بین نقطه‌هایی که با دو شرط (۳۹) به‌دست می‌آیند، جست‌وجو کرد. (به‌جز آن، نقطه‌های مرزی یعنی نقطه‌هایی که تابع در میدان آن‌ها داده شده است، همچنین نقطه‌هایی را که در آن‌جا برای تابع مشتق وجود ندارد [اگر چنین نقطه‌هایی وجود داشته باشد] نباید فراموش کرد).

برای این‌که دانسته شود، آیا نقطه‌های به‌دست‌آمدهٔ (x,y) که با شرط‌های (۳۹) می‌سازند، ماکزیمم هستند یا می‌نیمم، اغلب از راه‌های غیرمستقیم مختلفی استفاده می‌کنند. از جمله، اگر به‌دلیلی روشن باشد که تابع قابل دیفرانسیل‌گیری است و در داخل ناحیهٔ مورد بحث، دارای می‌نیمم است روشن است که این می‌نیمم را باید بین نقطه‌هایی جست‌وجو کرد که با شرط‌های (۳۹) سازگاری دارند.

فرض کنید بخواهیم از یک قطعه آهن سفید، جعبهٔ مکعب‌مستطیل‌شکل بدون سرپوشی به‌حجم داده‌شدهٔ V بسازیم، به‌شرطی که مصرف آهن سفید حداقل ممکن باشد. اگر ضلع‌های قاعدهٔ این جعبه را x و y فرض کنیم، بلندی h آن برابر $\frac{V}{xy}$ خواهد شد و بنابراین مساحت S جعبه تابعی از x و y خواهد بود:

$$S=xy+\frac{V}{xy}(\text{۲}x+\text{۲}y)=xy+\text{۲}V\left(\frac{\text{۱}}{x}+\frac{\text{۱}}{y}\right) \tag{۴۰}$$

از آن‌جا که بنا بر ماهیت مسأله، x و y باید مثبت باشد، پرسش به این‌جا می‌رسد که می‌نیمم $S(x,y)$ را از بین همهٔ نقطه‌های (x,y) که می‌توانند در ربع نخست صفحهٔ مختصات قرار داد جست‌وجو کنیم. ما این بخش تابع را G می‌نامیم.

اگر نقطه‌ای از میدان G به می‌نیمم برسد، باید مشتق‌های جزیی در این نقطه برابر صفر شود:

$$\frac{\partial S}{\partial x}=y-\frac{\text{۲}V}{x^{\text{۲}}}=\text{۰}\quad,$$

$$\frac{\partial S}{\partial y}=x-\frac{\text{۲}V}{y^{\text{۲}}}=\text{۰}\quad,$$

یعنی

$$yx^2 = 2V \quad \text{و} \quad xy^2 = 2V$$

و از این‌جا بعدهای جعبه به‌دست می‌آید:

$$x = y = \sqrt[3]{2V} \quad \text{و} \quad h = \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \qquad (41)$$

ما مسأله را حل کردیم، ولی این، یک حل کامل و مستدل نبود ریاضی‌دان دقیق به ما می‌گوید: «شما از نخست فرض کردید که با شرط‌های موجود جعبه، یک مساحت می‌نیمم وجود دارد و با قبول این فرض، اندازه‌های جعبه را پیدا کردید. شما چنین استدلال کردید که: اگر در G نقطه‌ای وجود داشته باشد که به‌ازای مختصات (x,y) آن، مقدار S می‌نیمم شود، باید این مختصات از برابری (۴۱) به‌دست آید. نخست ثابت کنید که می‌نیمم S در G وجود دارد، آن‌گاه درستی نتیجه به‌دست‌آمده را خواهیم پذیرفت». این مطلب را می‌توان از این‌جا هم نتیجه گرفت که تابع S در ناحیهٔ G دارای ماکزیمم نیست (نبودن وجود ماکزیمم به‌سادگی به‌دست می‌آید). علاوه بر آن ما ثابت خواهیم کرد که چگونه می‌توان پذیرفت که در حالت داده‌شده، تابع به‌واقع، به نقطه‌ای در ناحیهٔ G می‌رسد که می‌نیمم آن است.

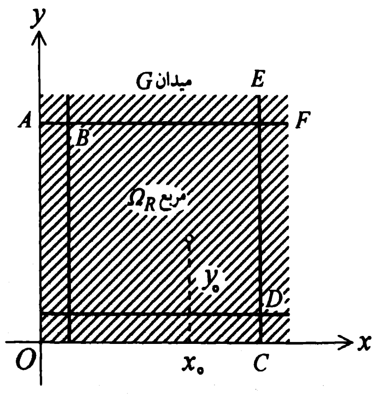
حکم اساسی که ما در این‌جا به آن تکیه خواهیم کرد و در آنالیز با دقت ثابت می‌شود، چنین است: اگر تابع f، که تابعی از یک یا چند متغیر است، در میدان محدود H (که شامل مرزهای خود هم هست) پیوسته باشد، دست‌کم یک نقطه در H وجود دارد که در آن‌جا تابع می‌نیمم (ماکزیمم) است. به‌یاری این حکم خواهیم توانست بدون دشواری، مثال خود را تا به آخر دنبال کنیم.

نقطهٔ (x_0, y_0) را در میدان G در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که $S(x_0, y_0)$ برابر N باشد. همچنین عددی مانند R چنان برمی‌گزینیم که با دو نابرابری $R > N$ و $2VR > N$ بسازد و مربع Ω_R را به‌ضلع R^2، شبیه شکل ۲۹، می‌سازیم، به‌نحوی که در آن $\frac{1}{R} = |CD| = |AB|$ باشد.

تابع $S(x,y)$ را در نقطه‌های مربوط به میدان G و خارج مربع Ω_R ارزیابی می‌کنیم. اگر نقطهٔ مربوط به میدان G دارای طول $x < \frac{1}{R}$ باشد، خواهیم داشت:

$$S(x\ ,\ y) = xy + 2V\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) > 2V\frac{1}{x} > 2VR > N$$

به همین ترتیب، اگر نقطهٔ ما دارای عرض $y < \frac{1}{R}$ باشد، باز هم $S > N$ خواهد شد. سپس، اگر



شکل ۲۹

نقطه‌ای از میدان G به‌طول $x > \frac{1}{R}$ و بالای خط AF یا به‌عرض $y > \frac{1}{R}$ و در سمت راست CE باشد، خواهیم داشت:

$$S(x, y) > xy > \frac{1}{R} \cdot R^2 = R > N$$

بنابراین، برای همهٔ نقطه‌های (x,y) میدان G که در خارج مربع Ω_R واقع باشد، نابرابری $S(x,y) > N$ درست است، و از آن‌جا که $S(x_0, y_0) = N$ فرض شده است، نقطهٔ (x_0, y_0) در خارج مربع نیست و بنابراین می‌نیمم تابع در میدان G بر می‌نیمم روی مربع منطبق است.

ولی تابع $S(x,y)$ در داخل و همچنین در مرزهای این مربع پیوسته است، بنابراین براساس قضیه‌ای که در بالا آوردیم، در مربع داده‌شده نقطه‌ای مانند (x,y) وجود دارد که تابع ما در آن نقطه، نسبت به نقطه‌های مربوط به مربع، و بنابراین نسبت به نقطه‌های مربوط به میدان G، می‌نیمم خواهد بود. به این ترتیب وجود می‌نیمم ثابت شد.

برهانی که در بالا آوردیم، می‌تواند نمونهٔ برهانی باشد که برای جست‌وجوی ماکزیمم یا می‌نیمم تابع‌ها در میدان نامحدود به‌کار می‌رود.

دستور تیلور. تابع‌های با چند متغیر را هم مانند تابع‌های با یک متغیر می‌توان به‌وسیلهٔ دستور تیلور بیان کرد. از جمله تجزیهٔ تابع

$$u = f(x,y)$$

در اطراف نقطهٔ (x_0, y_0)، به‌شرطی که محدود به توان‌های اول و دوم $(x - x_0)$ و $(y - y_0)$

باشد، به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$f(x,y)=f(x_\circ,y_\circ)+[f'_x(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)+$$

$$+f'_y(x_\circ,y_\circ)(y-y_\circ)]+\frac{1}{2!}[f''_{xx}(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)^2+$$

$$2f''_{xy}(x_\circ,y_\circ)(x-x_\circ)(y-y_\circ)+f''_{yy}(x_\circ,y_\circ)(y-y_\circ)^2]+R_3$$

درضمن، اگر تابع $f(x,y)$ دارای مشتق‌های جزئی درجهٔ دوم پیوسته باشد، زمانی که $r\to 0$، جملهٔ باقی‌مانده سریع‌تر از

$$r^2=(x-x_\circ)^2+(y-y_\circ)^2$$

یعنی سریع‌تر از مجذور فاصلهٔ بین نقطه‌های (x,y) و $(x_\circ,y_\circ)$ به‌سمت صفر میل می‌کند. دستور تیلور، وسیله‌ای کلی برای محاسبهٔ تقریبی مقدار تابع‌های مختلف به‌دست می‌دهد.

یادآور می‌شویم که به‌یاری این دستور می‌توان به پرسشی که در بالا طرح کردیم پاسخ داد. پرسش چنین بود: آیا در نقطه‌ای که برای آن $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$ است، برای تابع، ماکزیمم وجود دارد یا می‌نیمم؟ درواقع، اگر این شرط‌ها برای نقطه‌ای مانند $(x_\circ,y_\circ)$ برقرار باشد، برای نقطهٔ (x,y) که نزدیک $(x_\circ,y_\circ)$ است، تفاوت مقدار تابع با $f(x_\circ,y_\circ)$ طبق دستور تیلور برابر است با

$$f(x,y)-f(x_\circ,y_\circ)=\frac{1}{2!}[A(x-x_\circ)^2+2B(x-x_\circ)(y-y_\circ)+C(y-y_\circ)^2]+R_3 \tag{۴۲}$$

که در آن A و B و C به‌ترتیب برابر با مشتق‌های جزئی درجهٔ دوم f''_{xx} و f''_{xy} و f''_{yy}، در نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ)$ است.

اگر تابع

$$\Phi(x,y)=A(x-x_\circ)^2+2B(x-x_\circ)(y-y_\circ)+C(y-y_\circ)^2$$

برای همهٔ مقدارهای $(x-x_\circ)$ و $(y-y_\circ)$، به‌شرطی که با هم برابر صفر نباشند مثبت باشد، سمت راست برابری (۴۲) هم برای مقدارهای کوچک $(x-x_\circ)$ و $(y-y_\circ)$ مثبت می‌شود، زیرا روشن است که برای مقدارهای کوچک $(x-x_\circ)$ و $(y-y_\circ)$، مقدار R_3 از لحاظ قدرمطلق، از $\frac{1}{2}\Phi(x,y)$ کوچکتر است. از این‌جا نتیجه می‌شود که در نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ)$ تابع f به می‌نیمم

می‌رسد. برعکس، اگر تابع $\Phi(x,y)$ برای هر مقدار $(x-x_{\circ})$ و $(y-y_{\circ})$ منفی باشد، معلوم می‌شود که تمام بخش سمت راست برابری (۴۲) برای مقدارهای کوچک $(x-x_{\circ})$ و $(y-y_{\circ})$ منفی است و در نقطهٔ $(x_{\circ}, y_{\circ})$ به ماکزیمم می‌رسد.

در حالت‌های پیچیده‌تر، باید جمله‌های بعدی مربوط به دستور تیلور را مورد بررسی قرار داد.

مسأله‌های مربوط به ماکزیمم و می‌نیمم برای تابع‌های با سه متغیر یا بیشتر، با روش تحلیلی حل و بررسی می‌شود. خواننده می‌تواند به‌عنوان تمرین ثابت کند که اگر نقطه‌های داده‌شده

$$P_{۱}(x_{۱},y_{۱},z_{۱}) \;,\; P_{۲}(x_{۲},y_{۲},z_{۲}) \,,\, \dots \,,\; P_n(x_n,y_n,z_n)$$

با جرم‌های

$$m_{۱}\,,\, m_{۲}\,,\,\dots\,,\, m_n$$

در فضا مستقر شده باشند، وضع M این دستگاه نسبت به نقطهٔ (x,y,z)، که برابر با حاصل‌ضرب جرم در مربع فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ P است:

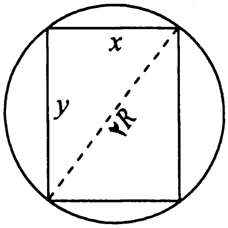
$$M(x,y,z) = \sum_{i=۱}^{n} m_i \,[\,(x-x_i)^{۲} + (y-y_i)^{۲} + (z-z_i)^{۲}\,]$$

زمانی می‌نیمم می‌شود که نقطهٔ P به‌اصطلاح در مرکزثقل دستگاه قرار گیرد مختصات مرکزثقل دستگاه چنین است:

$$x = \frac{\sum_{i=۱}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=۱}^{n} m_i} \;,\quad y = \frac{\sum_{i=۱}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=۱}^{n} m_i} \;,\quad z = \frac{\sum_{i=۱}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=۱}^{n} m_i}$$

ماکزیمم و می‌نیمم نسبی. برای تابع‌های با چند متغیر می‌توان مسأله‌های گوناگونی دربارهٔ ماکزیمم و می‌نیمم طرح کرد. این مطلب را با مثال ساده‌ای روشن می‌کنیم. فرض کنیم که می‌خواهیم بین مستطیل‌هایی که می‌توان در دایره‌ای به شعاع R محاط کرد، مستطیلی پیدا کنیم که مساحت آن حداکثر باشد.

مساحت مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب xy ضلع‌های آن. درضمن x و y مقدارهایی مثبت‌اند و در هر حالت مشخص، رابطهٔ $x^{۲}+y^{۲}=(۲R)^{۲}$ بین آن‌ها برقرار است (شکل ۳۰).



شکل ۳۰

بنابراین باید ماکزیمم تابع $f(x,y)=x\cdot y$ را بین مقدارهایی از x و y که در رابطهٔ $x^۲+y^۲=۴R^۲$ صدق می‌کنند، پیدا کرد.

درعمل به این‌قبیل مسأله‌ها اغلب برخورد می‌کنیم، مسأله‌هایی که در آن‌ها باید ماکزیمم (یا می‌نیمم) تابعی مانند $f(x,y)$ را بین مقدارهایی از x و y که در رابطه‌ای مانند $\varphi(x,y)=۰$ صدق می‌کنند، پیدا کرد.

روشن است، می‌توان معادلهٔ $\varphi(x,y)=۰$ را نسبت به y حل کرد و سپس مقدار به‌دست‌آمده را در $f(x,y)$ قرار داد و ماکزیمم معمولی تابع را با یک متغیر y به‌دست آورد. ولی این روش اغلب پیچیده‌تر و گاهی هم غیرعملی است.

برای حل این قبیل مسأله‌ها در آنالیز، وسیلهٔ ساده‌تری وجود دارد که به روش ضریب‌های **لاگرانژ** مشهور است. فکر اصلی این روش خیلی ساده است. تابع

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$$

را که در آن λ عدد ثابت دل‌خواهی است، در نظر می‌گیریم. روشن است به‌ازای مقدارهایی از x و y که در رابطهٔ $\varphi(x,y)=۰$ صدق کند، مقدار $F(x,y)$ برابر با $f(x,y)$ خواهد بود.

ماکزیمم تابع $F(x,y)$ را، بدون این‌که برای x و y حدی قایل شویم، پیدا می‌کنیم. در نقطهٔ ماکزیمم باید شرط‌های $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial y}=۰$ را رعایت کنیم[1]. این شرط‌ها را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}=۰ \qquad (۴۳)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}=۰ \qquad (۴۴)$$

۱. البته گفت‌وگو بر سر ماکزیممی است که داخل میدان تابع داده‌شدهٔ $F(x,y)$ به آن می‌رسیم. تابع‌های $f(x,y)$ و $\varphi(x,y)$ قابل دیفرانسیل‌گیری فرض شده‌اند.

مقدارهای x و y در نقطهٔ ماکزیمم $F(x,y)$، از حل دستگاه معادله‌های (۴۳) و (۴۴) به‌دست می‌آید که البته به ضریب λ، که در این معادله‌ها وارد است، بستگی پیدا می‌کند. اکنون فرض می‌کنیم بتوانیم عدد λ را چنان برگزینیم که مختصات نقطهٔ ماکزیمم با شرط

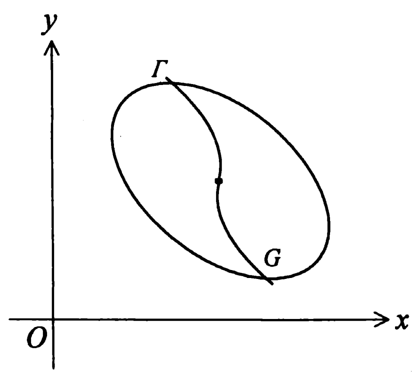
$$\varphi(x,y) = 0 \qquad (۴۵)$$

بسازد. در این صورت، این نقطه، ماکزیمم نسبی در مسأله داده‌شده است.

درواقع، این مطلب را می‌توان به‌روش هندسی، به این ترتیب روشن کرد. تابع $f(x,y)$ در میدانی مانند G داده شده است (شکل ۳۱). شرط $\varphi(x,y) = 0$ را اغلب می‌توان به‌صورت یک منحنی مانند Γ درآورد. باید حداکثر مقدار $f(x,y)$ را بین نقطه‌های منحنی Γ پیدا کرد. اگر در نقطه‌ای روی Γ ماکزیمم $F(x,y)$ وجود داشته باشد، در این صورت مقدار $F(x,y)$ به‌ازای نقطه‌هایی از منحنی Γ که در نزدیکی این نقطه (یعنی نقطهٔ ماکزیمم) واقع شده است، نسبت به این نقطه ترقی نمی‌کند. از سوی دیگر، در طول Γ مقدار $F(x,y)$ با $f(x,y)$ برابر است. بنابراین، با حرکت کوچکی روی منحنی، $f(x,y)$ ترقی نمی‌کند و درنتیجه در این نقطه ماکزیمم نسبی است.

این ملاحظه وسیلهٔ ساده‌ای برای حل مسأله‌ها به‌دست می‌دهد. معادله‌های (۴۳) و (۴۴) و (۴۵) را تشکیل می‌دهیم. سپس این دستگاه معادله‌ها را نسبت به مجهول‌های x و y و λ حل می‌کنیم، یک یا چند جواب

$$(x_1, y_1, \lambda_1)\ ,\ (x_2, y_2, \lambda_2)\ ,\ \dots$$



شکل ۳۱

به‌دست می‌آید. به نقطه‌های (x_1, y_1) و (x_2, y_2) و... نقطه‌های مرزی G، یعنی نقطه‌هایی که در آن‌جا منحنی Γ از میدان G خارج می‌شود، اضافه می‌کنیم. سپس بین همهٔ این نقطه‌ها، نقطه‌ای برمی‌گزینیم که در آن $f(x,y)$ بیشترین (یا کمترین) مقدار را داشته باشد.

البته، برهانی که آوردیم، هنوز به‌طور کامل درستی این راه را نشان نمی‌دهد. درواقع، ثابت نکردیم که نقطه‌ای از $f(x,y)$ را که نسبت به نقطه‌های مجاورش روی منحنی Γ ماکزیمم نسبی است، می‌توان به‌عنوان ماکزیمم تابع $F(x,y)$ به‌ازای مقداری از λ به‌دست آورد. ولی این مطلب را می‌توان ثابت کرد و در همه کتاب‌های درسی آنالیز هم ثابت می‌کنند که هر نقطهٔ (x_0, y_0) ماکزیمم نسبی $f(x,y)$روی منحنی Γ را می‌توان با روش بالا پیدا کرد، تنها شرط این است که در این نقطه، مشتق‌های $\varphi'_x(x_0, y_0)$ و $\varphi'_y(x_0, y_0)$ با هم برابر صفر نشوند[1].

روش **لاگرانژ** را دربارهٔ مثالی که در آغاز این بند آوردیم، به‌کار بریم: در این حالت $f(x,y)=xy$ و $\varphi(x,y)=x^2+y^2-4R^2$. معادله‌های (۴۳) و (۴۴) و (۴۵) را تشکیل می‌دهیم:

$$y + 2\lambda x = 0$$
$$x + 2\lambda y = 0$$
$$x^2 + y^2 = 4R^2$$

از آن‌جا، با در نظر گرفتن این که x و y مثبت‌اند، جواب‌های زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$x=y=R\sqrt{2} \qquad \left(\lambda=-\frac{1}{2}\right)$$

برای این مقدارهای x و y، یعنی در حالتی که مربع محاطی داشته باشیم، مساحتی حداکثر خواهیم داشت.

روش **لاگرانژ** را برای تابع‌های با سه یا چند متغیر هم می‌توان به‌کار برد. در این‌جا ممکن است چند شرط شبیه شرط (۴۵) داشته باشیم (البته کمتر از تعداد متغیرها) و درنتیجه ضریب‌های کمکی هم وارد خواهد شد.

این هم دو نمونه از مسأله‌هایی که باید ماکزیمم و می‌نیمم نسبی آن‌ها را پیدا کرد:

---

۱. در دورهٔ ریاضیات عالی نوشتهٔ و. ای. سمیرنف (جلد ۱ صفحهٔ ۳۹۴) نمونه ساده‌ای آمده است که اگر روش لاگرانژ را به‌طور مکانیکی و بدون در نظر گرفتن این شرط به‌کار ببریم، مسأله غیرقابل حل می‌شود.

نمونهٔ ۱ـ بلندی h و شعاع r یک ظرف استوانه‌ای‌شکل روبازی به‌گنجایش داده‌شدهٔ V چقدر باشد تا برای ساختن آن کمترین مصالح ممکن به‌کار برده شود، یعنی رویهٔ جدار و کف دایره‌ای‌شکل آن می‌نیمم باشد؟

روشن است، مسأله به این‌جا می‌رسد که باید می‌نیمم تابع متغیرهای r و h، یعنی

$$f(r,h) = ۲\pi rh + \pi r^{۲}$$

را با توجه به شرط $\pi r^{۲}h = V$ که می‌توان به‌صورت

$$\varphi(r,h) = \pi r^{۲}h - V = ۰$$

نوشت، پیدا کرد.

نمونهٔ ۲ـ نقطهٔ متحرکی باید از A تا B حرکت کند (شکل ۳۲). این متحرک فاصلهٔ AM را با سرعت $v_۱$ و فاصلهٔ MB را با سرعت $v_۲$ می‌پیماید. نقطهٔ M را روی خط DD'، کجا باید برگزید تا همهٔ راه از A تا B هرچه زودتر پیموده شده باشد؟

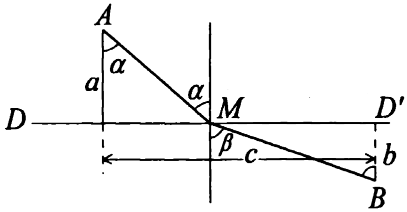
زاویه‌های α و β را، که در شکل ۳۲ نشان داده شده است، مجهول می‌گیریم. طول‌های a و b، یعنی طول عمودهایی که از A و B بر خط راست DD' فرود آمده است، و فاصلهٔ c، یعنی فاصلهٔ بین پای این عمودها، معلوم است. به‌سادگی دیده می‌شود، زمانی که برای پیمودن همهٔ راه لازم است، برابر است با

$$f(\alpha,\beta) = \frac{a}{v_۱\cos\alpha} + \frac{b}{v_۲\cos\beta}$$

باید می‌نیمم این رابطه را با توجه به این که بین α و β رابطهٔ

$$a\ \tan\alpha + b\ \tan\beta = c$$

برقرار است، پیدا کرد.



شکل ۳۲

خواننده خود می‌تواند این نمونه‌ها را با روش **لاگرانژ** حل کند. در نمونهٔ دوم به‌سادگی به این نتیجه می‌رسیم که مناسب‌ترین وضع استقرار M، زمانی است که این شرط برقرار باشد:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} \tag{۴۶}$$

و این قانون مشهور شکست نور است. بنابراین، شعاع نور ضمن عبور از یک محیط به محیط دیگر، چنان می‌شکند که زمان عبور آن از نقطه‌ای در محیط نخست به نقطه‌ای در محیط دوم، کمترین زمان ممکن باشد. این نتیجه‌ها نه‌تنها وسیله‌ای برای محاسبه هستند، بلکه برای بهتر شناختن بسیاری از پدیده‌ها هم به‌کار می‌روند. این نتیجه‌ها کمک می‌کند که دانش‌های پایهٔ طبیعت عمیق‌تر شوند و به‌سوی شناخت قانون‌های کلی‌تر طبیعت پیش بروند.

سرانجام یادآور می‌شویم ضریب λ، که برای حل مسأله به‌یاری روش **لاگرانژ** داخل مسأله شده است، تنها به‌عنوان عدد کمکی نیست، بلکه بسته به نوع مسأله، معرف مفهومی کلی از مسألهٔ مورد بررسی است.

۱۳. تعمیم مفهوم انتگرال

در بند ۱۰ همین بخش، انتگرال معین تابع $f(x)$ را در فاصلهٔ $[a,b]$ حد مجموع

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

دانستیم، به‌شرطی که بزرگترین بخش Δx_i از بخش‌های فاصلهٔ $[a,b]$ به‌سمت صفر میل کند. با وجود این که این دسته تابع‌های $f(x)$، تابع‌هایی که به‌واقع دارای چنین حدی باشند (قابل انتگرال‌گیری باشند)، خیلی زیادند و به‌ویژه شامل تمام تابع‌های پیوسته و بسیاری از تابع‌های ناپیوسته می‌شوند، با وجود این، بسیار نارسا و محدودند. اگر مقدار دو تابع $f(x)$ و $\varphi(x)$ را که قابل انتگرال‌گیری هستند، جمع، تفریق، ضرب و به شرط‌های معینی بر هم بخش کنیم، می‌توان ثابت کرد باز هم تابعی به‌دست می‌آید که قابل انتگرال‌گیری است. برای $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ هم، به‌شرطی که مقدار $\frac{1}{\varphi(x)}$ در فاصلهٔ $[a,b]$ محدود باشد، این حکم درست است. ولی اگر

تابعی را نتیجهٔ انتقال حدی تابع‌های $f_1(x)$، $f_2(x)$، $f_3(x)$، ... (که همه قابل انتگرال‌گیری هستند) بدانیم، به‌طوری که به‌ازای تمام مقدارهای x واقع در فاصله $[a,b]$ داشته باشیم:

$$f(x) = \underset{n \to \infty}{\text{حد}} f_n(x)$$

در این صورت، اجباری ندارد که تابع $f(x)$ قابل انتگرال‌گیری باشد.

از این‌قبیل حالت‌ها در ریاضیات زیاد است. درواقع در ریاضیات بسیار پیش می‌آید که با استفادهٔ گسترده از انتقال حدی، ترکیب‌های زیادی به‌وجود می‌آورند.

براساس این وضع، راه‌های تعمیم بعدی مفهوم انتگرال پیدا شد. مهم‌ترین این تعمیم‌ها، انتگرال *لِبگ* است که خواننده در بخش پانزدهم، که به نظریهٔ تابع‌های با متغیر حقیقی اختصاص دارد، با آن آشنا خواهد شد. ما هم در این‌جا به نوع دیگری از تعمیم مفهوم انتگرال، که درعمل اهمیت زیادی دارد، می‌پردازیم.

انتگرال‌های مرکب. تا این‌جا با روند انتگرال‌گیری تابع‌های با یک متغیر در میدان یک‌بعدی (فاصلهٔ از a تا b روی منحنی) آشنا شده‌ایم. شبیه همین روند را در تابع‌های با دو، سه و به‌طور کلی چند متغیر هم (در میدان داده‌شدهٔ مربوط به آن‌ها) می‌توان تعمیم داد.

فرض کنید، در دستگاه مختصات قائم، سطح

$$z = f(x,y)$$

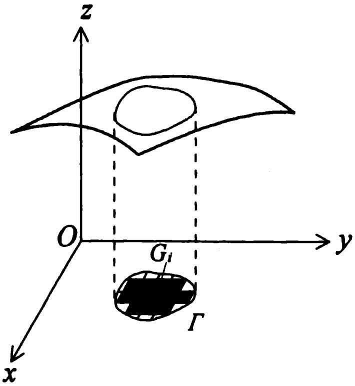
و در صفحهٔ Oxy، میدان G که به‌وسیلهٔ منحنی بستهٔ Γ محدود شده است، داده شده باشد. می‌خواهیم حجم محدود بین سطح داده‌شدهٔ z و صفحهٔ Oxy و سطح استوانه‌ای که از حرکت خط راستی موازی Oz و متکی بر منحنی Γ به‌دست آمده است، پیدا کنیم (شکل ۳۳). برای حل این مسأله، میدان مسطح G را به‌کمک پاره‌خط‌های راست موازی با محورهای Ox و Oy به قطعه‌های کوچکتر بخش می‌کنیم و آن قطعه‌هایی را که مستطیل کامل‌اند با حرف‌های

$$G_1 \, , G_2 \, , \dots , G_n$$

نام‌گذاری می‌کنیم. اگر پاره‌خط‌ها را به‌اندازهٔ کافی نزدیک به هم بگیریم، بخش مهمی از میدان G به‌وسیلهٔ مستطیل‌های نام‌برده پوشیده خواهد شد. نقطه‌های دل‌خواه

$$(\xi_1 \, , \eta_1) \;\; , \;\; (\xi_2 \, , \eta_2) \;\; , \;\; \dots \;\; , \;\; (\xi_n \, , \eta_n)$$

را در هریک از این مستطیل‌ها برمی‌گزینیم و برای سادگی، مقدار مساحت مستطیل G_i را هم



شکل ۳۳

با همان G_i نشان می‌دهیم. اکنون این مجموع را تشکیل می‌دهیم:

$$S_n = f(\xi_1, \eta_1)\, G_1 + f(\xi_2, \eta_2)\, G_2 + \dots + f(\xi_n, \eta_n)\, G_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, G_i \tag{۴۷}$$

روشن است که اگر سطح داده‌شده پیوسته باشد و پاره‌خط‌های راست را به‌اندازهٔ کافی نزدیک به هم برگزیده باشیم، این مجموع به حجم V نزدیک خواهد بود. حجم دقیق V زمانی به‌دست می‌آید که حد مجموع (۴۷) را، زمانی که بخش‌ها بسیار کوچک باشد، به‌دست آوریم (یعنی فرض کنیم که بزرگترین قطر مستطیل‌ها به‌سمت صفر میل کند):

$$\underset{\mathrm{Max}\, d(G_i) \to 0}{\text{حد}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, G_i = V \tag{۴۸}$$

از دیدگاه تحلیلی برای تعیین حجم V باید روی تابع $f(x,y)$ و میدان G عمل‌های ریاضی را که در سمت چپ برابری (۴۸) وجود دارد، انجام داد. این عمل را عمل انتگرال‌گیری f در میدان G گویند و نتیجهٔ آن به‌وسیلهٔ انتگرال f در میدان G به‌دست می‌آید. این نتیجه را به این شکل نشان می‌دهند:

$$\iint_G f(x,y)\, dx\, dy = \underset{\mathrm{Max}\, d(G_i) \to 0}{\text{حد}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\, G_i \tag{۴۹}$$

با روش مشابهی می‌توان انتگرال تابع‌های با سه متغیر را در میدان سه‌بعدی G که معرف یک

جسم فضایی است، معین کرد. در این حالت، میدان G را به‌وسیلهٔ صفحه‌هایی موازی با صفحه‌های مختصات، به قسمت‌هایی بخش می‌کنیم. بین این بخش‌ها، آن‌هایی را که متوازی‌السطوح کامل‌اند به نام‌های

$$G_1 , G_2 , \dots , G_n$$

نشان می‌دهیم. در داخل هریک از این متوازی‌السطوح‌ها، نقطهٔ دلخواهی

$$(\xi_1 , \eta_1 , \zeta_1) \ , \ (\xi_2 , \eta_2 , \zeta_2) \ , \ \dots \ , \ (\xi_n , \eta_n , \zeta_n)$$

برمی‌گزینیم و این مجموع را تشکیل می‌دهیم:

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i , \eta_i , \zeta_i) \, G_i \tag{۵۰}$$

که در آن G_i نمایندهٔ حجم متوازی‌السطوح G_i است. سرانجام، انتگرال $f(x,y,z)$ در میدان G را به‌وسیلهٔ حد مجموع (۵۰)، زمانی که بزرگترین قطر $d(G_i)$ به‌سمت صفر میل کند، نمایش می‌دهیم:

$$\lim_{\operatorname{Max} d(G_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i , \eta_i , \zeta_i) \, G_i = \iiint_G f(x,y,z) \, dx dy dz \tag{۵۱}$$

نمونه‌ای را بررسی کنیم: فرض می‌کنیم میدان G از جرم نامتجانسی پر شده باشد و نیز تابع $\rho(x,y,z)$ که معرف پراکندگی چگالی جرم در میدان G است، معین باشد. چگالی $\rho(x,y,z)$ جرم در نقطهٔ (x,y,z) عبارت است از حد نسبت جرم بخش کوچکی از جسم که شامل نقطهٔ (x,y,z) است به حجم آن، زمانی که قطر[1] این بخش به‌سمت صفر میل کند. برای تعیین جرم جسم G باید به این ترتیب استدلال کرد: میدان G را به‌وسیلهٔ صفحه‌های موازی با محورهای مختصات به قسمت‌های کوچک بخش می‌کنیم و متوازی‌السطوح‌های کاملی را که به این ترتیب به‌دست می‌آید به نام‌های

$$G_1 , G_2 , \dots , G_n$$

نشان می‌دهیم. اگر صفحه‌های بخش‌کنندهٔ میدان G را به‌اندازهٔ کافی نزدیک به‌هم بگیریم، با حذف بخش‌های نامنظم میدان، خطای کوچکی خواهیم داشت. از سوی دیگر، جرم هریک از بخش‌های منظم G_i (متوازی‌السطوح‌های کامل)، به‌تقریب از روی حاصل‌ضرب

---

۱. بزرگترین فاصلهٔ بین دو نقطه از این بخش را قطر آن می‌نامیم.

$$\rho\,(\xi_i\,,\eta_i\,,\zeta_i)\,G_i$$

به‌دست می‌آید که در آن $(\xi_i\,,\eta_i\,,\zeta_i)$ مختصات نقطهٔ دل‌خواهی از G_i است، درنتیجه مقدار تقریبی جرم M برابر این مجموع می‌شود:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \rho\,(\xi_i\,,\eta_i\,,\zeta_i)\,G_i$$

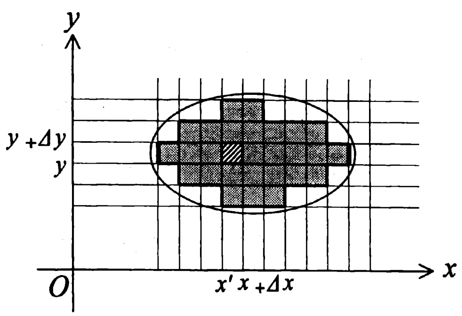
و مقدار دقیق آن زمانی به‌دست می‌آید که حد این مجموع را، به‌شرطی که بزرگترین قطر G_i به‌سمت صفر میل کند، به‌دست آوریم. یعنی

$$M = \iiint_G \rho\,(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{\operatorname{Max} d(G_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho\,(\xi_i\,,\eta_i\,,\zeta_i)\,G_i$$

انتگرال‌های (۴۹) و (۵۱) را به‌ترتیب انتگرال‌های مرکب دوگانه و سه‌گانه می‌نامند.

مسأله‌ای برمی‌گزینیم که منجر به انتگرال مرکب دوگانه می‌شود. فرض می‌کنیم، در یک سطح مستوی، آب نفوذ کند. علاوه بر آن، در نقطه‌های مختلف سطح، آب با شدت‌های مختلف $f(x,y)$ تراوش کند (یا برعکس، به زمین فرو رود). میدان بسته و محدود G را تقسیم می‌کنیم (شکل ۳۴) و فرض می‌کنیم شدت $f(x,y)$ برای ما معلوم باشد، یعنی مقدار آب زیرزمینی که در هر دقیقه از یک سانتی‌مترمربع زمین تراوش می‌کند، در هر نقطهٔ میدان G معلوم باشد (در هر نقطه که آب زیرزمینی بیرون می‌جوشد $f(x,y) > 0$ و هرجا که آب به زمین فرو رود $f(x,y) < 0$ است). می‌خواهیم ببینیم در تمام میدان G دقیقه‌ای چقدر آب بیرون می‌آید؟

اگر میدان G را به بخش‌های کوچکی تقسیم کنیم و $f(x,y)$ را در هریک از این بخش‌ها



شکل ۳۴

ثابت بگیریم، آن‌وقت می‌توانیم مقدار تقریبی آبی را که خارج می‌شود محاسبه کنیم. سپس اگر حد این مقدار را، زمانی که بخش‌ها را فوق‌العاده کوچک بگیریم، حساب کنیم، مقدار آبی که از زمین داده‌شده تراوش می‌کند به‌صورت این انتگرال درمی‌آید:

$$\iint_G f(x,y)\ dx\,dy$$

انتگرال‌های دوگانه (مضاعف) را نخستین بار *اولر* بررسی کرد. انتگرال‌های مرکب، کاربردهای فراوانی در محاسبه‌ها و بررسی‌های بسیار گوناگون پیدا کرده است.

می‌توان ثابت کرد (ولی در این‌جا به آن نپرداخته‌ایم) که محاسبهٔ انتگرال‌های مرکب، به تکرار محاسبهٔ انتگرال‌های ساده منجر می‌شود.

انتگرال‌های محیطی و سطحی. سرانجام باید یادآور شد که تعمیم‌های دیگری هم از مفهوم انتگرال وجود دارد. مسأله مربوط به تعیین کار نیروی متغیری که بر نقطهٔ مادی اعمال می‌شود، به‌شرطی که نقطه بر منحنی داده‌شده‌ای حرکت کند، منجر به انتگرال به‌اصطلاح منحنی‌الخط (محیطی) می‌شود و مسألهٔ مربوط به پیدا کردن بار کلی یک سطح، که الکتریسیته با تکاثف سطحی داده‌شده‌ای به‌طور مداوم روی آن پخش می‌شود به مفهوم تازه‌ای به‌نام انتگرال در روی سطح می‌رسد.

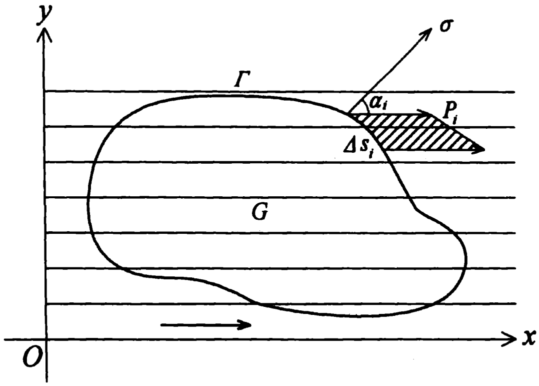
برای نمونه، فرض کنید مایعی در فضا جریان داشته باشد (شکل ۳۵) و سرعت ذره‌های مایع در نقطهٔ (x,y) به‌وسیلهٔ تابع $P(x,y)$ بیان شود. بنابراین، سرعت به z مربوط نیست. اگر بخواهیم مقدار مایعی را که در هر دقیقه از مرزهای محیط Γ* جریان پیدا می‌کند، پیدا کنیم، می‌توان به روش زیر استدلال کرد: Γ را به قسمت‌های Δs_i بخش می‌کنیم. مقدار آبی که از هر بخش Δs_i جریان پیدا می‌کند، به‌تقریب برابر با ستون مایعی است که در هر دقیقه از قطعه‌ای که Δs_i روی Γ جدا کرده است، عبور می‌کند (و در شکل ۳۵ سایه زده شده است). اما مساحت متوازی‌الاضلاع سایه‌خورده برابر است با

$$P_i(x,y)\cdot\Delta s_i\cdot\cos\alpha_i$$

که در آن α_i عبارت است از زاویهٔ بین جهت $\bar{x}$ محور xها و عمود $\bar{n}$، که از میدانی که به‌وسیلهٔ

---

* دقیق‌تر باید گفت: مقدار مایعی که از نهرهای سطح استوانه‌ای که قاعدهٔ آن Γ و بلندی آن واحد است جریان می‌یابد.



شکل ۳۵

دانست Δs_i قطعهٔ تقریبی جهت آن را می‌توان جهت که مماسی بر است، شده محدود Γ خارج شده باشد. با جمع مساحت‌های این متوازی‌الاضلاع‌ها و محاسبهٔ حد این مجموع، زمانی که بخش‌های محیط Γ بسیار کوچک باشد، مقدار مایعی که در یک‌دقیقه از محیط Γ جریان پیدا می‌کند به‌دست می‌آید. این حد را به این ترتیب نمایش می‌دهند:

$$\int_{\Gamma} P(x,y) \cos(\bar{n}, \bar{x})\, ds$$

و آن را انتگرال منحنی‌الخط می‌نامند. اگر جریان مایع موازی نباشد، در این صورت سرعت جریان مایع در هر نقطهٔ (x,y)، در طول محور xها برابر $P(x,y)$ و در طول محور yها برابر $Q(x,y)$ خواهد بود. در این حالت هم با برهان مشابهی می‌توان ثابت کرد، مقدار مایعی که از محیط جریان پیدا می‌کند برابر است با[1]:

$$\int_{\Gamma} [\, P(x,y) \cos(\bar{n}, \bar{x}) + Q(x,y) \cos(\bar{n}, \bar{y}) \,]\, ds$$

وقتی گفت‌وگو بر سر انتگرال در سطح G است، که نقطه‌های $M(x,y,z)$ آن به‌وسیلهٔ تابع $f(M)$ معلوم باشد، این انتگرال برابر با حد مجموع زیر می‌شود:

۱. از آنجا که برای قطعه‌های کوچک و جدا از هم منحنی، دیفرانسیل y برابر است با $\cos(\bar{n}, \bar{x})\, ds$ و دیفرانسیل dx برابر است با $\cos(\bar{n}, \bar{y})\, ds$، اغلب این انتگرال را به این صورت می‌نویسند:

$$\int_{\Gamma} [\, P(x,y)\, dy - Q(x,y)\, dx \,]$$

$$\text{حد} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\ \Delta\sigma_i = \iint_G f(x,y,z)\ d\sigma$$

به‌شرطی که بخش‌های میدان G، که انتگرال در آن گرفته می‌شود، به قطعه‌های بسیار کوچکی به‌مساحت $\Delta\sigma_i$ تقسیم شده باشد. برای محاسبهٔ انتگرال‌های مرکب محیطی و سطحی، هم روش‌های کلی و هم روش‌های تقریبی وجود دارد.

دستور اُستروگرادسکی. رابطه‌های بسیار مهمی بین انتگرال در یک حجم معین (یا میدان معین) و انتگرال در سطح این حجم (یا حدهای میدان)، به‌صورت کلی، در میانه‌های سده ۱۹ و به‌وسیلهٔ م. و. *اُستروگرادسکی* کشف شد.

در این‌جا، بدون این که به اثبات کامل دستور کلی *اُستروگرادسکی*[۱] ــ که کاربرد بسیار گسترده‌ای دارد ــ بپردازیم، کوشش می‌کنیم این دستور را در حالت خاص و سادهٔ خود، ضمن یک مثال روشن کنیم.

فرض کنیم، در سطح مسطح زمینی جویباری جاری باشد. درضمن، قسمتی از آب به‌طور دایم از زمین بیرون بیاید ویا به زمین داخل شود. میدانی مانند G که مرزهای آن را Γ می‌نامیم از آن جدا می‌کنیم و فرض می‌کنیم برای هر نقطه از این میدان، $P(x,y)$ و $Q(x,y)$، یعنی سرعت‌های آب در جهت محور xها و محور yها معلوم باشد.

می‌خواهیم حساب کنیم که در نزدیکی نقطه‌ای به‌مختصات (x,y) آب با چه شدتی در زمین نفوذ می‌کند. برای این کار مستطیل کوچک به ضلع‌های Δx و Δy را که چسبیده به نقطهٔ (x,y) برگزیده شده است در نظر می‌گیریم.

با توجه به سرعت $P(x,y)$ از ضلع قائم سمت چپ این مستطیل در هر دقیقه به‌تقریب $P(x,y)\,\Delta y$ واحد آب و از ضلع قائم سمت راست این مستطیل در هر دقیقه به‌تقریب $P(x+\Delta x\,,y)\,\Delta y$ واحد آب جریان دارد. به‌طور کلی در واحد سطحی که بین مرزهای قائم سمت چپ و سمت راست این مستطیل کوچک قرار دارد، مقدار آبی به‌اندازهٔ

$$\frac{[\,P(x+\Delta x\,,y)\ -\ P(x,y)\,]\,.\ \Delta y}{\Delta x}$$

جریان دارد. اگر Δx را به‌سمت صفر میل دهیم در حد

---

۱. در غرب حالت دوبعدی این قضیه به قضیه‌ی گرین (Green) و حالت کلی آن به قضیهٔ استوکز (Stokes) مشهور است (ویراستار).

$$\frac{\partial P}{\partial x}$$

را به‌دست خواهیم آورد. به همین ترتیب از این قطعه کوچک و در جهت محور xها آب با شدتی برابر

$$\frac{\partial Q}{\partial y}$$

جریان خواهد داشت. بنابراین شدت تراوش زمینی آب در نقطهٔ به‌مختصات (x,y)، برابر است با

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

همان‌طور که از پیش می‌دانیم، مقدار کل آبی که از زمین خارج می‌شود، برابر است با انتگرال مضاعف تابعی که شدت نفوذ آب را در هر نقطهٔ زمین بیان می‌کند، یعنی

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy \qquad (۵۲)$$

در همین مدت مقدار آب باید از مرزهای Γ جریان داشته باشد. اما همان‌طور که در پیش دیدیم، مقدار آبی که از مرزهای Γ جریان پیدا می‌کند به‌وسیلهٔ انتگرال منحنی‌الخط در طول Γ بیان می‌شود

$$\int\limits_\Gamma [\, P(x,y) \cos(\bar{n}, \bar{x}) + Q(x,y) \cos(\bar{n}, \bar{y})\,] \,.\, ds \qquad (۵۳)$$

برابری مقدارهای (۵۲) و (۵۳) همان دستور ***اُستروگرادسکی*** در ساده‌ترین حالت دوبعدی آن است:

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_\Gamma [\, P(x,y) \cos(\bar{n}, \bar{x}) + Q(x,y) \cos(\bar{n}, \bar{y})\,]\, ds$$

ما تنها مفهوم این دستور را روی نمونهٔ فیزیکی آن ثابت کردیم، درحالی که می‌توان آن را به‌روش ریاضی هم ثابت کرد.

بنابراین، قضیهٔ ریاضی ***اُستروگرادسکی***، قانون معینی از واقعیت را بیان می‌کند که ما آن را در مثال خود به‌عنوان مقدار مایعی که باقی می‌ماند، قابل درک کردیم.

م. و. ***اُستروگرادسکی*** دستور عمومی‌تری را ثابت کرد، که عبارت بود از بستگی بین انتگرال در حجم چندبعدی و انتگرال در مرزهای آن. در حالت خاص، برای یک جسم G

سه‌بعدی که محدود به سطح Γ می‌باشد، این دستور به این صورت درمی‌آید:

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_\Gamma [P \cos(\bar{n}, \bar{x}) + Q \cos(\bar{n}, \bar{y}) + R \cos(\bar{n}, \bar{z})].\, d\sigma$$

که در آن $d\sigma$ عنصر سطحی است.

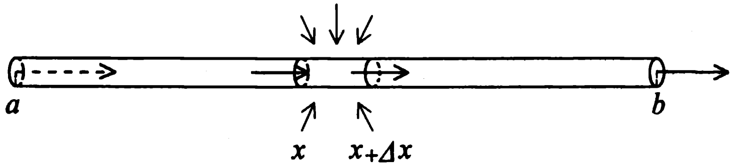
جالب است یادآور شویم که قضیهٔ اساسی محاسبهٔ انتگرال، یعنی

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) \qquad (۵۴)$$

می‌تواند به‌عنوان حالت یک‌بعدی رابطهٔ اُستروگرادسکی در نظر گرفته شود. برابری (۵۳) عبارت است از بستگی بین انتگرال در طول پاره‌خط با «انتگرال» در مرزهای «بدون بعد» آن که از دو نقطهٔ ثابت تشکیل شده است.

دستور (۵۴) را به روش زیر هم می‌توان روشن کرد: فرض می‌کنیم در لولهٔ راستی با مقطع ثابت $s = ۱$، آب با سرعت $F(x)$ جریان داشته باشد. $F(x)$ برای مقطع‌های مختلف، متفاوت است (شکل ۳۶). از جدار منفذدار لوله، آب در جهت‌های مختلف و با شدت‌های مختلف به بیرون (یا به داخل) نفوذ می‌کند. اگر قطعه‌ای از لوله از x تا $x+\Delta x$ را در نظر بگیریم، مقدار آبی که در واحد زمان از این بخش لوله ترشح می‌کند برابر با تفاضل $F(x+\Delta x) - F(x)$، یعنی تفاضل مقدار آبی است که به این بخش وارد و از آن خارج می‌شود. از آن‌جا که مقدار آبی که این بخش لوله ترشح می‌کند، برابر است با تفاضل $F(x+\Delta x) - F(x)$، شدت $f(x)$ که عبارت است از نسبت بین مقدار ترشح آب در بخش بسیار کوچک لوله به طول آن، برابر است با

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$



شکل ۳۶

کل آبی که به‌فاصلهٔ $[a,b]$ وارد شده است باید برابر با کل آبی باشد که از این فاصله خارج شده است. ولی در طول جدار لوله، روی هم به‌اندازهٔ $\int_a^b f(x)\,dx$ آب به داخل نفوذ کرده است و از دو طرف لوله مقدار آبی به‌اندازهٔ $F(b)-F(a)$ از لوله خارج شده است. برابری این دو مقدار، همان دستور (۵۴) است.

۱۴. رشته‌ها

مفهوم رشته. عبارتی به‌صورت

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

را در ریاضیات رشته (سری) گویند. عدد u_k معرف جمله‌های رشته است. تعداد این جمله‌ها بی‌نهایت است و بنا بر قاعدهٔ معینی به‌دنبال هم آمده‌اند، به‌نحوی که هر عدد $k = 0, 1, 2, \ldots$ متناظر با مقدار معینی از u_k باشد.

باید توجه داشت که هنوز نگفته‌ایم، آیا این‌گونه عبارت‌ها را می‌توان محاسبه کرد یا نه و درصورت امکان، راه این محاسبه کدام است؟ در حالتی که بین جمله‌های u_k علامت جمع وجود داشته باشد، به این معنی است که تمام جمله‌ها را باید با یکدیگر جمع کرد. ولی تعداد این جمله‌ها بی‌نهایت است، و ما مجموع را، تنها برای حالتی که تعداد جمله‌های جمع محدود باشد، تعریف کرده‌ایم.

مجموع n جمله نخست رشته را به S_n نشان می‌دهیم و آن را **مجموع جزیی n جملهٔ رشته** می‌نامیم. درنتیجه، دنبالهٔ این عددها به‌دست می‌آید:

$$S_1 = u_0$$
$$S_2 = u_0 + u_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$$

و می‌توان دربارهٔ مقدار متغیر S_n سخن گفت که در آن $n = 1, 2, \ldots$.

رشته را هم‌گرا (یا متقارب) گویند، وقتی با میل n به‌سمت بی‌نهایت، مقدار متغیر S_n به‌سمت حد معینی میل کند:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

خود این حد را **مجموع رشته** گویند. در این حالت می‌نویسند:

$$S = u_۰ + u_۱ + u_۲ + \cdots$$

اگر برای S_n، وقتی $n \to \infty$، حدی وجود نداشته باشد، رشته را واگرا (یا متباعد) گویند و در این حالت گفت‌وگو دربارهٔ مجموع آن مفهومی ندارد[1]. ولی اگر تمام جمله‌های u_n «هم‌علامت» باشند، می‌توان گفت که مجموع رشته برابر است با بی‌نهایت و علامت آن مثبت یا منفی است، بسته به این که علامت جمله‌های رشته مثبت یا منفی باشد.

به‌عنوان نمونه، این رشته را بررسی می‌کنیم:

$$۱ + x + x^۲ + \cdots$$

که جمله‌های آن یک تصاعد هندسی را با قدرنسبت x تشکیل می‌دهد.

مجموع n جملهٔ نخست این رشته چنین می‌شود:

$$S_n(x) = \frac{۱ - x^n}{۱ - x} \qquad (x \neq ۱) \tag{۵۵}$$

در حالتی که $|x| < ۱$ باشد، این مجموع دارای حدی برابر

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \frac{۱}{۱ - x}$$

خواهد بود و بنابراین، برای $|x| < ۱$ می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{۱ - x} = ۱ + x + x^۲ + \cdots$$

و اگر $|x| > ۱$، آن‌وقت روشن است که

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x) = \infty$$

رشته واگرا یا متباعد است. این حالت شامل حالتی هم که $x = ۱$ باشد، می‌شود. در این

---

۱. یادآور می‌شویم که امکان تعریف کلی مجموع رشته وقتی وجود دارد که بتوان «جملهٔ عمومی» را برای مجموع جمله‌های رشته واگرا پیدا کرد. چنین رشته‌ای را قابل جمع کردن گویند. در بسیاری حالت‌ها عمل کردن با این جملهٔ عمومی از رشته‌های واگرا فایده‌های بسیار دارد.

حالت به‌طور مستقیم و بدون کمک از رابطهٔ (۵۵)، واگرا بودن رشته معلوم می‌شود.

درواقع، رابطهٔ (۵۵) برای $x = ۱$ مفهومی ندارد. سرانجام به‌ازای $x = -۱$ مجموع جمله‌های رشته به‌ترتیب مقدارهای ۱+ و صفر را قبول می‌کند و رشته باز هم واگرا است.

هر رشته متناظر با دنبالهٔ

$$S_۱ , S_۲ , S_۳ , \ldots$$

(مجموع‌های جزیی) می‌باشد که به‌شرط هم‌گرا بودن رشته، به‌سمت حدی میل می‌کند. برعکس، هر دنبالهٔ عددهای

$$S_۱ , S_۲ , S_۳ , \ldots$$

متناظر با رشتهٔ

$$S_۱ + (S_۲ - S_۱) + (S_۳ - S_۲) + \cdots$$

خواهد بود که مجموع‌های جزیی آن، جمله‌های این دنباله می‌باشد. بنابراین، نظریهٔ متغیرهایی که مقدارهای یک دنباله را قبول می‌کنند، می‌تواند به‌وسیلهٔ نظریهٔ رشته‌های متناظر آن‌ها توجیه شود و برعکس. ولی هریک از این نظریه‌ها اهمیت و معنای خاص به‌خود را دارد. در حالت نخست متغیر به‌طور مستقیم بررسی می‌شود و در حالت دوم رشته‌های هم‌ارز آن را بررسی می‌کنند.

یادآوری می‌کنیم که رشته‌ها از مدت‌ها پیش به‌عنوان وسیلهٔ مهمی برای محاسبه و نمایش کمیت‌های مختلف، و به‌ویژه تابع‌ها، به‌کار می‌رفته است. روشن است که دیدگاه ریاضی‌دانان دربارهٔ مفهوم رشته، در جریان تاریخ تغییر کرده است و بستگی همیشگی با وضع پیشرفت همهٔ آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها داشته است، به‌نحوی که تعریف دقیق رشته‌های هم‌گرا و واگرا (تعریفی که در بالا به آن اشاره شد) در نخستین سال‌های سدهٔ ۱۹ و همراه با مفهوم حد (که به‌طور کامل به آن مربوط است) تنظیم شد.

اگر رشته‌ای هم‌گرا باشد، جملهٔ عمومی آن، هنگامی که n بسیار بزرگ شود، به‌سمت صفر میل می‌کند، زیرا

$$\underset{n \to \infty}{\text{حد}}\, u_n = \underset{n \to \infty}{\text{حد}}\, (S_{n+۱} - S_n) = S - S = ۰$$

از نمونه‌های زیر روشن می‌شود که عکس این حکم همیشه درست نیست، ولی توجه به

این شرط مفید است، زیرا **شرط *لازم تقارب*** رشته را معین می‌کند. در مثل، اگر جمله‌های یک رشته، جمله‌های یک تصاعد هندسی باشد، در حالتی که قدرنسبت $x > 1$ باشد، واگرا است، زیرا جملهٔ عمومی رشته به‌سمت صفر میل نمی‌کند.

اگر یک رشته از جمله‌های مثبت تشکیل شده باشد، مجموع جزیی S_n همراه با n رشد می‌کند و دو حالت پیش می‌آید: یا متغیر S_n، وقتی که n به‌اندازهٔ کافی بزرگ شود، از هر عدد دل‌خواه داده‌شده‌ای مانند A، بزرگتر خواهد شد، که در این صورت به‌ازای مقدارهای بعدی n همیشه بزرگتر از A باقی می‌ماند و $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$، یعنی رشته واگرا است. یا این که عددی مانند A وجود دارد که به‌ازای تمام مقدارهای n، مقدار S_n از A بزرگتر نمی‌شود و در این صورت متغیر S_n به‌سمت حد معین و محدودی میل می‌کند که بزرگتر از A نخواهد بود، یعنی رشتهٔ ما «هم‌گرا» است.

هم‌گرایی رشته. برای تعیین این که یک رشته هم‌گرا است یا واگرا، غالباً از مقایسهٔ آن با یک رشتهٔ دیگر استفاده می‌کنند. ضمن این عمل هم اغلب از حکم زیر استفاده می‌شود:

اگر دو رشتهٔ

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$
$$v_0 + v_1 + v_2 + \cdots$$

با جمله‌های مثبت داده شده باشد و بدانیم برای همهٔ عددهای طبیعی n، که از یک عدد دل‌خواه آغاز شده است، نابرابری

$$u_n \le v_n$$

برقرار است، در این صورت اگر رشتهٔ دوم هم‌گرا باشد رشتهٔ نخست هم هم‌گرا خواهد بود، و اگر رشتهٔ نخست واگرا باشد، رشتهٔ دوم هم واگرا خواهد بود.

برای نمونه، رشتهٔ زیر را، که رشتهٔ همساز (هارمونیک) نامیده می‌شود، در نظر می‌گیریم:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

جمله‌های این رشته به‌ترتیب، از جمله‌های رشتهٔ

$$1+\underline{\frac{1}{2}}+\underline{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}+\underline{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}}_{\text{۸ مرتبه}}+\cdots$$

کمتر است و در این رشته هم، مجموع هر دسته از جمله‌هایی که زیر آن‌ها خط کشیده‌ایم، برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

روشن است که مجموع جزیی S_n رشتهٔ دوم، همراه با n تا بی‌نهایت زیاد می‌شود و بنابراین رشتهٔ همساز، رشته‌ای واگراست.

همچنین روشن است که رشتهٔ

$$۱+\frac{۱}{۲^{\alpha}}+\frac{۱}{۳^{\alpha}}+\frac{۱}{۴^{\alpha}}+\cdots \qquad (۵۶)$$

که در آن، α عدد مثبت کوچکتر از واحدی است، واگراست، زیرا برای هر عدد دل‌خواه n، داریم:

$$\frac{۱}{n^{\alpha}}>\frac{۱}{n} \qquad (۰<\alpha<۱)$$

از سوی دیگر، می‌توان ثابت کرد که رشته (۵۶)، به‌ازای $۱<\alpha$ هم‌گراست. در این‌جا ما آن را برای $\alpha\geq ۲$ ثابت می‌کنیم. برای این منظور رشتهٔ

$$\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)+\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)+\cdots+\left(\frac{۱}{n-۱}-\frac{۱}{n}\right)+\cdots$$

را، که جمله‌های آن مثبت‌اند، در نظر می‌گیریم. این رشته هم‌گراست و مجموعی برابر واحد دارد، زیرا مجموع جزیی S_n آن برابر است با

$$S_n=۱-\frac{۱}{n+۱}\to ۱ \qquad (n\to\infty)$$

از سوی دیگر، جملهٔ عمومی این رشته، در نابرابری زیر صدق می‌کند:

$$\frac{۱}{n-۱}-\frac{۱}{n}=\frac{۱}{(n-۱)n}>\frac{۱}{n^۲}$$

و از آن‌جا نتیجه می‌شود که رشتهٔ

$$۱+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\cdots$$

هم هم‌گراست و بدیهی است که رشتهٔ (۵۶) به‌ازای $۲<\alpha$ هم، هم‌گرا خواهد شد.

دستور دیگری را که برای تعیین هم‌گرایی و واگرایی رشته‌های با جمله‌های مثبت به‌کار می‌رود، و به دستور **دالامبر** مشهور است، بدون برهان می‌آوریم.

فرض کنیم، نسبت $\frac{u_{n+۱}}{u_n}$، وقتی n به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند، دارای حدی برابر q

باشد. در این صورت اگر $q < 1$، رشته هم‌گرا، و اگر $q > 1$، رشته واگراست. برای $q = 1$ هم‌گرایی یا واگرایی رشته معلوم نیست.

می‌دانیم مجموع چند عدد با تغییر جای جمله‌های آن تغییر نمی‌کند، ولی این مطلب اغلب برای رشته‌های بی‌پایان درست نیست. رشته‌های هم‌گرایی وجود دارد که می‌توان با تغییر جای جمله‌ها در آن‌ها، مجموع آن‌ها را تغییر داد و حتی آن‌ها را به رشتهٔ واگرا تبدیل کرد. این ناپایداری مجموع در رشته‌ها، یکی از ویژگی‌های بنیانی جمع معمولی را، که به‌موجب آن، حاصل‌جمع به ترتیب عامل‌های جمع بستگی ندارد، نقض می‌کند. بنابراین، خیلی مهم است که بتوانیم رشته‌هایی را پیدا کنیم که این ویژگی جمع معمولی را حفظ می‌کنند. این‌گونه رشته‌ها را ***متقارب مطلق*** (یا هم‌گرای کامل) گویند. رشتهٔ

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

را هم‌گرای کامل گویند، وقتی که رشتهٔ

$$|u_0| + |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots$$

هم که از قدرمطلق‌های جمله‌های آن تشکیل شده است، هم‌گرا باشد. می‌توان ثابت کرد که رشتهٔ هم‌گرای کامل همیشه هم‌گرا است، یعنی مجموع جزئی S_n آن به‌سمت حد معینی میل می‌کند. روشن است که همهٔ رشته‌های هم‌گرایی که جمله‌های هم‌علامت دارند، هم‌گرای کامل‌اند.

رشتهٔ

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \cdots$$

را می‌توان به‌عنوان نمونه‌ای از رشتهٔ هم‌گرای کامل یادآوری کرد، زیرا رشتهٔ

$$\left|\frac{\sin x}{1^2}\right| + \left|\frac{\sin 2x}{2^2}\right| + \left|\frac{\sin 3x}{3^3}\right| + \cdots$$

دارای جمله‌هایی است که از جمله‌های رشتهٔ هم‌گرای زیر نابیشتر است:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

به‌عنوان نمونهٔ رشتهٔ هم‌گرایی که هم‌گرای کامل نباشد، می‌توان از این رشته نام برد:

$$۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots،$$

درستی این حکم را می‌توان به‌سادگی ثابت کرد.

رشتهٔ تابع‌ها. رشتهٔ هم‌گرای یکنواخت. در آنالیز اغلب پیش می‌آید که سر و کار ما با رشته‌هایی است که جمله‌های آن‌ها تابع‌هایی از x هستند. پیش از این، نمونه‌هایی از این رشته‌ها را دیده‌ایم، مثل رشتهٔ

$$۱ + x + x^{۲} + x^{۳} + \cdots$$

این رشته به‌ازای مقدارهایی از x هم‌گرا و به‌ازای مقدارهای دیگری از x واگراست. تابع‌هایی وجود دارد که به‌ازای همهٔ مقدارهای مربوط به یک فاصله هم‌گرا هستند، و به‌ویژه ممکن است که این فاصله، همهٔ نقطه‌های یک محور یا نیم محور را بپوشاند. این رشته‌ها، درعمل اهمیت زیادی دارند و به همین مناسبت باید راه محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی جمله‌های این‌گونه رشته‌ها را پیدا کرد و مسألهٔ مربوط به پیوسته بودن مجموع آن‌ها را روشن کرد وغیره. اگر منظور از مجموع، مجموع معمولی تعداد معینی از جمله‌های رشته باشد، روش‌های ساده و کلی برای آن‌ها وجود دارد. می‌دانیم مشتق مجموع تابع‌هایی که قابل دیفرانسیل‌گیری هستند، برابر است با مجموع مشتق‌های آن‌ها. انتگرال مجموع تابع‌های پیوسته، برابر است با مجموع انتگرال‌های آن‌ها. ولی این قاعده‌ها وقتی درست است که تعداد جمله‌ها محدود باشد.

ولی وقتی سر و کار ما با رشتهٔ بی‌پایان باشد، باید از همهٔ این قاعده‌ها دست برداشت. می‌توان نمونه‌های زیادی از رشتهٔ تابع‌های هم‌گرا آورد، که روش انتگرال‌گیری و یا دیفرانسیل‌گیری جمله‌به‌جمله دربارهٔ آن‌ها درست نباشد. به همین ترتیب می‌توان رشته‌هایی را آورد که از تابع‌های پیوسته به‌دست آمده باشند، ولی مجموع آن‌ها تابعی پیوسته نباشد. از سوی دیگر، رشته‌های زیادی هم وجود دارد که از نظر این قانون‌ها، دارای همان ویژگی‌های مجموع محدود معمولی هستند.

بررسی‌های ژرفی که در این زمینه انجام گرفت، نشان داد که می‌توان درستی به‌کار بردن این روش‌ها را از پیش تضمین کرد. بدین معنی که زمانی می‌توان این روش‌ها را به‌کار برد که رشته، نه‌تنها در هریک از نقطه‌های دامنه (فاصلهٔ تغییر x) هم‌گرا باشد، بلکه این هم‌گرایی در این فاصله یکنواخت هم باشد. به این ترتیب در آنالیز ریاضی (در میانه‌های سدهٔ نوزدهم) مفهوم رشتهٔ هم‌گرای یکنواخت به‌وجود آمد.

رشتهٔ

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots$$

را در نظر می‌گیریم. جمله‌های این رشته، تابع‌هایی از x هستند که در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ معین‌اند. فرض می‌کنیم که این رشته به‌ازای هر مقدار x (متعلق به این فاصله) هم‌گرا باشد و به‌سمت مجموع $S(x)$ میل کند. مجموع n جملهٔ نخست این رشته

$$S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \cdots + u_{n-1}(x)$$

هم تابعی است از x که در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ معین است.

اکنون مقدار η_n را که برابر با کنار بالای مقدار $|S(x) - S_n(x)|$ است[1]، (زمانی که x در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ تغییر می‌کند)، در نظر می‌گیریم. این مقدار را این‌طور می‌نویسند

$$\eta_n = \sup_{a \le x \le b} |S_n(x) - S(x)|$$

در حالتی که مقدار $|S(x) - S_n(x)|$ دارای ماکزیممی باشد (به‌طوری که می‌دانیم وقتی تابع پیوسته باشد، ماکزیممی هم خواهد داشت). η_n ماکزیمم معمولی $|S(x) - S_n(x)|$ در فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ خواهد بود[2].

از آن‌جا که رشته هم‌گراست، بنابراین به‌ازای هر مقدار x متعلق به‌فاصلهٔ بستهٔ $[a,b]$ خواهیم داشت:

$$\underset{n \to \infty}{\text{حد}} |S(x) - S_n(x)| = 0$$

ولی مقدار η_n می‌تواند در این ضمن به‌سمت صفر میل کند و یا میل نکند. اگر مقدار η_n وقتی که $n \to \infty$، به‌سمت صفر میل کند، رشته را ***هم‌گرای یکنواخت*** گویند. در حالت عکس، رشته، هم‌گرای غیریکنواخت خواهد بود. به‌همین مفهوم می‌توان دربارهٔ هم‌گرایی یکنواخت و یا هم‌گرایی غیریکنواخت دنباله تابع‌های $S(x)$ صحبت کرد، بدون این که مجبور باشیم رشته‌ای را که این تابع‌ها از مجموع‌های جزئی آن‌ها به‌وجود آمده است، در نظر بگیریم.

مثال ۱. رشتهٔ تابع‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

---

۱. بخش پانزدهم را ببینید.

۲. sup خلاصه کلمهٔ لاتینی Superior (بالاترین) است.

$$\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+2)(x+3)}-\cdots$$

این رشته تابع‌ها، تنها به‌ازای مقدارهای مثبت x، یعنی روی نیم‌خط $(0\ ,\ \infty)$ معین است و می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{x+1}+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+2}\right)\cdots$$

از آن‌جا مجموع جزئی آن چنین خواهد شد:

$$S_n(x)=\frac{1}{x+n}$$

و از آن‌جا

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x)=0$$

بنابراین، این رشته به‌ازای همهٔ مقدارهای مثبت x هم‌گراست و درضمن $S(x)=0$. علاوه بر آن

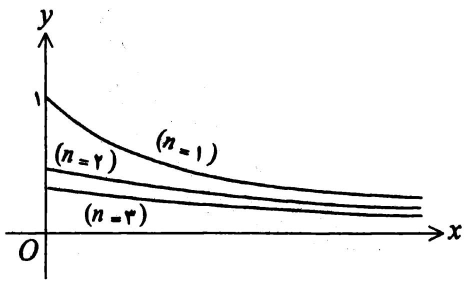
$$\eta_n=\sup_{0\le x\le\infty}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{0\le x\le\infty}\frac{1}{x+n}=\frac{1}{n}\to 0\qquad(n\to\infty)$$

و رشته روی نیم‌خط $(0\ ,\ \infty)$ هم‌گرای یکنواخت است. در شکل ۳۷ نمایش تغییرات مجموع $S_n(x)$ رسم شده است.

مثال ۲. رشتهٔ

$$x+x(x-1)+x^2(x-1)+\cdots$$

را می‌توان به این صورت نوشت:



شکل ۳۷

$$x + (x^۲ - x) + (x^۳ - x^۲) + \cdots$$

و از آن‌جا

$$S_n(x) = x^n$$

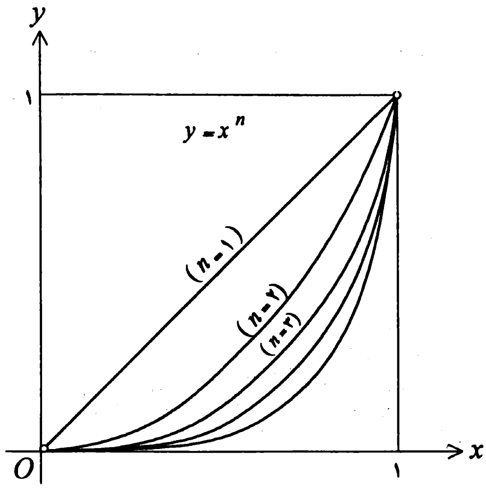
و بنابراین

$$\underset{n \to \infty}{\text{حد}}\, S_n(x) = \begin{cases} ۰ & (۰ \le x < ۱) \\ ۱ & (x = ۱) \end{cases}$$

بنابراین، مجموع رشته در فاصلهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ ناپیوسته است و نقطهٔ ناپیوستگی آن $x = ۱$ می‌باشد. مقدار $|S_n(x) - S(x)|$ به‌ازای هر مقدار دل‌خواهی از فاصلهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ کوچکتر از واحد است، ولی وقتی که x به $x = ۱$ نزدیک می‌شود، این مقدار به‌اندازهٔ کافی به واحد نزدیک خواهد شد. از آن‌جا به‌ازای همه مقدارهای $n = ۱, ۲, \dots$ خواهیم داشت:

$$\eta_n = \sup_{۰ \le x \le ۱} |S_n(x) - S(x)| = ۱$$

بنابراین، رشتهٔ ما در فاصلهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ هم‌گرا ولی غیریکنواخت است. در شکل ۳۸ منحنی نمایش تغییر تابع $S_n(x)$ نشان داده شده است. منحنی مجموع رشته، تشکیل شده است از فاصلهٔ نیم‌بستهٔ $۰ \le x < ۱$ (بدون انتهای راست) و از نقطه منفرد $(۱, ۱)$.



شکل ۳۸

این نمونه نشان می‌دهد که مجمّوع رشته تابع‌های پیوسته، وقتی هم‌گرای یکنواخت نباشد، ممکن است تابع ناپیوسته از آب درآید.

از سوی دیگر اگر این رشته در فاصلهٔ $\circ \leq x \leq q$، که در آن $q < 1$، بررسی شود، خواهیم داشت:

$$\eta_n = \sup_{\circ \leq x \leq q} |S_n(x) - S(x)| = \underset{\circ \leq x \leq q}{\mathrm{Max}}\; x^n = q^n \to \circ \qquad (n \to \infty)$$

و بنابراین، رشتهٔ ما در این فاصله، هم‌گرای یکنواخت و مجموع آن، همان‌طور که دیده می‌شود، پیوسته است. این کیفیت که مجموع رشتهٔ هم‌گرای یکنواخت از تابع‌های پیوسته، خود تابعی پیوسته است، یک قاعدهٔ کلی است که می‌توان آن را بادقت ثابت کرد.

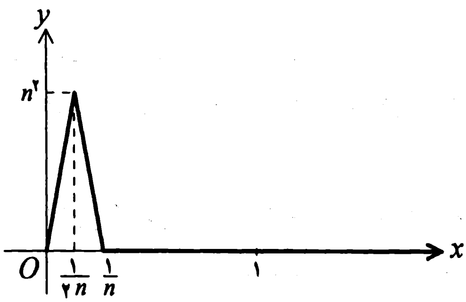
مثال ۳. مجموع n جملهٔ نخست رشتهٔ $S_n(x)$ با خط شکسته‌ای که پررنگ‌تر چاپ شده در شکل ۳۹ نشان داده شده است. روشن است برای همهٔ مقدارهای n، داریم: $S_n(\circ) = \circ$؛ همچنین اگر $\circ \leq x \leq 1$، آن‌وقت باز هم به‌ازای همهٔ مقدارهای $n \geq \frac{1}{x}$ داریم: $S_n(x) = \circ$. بنابراین برای هر مقدار x از فاصلهٔ $[\circ, 1]$:

$$S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x) = \circ$$

از طرف دیگر داریم:

$$\eta_n = \sup_{\circ \leq x \leq 1} |S_n(x) - S(x)| = \sup |S_n(x)| = n^2$$

می‌بینیم مقدار η_n به‌سمت صفر میل نمی‌کند، بلکه حتی به‌سمت بی‌نهایت میل می‌کند. یادآور می‌شویم که از رشتهٔ متناظر با دنبالهٔ $S_n(x)$ نمی‌توان عضو به عضو در فاصلهٔ $[\circ, 1]$



شکل ۳۹

انتگرال گرفت، زیرا

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0 \quad , \quad \int_0^1 S_n(x)\,dx = \frac{1}{2}n^2\frac{1}{n} = \frac{n}{2}$$

و بنابراین رشتهٔ

$$\int_0^1 S_1(x)\,dx + \int_0^1 [S_2(x) - S_1(x)]\,dx + \int_0^1 [S_3(x) - S_2(x)]\,dx + \cdots$$

به این رشتهٔ واگرا منجر می‌شود:

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{4}{2} - \frac{3}{2}\right) + \cdots$$

ویژگی‌های بنیانی رشته‌های هم‌گرای یکنواخت را بدون اثبات می‌آوریم:

۱. مجموع رشته‌ای از تابع‌های پیوسته، که در فاصلهٔ $[a,b]$ هم‌گرای یکنواخت باشد، تابعی است پیوسته در این فاصله.

۲. اگر رشتهٔ تابع‌های پیوستهٔ

$$S(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \cdots \tag{۵۷}$$

در فاصلهٔ $[a,b]$ هم‌گرای یکنواخت باشد، می‌توان از آن در این فاصله عضو به عضو انتگرال گرفت. یعنی برای همه مقدارهای x_1 و x_2 از فاصلهٔ $[a,b]$ این برابری درست است:

$$\int_{x_1}^{x_2} S(t)\,dt = \int_{x_1}^{x_2} u_0(t)\,dt + \int_{x_1}^{x_2} u_1(t)\,dt + \cdots$$

۳. فرض کنید که رشتهٔ (۵۷) در فاصلهٔ $[a,b]$ هم‌گرا باشد و تابع‌های $u_k(x)$ دارای مشتق‌های پیوسته باشند، در این صورت برابری

$$S'(x) = u'_0(x) + u'_1(x) + u'_2(x) + \cdots \tag{۵۸}$$

که به‌وسیلهٔ دیفرانسیل‌گیری عضوبه‌عضو از رشتهٔ (۵۷) به‌دست آمده است، در فاصله $[a,b]$ درست است، با این شرط که رشتهٔ سمت راست برابری (۵۸) هم‌گرای یکنواخت باشد.

رشتهٔ توانی. در بند ۹، تابع $f(x)$ را که در فاصلهٔ $[a,b]$ داده شده است به این شرط تحلیلی نامیدیم که در این فاصله دارای مشتق از هر مرتبه‌ای باشد و در میدان کوچکی در اطراف نقطهٔ دل‌خواه x_0، از فاصلهٔ $[a,b]$، به رشتهٔ هم‌گرای تیلور تبدیل شود:

$$f(x)=f(x_{\circ})+\frac{f'(x_{\circ})}{1}(x-x_{\circ})+\frac{f''(x_{\circ})}{2!}(x-x_{\circ})^2+\cdots \qquad (۵۹)$$

اگر قرار بگذاریم که

$$a_n=\frac{f^{(n)}(x_{\circ})}{n!}$$

آن‌وقت این رشته را به‌صورت زیر هم می‌توان نوشت:

$$f(x)=a_{\circ}+a_1(x-x_{\circ})+a_2(x-x_{\circ})^2+\cdots \qquad (۶۰)$$

در ریاضیات، هر رشته از این نمونه را که در آن a_1، a_2، ... مقدارهایی ثابت و بدون بستگی به x باشد رشتهٔ توانی می‌نامند.

به‌عنوان نمونه، این رشته را که جمله‌های آن تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند بررسی می‌کنیم:

$$1+x+x^2+x^3+\cdots \qquad (۶۱)$$

می‌دانیم به‌ازای مقدارهایی از x، که در فاصلهٔ $-1<x<1$ واقع باشد، این رشته هم‌گراست و مجموع آن برابر است با:

$$S(x)=\frac{1}{1-x}$$

و به‌ازای دیگر مقدارهای x، رشته‌ای واگراست.

همچنین به‌سادگی دیده می‌شود که اختلاف بین مجموع رشته با مجموع n جملهٔ نخست آن، با این رابطهٔ معین می‌شود:

$$S(x)-S_n(x)=\frac{x^n}{1-x} \qquad (۶۲)$$

و اگر $-q\le x\le q$ باشد (که در آن q عددی است مثبت و کوچکتر از واحد) در آن صورت:

$$\eta_n=\text{Max}\left|S(x)-S_n(x)\right|=\frac{q^n}{1-q}$$

از آن‌جا دیده می‌شود که η_n با بزرگ شدن n به‌سمت صفر میل می‌کند و هم‌گرایی رشته در فاصلهٔ $-q\le x\le q$، که در آن q عددی مثبت و کوچکتر از واحد است، یکنواخت می‌باشد.

به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد، تابع

$$S(x)=\frac{1}{1-x}$$

دارای مشتق مرتبهٔ nامی برابر

$$S^{(n)}(x)=\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

است و از آن‌جا

$$S^{(n)}(0)=n!$$

و مجموع n جملهٔ نخست رابطهٔ تیلور از تابع $S(x)$، به‌ازای $x=0$ به‌طور دقیق برابر با مجموع n جملهٔ نخست رشتهٔ (۵۹) خواهد شد. علاوه بر آن می‌دانیم که جملهٔ باقی‌ماندهٔ رابطه، که به‌وسیلهٔ برابری (۶۲) نشان داده شده است، با بزرگ شدن n به‌ازای مقدارهایی از x، که در فاصله $-1<x<1$ باشد، به‌سمت صفر میل می‌کند. به این ترتیب ثابت شد که رشتهٔ (۶۱) همان رشتهٔ تیلور مجموع خود آن، یعنی $S(x)$ است.

به مطلب دیگری هم توجه کنیم. در فاصلهٔ هم‌گرایی رشته، نقطهٔ دل‌خواهی مانند x_0 برمی‌گزینیم. به‌سادگی دیده می‌شود که به‌ازای مقدارهایی از x که به‌اندازهٔ کافی به x_0 نزدیک باشد و به‌ویژه به‌ازای مقدارهایی که در رابطهٔ

$$\frac{|x-x_0|}{1-x_0}<1$$

صدق کند، برابری

$$S(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-x_0}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)}=\frac{1}{1-x_0}\left[1+\frac{x-x_0}{1-x_0}+\left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^2+\cdots\right]=$$

$$=\frac{1}{1-x_0}+\frac{x-x_0}{(1-x_0)^2}+\frac{(x-x_0)^2}{(1-x_0)^3}+\cdots \qquad (۶۳)$$

درست است. خواننده بدون زحمت می‌تواند متوجه شود که

$$\frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}=\frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}$$

بنابراین، رشتهٔ (۶۳) رشتهٔ تیلور مجموع خود آن $S(x)$ است؛ و به‌ازای مقدارهایی که در

میدان کوچکی دور و بر $x_\circ$ (که به فاصلهٔ هم‌گرایی رشتهٔ (۶۱) تعلق دارد) قرار دارند، به‌سمت $S(x)$ میل می‌کند و چون $x_\circ$ نقطهٔ دل‌خواهی است، به این معنی است که $S(x)$ یک تابع تحلیلی در این فاصله است.

همهٔ آن‌چه را در این‌جا دربارهٔ رشتهٔ توانی خاص (۶۱) گفتیم، برای هر رشتهٔ توانی دل‌خواهی درست است[1]. به‌ویژه، اگر رشتهٔ تابعی به‌صورت (۶۰) در نظر بگیریم، که در آن a_k عددی است دل‌خواه و بنا بر قانون معینی مشخص می‌شود، می‌توان عددی مانند R (که منفی نیست و به‌ویژه می‌تواند به‌سمت ∞ هم میل کند) به آن نسبت داد که شعاع هم‌گرایی رشتهٔ (۶۰) نامیده می‌شود و دارای این ویژگی‌هاست:

۱. به‌ازای مقدارهایی از x، که در فاصلهٔ $x_\circ-R<x<x_\circ+R$ واقع است (و فاصلهٔ هم‌گرایی نامیده می‌شود)، رشته‌ای هم‌گراست و مجموع آن $S(x)$ در این فاصله، تابعی تحلیلی از x است. همچنین این هم‌گرایی در تمام فاصلهٔ $[a,b]$ که بر فاصلهٔ هم‌گرایی منطبق است، یکنواخت می‌باشد. خود رشته عبارت است از رشتهٔ تیلور مجموع آن.

۲. رشته در انتهای فاصلهٔ هم‌گرایی، بسته به ویژگی‌های مربوط به خود رشته، ممکن است هم‌گرا یا واگرا باشد. اما به هر ترتیب در خارج فاصلهٔ بستهٔ $x_\circ-R\le x\le x_\circ+R$ واگراست.

پیشنهاد می‌کنیم، خواننده این رشته‌های توانی را بررسی کند:

$$۱+\frac{x}{۱}+\frac{x^۲}{۲!}+\frac{x^۳}{۳!}+\cdots$$

$$۱+x+۲!x^۲+۳!x^۳+\cdots$$

$$۱+x+\frac{x^۲}{۲}+\frac{x^۳}{۳}+\cdots$$

ثابت کنید که رشتهٔ نخست، دارای شعاع هم‌گرایی برابر بی‌نهایت و دومی برابر صفر و سومی برابر با واحد است.

بنابر تعریفی که در بالا کردیم، هر تابع تحلیلی در میدانی که به‌اندازهٔ کافی نزدیک به نقطهٔ داده‌شده‌ای از آن باشد، به یک رشتهٔ توانی که به‌سمت این نقطه هم‌گراست، تبدیل می‌شود. برعکس، از آن‌چه گفته شد نتیجه می‌شود که هر رشتهٔ توانی، به‌شرطی که شعاع هم‌گرایی

---

۱. شرح مطلب را در بخش نهم ببینید.

آن برابر صفر نباشد، در فاصلهٔ هم‌گرایی دارای مجموعی به‌صورت یک تابع تحلیلی است.

به این ترتیب می‌بینیم رشته‌های توانی از نظر ساختمانی، به تابع‌های تحلیلی بستگی دارند. همچنین می‌توان گفت که رشته‌های توانی، در فاصلهٔ هم‌گرایی خود، یک وسیلهٔ طبیعی برای نمایش تابع‌های تحلیلی، و بنابراین وسیلهٔ طبیعی تقریب تابع‌های تحلیلی به‌کمک چندجمله‌ای‌های جبری می‌باشند[1].

برای نمونه، از آن‌جا که تابع $\frac{۱}{۱-x}$ در فاصلهٔ $-۱ < x < ۱$ به رشتهٔ توانی

$$\frac{۱}{۱-x} = ۱ + x + x^{۲} + x^{۳} + \cdots$$

تبدیل می‌شود، نتیجه می‌شود که این رشته در هر فاصلهٔ دل‌خواهی مثل $-a \leq x \leq a$ (که در آن $a < ۱$ است) هم‌گرای یکنواخت است و از این‌جا امکان محاسبهٔ تقریبی این تابع در فاصلهٔ $[-a, a]$ به‌کمک مجموع جزئی رشته، با تقریبی که دقت آن از پیش معین شده است، به‌دست می‌آید.

فرض کنیم لازم است تابع $\frac{۱}{۱-x}$ را در فاصلهٔ $\left(-\frac{۱}{۲}, +\frac{۱}{۲}\right)$ با دقت تا ۰٫۰۱ تقریب به‌وسیلهٔ یک چندجمله‌ای نشان دهیم. یادآور می‌شویم که برای همهٔ مقدارهایی که در این فاصله واقع باشد، این نابرابری برقرار است:

$$\left|\frac{۱}{۱-x} - ۱ - x - \cdots - x^{n}\right| = \left|x^{n+۱} + x^{n+۲} + \cdots\right| \leq$$

$$\leq |x|^{n+۱} + |x|^{n+۲} + \cdots \leq \frac{۱}{۲^{n+۱}} + \frac{۱}{۲^{n+۲}} + \cdots = \frac{۱}{۲^{n}}$$

و از آن‌جا که $۶۴ = ۲^{۶}$ و $۱۲۸ = ۲^{۷}$، چندجمله‌ای لازم، از تابعی که بررسی می‌کنیم، در تمام امتداد فاصلهٔ $\left(-\frac{۱}{۲}, +\frac{۱}{۲}\right)$ با دقت ۰٫۰۱ تقریب به‌صورت زیر درخواهد آمد:

$$\frac{۱}{۱-x} \approx ۱ + x + x^{۲} + \cdots + x^{۷}$$

باز هم یکی از ویژگی‌های پرارزش رشته‌های توانی را یادآور می‌شویم: از آن‌ها می‌توان در فاصلهٔ هم‌گرایی، جمله به جمله دیفرانسیل گرفت.

این ویژگی برای حل مسأله‌های مختلفی در ریاضیات به‌کار می‌آید. فرض کنید بخواهیم

---

۱. برای محاسبهٔ تقریبی در خارج از حدود فاصلهٔ هم‌گرایی رشتهٔ توانی، روش‌های دیگری به‌کار می‌رود (بخش دوازدهم را ببینید).

جواب معادلهٔ دیفرانسیلی $y'=y$ را پیدا کنیم، به‌شرطی که علاوه بر آن بدانیم $y(0)=1$، حل آن را به‌صورت رشتهٔ توانی جست‌وجو می‌کنیم:

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

با توجه به شرط اضافی، باید داشته باشیم: $a_0=1$. فرض می‌کنیم، این رشته هم‌گرا باشد در این صورت می‌توانیم از آن جمله به جمله دیفرانسیل بگیریم، درنتیجه خواهیم داشت:

$$y'=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots$$

با قرار دادن این دو رشته در معادلهٔ دیفرانسیلی و برابر قرار دادن ضریب‌های توان‌های برابر دو طرف، خواهیم داشت:

$$a_k=\frac{1}{k!}\qquad (k=1,2,\ldots)$$

و جواب، به این صورت درمی‌آید:

$$y=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

روشن است که این رشته برای همه مقدارهای x هم‌گرا و مجموع آن برابر $y=e^x$ است.

در این حالت مجموع رشته، یک تابع مقدماتی است که از قبل آن را می‌شناختیم. ولی این اتفاق همیشه نمی‌افتد: ممکن است جواب مسأله، رشتهٔ توانی متقاربی باشد که مجموعش برابر با هیچ تابع مقدماتی معلومی نشود. برای نمونه، رشتهٔ

$$y_p(x)=x^p\left(1-\frac{x^2}{2(2p+2)}+\frac{x^4}{2(2p+2)(2p+4)}-\cdots\right)$$

که به‌عنوان جواب تقریبی معادله دیفرانسیلی *بِسِل* به‌دست می‌آید. بنابراین رشته‌های توانی وسیله‌ای برای تشکیل تابع‌های تازه هم می‌باشند.

بخش سوم

هندسهٔ تحلیلی

ب. ن. دِلُون

۱. ورود به مطلب

در نیمهٔ نخست سدهٔ هفدهم شاخهٔ تازه‌ای به‌نام هندسهٔ تحلیلی، در ریاضیات به‌وجود آمد که توانست بستگی بین منحنی‌های روی صفحه را با معادله‌های جبری برقرار کند.

به‌ندرت و با گذشت هر یکی دو سده، پیش می‌آید که براساس اندیشه‌ای بسیار ساده و طبیعی، که تا آن زمان از دیدها دور مانده است، شاخهٔ تازه‌ای در ریاضیات به‌وجود آید. پیدایش هندسهٔ تحلیلی در نیمهٔ نخست سدهٔ هفدهم، *تصادفی* نبود. گذار اروپا به وضع تازه، یعنی شکل سرمایه‌داری تولید، بازسازی و پیشبرد رشته‌های زیادی از دانش انسانی را ایجاب می‌کرد. *گالیله* و دیگر دانشمندان، بنیان‌گذاری مکانیک را آغاز کردند، در همهٔ رشته‌های دانش‌های طبیعی، داده‌های بسیاری از راه آزمایش جمع شد. ابزارهای مشاهده تکمیل شد و نظریه‌های تازه، جانشین اندیشه‌های کهنهٔ اسکولاستیک شد. در زمینهٔ اخترشناسی، سرانجام آموزش *کوپرنیک* بین دانشمندان پیشرو پیروز شد. پیشرفت بی‌اندازهٔ دریانوردی، به دانش اخترشناسی و مقدمه‌های مکانیک نیاز جدی پیدا کرد.

در مکانیک، مبارزه‌ای لازم بود. هنوز بیضی و سهمی، که ویژگی‌های آن‌ها به‌عنوان مقطع‌های مخروطی، از نزدیک ۲۰۰۰ سال پیش به‌وسیلهٔ یونانی‌ها به‌تفصیل روشن شده بود، موضوع‌هایی از هندسه شمرده می‌شد (همان‌طور که دید یونانی‌ها هم چنین بود). بعد از آن‌که *کپلر* کشف کرد، سیاره‌ها روی محیط بیضی دور خورشید می‌چرخند و *گالیله* روشن کرد، سنگی که پرتاب می‌شود روی سهمی حرکت می‌کند، دیگر لازم بود این بیضی‌ها را محاسبه کنند، مسیر گلولهٔ توپ را که یک سهمی است، به‌دست آورند، لازم بود قانونی را، که بنابر آن فشار هوا در بلندی‌ها کم می‌شود و به‌وسیلهٔ *پاسکال* کشف شده بود، جست‌وجو کنند؛ لازم بود حجم جسم‌های گوناگون را در عمل محاسبه کنند و از این قبیل.

مسأله‌هایی از این‌گونه، که دیگر وارد در زندگی بشر شده بود، به‌تقریب به‌طور هم‌زمان، سه شاخهٔ تازه را در دانش ریاضی به‌وجود آورد: هندسهٔ تحلیلی، محاسبه‌های دیفرانسیلی و محاسبه‌های انتگرالی (که درضمن شامل معادله‌های سادهٔ دیفرانسیلی هم بود).

این سه گونه محاسبهٔ تازه، چهرهٔ تمامی ریاضیات را عوض کرد و آن را به راه تازه‌ای انداخت. به‌یاری این شاخه‌های تازه، مسأله‌ها و پرسش‌هایی بررسی شد که پاسخ دادن به آن‌ها تا آن زمان ناممکن به‌نظر می‌رسید.

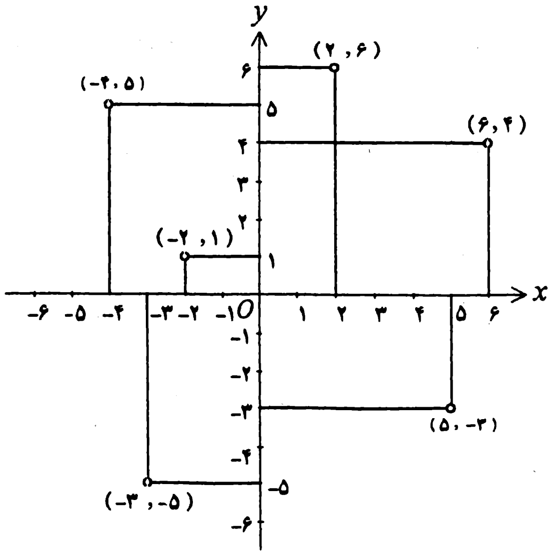
در نیمهٔ اول سدهٔ هفدهم، یعنی در نخستین سال‌های ۱۶۰۰، عده‌ای از ریاضی‌دانان بزرگ به اندیشهٔ هندسهٔ تحلیلی نزدیک شده بودند، ولی تنها دو ریاضی‌دان بودند که به‌طور جدی متوجه شدند می‌توان از این اندیشه یک شاخهٔ تازه در ریاضیات به‌وجود آورد. این دو نفر، یکی *پیر فرما*، مشاور مجلس در تولوز یکی از شهرهای فرانسه و یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان جهان، و دیگری *رنه دکارت*، فیلسوف مشهور فرانسوی بود. همه، *دکارت* را بنیان‌گذار هندسهٔ تحلیلی می‌شناسند. *دکارت*، به‌عنوان یک فیلسوف، مسأله را به‌صورت عمومی آن طرح کرد. *دکارت*، رسالهٔ بزرگ فلسفی خود را چاپ کرد: «گفتار در روش، برای این‌که به عقل خود جهت درست بدهیم و راستی را در دانش‌هایی که به شناسایی نور، هواشناسی، هندسه و وابسته‌های آن‌ها بستگی دارد، کشف کنیم».

بخش اخیر این تألیف به‌نام «هندسه» که در سال ۱۶۳۷ چاپ شد، دارای توضیح‌های کافی، و البته کم و بیش درهم، دربارهٔ نظریه‌ای از ریاضیات است که ما آن را «هندسهٔ تحلیلی» می‌نامیم.

۲. دو اندیشهٔ بنیادی دکارت

دکارت می‌خواست روشی بیافرینند تا همهٔ مسأله‌های هندسه را یک‌جا و به‌صورتی یک‌دست حل کند، یعنی در جست‌وجوی راه‌حلی کلی برای این‌گونه مسأله‌ها بود. نظریهٔ *دکارت* متکی بر دو اندیشه بود: اندیشهٔ مختصات و اندیشهٔ نمایش هر معادلهٔ جبری دومجهولی به‌صورت یک منحنی مسطح به یاری روش مختصاتی.

اندیشهٔ مختصات. ***مختصات نقطه*** در صفحهٔ دکارتی به طول و عرض این نقطه گفته می‌شود:



شکل ۱

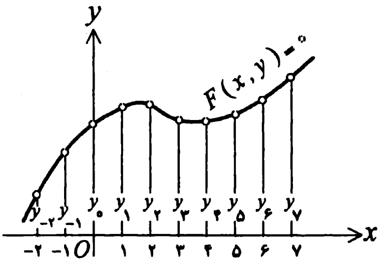
مقدارهای عددی xو y که عبارت‌اند از فاصله‌های این نقطه (با توجه به علامت آن‌ها) تا دو خط راست که عمود بر هم در این صفحه برگزیده شده است (محورهای مختصات) (بخش دوم را ببینید). نقطهٔ برخورد این دو محور، یعنی نقطهٔ با مختصات (۰, ۰) را ***مبدأ مختصات*** گویند.

مختصات دکارتی، به‌اصطلاح، «حسابی کردن» صفحه را به‌پایان می‌رساند: به‌جای این‌که جای نقطه‌ای به‌صورت هندسی معین شود، کافی است زوج عددهای xو yداده شده باشد و برعکس (شکل ۱).

اندیشهٔ متناظر بودن معادلهٔ دومجهولی با منحنی روی صفحه. تا زمان دکارت، هرگاه به یک معادلهٔ دومجهولی $F(x,y) = 0$ برخورد می‌کردند می‌گفتند که مسأله نامعین است زیرا نمی‌شد مجهول‌ها را از این معادله به‌دست آورد، بلکه تنها می‌شد یکی از مجهول‌ها، مثل xرا، عددی دلخواه گرفت و سپس این عدد را به‌جای xقرار داد و در حالت کلی از این معادلهٔ یک مجهولی که به‌دست می‌آید، مقدار y را پیدا کرد. در این صورت، ***این مقدار دلخواه انتخابی x*** همراه با ***مقدار به‌دست‌آمدهٔ y*** در معادلهٔ مفروض دومجهولی، صدق می‌کند. به همین مناسبت چنین معادلهٔ «نامعینی» نمی‌توانست برای ریاضی‌دان‌ها جالب باشد.

دکارت با دید دیگری به این مسأله نگاه کرد. او در معادلهٔ دومجهولی xرا به‌عنوان طول و yنظیر آن را به‌عنوان عرض یک نقطه به‌حساب آورد. در این صورت، اگر xرا به‌طور پیوسته تغییر دهیم و برای هرکدام از این مقدارهای x، مقدار y را از معادله به‌دست آوریم، در حالت کلی، به‌مجموعه‌ای از نقطه‌ها می‌رسیم که یک منحنی را مشخص می‌کنند (شکل ۲)[1].

$$F(-۲\,,\,y_{-۲}) = ۰$$
$$F(-۱\,,\,y_{-۱}) = ۰$$
$$F(۰\,,\,y_{۰}) = ۰$$
$$F(۱\,,\,y_{۱}) = ۰$$
$$F(۲\,,\,y_{۲}) = ۰$$
....



شکل ۲

به این ترتیب، هر معادلهٔ جبری دومجهولی $F(x,y) = ۰$، با یک منحنی مشخص در صفحه متناظر می‌شود این منحنی از مجموعهٔ نقطه‌هایی تشکیل می‌شود که مختصات هرکدام از آن‌ها در معادلهٔ $F(x,y) = ۰$ صدق می‌کند.

این ملاحظهٔ **دکارت**، به‌معنای پیدایش یک دانش تازه بود.

مسأله‌های اساسی که در هندسهٔ تحلیلی حل می‌شوند. تعریف هندسهٔ تحلیلی. هندسهٔ تحلیلی امکان می‌دهد: ۱) مسأله‌های مربوط به ساختمان‌های هندسی را حل کنیم (به‌عنوان نمونه، مسألهٔ تقسیم یک پاره‌خط به‌نسبت مفروض)؛ ۲) معادلهٔ منحنی‌هایی را که دارای ویژگی‌های مشخص هندسی هستند، پیدا کنیم (در مثل، از شرط ثابت بودن مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ منحنی از دو نقطهٔ ثابت، معادلهٔ بیضی به‌دست می‌آید)؛ ۳) قضیه‌های تازه‌ای را در هندسه، به‌یاری جبر، ثابت کنیم (مثل نتیجه‌گیری از نظریهٔ قطرهای نیوتنی)؛ ۴) برعکس، با نمایش هندسی یک معادلهٔ جبری، ویژگی‌های جبری آن را روشن کنیم (مثل حل معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم، به‌کمک برخورد سهمی و دایره).

---

۱. گاهی، هیچ نقطه‌ای با مختصات حقیقی در معادله صدق نمی‌کند و گاهی تنها مختصات یک یا چند نقطه در آن صدق می‌کند. در این صورت گویند که منحنی موهومی است یا به نقطه‌هایی تبدیل شده است.

هندسهٔ تحلیلی عبارت است از چنان چهره و چنان بخشی از ریاضیات که با واسطهٔ جبر و با به‌کار گرفتن روش مختصات، به بررسی موضوع‌های هندسی می‌پردازد.

۳. مسأله‌های ساده

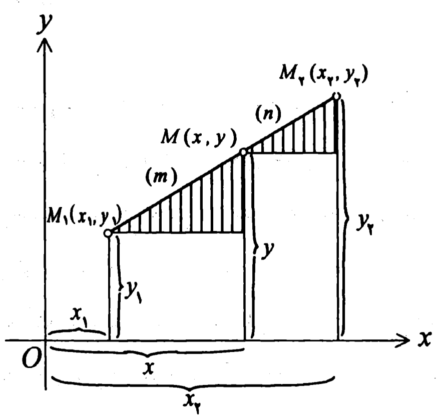
مختصات نقطه‌ای که پاره‌خط راست داده‌شده را، به‌نسبت معلوم تقسیم می‌کند. اگر (x_1, y_1) و (x_2, y_2)، مختصات دو نقطهٔ M_1 و M_2، معلوم باشد، مطلوب است (x,y)، مختصات نقطهٔ M، که پاره‌خط راست M_1M_2 را به‌نسبت m و n تقسیم کرده است (شکل ۳). از تشابه مثلث‌های سایه‌خورده، به‌دست می‌آید:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{m}{n} \Rightarrow x=\frac{nx_1+mx_2}{m+n}$$

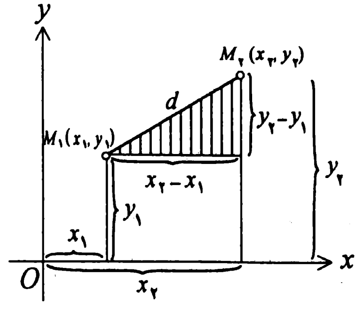
$$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{m}{n} \Rightarrow y=\frac{ny_1+my_2}{m+n}$$

فاصلهٔ بین دو نقطه. مطلوب است مقدار d، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ M_1 و M_2، که مختصات آن‌ها به‌ترتیب عبارت است از (x_1, y_1) و (x_2, y_2). در مثلث قائم‌الزاویهٔ سایه‌خورده (شکل ۴)، بنا بر قضیهٔ فیثاغورس، به‌دست می‌آید:

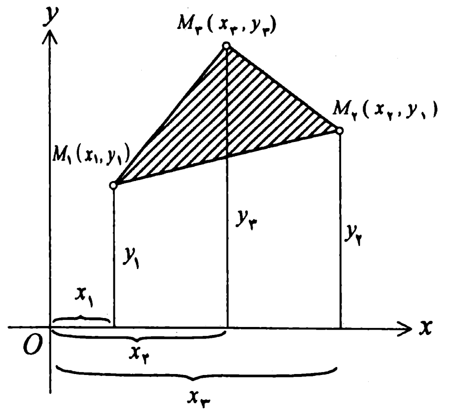
$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$



شکل ۳



شکل ۴



شکل ۵

مساحت مثلث. مطلوب است مقدار S، مساحت مثلث $M_1M_2M_3$ (شکل ۵)، که مختصات رأس‌های آن عبارت است از (x_1,y_1) و (x_2,y_2) و (x_3,y_3). مساحت مثلث را به‌صورت مجموع مساحت‌های دو ذوزنقه با قاعده‌های y_1، y_3 و y_3، y_2، منهای مساحت ذوزنقهٔ با قاعده‌های y_1، y_2، در نظر می‌گیریم و حاصل‌ضرب $-(y_1+y_2)(x_2-x_1)$ را به‌صورت $(y_2+y_1)(x_1-x_2)$ می‌نویسیم. به‌دست می‌آید:

$$S = \frac{1}{2}\left[\, (y_1+y_2)(x_1-x_2) + (y_2+y_3)(x_2-x_3) + (y_3+y_1)(x_3-x_1) \,\right]$$

در این مسأله‌ها، تنها باید تحقیق کرد که رابطه‌های به‌دست‌آمده، بدون هیچ تفاوتی، برای حالت‌هایی هم که یک یا چند مختص یا تفاضل آن‌ها منفی باشد، درست است؛ و این تحقیق را می‌توان به‌سادگی انجام داد.

جست‌وجوی نقطهٔ برخورد دو منحنی. با تکیه بر اندیشهٔ بنیادی دوم، که معادلهٔ $F(x,y)=0$ بیان جبری یک منحنی است، به‌سادگی می‌توان نقطهٔ برخورد دو منحنی را پیدا کرد. روشن است برای پیدا کردن نقطهٔ برخورد دو منحنی باید معادله‌های آن‌ها را، مثل یک دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی حل کرد. دو عدد x و y که از حل عادی دو معادله به‌دست می‌آید، نقطه‌ای را مشخص می‌کند که مختصات آن در هریک از دو معادله صدق می‌کند، یعنی نقطه‌ای به‌دست می‌آید که روی هر دو منحنی قرار دارد، و این همان نقطهٔ برخورد دو منحنی است.

همان‌طور که دیده می‌شود، حل مسأله‌های هندسی به‌کمک هندسهٔ تحلیلی، کار را در عمل خیلی ساده می‌کند، به‌ویژه از این جهت که پاسخ، به‌صورت عددهای حاضر و آماده‌ای به‌دست می‌آید.

۴. بررسی منحنی‌هایی که با معادله‌های درجهٔ اول و درجهٔ دوم بیان می‌شوند

معادلهٔ درجهٔ اول. در کاربرد اندیشهٔ دوم **دکارت**، پیش از همه به بررسی منحنی متناظر با معادلهٔ درجهٔ اول می‌پردازیم، یعنی معادلهٔ

$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

که در آن A، B و C ضریب‌های عددی‌اند و نیز A و B با هم برابر صفر نیستند. معلوم شده است که چنین معادله‌ای همیشه متناظر با یک خط راست در روی صفحه است.

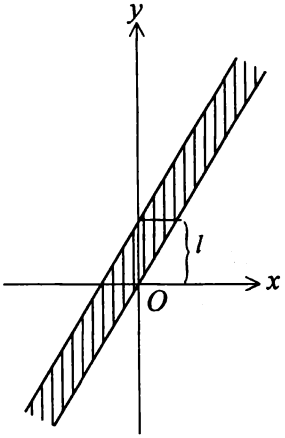
ثابت می‌کنیم که معادلهٔ (۱) همیشه یک خط راست را مشخص می‌کند. برعکس هر خط راست واقع در صفحه به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۱) بیان می‌شود. اگر برای نمونه فرض کنیم $B \neq 0$، در این صورت می‌توان معادلهٔ (۱) را نسبت به y حل کرد

$$y = kx + l$$

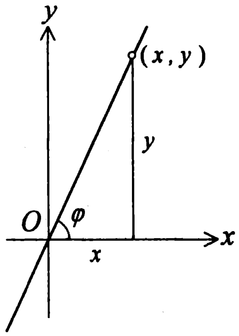
که در آن $k = -\frac{A}{B}$، $l = -\frac{C}{B}$.

ابتدا معادلهٔ $y = kx$ را بررسی می‌کنیم. این معادله، خط راستی را مشخص می‌کند که از مبدأ مختصات می‌گذرد و با محور x زاویه‌ای برابر φ می‌سازد که تانژانت آن برابر است با k؛ $\tan\varphi = k$ (شکل ۶). درواقع، این معادله را می‌توان به‌صورت $\frac{y}{x} = k$ نوشت؛ همهٔ نقطه‌های چنین خط راستی در این معادله صدق می‌کند و هیچ نقطهٔ (x,y) که بر این خط راست واقع نباشد، در این معادله صدق نمی‌کند. زیرا برای آن $\frac{y}{x}$ یا بزرگتر ویا کوچکتر از k است. درضمن، اگر $\tan\varphi > 0$، برای چنین خطی x و y هردو مثبت ویا هردو منفی است، و اگر $\tan\varphi < 0$، علامت x و y مخالف یکدیگر است.

به این ترتیب، معادلهٔ $y = kx$، خط راستی را بیان می‌کند که از مبدأ مختصات O عبور کرده است، و بنابراین معادلهٔ $y = kx + l$ هم بیان‌کنندهٔ یک خط راست است که از انتقال



شکل ۷



شکل ۶

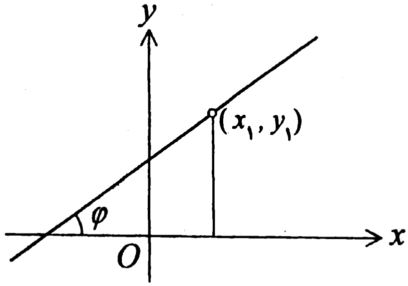
موازیِ خط قبل به‌دست آید، به‌نحوی که به عرض‌های همهٔ نقطه‌های آن به‌اندازهٔ l اضافه شود (شکل ۷).

رابطه‌هایی را که دیدیم؛ مختصات نقطه‌ای که پاره‌خط راست را به‌نسبتی تقسیم می‌کند، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ مفروض، مساحت مثلث و همچنین آگاهی از معادلهٔ خط راست، امکان می‌دهد که بتوانیم مسأله‌های زیادی را حل کنیم.

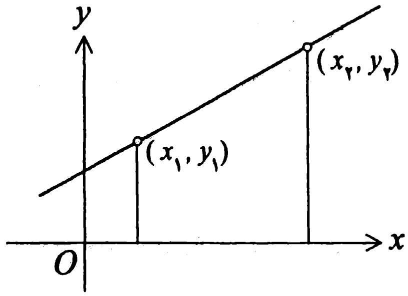
معادلهٔ خط راستی که از یک یا دو نقطهٔ مفروض می‌گذرد. M_1 را نقطه‌ای با مختصات x_1 و y_1، و k را عددی مفروض در نظر می‌گیریم. معادلهٔ $y = kx + l$ خط راستی را بیان می‌کند که با محور Ox زاویه‌ای به‌تانژانت برابر k می‌سازد و روی محور Oy پاره‌خط راستی برابر l جدا می‌کند. l را چنان انتخاب می‌کنیم که این خط راست از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور کند. برای این منظور باید مختصات نقطهٔ M_1 در معادله صدق کند، یعنی باید داشته باشیم $y_1 = kx_1 + l$ و از آن‌جا به‌دست می‌آید: $l = y_1 - kx_1$.

با قرار دادن این مقدار l، معادلهٔ خط راستی به‌دست می‌آید که از نقطهٔ (x_1, y_1) عبور می‌کند و با محور Ox زاویه‌ای می‌سازد که تانژانت آن برابر k است (شکل ۸). این معادله به‌صورت $y = kx + y_1 - kx_1$ و یا به این صورت درمی‌آید:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$



شکل ۸



شکل ۹

مثال. فرض کنید زاویهٔ بین خط راست و محور Ox برابر ۴۵ درجه و نقطهٔ M به‌مختصات (۳,۷) باشد. در این صورت معادلهٔ خط راست متناظر آن (با توجه به این‌که $\tan 45° = 1$) چنین خواهد شد:

$$y - 7 = 1(x - 3) \quad \Rightarrow \quad x - y + 4 = 0$$

اگر خط راستی که از نقطهٔ (x_1, y_1) می‌گذرد، درضمن از نقطهٔ (x_2, y_2) هم عبور کند، به معادلهٔ $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$ نسبت به k می‌رسیم. اگر k را از این معادله پیدا کنیم و در معادلهٔ قبلی قرار دهیم، به معادلهٔ خط راستی می‌رسیم که از دو نقطهٔ مفروض می‌گذرد (شکل ۹).

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

نتیجه‌گیری دکارت از معادلهٔ درجه دوم. دکارت این پرسش را پیش روی خود گذاشت که منحنی یک معادلهٔ درجهٔ دوم دومجهولی که صورت کلی آن چنین است:

$$Ax^۲ + Bxy + Cy^۲ + Dx + Ey + F = ۰$$

در صفحه به چه صورت درمی‌آید و نشان داد که چنین معادله‌ای در حالت کلی بیان‌کنندهٔ بیضی، هذلولی و سهمی است که از قدیم در ریاضیات شناخته شده بودند.

این‌ها بود موفقیت‌های اساسی دکارت. با وجود این، کتاب دکارت به این مطالب اکتفا نمی‌کند؛ دکارت معادلهٔ یک‌رشته از مکان‌های هندسی جالب را به‌دست می‌آورد، قضیه‌های مربوط به تبدیل معادله‌های جبری را بررسی می‌کند، ***قانون علامت‌های*** مشهور خود را، بدون اثبات عرضه می‌کند که مربوط است به جست‌وجوی تعداد ریشه‌های مثبت معادله‌ای که همهٔ ریشه‌های آن حقیقی است (بخش چهارم، بند ۴ را ببینید)، و سرانجام روش جالبی برای پیدا کردن ریشه‌های حقیقی معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم به‌یاری برخورد سهمی $y = x^۲$ با دایره به‌دست می‌دهد.

۵. روش دکارت برای حل معادله‌های درجه سوم و درجه چهارم

تبدیل معادلهٔ درجهٔ سوم و چهارم به معادلهٔ درجهٔ چهارمی که شامل جملهٔ $x^۳$ نباشد ثابت می‌کنیم که حل معادلهٔ درجه سوم و چهارم را می‌توان به حل معادله‌ای به‌صورت زیر تبدیل کرد:

$$x^۴ + px^۲ + qx + r = ۰ \qquad (۲)$$

معادلهٔ درجه سوم $z^۳ + az^۲ + bz + c = ۰$ را در نظر می‌گیریم. $z = x - \frac{a}{۳}$ قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$\left(x - \frac{a}{۳}\right)^۳ + a\left(x - \frac{a}{۳}\right)^۲ + b\left(x - \frac{a}{۳}\right) + c = ۰$$

ضمن باز کردن پرانتزها، جملهٔ شامل $x^۲$ حذف می‌شود و به معادله‌ای به‌صورت $x^۳ + px + q = ۰$ می‌رسیم. اگر دو طرف این معادله را در x ضرب کنیم (که درنتیجه جواب $x_۴ = ۰$ را به آن اضافه می‌کند)، معادله‌ای به‌صورت (۲) به‌دست می‌آید که در آن $r = ۰$ است.

معادلهٔ درجه چهارم $z^۴ + az^۳ + bz^۲ + cz + d = ۰$ را می‌توان با تبدیل $z = x - \frac{a}{۴}$ به معادلهٔ به‌صورت (۲) تبدیل کرد. به این ترتیب حل هر معادلهٔ درجه سوم و درجه چهارم را می‌توان به معادله‌ای به‌صورت (۲) منجر کرد.

حل معادلهٔ درجه سوم و درجه چهارم به‌کمک برخورد دایره یا سهمی $y=x^2$. معادلهٔ دایره‌ای را می‌نویسیم که مرکز آن (a,b) و شعاع آن برابر R باشد. اگر (x,y) نقطه‌ای باشد، مجذور فاصلهٔ آن تا نقطهٔ (a,b) برابر است با $(x-a)^2+(y-b)^2$. بنابراین معادلهٔ دایرهٔ مورد نظر چنین است:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

اکنون، نقطهٔ برخورد این دایره را با سهمی $y=x^2$ پیدا می‌کنیم. برای این منظور باید معادله‌های دایره و سهمی را مثل یک دستگاه دومعادله دومجهولی حل کنیم:

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0$$
$$y=x^2$$

مقدار y را از معادلهٔ دوم در معادلهٔ اول قرار می‌دهیم، به معادله‌ای درجه‌چهارم نسبت به x می‌رسیم:

$$x^2+x^4-2ax-2bx^2+a^2+b^2-R^2=0$$

ویا پس از منظم کردن آن

$$x^4+(1-2b)x^2-2ax+a^2+b^2-R^2=0$$

اگر a، b و R^2 را چنان بگیریم که داشته باشیم:

$$1-2b=p\,,\quad -2a=q\,,\quad a^2+b^2-R^2=r$$

که در این صورت، به معادلهٔ (۲) می‌رسیم. درضمن، برای این منظور باید داشته باشیم:

$$a=-\frac{q}{2}\,,\quad b=\frac{1-p}{2}\,,\quad R^2=\frac{q^2}{4}+\frac{(1-p)^2}{4}-r \qquad (3)$$

در رابطهٔ آخر (۳)، در حالت کلی ممکن است R^2 منفی باشد. ولی در حالتی که معادلهٔ (۲) لااقل یک ریشهٔ حقیقی x_1 داشته باشد، این برابری برقرار است:

$$x_1^4+(1-2b)x_1^2-2ax_1+a^2+b^2-R^2=0 \qquad (4)$$

اگر x_1^2 را y_1 بگیریم، برابری (۴) می‌تواند به این صورت درآید:

$$x_1^2+y_1^2-2ax_1-2by_1+a^2+b^2-R^2=0$$

و یا

$$(x_۱-a)^۲+(y_۱-b)^۲=R^۲$$

به این ترتیب در حالتی که معادله (۲) ریشهٔ حقیقی داشته باشد، عدد $\frac{(۱-p)^۲+q^۲}{۴}-r$ مثبت خواهد بود، معادلهٔ

$$(x-a)^۲+(y-b)^۲=R^۲$$

معادلهٔ دایره است و همهٔ ریشه‌های حقیقی معادلهٔ (۲) عبارت است از طول‌های نقطه‌های برخورد سهمی $y=x^۲$ با این دایره (در حالت $r=۰$، $R^۲=a^۲+b^۲$ این دایره از مبدأ مختصات عبور می‌کند).

به این ترتیب، اگر ضریب‌های p، q و r از معادلهٔ (۲) معلوم باشد؛ a، b و $R^۲$ را از رابطه‌های (۳) پیدا می‌کنیم. اگر $R^۲<۰$ باشد، معادلهٔ (۲) ریشهٔ حقیقی ندارد. اگر $R^۲\geq ۰$ باشد، طول‌های نقطه‌های برخورد دایرهٔ به‌مرکز (a,b) و شعاع R با سهمی $y=x^۲$، ریشه‌های حقیقی معادلهٔ (۲) را به‌دست می‌دهد؛ درضمن، در حالت $R^۲>۰$ هم ممکن است دایره با سهمی برخورد نداشته باشد و بنابراین معادلهٔ (۲) بدون ریشهٔ حقیقی باشد.

مثال. این معادلهٔ درجه چهارم را در نظر می‌گیریم:

$$x^۴-۴x^۲+x+\frac{۵}{۲}=۰$$

در این صورت خواهیم داشت:

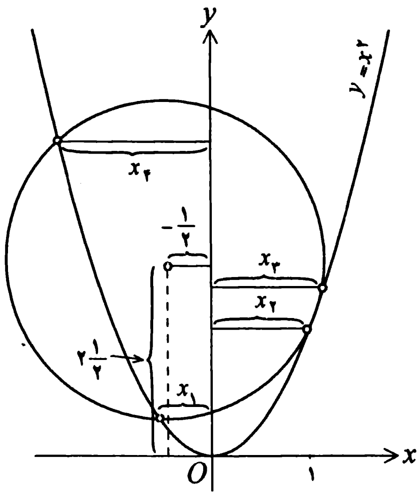
$$a=-\frac{۱}{۲}\quad,\quad b=\frac{۵}{۲}=۲\frac{۱}{۲}\quad,\quad R=\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{۲۵}{۴}-\frac{۵}{۲}}=۲$$

روی شکل ۱۰، دایرهٔ متناظر و ریشه‌های $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ از معادلهٔ ما داده شده است.

بندهای ۱، ۲، ۳ و ۴ به‌طور خلاصه شامل مطالبی از کتاب دکارت بود که به بحث‌های امروزی خیلی نزدیک است.

هندسهٔ تحلیلی از زمان دکارت تا امروز راه تکاملی خود را پیموده است، مسیری که برای همهٔ رشته‌های گوناگون ریاضیات پربار بوده است. در بندهای بعدی این بخش کوشش می‌کنیم مرحله‌های اساسی این مسیر را روشن کنیم.

پیش از همه باید یادآوری کنیم که کشف‌های آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها هم به‌مناسبت



شکل ۱۰

وجود روش دکارت انجام گرفته است. وقتی پرسش‌های مربوط به مماس یا قائم (عمود بر مماس در نقطهٔ تماس) بر منحنی، یا ماکزیمم و می‌نیمم یک تابع، یا شعاع انحنای منحنی در نقطهٔ مفروض آن وغیره طرح می‌شود، همیشه قبل از همه با روش دکارت معادلهٔ این منحنی را معین می‌کنند و سپس به تعیین معادلهٔ مماس، قائم وغیره می‌پردازند. به این ترتیب، آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها و محاسبه‌های دیفرانسیلی و انتگرالی بدون در نظر گرفتن هندسهٔ تحلیلی ناممکن می‌شود.

۶. نظریهٔ کلی قطرهای نیوتن

نخستین کسی که در خود هندسهٔ تحلیلی گام بعدی را برداشت، **نیوتن** بود. او در سال ۱۷۰۴ نظریهٔ منحنی‌های درجهٔ سوم، یعنی منحنی‌هایی را که با معادله‌های درجهٔ سوم جبری دومجهولی بیان می‌شوند، بررسی کرد. **نیوتن** ضمن این بررسی، نظریهٔ عمومی زیبایی دربارهٔ «قطرها» به‌دست آورد. این نظریه چنین است:

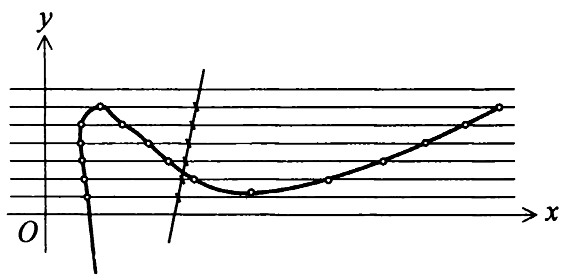
یک منحنی درجهٔ n در نظر می‌گیریم، یعنی منحنی که به‌وسیلهٔ یک معادلهٔ جبری درجهٔ n با دو مجهول بیان شده باشد. در این صورت هر خط راستی که آن را قطع کند، در حالت کلی

n نقطهٔ مشترک با آن خواهد داشت. M را نقطه‌ای از خط راست می‌گیریم که گرانیگاه (مرکزثقل) همهٔ نقطه‌های برخورد آن با منحنی درجهٔ n باشد، یعنی اگر نقطه‌های برخورد خط با منحنی درجهٔ n را نقطه‌های مادی برابر با هم در نظر بگیریم، نقطهٔ M گرانیگاه آن‌ها باشد. حالا اگر همهٔ قاطع‌های موازی با هم را انتخاب کنیم و برای هرکدام از آن‌ها این گرانیگاه M را به‌دست آوریم، همهٔ این نقطه‌های M روی یک خط راست قرار دارند. نیوتن این خط راست را «قطر» منحنی درجهٔ n، متناظر با جهت مفروض قاطع‌ها می‌نامد. اثبات این قضیه به‌کمک هندسهٔ تحلیلی خیلی ساده است و ما آن را می‌آوریم.

یک منحنی درجهٔ n و خط‌های راست موازی با هم که آن را قطع کرده‌اند، در نظر می‌گیریم. محورهای مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که این قاطع‌ها موازی با محور Ox باشند (شکل ۱۱). در این صورت معادلهٔ آن‌ها به‌صورت $y=l$ درمی‌آید، که در آن l برای قاطع‌های مختلف، مقدارهای ثابت مختلفی است. $F(x,y)=0$ را معادلهٔ منحنی درجهٔ n در این دستگاه محورهای مختصات می‌گیریم. به‌سادگی ثابت می‌شود که اگر از یک دستگاه مختصات به دستگاه مختصات دیگری برویم، معادلهٔ منحنی تغییر می‌کند، ولی درجهٔ آن تغییر نمی‌کند (دربارهٔ این مطلب در بند ۸ صحبت شده است). بنابراین $F(x,y)$ هم یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است. برای پیدا کردن طول‌های نقطه‌های برخورد منحنی با خط راست $y=l$ باید معادله‌های $F(x,y)=0$ و $y=l$ را مثل دو معادلهٔ دومجهولی حل کرد، که در حالت کلی معادلهٔ درجهٔ n نسبت به x به‌دست می‌آید

$$F(x,l)=0 \tag{۵}$$

و از آن طول‌های x_1، x_2، ...، x_n پیدا می‌شود. طول x_c، گرانیگاه n نقطهٔ برخورد، طبق رابطهٔ تعیین گرانیگاه برابر است با



شکل ۱۱

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

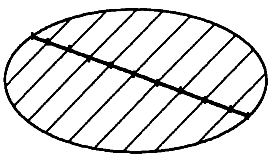
اما از نظریهٔ معادله‌های جبری می‌دانیم که مجموع $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ریشه‌های هر معادله برابر است با قرینهٔ خارج‌قسمت ضریب x^{n-1} بر ضریب x^n. از آن‌جا که مجموع نماهای x و y در هریک از جمله‌های $F(x,y)$ برابر n یا کمتر از n است، بنابراین جملهٔ شامل x^n شامل y نیست و به‌صورت Ax^n است که در آن A مقدار ثابتی است، و جملهٔ شامل x^{n-1}، اگر هم شامل y باشد، نمای y از درجهٔ اول تجاوز نمی‌کند، یعنی به‌صورت $x^{n-1}(By+C)$ است. به این ترتیب، ضرب x^n برابر A و ضریب x^{n-1} برابر $Bl+C$ است و برای مقدار مفروض l داریم:

$$x_c = -\frac{Bl+C}{nA}$$

از طرف دیگر، قاطع موازی محور Ox است و در همهٔ نقطه‌های آن $y=l$ است. بنابراین عرض گرانیگاه نقطه‌های برخورد این خط راست با منحنی درجهٔ n هم برابر l است؛ از آن‌جا به‌دست می‌آید $nAx_c + By_c + C = 0$، یعنی مختصات x_c و y_c همهٔ گرانیگاه‌های همهٔ این قاطع‌ها، در یک معادلهٔ درجهٔ اول صدق می‌کند و بنابراین این گرانیگاه‌ها روی یک خط راست واقع‌اند.

حالتی را هم که در $F(x,y)$ جملهٔ x^n وجود نداشته باشد، می‌توان با ترتیب مشابهی بررسی کرد.

در حالت منحنی درجهٔ دوم ($n=2$)، گرانیگاه دو نقطه، وسط آن‌هاست و معلوم می‌شود که مکان هندسی وسط وترهای موازی در منحنی درجهٔ دوم عبارت است از یک خط راست (شکل ۱۲)، چیزی که برای بیضی، هذلولی یا سهمی از قدیم معلوم بوده است. ولی چه برای این حالت‌های خاص، که با استدلال‌های دشوار هندسی قابل اثبات هستند، و چه در حالت‌هایی که برای دانشمندان قدیم روشن نبوده است،



شکل ۱۲

به‌صورت یک قضیهٔ کلی و به‌سادگی ثابت می‌شود.

این نمونه‌ها، نیروی بزرگ هندسهٔ تحلیلی را نشان می‌دهد.

۷. بیضی، هذلولی و سهمی

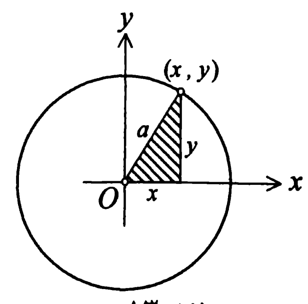
در این بند و بندهای بعد، منحنی‌های درجهٔ دوم را بررسی می‌کنیم. قبل از آن که معادلهٔ درجهٔ دوم کلی را بررسی کنیم، بهتر است به بعضی از صورت‌های خاص آن بپردازیم.

معادلهٔ دایره‌ای که مرکز آن مبدأ مختصات است. قبل از همه به بررسی معادلهٔ

$$x^{2} + y^{2} = a^{2}$$

می‌پردازیم. روشن است که این معادله بیان‌کنندهٔ دایره‌ای به‌مرکز مبدأ مختصات و شعاع برابر a است، که به‌کمک قضیهٔ فیثاغورس از مثلث قائم‌الزاویهٔ سایه‌خورده نتیجه می‌شود (شکل ۱۳). نقطهٔ (x,y) در هر جای محیط دایره باشد، مختصات آن در این معادله صدق می‌کند و برعکس اگر مختصات x و y از نقطه‌ای، در این معادله صدق کند، چنین نقطه‌ای متعلق به محیط دایره است، یعنی محیط این دایره عبارت است از مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه که در این معادله صدق می‌کنند.

معادلهٔ بیضی و خاصیت کانونی آن. دو نقطهٔ F_{1} و F_{2} را به‌فاصلهٔ $2c$ در نظر می‌گیریم. معادلهٔ مکان هندسی همهٔ نقطه‌های M از صفحه را پیدا می‌کنیم که مجموع فاصله‌های آن‌ها از نقطه‌های F_{1} و F_{2} برابر مقدار ثابت $2a$ باشد (که البته a بزرگتر است از c). چنین منحنی را **بیضی** و



شکل ۱۳

نقطه‌های F_1 و F_2 را ***کانون‌های*** آن گویند.

دستگاه محورهای مختصات را چنان می‌گیریم که نقطه‌های F_1 و F_2 بر محور Ox و مبدأ مختصات در وسط این دو نقطه واقع شود. دراین صورت مختصات نقطه‌های F_1 و F_2 به‌ترتیب $(c, 0)$ و $(-c, 0)$ خواهد بود. نقطهٔ دل‌خواه M را به‌مختصات (x, y) واقع بر مکان هندسی انتخاب می‌کنیم و مجموع فاصله‌های آن را از نقطه‌های F_1 و F_2 برابر $2a$ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a \qquad (6)$$

مختصات (x, y) هر نقطهٔ دل‌خواه از مکان هندسی در این معادله صدق می‌کند. عکس آن هم درست است، یعنی هر نقطه‌ای که مختصات آن در معادلهٔ (۶) صدق کند، متعلق به این مکان هندسی است. به این ترتیب، معادلهٔ (۶) معادلهٔ مکان هندسی مطلوب است. اکنون این معادله را ساده می‌کنیم.

دو طرف معادله را مجذور می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x^2-2cx+c^2+y^2+2\sqrt{(x^2-2cx+c^2+y^2)(x^2+2cx+c^2+y^2)}+$$
$$+x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2$$

ویا پس از ساده کردن

$$x^2+y^2+c^2-2a^2=-\sqrt{(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2}$$

دوباره دو طرف این رابطه را مجذور می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(x^2+y^2+c^2)^2-4a^2(x^2+y^2+c^2)+4a^4=(x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2$$

ویا پس از ساده کردن

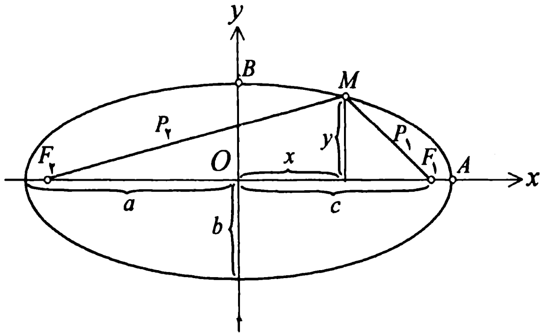
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=(a^2-c^2)a^2$$

$a^2-c^2=b^2$ می‌گیریم (که با توجه به این که $a>c$، این عمل ممکن است)، به‌دست می‌آید:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

که با تقسیم دو طرف آن بر a^2b^2 به‌دست می‌آید:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (7)$$



شکل ۱۴

مختصات (x,y) هر نقطهٔ M از مکان هندسی ما در معادلهٔ (۷) صدق می‌کند.

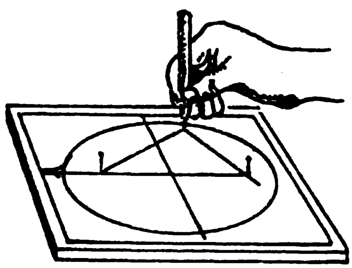
می‌توان ثابت کرد که برعکس، اگر مختصات نقطه‌ای در معادلهٔ (۷) صدق کند، بی‌تردید در معادلهٔ (۶) هم صدق خواهد کرد.

بنابراین، معادلهٔ (۷) معادلهٔ این مکان هندسی، یعنی معادلهٔ بیضی است (شکل ۱۴).

این مثال نمونهٔ مشخصی از جست‌وجوی معادلهٔ منحنی است، وقتی ویژگی هندسی آن معلوم باشد.

این ویژگی بیضی، که مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ آن از دو نقطهٔ مفروض مقداری ثابت است، اساس روش رسم بیضی به‌کمک نخ است (شکل ۱۵).

یادداشت. برای تعریف بیضی می‌توان به‌جای ویژگی کانونی آن، که در این‌جا در نظر گرفتیم، ویژگی هندسی دیگری که بتواند آن را مشخص کند در نظر گرفت برای نمونه، بیضی عبارت است از نتیجهٔ «تراکم یکنواخت» دایره به‌سمت قطر آن (بند ۱۱ همین بخش را ببینید) و یا



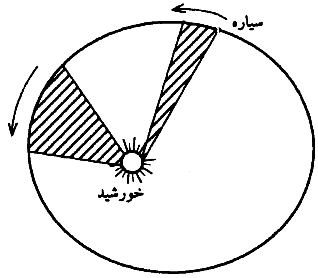
شکل ۱۵

ویژگی دیگری از آن.

اگر در معادلهٔ (۷) بیضی فرض کنیم $y = 0$ به‌دست می‌آید $x = \pm a$، یعنی a برابر است با طول پاره‌خط راست OA (شکل ۱۴) که آن را **نیم‌قطر بزرگتر** بیضی گویند. به همین ترتیب، اگر فرض کنیم $x = 0$، به‌دست می‌آید $y = \pm b$، یعنی b برابر است با طول پاره‌خط راست OB که آن را **نیم‌قطر کوچکتر** بیضی گویند.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ را ***خروج از مرکز*** بیضی گویند درضمن، چون $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$، خروج از مرکز بیضی کوچکتر از واحد است. در حالت $c = 0$، و درنتیجه $\varepsilon = 0$، دو کانون در یک نقطه، در مرکز دایره واقع می‌شوند (زیرا $|OF_1| = |OF_2| = 0$)، ولی روش رسم به‌وسیلهٔ نخ که از آن یاد کردیم به قوت خود باقی می‌ماند.

قانون حرکت سیاره‌ها. ***کپلر*** براساس مشاهده‌های طولانی ***تیخوبراهه*** روی حرکت مریخ، کشف کرد سیاره‌ها روی محیط بیضی دور خورشید حرکت می‌کنند، به‌نحوی که خورشید در یکی از کانون‌های این بیضی قرار دارد (کانون دیگر بیضی دربارهٔ حرکت سیاره‌ها به‌دور خورشید نقشی ندارد (شکل ۱۶)، و درضمن شعاع کانونی ρ، در زمان‌های برابر، از قطاع‌هایی به مساحت‌های برابر عبور می‌کند (به‌عبارت دیگر سطحی که شعاع کانونی در واحد زمان جارو می‌کند مقدار ثابتی است)[1]، و ***نیوتن*** ثابت کرد، از لحاظ ریاضی، لزوم چنین حرکتی از قانون ماند (اینرسی)، قانون تناسب شتاب‌ها و قانون جاذبه عمومی نتیجه می‌شود.



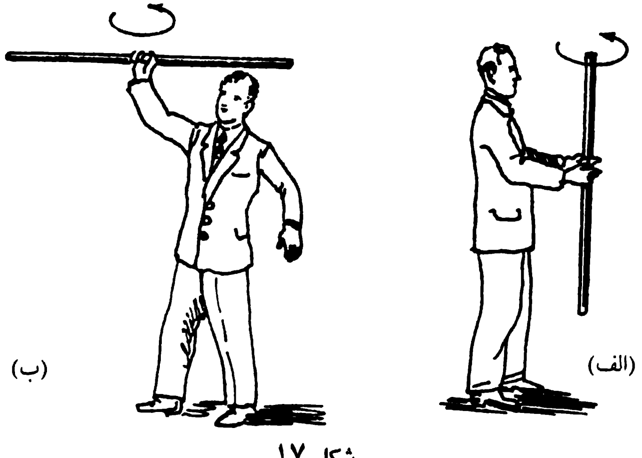
شکل ۱۶

۱. خروج از مرکز مدارهای سیاره‌ای خیلی کوچک است، به‌نحوی که مدار سیاره‌ها را می‌توان به‌تقریب دایره دانست.

بیضی ماند (اینرسی). به‌عنوان نمونه‌ای از کاربرد بیضی در صنعت از به‌اصطلاح «بیضی ماند» در صفحه گفت‌وگو می‌کنیم.

قطعه صفحه‌ای را در نظر می‌گیریم که در تمام نقطه‌های خود ضخامتی یکنواخت داشته باشد و از مادهٔ متجانسی، مثل روی، درست شده باشد، شکل صفحه مهم نیست. آن را دور محوری که بر سطح آن قرار دارد دوران می‌دهیم. روشن است که وقتی جسم حرکت مستقیم داشته باشد، نسبت به این حرکت مستقیم‌الخط دارای ماند مناسب با جرم خود می‌باشد (مستقل از شکل جسم و پراکندگی جرم آن). به همین ترتیب، در حالتی هم که جسم دور محوری دوران کند، نسبت به این دوران دارای ماند است. ولی در حالت دوران، ماند تنها متناسب با جرم جسم درحال دوران نیست، بلکه به پراکندگی جرم این جسم نسبت به محور دوران هم مربوط است زیرا وقتی که جرم در فاصلهٔ بیشتری از محور باشد، ماند نسبت به دوران بزرگتر می‌شود. مثلاً به‌سادگی می‌توان یک میله را دور محور طولی آن یکباره و به‌سرعت چرخاند (شکل ۱۷ـالف). ولی اگر بخواهیم همین میله را به‌سرعت و یکباره دور محوری که در وسط میله بر طول آن عمود است بچرخانیم، به‌شرطی که میله خیلی سبک نباشد، باید نیروی قابل توجهی مصرف کنیم (شکل ۱۷ـب).

می‌توان ثابت کرد که ماند نسبت به دوران جسم دور یک محور، به‌زبان دیگر، «گشتاور ماند» (ممان اینرسی) جسم نسبت به این محور، برابر است با $\Sigma r_i^2 m_i$ (منظور از $\Sigma r_i^2 m_i$ عبارت است از مجموع $r_1^2 m_1 + r_2^2 m_2 + \cdots + r_n^2 m_n$ و فرض می‌کنیم که جسم به عنصرهایی که از لحاظ مقدار خیلی کوچک‌اند تقسیم شده باشد. درضمن، m_i جرم عنصر و r_i فاصلهٔ



شکل ۱۷

عنصر از محور دوران است و مجموع دربارهٔ تمام عنصرهای جسم منتشر شده است).

به قطعه‌صفحهٔ خود برمی‌گردیم. O را نقطه‌ای از این صفحه می‌گیریم (شکل ۱۸). گشت‌آور ماند j_u این صفحه را نسبت به محور u، که از نقطهٔ O می‌گذرد و بر صفحهٔ «قطعه‌صفحه» منطبق است، بررسی می‌کنیم. برای این منظور، نقطهٔ O را مبدأ مختصات قائم می‌گیریم، محورهای Ox و Oy را در صفحهٔ «قطعه‌صفحه» به‌دل‌خواه انتخاب می‌کنیم و محور دوران u را با زاویهٔ φ، که با محور Ox می‌سازد، مشخص می‌کنیم. به‌سادگی دیده می‌شود که (شکل ۱۹):

$$r_i = |(x_i \tan\varphi - y_i)\cos\varphi| = |x_i \sin\varphi - y_i \cos\varphi|$$

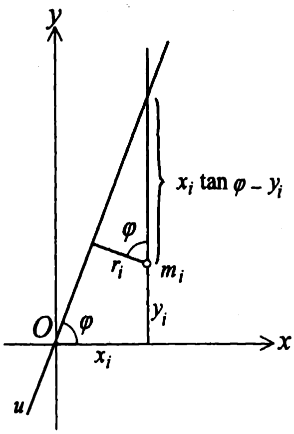
از آن‌جا

$$\sum r_i^2 m_i = \sum (x_i^2 \sin^2\varphi - 2x_i y_i \sin\varphi\cos\varphi + y_i^2 \cos^2\varphi)\, m_i$$
$$= \sin^2\varphi \sum x_i^2 m_i - 2\sin\varphi\cos\varphi \sum x_i y_i m_i + \cos^2\varphi \sum y_i^2 m_i$$

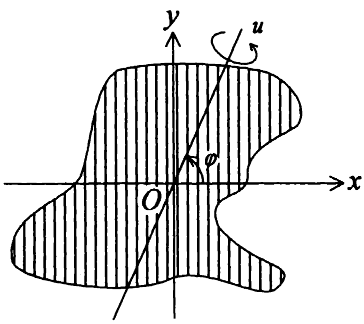
مقدارهای $\sin^2\varphi$، $2\sin\varphi\cos\varphi$ و $\cos^2\varphi$ را به این مناسبت بیرون از علامت مجموع گذاشته‌ایم که برای محور مفروض u، مقدارهای ثابتی هستند. اکنون فرض می‌کنیم:

$$\sum x_i^2 m_i = A\,,\quad -\sum x_i y_i m_i = B\,,\quad \sum y_i^2 m_i = C$$

مقدارهای A، B و C به انتخاب محور u مربوط نیست و تنها به شکل قطعه‌صفحه و انتشار جرم آن و انتخاب محورهای مختصات Ox و Oy مربوط است. به این ترتیب



شکل ۱۹



شکل ۱۸

$$J_u = A\sin^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi$$

همهٔ محورهای ممکن u را که در صفحهٔ «قطعه‌صفحه» از نقطهٔ O گذشته‌اند، در نظر می‌گیریم. به هریک از محورهای نقطهٔ O مقدار ρ را نسبت می‌دهیم که برابر با عکس ریشهٔ دوم گشتاور ماند J_u قطعه‌صفحه نسبت به این محور باشد، یعنی $\rho=\frac{1}{\sqrt{J_u}}$. در این صورت به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\rho^2} = A\sin^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi$$

ولی

$$x = \rho\cos\varphi \quad , \quad y = \rho\sin\varphi$$

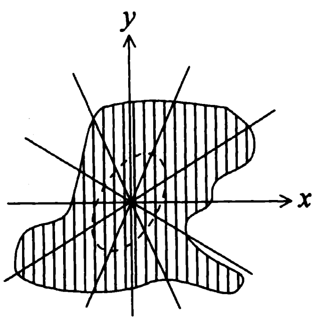
و بنابراین، معادلهٔ این مکان هندسی به این صورت درمی‌آید:

$$Cx^2 + 2Bxy + Ay^2 = 1$$

منحنی درجهٔ دومی به‌دست می‌آید که البته محدود و بسته، یعنی، یک بیضی است (شکل ۲۰). زیرا به‌طوری که ثابت خواهیم کرد، همهٔ منحنی‌های دیگر درجهٔ دوم یا نامحدودند و یا به یک نقطه منجر می‌شوند.

نتیجهٔ جالبی به‌دست می‌آید: قطعه‌صفحه، هر شکل و هر اندازه‌ای داشته باشد، مقدار گشتاور ماند آن (و یا مقدارهای ρ، عکس ریشهٔ دوم آن‌ها) نسبت به محورهای مختلفی که بر صفحهٔ قطعه‌صفحه قرار گرفته و از نقطهٔ مفروض O واقع بر قطعه‌صفحه گذشته‌اند، با یک بیضی مشخص می‌شود. این بیضی را ***بیضی ماند*** قطعه‌صفحه نسبت به نقطهٔ O گویند. اگر نقطهٔ O گرانیگاه قطعه‌صفحه باشد، بیضی را ***بیضی ماند مرکزی*** آن گویند.

بیضی ماند، نقش بزرگی در مکانیک دارد و به‌ویژه کاربرد مهم آن در مقاومت مصالح

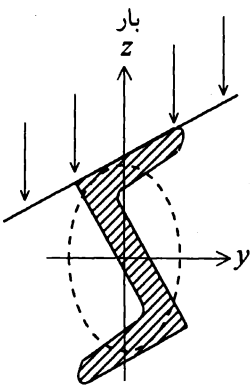


شکل ۲۰

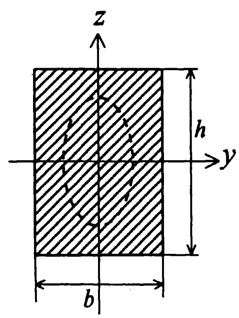
است. در مقاومت مصالح ثابت می‌کنند اگر تیری با مقطع مفروض داشته باشیم، مقاومت خمشی آن متناسب است با گشت‌آور ماند مقطع آن نسبت به محوری که از گرانیگاه آن عبور کرده و بر امتداد نیروی خمشی عمود باشد. این مطلب را با یک مثال روشن می‌کنیم. فرض کنید روی رودخانه، پلی از تخته درست شده باشد و تخته زیر فشار وزن عابران پیاده خم شود. اگر همین تخته را (و نه کلفت‌تر از آن را) «به‌پهلو» قرار دهیم، به‌تقریب خم نمی‌شود، یعنی وقتی تخته «به‌پهلو» باشد به‌اصطلاح پایدارتر است. این مطلب از این‌جا ناشی می‌شود که وقتی مقطع عرضی تخته را در نظر بگیریم، که به‌شکل مستطیل کشیده‌ای است، گشت‌آور ماند این مقطع (به‌شرطی که مقطع به‌طور یکنواخت به‌وسیلهٔ جرم پوشیده شده باشد) نسبت به محوری که بر صفحهٔ آن واقع باشد و از مرکز آن عبور کند و بر ضلع بزرگتر آن عمود باشد، بزرگتر از گشت‌آور ماند همان مقطع نسبت به محوری است که موازی با ضلع بزرگتر آن باشد. اگر هم تخته را به‌پهلو قرار ندهیم، بلکه کج نگاه داریم، و حتی اگر تخته را چهارگوش نگیریم و قطعه‌ای با مقطع دل‌خواه انتخاب کنیم، درهرحال مقاومت خمشی آن متناسب با گشت‌آور ماند این مقطع نسبت به محوری خواهد بود که بر صفحهٔ آن واقع و از گرانیگاه آن گذشته باشد. به این ترتیب مقاومت خمشی تیر به‌وسیلهٔ بیضی ماند مقطع آن مشخص می‌شود.

برای یک تختهٔ مستطیل‌شکل معمولی، این بیضی به‌صورتی است که در شکل ۲۱ نشان داده شده است. مقاومت این تخته درمقابل باری که در جهت محور Oz باشد، متناسب با bh^3 است.

تیرهای پولادی را اغلب با مقطع به‌شکل Z می‌سازند؛ برای چنین تیری، مقطع و بیضی



شکل ۲۲



شکل ۲۱

ماند آن در شکل ۲۲ نشان داده شده است. بیشترین پایداری در مقابل خمش برای این‌گونه تیرها در جهت محور zاست. برای این که از این تیرها استفاده شود، در مثل برای خرپا کردن شیروانی تا بتواند در مقابل برف و وزن خود مقاومت کند، آن را در وضعی قرار می‌دهند که فشار بر آن در مناسب‌ترین جهت قرار گیرد.

هذلولی و خاصیت کانونی آن. حالا معادلهٔ

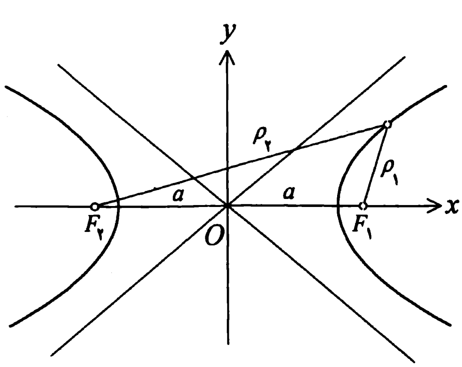
$$\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

را مطالعه می‌کنیم که منحنی آن ***هذلولی*** نامیده می‌شود. اگر c را عددی بگیریم که برای آن داشته باشیم $c^۲ = a^۲ + b^۲$، می‌توان ثابت کرد که هذلولی عبارت است از مکان هندسی نقطه‌هایی که تفاضل فاصله‌های آن‌ها از دو نقطهٔ $F_۱$ و $F_۲$، که بر محور Ox به طول‌های c و $-c$ قرار دارند، مقداری است ثابت $\rho_۲ - \rho_۱ = ۲a$ (شکل ۲۳). نقطه‌های $F_۱$ و $F_۲$ را ***کانون‌***های هذلولی گویند.

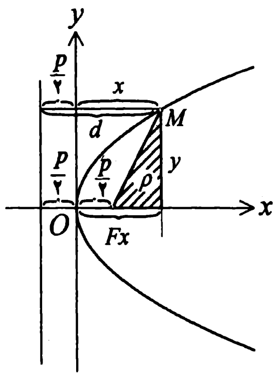
سهمی و خط هادی آن. سرانجام، معادلهٔ

$$y^۲ = ۲px$$

را در نظر می‌گیریم که منحنی نمایش آن را ***سهمی*** گویند. نقطهٔ F واقع بر محور Ox به طول $\frac{p}{۲}$ را ***کانون*** و خط $y = -\frac{p}{۲}$ موازی محور Oy را ***خط هادی*** سهمی گویند. M را نقطه‌ای از سهمی



شکل ۲۳



شکل ۲۴

(شکل ۲۴) و ρ را طول شعاع کانونی آن MF، d را طول عمودی که از M بر خط هادی سهمی رسم شده است، می‌گیریم. ρ و d را برای نقطهٔ M محاسبه می‌کنیم. در مثلث سایه‌خورده داریم: $\rho^۲ = \left(x - \frac{p}{۲}\right)^۲ + y^۲$. چون نقطهٔ M بر سهمی واقع است، برای آن $y^۲ = ۲px$ و بنابراین

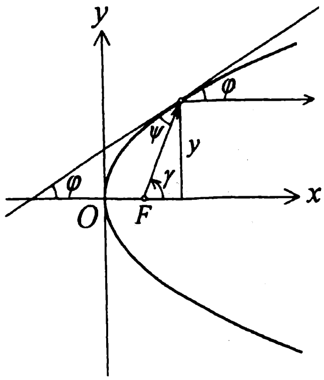
$$\rho^۲ = \left(x - \frac{p}{۲}\right)^۲ + ۲px = \left(x + \frac{p}{۲}\right)^۲$$

از طرف دیگر، روی شکل به‌سادگی دیده می‌شود که $d = x + \frac{p}{۲}$. درنتیجه $\rho^۲ = d^۲$، یعنی $\rho = d$. با استدلال عکس ثابت می‌شود، اگر نقطه‌ای چنان باشد که دربارهٔ آن $\rho = d$، این نقطه بر سهمی مفروض قرار دارد. به این ترتیب، سهمی عبارت است از مکان هندسی نقطه‌هایی که فاصلهٔ ρ هریک از آن‌ها تا نقطهٔ مفروض F (به‌نام **کانون**) برابر فاصلهٔ d آن تا خط مفروض (به‌نام **خط هادی**) باشد.

ویژگی مماس بر سهمی. یک ویژگی مهم مماس بر سهمی و کاربرد آن را در مبحث نور مطالعه می‌کنیم. چون دربارهٔ سهمی $y^۲ = ۲px$، بنابراین $۲y\,dy = ۲p\,dx$، یعنی مشتق یا مفهوم معادل آن، تانژانت زاویهٔ φ بین مماس و محور Ox (شکل ۲۵) برابر است با

$$\frac{dy}{dx} = \tan\varphi = \frac{p}{y}$$

از طرف دیگر، به‌طور مستقیم، از روی شکل معلوم می‌شود که



شکل ۲۵

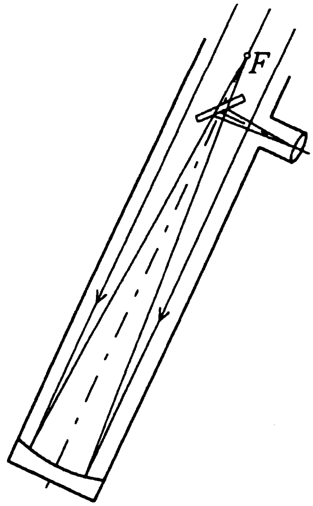
$$\tan\gamma = \frac{y}{x - \frac{p}{2}}$$

ولی

$$\tan 2\varphi = \frac{2\frac{p}{y}}{1 - \frac{p^2}{y^2}} = \frac{2py}{y^2 - p^2} = \frac{2py}{2px - p^2} = \frac{y}{x - \frac{p}{2}}$$

یعنی $\gamma = 2\varphi$، و چون $\gamma = \varphi + \psi$، درنتیجه $\psi = \varphi$. بنابراین اگر شعاع نوری از کانون به نقطه‌ای از سهمی برسد، با توجه به این قانون که زاویهٔ تابش برابر است با زاویهٔ بازتاب، در جهت محور Ox، یعنی در جهت محور تقارن سهمی بازتابیده می‌شود.

براساس این ویژگی سهمی، تلسکوپ‌های بازتابنده، که به‌وسیلهٔ نیوتن اختراع شد، ساخته شده است. اگر آینهٔ کاوی تهیه کنیم که سطح آن به‌شکل سهموی (پارابولوئید) دوار باشد، یعنی سطحی که از دوران سهمی دور محور تقارن آن به‌دست آمده است، در این صورت همهٔ شعاع‌های نوری که از یک نقطهٔ ستارهٔ آسمانی در امتداد «محور» آینه به آینه برسد، به‌وسیلهٔ آن در یک نقطه، در کانون آینه، متمرکز می‌شود (شکل ۲۶). شعاع‌های نوری که از نقطهٔ دیگر ستارهٔ آسمانی آمده باشد و موازی با محور آینه نباشند، باز هم به‌تقریب در نقطه‌ای نزدیک کانون جمع می‌شوند. به این ترتیب در صفحهٔ کانونی، یعنی صفحه‌ای که از کانون آینه گذشته و بر محور آن عمود است، تصویر معکوس ستاره به‌دست می‌آید. درضمن هرچه از کانون دورتر شویم، عدم تمرکز بیشتر است. زیرا تنها شعاع‌هایی



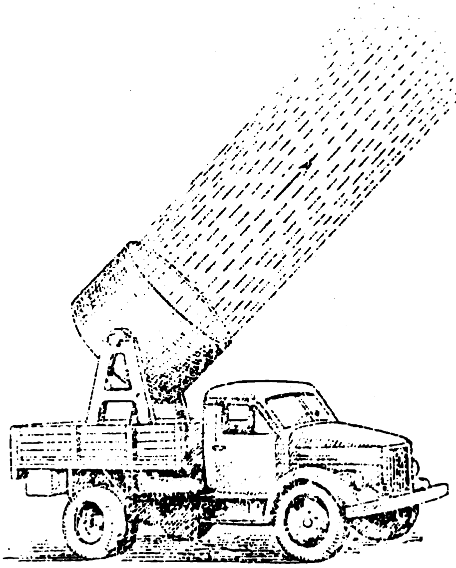
شکل ۲۶

که درست موازی محور آینه باشند به‌وسیلهٔ آینه در یک نقطه جمع می‌شوند، و شعاع‌هایی که موازی محور آینه نباشند، در یک نقطه جمع نمی‌شوند. تصویری را که به‌دست می‌آید می‌توان به‌طور مستقیم در میکروسکوپ مخصوص، به‌نام چشم تلسکوپ، مشاهده کرد ویا به‌طور غیرمستقیم، برای این که سر بیننده مانع عبور نور نشود، نور را به‌وسیلهٔ آینهٔ مسطح کوچکی که در تلسکوپ نزدیک کانون (کمی به‌طرف آینهٔ کاو) با زاویهٔ ۴۵ درجه نسبت به محور آینه محکم می‌شود، برگرداند.

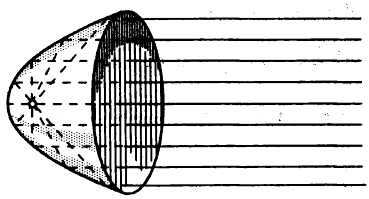
نورافکن (پروژکتور) هم براساس همین ویژگی سهمی ساخته شده است (شکل ۲۷). در این‌جا برعکس، مرکز نیرومند نور را در کانون آینهٔ سهموی قرار می‌دهند، درنتیجه شعاع‌های نور به‌صورت دسته‌ای موازی با محور آینه منعکس و دور می‌شود. چراغ‌های اتومبیل را هم به همین ترتیب می‌سازند (شکل ۲۸).

در حالت بیضی هم می‌توان ثابت کرد، اگر مرکز نور در یکی از کانون‌ها و مثلاً F_1 باشد، پس از برخورد به بیضی بازتابیده و در کانون دیگر F_2 متمرکز می‌شوند (شکل ۲۹). دربارهٔ هذلولی، وقتی منبع نور در یکی از کانون‌ها مثل F_1 باشد، در امتدادی بازتابیده می‌شود که گویا از کانون دیگر F_2 سرچشمه گرفته است (شکل ۳۰).

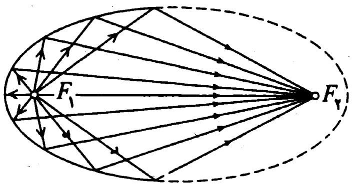
خط هادی بیضی و هذلولی. مثل سهمی، بیضی و هذلولی هم خط هادی دارند؛ ولی هر بیضی و



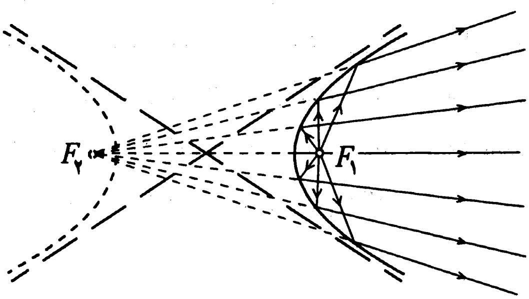
شکل ۲۷



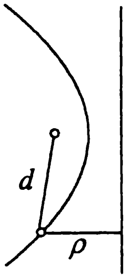
شکل ۲۸



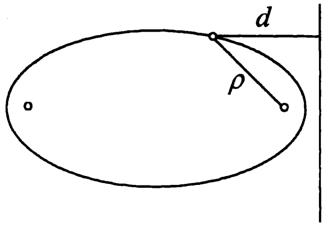
شکل ۲۹



شکل ۳۰



شکل ۳۲



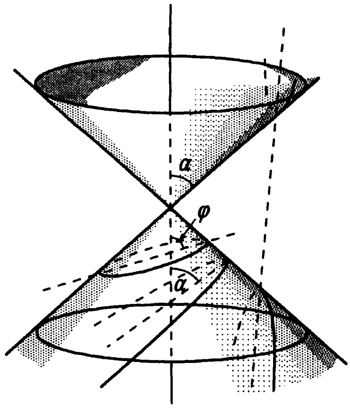
شکل ۳۱

هر هذلولی دارای دو خط هادی هستند. اگر کانون و خط هادی مربوط به آن را در نظر بگیریم، برای هر نقطهٔ M واقع بر بیضی $\varepsilon=\frac{\rho}{d}$، که در آن ε عبارت است از خروج از مرکز بیضیِ مفروض، و درضمن دربارهٔ بیضی همیشه ε کوچکتر از واحد است؛ برای هر نقطهٔ شاخهٔ مربوط به هذلولی $\varepsilon=\frac{\rho}{d}$، که در آن ε عبارت است از خروج از مرکز هذلولی مفروض، و درضمن دربارهٔ هذلولی، همیشه ε بزرگتر از واحد است.

به این ترتیب، بیضی، سهمی و یک شاخهٔ هذلولی عبارت‌اند از مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که برای آن‌ها نسبت فاصلهٔ ρ تا کانون به فاصلهٔ d تا خط هادی، مقداری است ثابت (شکل‌های ۳۱ و ۳۲). تنها این مقدار ثابت برای بیضی کوچکتر از واحد، برای سهمی برابر واحد و برای هذلولی بزرگتر از واحد است. به این مفهوم، می‌توان سهمی را «مرز» عبور از بیضی به هذلولی دانست.

مقطع‌های مخروطی. حتی در یونان باستان دربارهٔ منحنی‌هایی که از برخورد یک صفحه با مخروط قائم دوار به‌وجود می‌آید، به‌تفصیل بحث کرده بودند. اگر صفحهٔ قاطع، با محور مخروط زاویه‌ای برابر φ بسازد؛ در حالتی که φ مساوی ۹۰ درجه باشد، یعنی صفحهٔ قاطع عمود بر محور مخروط باشد، در مقطع یک دایره به‌دست می‌آید. به‌سادگی ثابت می‌شود که اگر زاویهٔ φ کوچکتر از ۹۰ درجه و بزرگتر از زاویهٔ α (زاویه‌ای که محور مخروط با مولد آن می‌سازد) باشد، یک بیضی به‌دست می‌آید. اگر زاویهٔ φ برابر زاویهٔ α باشد یک سهمی و در حالتی که φ بزرگتر از زاویهٔ α باشد هذلولی به‌دست می‌آید (شکل ۳۳).

سهمی به‌عنوان منحنی متناسب مجذور و هذلولی به‌عنوان منحنی متناسب معکوس. به‌یاد می‌آوریم که



شکل ۳۳

منحنی متناسب مجذور

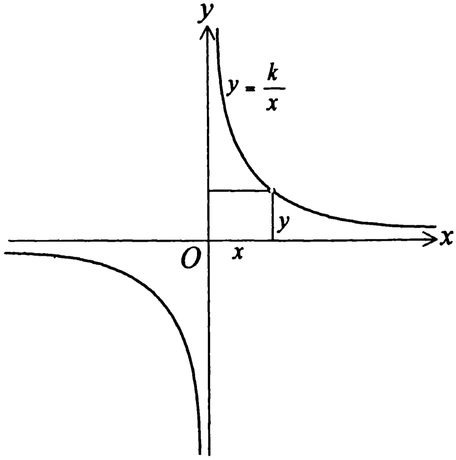
$$y = kx^{2}$$

یک سهمی (شکل ۳۴) و منحنی متناسب معکوس

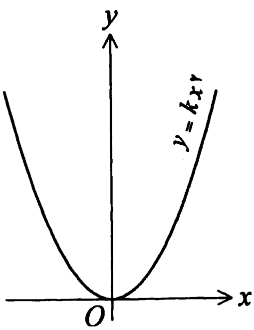
$$y = \frac{k}{x} \quad \text{یا} \quad xy = k$$

یک هذلولی است (شکل ۳۵). پیش‌تر هذلولی را به‌عنوان منحنی تعریف کردیم که با معادلهٔ زیر بیان شود:

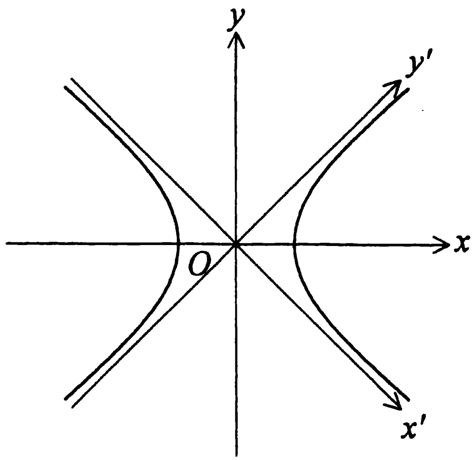
$$\frac{x^{2}}{a^{2}} - \frac{y^{2}}{b^{2}} = 1$$



شکل ۳۵



شکل ۳۴



شکل ۳۶

در حالت خاص $a=b$، به‌اصطلاح هذلولی متساوی‌الساقین به‌دست می‌آید که در میان هذلولی‌ها دارای همان نقشی است که دایره بین بیضی‌ها دارد. در این حالت، اگر محورهای مختصات را به‌اندازهٔ ۴۵ درجه دوران دهیم (شکل ۳۶)، این معادله در مختصات جدید (x', y') به این صورت درمی‌آید:

$$x'y' = k$$

ما اینک سه حالت مهم منحنی‌های درجه دوم را بررسی کرده‌ایم: بیضی، هذلولی و سهمی؛ درضمن، بنابر تعریف این منحنی‌ها، معادلهٔ «کانونی» آن‌ها را این‌طور به‌دست آوردیم:

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}=۱\ ,\quad \frac{x^۲}{a^۲}-\frac{y^۲}{b^۲}=۱\ ,\quad y^۲=۲px$$

اکنون به مطالعهٔ معادلهٔ کلی درجه دوم شامل دو متغیر می‌پردازیم و به‌ویژه دربارهٔ منحنی نمایش تغییر (یا نمودار) آن دقت می‌کنیم.

۸. تبدیل معادلهٔ کلی درجهٔ دوم به‌صورت کانونی

نخستین طرح منطقی هندسهٔ تحلیلی به وسیلهٔ اولر. تنظیم کتاب «مقدمه‌ای بر آنالیز» در سال ۱۷۴۸ را

باید یکی از مرحله‌های مهم پیشرفت هندسهٔ تحلیلی دانست. در جلد دوم این کتاب، ضمن سایر مطالبی که دربارهٔ نظریهٔ تابع‌ها و شاخه‌های دیگر آنالیز دارد، هندسهٔ تحلیلی در صفحه با بررسی مفصل منحنی‌های درجه دوم هم طرح شده است. آن‌چه در این کتاب بحث شده، به آن‌چه که امروز در کتاب‌های درسی هندسهٔ تحلیلی وجود دارد، بسیار نزدیک است. در کتاب *اولر* از منحنی‌های درجهٔ بالاتر هم صحبت شده است. این نخستین دورهٔ هندسهٔ تحلیلی به‌مفهوم امروزی آن است.

فکر تبدیل معادله به صورت کانونی آن. معادلهٔ درجه دوم[1]

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

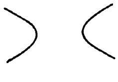
شامل شش جمله است، درحالی که معادله‌های کانونی بیضی، هذلولی و سهمی (به‌صورتی که دیدیم) تنها شامل سه یا دو جمله‌اند. این اختلاف به‌معنی آن نیست که چنین معادله‌ای، منحنی بغرنج‌تری را بیان می‌کند، بلکه به‌معنای این است که دستگاه مختصاتی که این معادله را نسبت به آن نوشته‌ایم، ممکن است نامناسب انتخاب شده باشد. ثابت می‌شود، اگر دستگاه مختصات قائم دکارتی را به‌طور مناسب اختیار کنیم، معادلهٔ درجه دوم شامل دو متغیر را همیشه می‌توان به یکی از صورت‌های کانونی زیر نوشت:

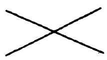
بیضی  (۱ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

بیضی موهومی  (۲ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0$

نقطه (دو خط موهومی (۳ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

که در یک نقطهٔ حقیقی به هم می‌رسند)

هذلولی  (۴ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

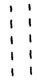
دو خط راست متقاطع  (۵ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

---

۱. ضریب‌های xy، x و y را به‌جای B، D و E به‌ترتیب $2B$، $2D$ و $2E$ گرفته‌ایم تا رابطه‌های بعدی ساده‌تر به‌دست آیند.

سهمی  ۶) $y^2 - 2px = 0$

دو خط راست متوازی  ۷) $x^2 - a^2 = 0$

دو خط راست متوازی موهومی  ۸) $x^2 + a^2 = 0$

دو خط راست منطبق بر هم ۹) $x^2 = 0$

که در آن‌ها a، b و p مخالف صفرند.

معادله‌های ۱)، ۴) و ۶) از صورت‌های کانونی نام‌برده، برای ما شناخته‌شده‌اند. این‌ها به‌ترتیب معادله‌های کانونی بیضی، هذلولی و سهمی هستند. در دوتای دیگر از آن‌ها، یعنی معادله‌های ۲) و ۸) حتی یک نقطه هم صدق نمی‌کند. درحقیقت، مجذور یک عدد حقیقی همیشه مثبت یا صفر است، بنابراین در سمت چپ معادلهٔ ۲) مجموع جمله‌های $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ غیرمنفی است. علاوه بر آن، جملهٔ $+1$ هم وجود دارد، به این ترتیب مقدار سمت چپ نمی‌تواند برابر صفر شود؛ همچنین در معادلهٔ ۸) جملهٔ x^2 غیرمنفی و جملهٔ a^2 مثبت است. با همین استدلال نتیجه می‌شود که در معادلهٔ ۳) تنها $(x = 0\ ,\ y = 0)$ صدق می‌کند، یعنی تنها یک نقطه ـ مبدأ مختصات. معادلهٔ ۵) را می‌توان به‌صورت $\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0$ نوشت و در این صورت، روشن است که در آن تنها نقطه‌هایی صدق می‌کند که برای آن‌ها یکی از دو عبارت درجهٔ اول $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$ یا $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ برابر صفر شود، یعنی نمودار آن عبارت است از مجموعهٔ دو خط راست متقاطع. معادلهٔ ۷) هم شبیه آن به‌صورت $(x-a)(x+a)=0$ درمی‌آید، یعنی نمودار آن عبارت است از دو خط راست متوازی $x=a$ و $x=-a$. سرانجام، معادلهٔ ۹) عبارت است از حالت خاص معادلهٔ ۷) به‌ازای $a=0$، یعنی دو خط راست منطبق بر هم.

رابطه‌های تبدیل مختصات. برای این که بتوانیم این نتیجهٔ اساسی را دربارهٔ انواع ممکن منحنی‌های درجه دوم به‌دست آوریم، باید ابتدا رابطه‌هایی را که آوردیم و به‌وسیلهٔ آنها می‌توان مختصات جدید نقطه را بعد از تغییر محورهای مختصات قائم به‌دست آورد، تفسیر کنیم.

(x,y) را مختصات نقطهٔ M نسبت به محورهای Oxy می‌گیریم. این محورها را موازی خود منتقل می‌کنیم تا به وضع $O'x'y'$ درآیند و مختصات مبدأ جدید O' را نسبت به محورهای قدیم ξ و η فرض می‌کنیم. روشن است (شکل ۳۷)، مختصات (x',y') نقطهٔ M

نسبت به محورهای جدید و مختصات (x,y) همین نقطه نسبت به محورهای قدیم در رابطه‌های زیر صدق می‌کنند:

$$x = x' + \xi$$
$$y = y' + \eta$$

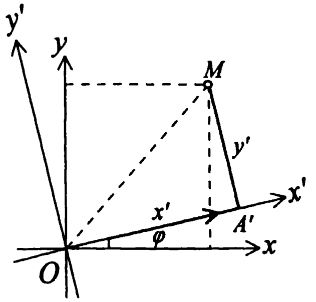
که آن‌ها را رابطه‌های انتقال محورها می‌نامند (در ریاضیات، انتقال یعنی جابه‌جایی موازی با خود). اگر محورهای مختصات را دور نقطهٔ مبدأ به‌اندازهٔ زاویهٔ φ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت دوران دهیم، به‌سادگی معلوم می‌شود (شکل ۳۸) که از تصویر خط شکستهٔ $OA'M$ (که شامل پاره‌خط‌های x' و y'، مختصات جدید، است) بر محور Ox و بر محور Oy به‌دست می‌آید:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$$
$$y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$$

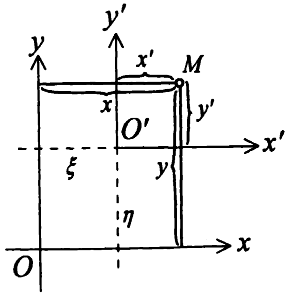
و این رابطه‌های تبدیل مختصات بعد از دوران دستگاه محورهای قائم دور مبدأ است.

اگر معادلهٔ یک منحنی به‌صورت $F(x,y) = 0$ نسبت به محورهای Oxy داده شده باشد و بخواهیم معادلهٔ همین منحنی را نسبت به محورهای جدید $O'x'y'$ به‌دست آوریم، کافی است در معادلهٔ $F(x,y) = 0$ به‌جای x و y مقدارهای آن‌ها را برحسب x' و y'، از رابطه‌های تبدیل، قرار دهیم. در این صورت وقتی محورها موازی خود منتقل شده باشند، معادلهٔ جدید به‌صورت

$$F(x' + \xi \ , \ y' + \eta) = 0$$



شکل ۳۸



شکل ۳۷

و در حالتی که محورها دور مبدأ دوران کرده باشند، معادلهٔ جدید به‌صورت

$$F\ (x'\cos\varphi - y'\sin\varphi\ \ ,\ \ x'\sin\varphi + y'\cos\varphi)$$

درمی‌آید.

یادآور می‌شویم، ضمن گذر به محورهای جدید، درجهٔ معادله تغییر نمی‌کند. درحقیقت، درجهٔ معادله به این علت نمی‌تواند زیاد شود که رابطه‌های تبدیل از درجهٔ اول‌اند. اما درجهٔ معادله کم هم نمی‌تواند بشود، زیرا در این صورت تبدیل معکوس باید درجه آن را زیاد کند (که آن هم تبدیلی از درجهٔ اول است).

تبدیل هر معادلهٔ درجه دوم دل‌خواه به یکی از ۹ صورت کانونی. اکنون ثابت می‌کنیم که هر معادلهٔ درجه دوم با دو متغیر را می‌توان با یک دوران و سپس یک انتقال محورها، به یکی از صورت‌های ۱)، ۲)، ...، ۹) تبدیل کرد.

فرض کنید معادلهٔ مفروض درجه دوم به این صورت باشد:

$$Ax^{۲} + ۲Bxy + Cy^{۲} + ۲Dx + ۲Ey + F = ۰ \qquad (۸)$$

محور را به‌اندازهٔ زاویه φ، که هم‌اکنون آن را مشخص خواهیم کرد، دوران می‌دهیم. در معادله (۸) به‌جای x و y مقدارهای آن‌ها را برحسب مختصات جدید قرار می‌دهیم (رابطه‌های دوران)، بعد از جمع جمله‌های متشابه، به معادله‌ای به این صورت می‌رسیم:

$$A'x'^{۲} + ۲B'x'y' + C'y'^{۲} + ۲D'x' + ۲E'y' + F' = ۰$$

که در آن ضریب $۲B'$ چنین است:

$$۲B' = -۲A\sin\varphi\cos\varphi + ۲B(\cos^{۲}\varphi - \sin^{۲}\varphi) + ۲C\sin\varphi\cos\varphi = ۲B\cos ۲\varphi - (A-C)\sin ۲\varphi$$

و اگر آن را برابر صفر قرار دهیم، به‌دست می‌آید: $۲B\cos ۲\varphi = (A-C)\sin ۲\varphi$ و از آن‌جا

$$\cot ۲\varphi = \frac{A-C}{۲B}$$

از آن‌جا که کتانژانت از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر می‌کند، همیشه می‌توان زاویهٔ φ را طوری پیدا کرد که در این رابطه صدق کند. وقتی محورهای مختصات را به‌اندازهٔ این زاویه دوران دهیم، معادلهٔ (۸) در دستگاه جدید به این صورت درمی‌آید:

$$A'x'^{۲} + C'y'^{۲} + ۲D'x' + ۲E'y' + F = ۰ \qquad (۹)$$

یعنی به معادله‌ای تبدیل می‌شود که شامل جملهٔ حاصل‌ضرب مختصات نیست (F تغییر نمی‌کند، زیرا رابطه‌های مربوط به دوران دارای جملهٔ ثابت نیستند).

اکنون محورهای $O'x'y'$ را موازی خود انتقال می‌دهیم تا به وضع $O''x''y''$ درآیند، مختصات مبدأ جدید O'' را نسبت به محورهای $O'x'y'$، ξ' و η' فرض می‌کنیم. معادلهٔ منحنی ما در دستگاه محورهای اخیر چنین خواهد بود:

$$A'(x''+\xi')^{۲} + C'(y''+\eta')^{۲} + ۲D'(x''+\xi') + ۲E'(y''+\eta') + F = ۰ \qquad (۱۰)$$

ثابت می‌کنیم که همیشه می‌توان ξ' و η' را طوری انتخاب کرد، یعنی محورهای $O'x'y'$ را طوری موازی خود منتقل کرد که معادلهٔ منحنی در دستگاه محورهای $O''x''y''$ به یکی از صورت‌های کانونی ۱)، ۲)، ...، ۹) درآید.

پرانتزها را در معادله (۱۰) باز و جمله‌های متشابه را جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$A'x''^{۲} + C'y''^{۲} + ۲(A'\xi'+D')x'' + ۲(C'\eta'+E')y'' + F' = ۰ \qquad (۱۰)'$$

مجموع همهٔ جمله‌های ثابت را به F' نشان داده‌ایم که مقدار آن در این‌جا برای ما مهم نیست.

سه حالت ممکن را در نظر می‌گیریم.

I. هیچ‌یک از دو مقدار A' و C' برابر صفر نیستند. در این حالت $\xi' = -\frac{D'}{A'}$ و $\eta' = -\frac{E'}{C'}$ می‌گیریم، به این ترتیب جمله‌های درجهٔ اول x'' و y'' حذف می‌شود و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$A'x''^{۲} + C'y''^{۲} + F' = ۰ \qquad (I)$$

II. $A' \neq ۰$، $C' = ۰$ ولی $E' \neq ۰$. $\xi' = -\frac{D'}{A'}$ و $\eta' = ۰$، یعنی $y'' = y'$ می‌گیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$A'x''^{۲} + ۲E'y'' + F' = ۰$$

یا

$$A'x''^{۲} + ۲E'\left(y' + \frac{F'}{۲E'}\right) = ۰$$

حالا دوباره در طول محور Oy' به‌اندازهٔ $\eta'' = -\frac{F'}{۲E'}$ انتقال می‌دهیم، به‌دست می‌آید $y' = y'' - \frac{F'}{۲E'}$، یعنی $y'' = y' + \frac{F'}{۲E'}$ و معادله چنین می‌شود:

$$A'x''^{۲} + ۲E'y'' = ۰ \qquad \text{(II)}$$

اگر $A' = ۰$، $C' \neq ۰$ و $D' \neq ۰$، آن‌وقت می‌توانیم به‌سادگی با تبدیل نقش x و y به یکدیگر به همین حالت برسیم.

III. $A' \neq ۰$، $C' = ۰$ و $E' = ۰$. دوباره $\xi' = -\frac{D'}{A'}$، $\eta' = ۰$ می‌گیریم، به این معادله می‌رسیم:

$$A'x''^{۲} + F' = ۰ \qquad \text{(III)}$$

اگر هم $A' = ۰$، $C' \neq ۰$، $D' = ۰$ باشد، نقش x و y را با هم عوض می‌کنیم.

همهٔ حالت‌های ممکن را بررسی کردیم. زیرا A' و C' نمی‌توانند با هم برابر صفر شوند، چون در این صورت درجهٔ معادله پایین می‌آید، درحالی که دیدیم که با تغییر محورهای مختصات درجهٔ معادله تغییر نمی‌کند.

به این ترتیب، با انتخاب مناسب محورهای مختصات قائم، هر معادلهٔ درجه دومی می‌تواند به یکی از سه معادلهٔ (I)، (II) یا (III) منجر شود.

اگر معادله به‌صورت (I) باشد (در این حالت A' و C' برابر صفر نیستند)، و $F' \neq ۰$ باشد، معادلهٔ (I) را به این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{x''^{۲}}{-\frac{F'}{A'}} + \frac{y''^{۲}}{-\frac{F'}{C'}} - ۱ = ۰$$

که بسته به علامت‌های A'، C' و F' به یکی از معادله‌های ۱)، ۲) یا ۴) می‌رسیم. اگر مخرج $x''^{۲}$ منفی و مخرج $y''^{۲}$ مثبت باشد، باید نام محور $O''x''$ را به $O''y''$ و محور $O''y''$ را به $O''x''$ تغییر دهیم.

اگر $F' = ۰$، آن‌وقت معادلهٔ (I) به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{x'^{۲}}{\frac{۱}{A'}} + \frac{y'^{۲}}{\frac{۱}{C'}} = ۰$$

که یکی از معادله‌های ۳) یا ۵) است.

وقتی که معادله به‌صورت (II) باشد (در این حالت A' و E' هردو مخالف صفرند)، آن را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$x''^{۲} + \frac{۲E'}{A'}y'' = ۰$$

$-\frac{E'}{A'}$ را p می‌نامیم و نام محور $O''x''$ را به $O''y''$ و محور $O''y''$ را به $O''x''$ تغییر می‌دهیم، به معادلهٔ ۶) می‌رسیم.

سرانجام، وقتی معادلهٔ (III) را داشته باشیم (که در این صورت $A \neq 0$ است)، می‌توانیم آن را به‌صورت $x''^2 + \frac{F'}{A'} = 0$ بنویسیم که یکی از معادله‌های ۷)، ۸) یا ۹) است.

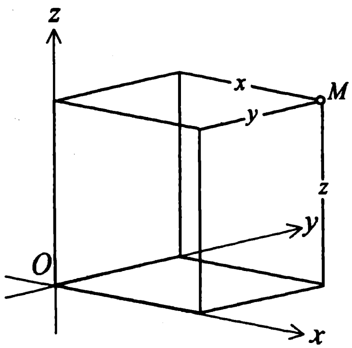
این قضیهٔ مهم که هر معادلهٔ درجه دوم به یکی از ۹ حالت کانونی منجر می‌شود، به‌وسیلهٔ ***اولر*** هم به‌تفصیل بحث شده است. تنها نوع استدلالی که در کتاب ***اولر*** وجود دارد، با آن‌چه در این‌جا دادیم متفاوت است.

۹. بیان نیرو، سرعت و شتاب به‌وسیلهٔ عددهای سه‌گانه. نظریهٔ بردارها

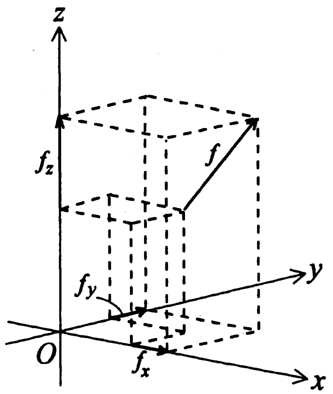
گام مهم بعد از ***اولر*** را ***لاگرانژ*** برداشت. ***لاگرانژ*** در کتاب خود «مکانیک تحلیلی» در سال ۱۷۸۸ نیرو، سرعت و شتاب را به‌صورت محاسبه‌ای درآورد، درست همان‌طور که ***دکارت*** نقطه‌ها را وارد در محاسبه کرده بود. این فکر ***لاگرانژ***، که در کتاب او طرح شد، بعدها به‌نام نظریهٔ بردارها، مهم‌ترین بحث فیزیک، مکانیک و صنعت را به‌وجود آورد.

مختصات قائم در فضا. یادآور می‌شویم که نه ***دکارت*** و نه ***نیوتن*** به هندسهٔ تحلیلی در فضا نپرداخته بودند. این مطلب بعدها و در نیمهٔ اول سدهٔ هیجدهم به‌وسیلهٔ ***کلرو*** و ***لاگیر*** مطرح شد. برای مشخص کردن نقطهٔ M در فضا، سه محور دوبه‌دو عمود بر هم Ox، Oy و Oz را انتخاب می‌کنند (شکل ۳۹) و مقدار عددی فاصله‌های نقطهٔ M را از صفحه‌های Oyz، Oxz و Oxy با توجه به علامت‌های آن‌ها در نظر می‌گیرند و ***طول*** x، ***عرض*** y و ***ارتفاع*** z نقطهٔ M می‌نامند.

طرح لاگرانژ برای محاسبه‌ای کردن نیرو، سرعت و شتاب. نیروی f را در نظر می‌گیریم (شکل ۴۰). این نیرو را می‌توان به‌وسیلهٔ یک پاره‌خط راستِ جهت‌دار نشان داد که در این صورت دارای طول و جهت مشخصی است. ***لاگرانژ*** می‌گوید، این نیروی f را می‌توان به سه مؤلفهٔ f_x، f_y و f_z تجزیه کرد که به‌ترتیب روی محورهای Ox، Oy و Oz قرار گرفته‌اند؛ این مؤلفه‌ها را، مثل



شکل ۳۹



شکل ۴۰

پاره‌خط‌های جهت‌داری که بر محورها واقع‌اند، می‌توان به‌طور ساده با عددهای مثبت و منفی مشخص کرد. علامت مثبت یا منفی بستگی به این دارد که مؤلفه در جهت مثبت محور قرار گرفته است یا در خلاف جهت آن. به این ترتیب، می‌توان نیروی (۲،۳،۴) یا نیروی (۲،۵ − ،۱) را مقایسه و بررسی کرد. ثابت می‌شود برای جمع کردن نیروها طبق قانون متوازی‌الاضلاع، می‌توان مؤلفه‌های مربوط را جمع کرد (و ما این مطلب را کمی بعد ثابت می‌کنیم). برای نمونه، مجموع دو نیرویی که نام بردیم عبارت است از نیروی

(۲+۱ ، ۳−۲ ، ۴+۵) = (۳ ، ۱ ، ۹)

به همین ترتیب، دربارهٔ سرعت و شتاب هم می‌توان عمل کرد. برای هر مسأله‌ای از مکانیک می‌توان هر معادله‌ای را که به نیرو، سرعت و شتاب مربوط باشد، به‌صورت معادله‌ای بین

مؤلفه‌های آن‌ها نوشت، یعنی معادله‌ای بین عددهای ساده؛ ولی هر معادلهٔ مکانیک به سه معادله تبدیل می‌شود: یکی برای xها، دیگری برای yها و سومی برای zها.

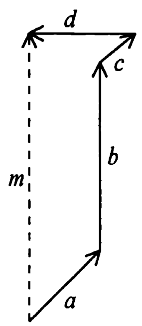
تنها صد سال بعد از **لاگرانژ**، وقتی نظریهٔ الکتریسیته پیشرفت کرده بود، ریاضی‌دان‌ها و فیزیک‌دان‌ها مطالعهٔ گستردهٔ نظریهٔ کلی این پاره‌خط‌های راست را، که دارای طول و جهت مشخص بودند، آغاز کردند. این‌گونه پاره‌خط‌های راست را بُردار نامیدند.

نظریهٔ بردارها در مکانیک، فیزیک و صنعت، و در بخش جبری آن به‌نام جبر بردارها (که غیر از آنالیز برداری است) اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد و امروز به‌عنوان بخشی از هندسهٔ تحلیلی مطالعه می‌شود.

جبر بردارها. هر پاره‌خط راست جهت‌دار (مثل حالت‌هایی که با نیرو، سرعت، شتاب و یا نمونهٔ دیگری از این قبیل سر و کار داریم)، یعنی پاره‌خطی که طول معین و جهت مشخص دارد، ***بردار*** نامیده می‌شود. دو بردار را برابر گویند، وقتی دارای یک طول و یک جهت باشند. یعنی «بردار» را تنها با در دست داشتن طول و جهت آن می‌توان شناخت. بردارها را می‌توان با هم جمع کرد. فرض کنید بردارهای **a**، **b**، ... ، **d** مفروض باشند. از نقطه‌ای بردار **a** را رسم می‌کنیم، سپس از انتهای آن بردار **b** را وغیره، به‌اصطلاح خط شکسته بُرداری **ab...d** به‌دست می‌آید (شکل ۴۱). بردار **m** که مبدأ آن بر مبدأ اولین بردار **a** این خط شکسته و انتهای آن بر انتهای آخرین بردار این خط شکسته منطبق باشد، **مجموع** این بردارها نامیده می‌شود:

$$\mathbf{m} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \cdots + \mathbf{d} \tag{۱۱}$$

به‌سادگی ثابت می‌شود که بردار **m** بستگی به ترتیب بردارهای **a**، **b**، ... ، **d** ندارد.



شکل ۴۱

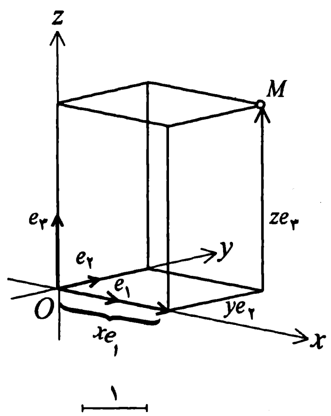
برداری که طولش برابر طول بردار **a** ولی در خلاف جهت آن باشد، ***بردار متقابل*** **a** نامیده می‌شود و به **a**− نشان می‌دهند.

کم کردن برداری از بردار **a** به‌معنای این است که بردار متقابل آن را با **a** جمع کنیم.

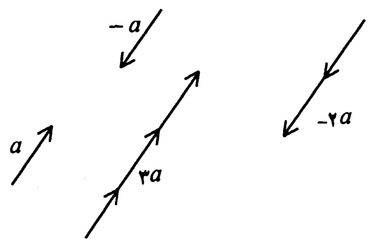
عددهای حقیقی معمولی را در محاسبه‌های برداری ***اسکالر*** گویند. فرض کنید بردار **a** (شکل ۴۲) و اسکالر λ داده شده باشد، در این صورت حاصل‌ضرب بردار **a** در اسکالر (عدد) λ، یعنی $\lambda\mathbf{a}$ به برداری گفته می‌شود که طول آن برابر حاصل‌ضرب طول $|\mathbf{a}|$ از بردار **a** در قدرمطلق عدد λ ($|\lambda|$) و جهت آن در حالت $\lambda > 0$ همان جهت **a** و در حالت $\lambda < 0$ در خلاف جهت **a** است.

دستگاه محورهای قائم دکارتی $Oxyz$ و بردارهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ را به‌طول واحد و به‌ترتیب در جهت مثبت محورهای Ox، Oy و Oz در نظر می‌گیریم. روشن است، هر نقطهٔ M از فضا (شکل ۴۳) را می‌توان به این ترتیب به‌دست آورد که از نقطهٔ O چند «مرتبه» (درست، کسری یا گنگ، مثبت یا منفی) از بردار $\mathbf{e}_1$، سپس چند «مرتبه» از بردار $\mathbf{e}_2$ و سرانجام چند «مرتبه» از بردار $\mathbf{e}_3$ را در نظر بگیریم. روشن است که عددهای x، y و z، که معرف تعداد «مرتبه»های بردارهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$ و $\mathbf{e}_3$ هستند، همان مختصات نقطهٔ M خواهند بود.

اگر بردار **a** داده شده باشد؛ نقطه‌ای را در نظر می‌گیریم که از مبدأ تا انتهای آن حرکت کند، و این حرکت را به حرکت‌هایی موازی Ox، Oy و Oz تجزیه می‌کنیم. در این صورت اگر نقطه را به‌اندازهٔ $x\mathbf{e}_1$ موازی محور Ox، به‌اندازهٔ $y\mathbf{e}_2$ موازی محور Oy و به‌اندازهٔ $z\mathbf{e}_3$ موازی محور Oz حرکت داده باشیم، داریم:



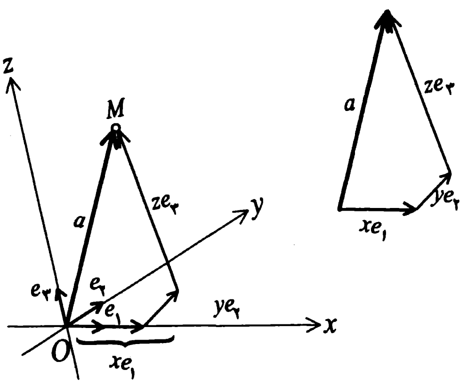
شکل ۴۳



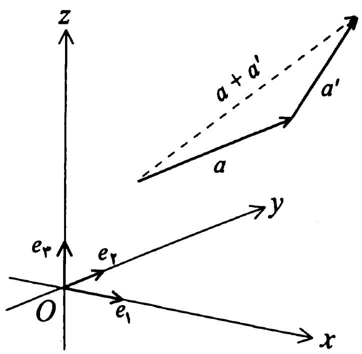
شکل ۴۲

$$\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \qquad (12)$$

عددهای x، y و z را ***مختصات*** بردار $\mathbf{a}$ گویند. اگر مبدأ این بردار بر مبدأ مختصات منطبق باشد (شکل ۴۴)، این عددها همان مختصات نقطهٔ M، انتهای این بردار، است. از این‌جا نتیجه می‌شود که برای جمع بردارها، می‌توان مختصات هم‌نام آن‌ها را جمع کرد، همچنین برای این‌که برداری را از بردار دیگری کم کنیم، مختصات هم‌نام آن‌ها را از هم کم می‌کنیم اگر بردار اول در طول محور Ox به‌اندازهٔ $x\mathbf{e}_1$ و بردار دوم به‌اندازهٔ $x'\mathbf{e}_1$ «جلو برود»، مجموع آن‌ها در طول محور Ox به‌اندازهٔ $(x+x')\mathbf{e}_1$ «جلو می‌رود» وغیره (شکل ۴۵). روشن است، برای ضرب بردار در یک عدد، مختصات آن را در این عدد ضرب می‌کنیم.



شکل ۴۴



شکل ۴۵

حاصل‌ضرب اسکالر (داخلی) و ویژگی‌های آن. اگر دو بردار **a** و **b** مفروض باشد، عددی که برابر است با حاصل‌ضرب طول‌های این دو بردار در کسینوس زاویهٔ بین آن‌ها، یعنی $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\varphi$، ***حاصل‌ضرب اسکالر***، یا حاصل‌ضرب داخلی دو بردار نامیده می‌شود و به‌صورت **ab** یا **(ab)** نشان داده می‌شود. اگر (x, y, z) مختصات بردار **a** و $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ مختصات بردار **b** باشد، حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها چنین است:

$$\mathbf{ab} = x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z} \qquad (۱۳)$$

یعنی حاصل‌ضرب داخلی دو بردار، برابر است با مجموع حاصل‌ضرب‌های مختصات هم‌نام آن‌ها.

این رابطهٔ مهم را ثابت می‌کنیم. ابتدا به دو توضیح مقدماتی می‌پردازیم:

۱°. اگر یکی از بردارها، مثل **a**، در عددی مثل λ ضرب شده باشد، حاصل‌ضرب داخلی هم در این عدد ضرب می‌شود، یعنی

$$(\lambda\mathbf{a})\ \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab})$$

۲°. ضرب داخلی از اصل پخشی پیروی می‌کند، یعنی اگر $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$، در این صورت:

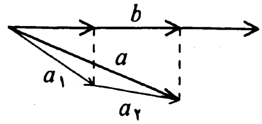
$$\mathbf{ab} = \mathbf{a}_1\mathbf{b} + \mathbf{a}_2\mathbf{b}$$

درحقیقت، سمت چپ این برابری، برابر است با حاصل‌ضرب طول بردار **b** در مقدار عددی تصویر بردار **a** روی محور **b** (شکل ۴۶)، و سمت راست برابری برابر است با حاصل‌ضرب طول بردار **b** در مجموع مقدارهای عددی تصویرهای بردارهای $\mathbf{a}_1$ و $\mathbf{a}_2$ روی محور بردار **b**. ولی داریم:

$$\text{تصویر } \mathbf{a} = \text{تصویر } \mathbf{a}_1 + \text{تصویر } \mathbf{a}_2$$

و درنتیجه درستی برابری ثابت می‌شود.

اکنون فرض کنید دو بردار **a** و **b** و تجزیهٔ آن‌ها روی محورهای بردارهای $\mathbf{e}_1$، $\mathbf{e}_2$، $\mathbf{e}_3$ داده



شکل ۴۶

شده باشد:

$$\mathbf{b} = \bar{x}\mathbf{e}_1 + \bar{y}\mathbf{e}_2 + \bar{z}\mathbf{e}_3 \quad , \quad \mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

در این صورت

$$\mathbf{ab} = (x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3)(\bar{x}\mathbf{e}_1 + \bar{y}\mathbf{e}_2 + \bar{z}\mathbf{e}_3)$$

با توجه به اصل توزیعی (۲°)، ضرب داخلی مجموع بردارهایی که در داخل پرانتزها قرار گرفته‌اند، مثل ضرب دو چندجمله‌ای انجام می‌شود، و با توجه به (۱°) ضریب‌های عددی هر جمله‌ای که به‌دست می‌آید در ابتدای آن قرار می‌گیرد؛ بنابراین

$$\mathbf{ab}=x\bar{x}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + x\bar{y}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 + x\bar{z}\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 + y\bar{x}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + y\bar{y}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + y\bar{z}\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 + z\bar{x}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 + z\bar{y}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 + z\bar{z}\mathbf{e}_3\mathbf{e}_3$$

از طرف دیگر

$$|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1 \ , \ \cos 0° = 1 \ , \ \cos 90° = 0$$

بنابراین

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 = 1 \ , \ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0 \ , \ \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3 = 0$$
$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 = 0 \ , \ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 = 1 \ , \ \mathbf{e}_2\mathbf{e}_3 = 0$$
$$\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = 0 \ , \ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_2 = 0 \ , \ \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3 = 1$$

و از آن‌جا

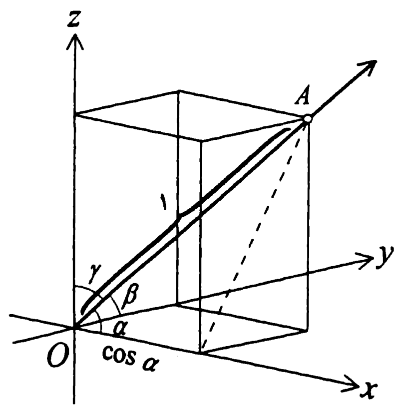
$$\mathbf{ab} = x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z} \qquad (۱۴)$$

در حالت خاصی که بردارهای **a** و **b** بر هم عمود باشند، $\varphi = 90°$، و $\cos\varphi = 0$ می‌شود. بنابراین از برابری

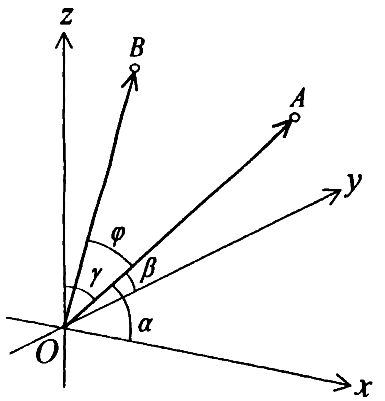
$$x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z} = 0 \qquad (۱۵)$$

می‌توان به‌عنوان شرط عمود بودن دو بردار **a** و **b** استفاده کرد.

زاویهٔ بین دو جهت. جهتی را در نظر می‌گیریم که به‌وسیلهٔ زاویه‌های α، β و γ، که با محورهای مختصات ساخته است، مشخص شده باشد. از مبدأ مختصات خط راستی در همان جهت مفروض رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط راست OA را، برابر واحد و با آغاز از مبدأ، جدا می‌کنیم (شکل ۴۷). در این حالت، مختصات نقطهٔ A، یعنی مختصات بردار $\overrightarrow{OA}$، عبارت



شکل ۴۷



شکل ۴۸

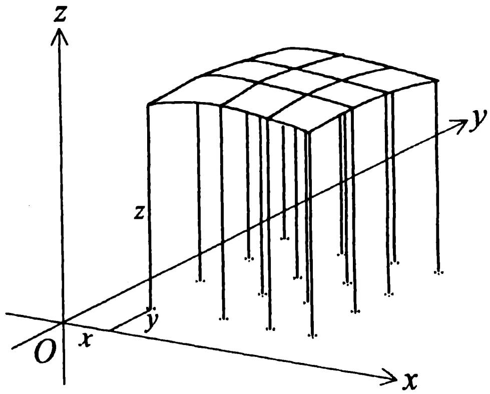
است از $\cos\alpha$، $\cos\beta$ و $\cos\gamma$. اگر جهت دومی، زاویه‌های $\bar{\alpha}$، $\bar{\beta}$و $\bar{\gamma}$ نسبت به محورهای مختصات داشته باشیم، بردار مشابه $\overrightarrow{OB}$ برای این جهت دوم دارای مختصات $\cos\bar{\alpha}$، $\cos\bar{\beta}$ و $\cos\bar{\gamma}$ خواهد بود (شکل ۴۸). اگر زاویهٔ بین این دو بردار را φ فرض کنیم، حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها برابر $\cos\varphi \times ۱ \times ۱$ می‌شود، از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\,\cos\bar{\alpha} + \cos\beta\,\cos\bar{\beta} + \cos\gamma\,\cos\bar{\gamma} \qquad (۱۶)$$

این رابطهٔ مهمی است که به‌یاری آن کسینوس زاویهٔ بین دو جهت به‌دست می‌آید.

۱۰. هندسهٔ تحلیلی در فضا. معادلهٔ سطح‌های فضایی و معادلهٔ منحنی‌ها

اگر معادلهٔ $z=f(x,y)$ مفروض باشد و درضمن x و y طول و عرض، و z ارتفاع نقطه باشد، در این صورت این معادله، سطحی مانند P را نشان می‌دهد؛ این سطح را به این ترتیب می‌توان به‌دست آورد که بر نقطه‌های (x,y) واقع بر صفحهٔ Oxy، عمودهایی برابر z براین صفحه رسم کنیم، مکان هندسی انتهای این عمودها، صفحهٔ P را می‌دهد که به‌وسیلهٔ این معادله بیان شده است. اگر معادله‌ای که شامل x، y و z است، نسبت به z حل نشده باشد، می‌توان آن را نسبت به z حل کرد و سپس این سطح P را به‌دست آورد. به‌طور کلی در هندسهٔ



شکل ۴۹

تحلیلی، هر سطح به‌وسیلهٔ معادله‌ای با سه متغیر x، y و z بیان می‌شود و عبارت است از مجموعهٔ همهٔ نقطه‌هایی از فضا که مختصات x، y و z آن‌ها در این معادله صدق کند (شکل ۴۹).

همان‌طور که در بخش دوم هم دیده‌ایم، تابع با دو متغیر $f(x,y)$ علاوه بر آن که صفحهٔ P را نمایش می‌دهد، دستگاه منحنی‌های تراز آن را هم نشان می‌دهد، یعنی منحنی‌هایی از صفحهٔ Oxy که برای هرکدام از آن‌ها تابع $f(x,y)$ مقداری است ثابت. روشن است که این دستگاه منحنی‌ها چیزی جز نقشه (توپوگرافی) سطح P روی صفحهٔ Oxy نیست.

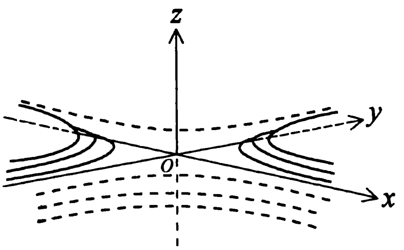
مثال. برای معادلهٔ $xy=z$، منحنی‌های تراز عبارت‌اند از

$$\ldots,\ xy=-۳\ ,\ xy=-۲\ ,\ xy=-۱\ ,\ xy=۰\ ,\ xy=۱\ ,\ xy=۲\ ,\ xy=۳\ ,\ \ldots$$

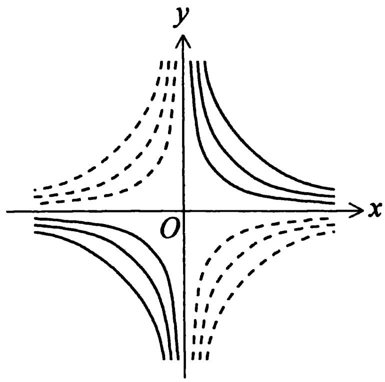
که همهٔ آن‌ها هذلولی هستند (شکل ۵۰)، به‌جز $xy=۰$ که عبارت است از صلیب محورهای مختصات. روشن است که برای $xy=z$، سطح زین‌مانندی به‌دست می‌آید (شکل ۵۱) (که پارابولوئید هیپربولیک [سهموی هذلولوی‌وار] نامیده می‌شود).

برای این‌که منحنی فضایی مشخص شود، می‌توان معادله دو سطح P و Q را داد که این منحنی محل برخورد آن‌ها باشد. برای نمونه، دستگاه

$$xy=z$$



شکل ۵۱

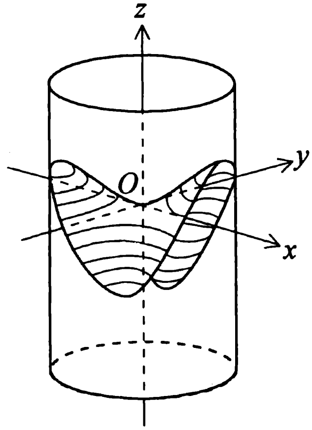


شکل ۵۰

$$x^{۲} + y^{۲} = ۱$$

یک منحنی فضایی را می‌دهند (شکل ۵۲). معادلهٔ $yx = z$، همان‌طور که دیدیم، یک پارابولوئید هیپربولیک، و $x^{۲}+y^{۲} = ۱$ یک استوانهٔ دوار به‌شعاع برابر واحد و به‌محور Oz را نشان می‌دهد. بنابراین دستگاه معادله‌های مفروض، منحنی محل برخورد پارابولوئید و استوانه را، همان‌طور که در شکل ۵۲ نشان داده شده است، مشخص می‌کند.

اگر در این دستگاه یکی از مجهول‌ها مثل x را به‌دل‌خواه انتخاب کنیم و سپس دستگاه را نسبت به y و z حل کنیم، مختصات (x,y,z) نقطه‌های مختلف این منحنی به‌دست می‌آید.



شکل ۵۲

معادلهٔ صفحه و معادلهٔ خط راست. می‌توان ثابت کرد که هر معادلهٔ درجه اول با سه متغیر

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

یک صفحه را نشان می‌دهد و برعکس. با توجه به این مطلب، روشن است که خط راست را می‌توان به‌کمک دستگاهی که از دو معادلهٔ مربوط به دو صفحه تشکیل شده است، نشان داد:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

یعنی به‌عنوان محل برخورد دو صفحه.

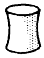
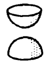
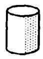
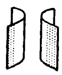
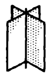
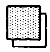
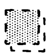
معادلهٔ کلی درجه دوم سه‌متغیره و ۱۷ نوع کانونی آن. معادلهٔ درجه دوم سه‌متغیره

$$A_1x^2 + A_2y^2 + A_3z^2 + 2B_1yz + 2B_2xz + 2B_3xy + 2C_1x + 2C_2y + 2C_3z + D = 0 \quad (17)$$

شامل ۱۰ جمله است. شبیه آن‌چه دربارهٔ معادلهٔ با دو متغیر انجام دادیم، می‌توان ثابت کرد که با دوران مناسب دستگاه محورهای قائم مختصات دور مبدأ، می‌توان معادلهٔ (۱۷) را به این صورت نوشت:

$$A'_1x'^2 + A'_2y'^2 + A'_3z'^2 + 2C'_1x' + 2C'_2y' + 2C'_3z' + D = 0 \quad (18)$$

یعنی می‌توان جمله‌هایی که شامل حاصل‌ضرب متغیرهاست حذف کرد. ولی در این‌جا اثبات امکان ساده کردن معادله به این صورت، دشوارتر از حالت مربوط به صفحه است. دشواری اثبات از این‌جا روشن می‌شود که در صفحه، دوران دور یک نقطه با یک زاویهٔ φ داده می‌شود، به‌ترتیبی که ما هم انجام دادیم. درحالی که در فضا، دوران جسم دور یک نقطهٔ ثابت با سه زاویهٔ مستقل (به‌نام زاویه‌های *اولر*) φ، θ، ψ داده می‌شود، که البته کار را دشوارتر می‌کند. به این مناسبت، اثبات امکان حذف جمله‌های شامل حاصل‌ضرب متغیرها در معادله از طریق غیرمستقیم انجام می‌گیرد (بخش شانزدهم دیده شود). سرانجام، اگر شبیه حالت مسطحه، محورهای مختصات را به ترتیب مناسبی موازی خود منتقل کنیم، معادلهٔ (۱۸) می‌تواند به یکی از صورت‌های کانونی زیر تبدیل شود:

بیضوی (الیپسوئید)		۱) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$
بیضوی موهومی		۲) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$
هذلولی (هیپربولوئید) یک‌پارچه		۳) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0$
هذلولی دوپارچه		۴) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0$
مخروط درجه‌دوم		۵) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$
مخروط موهومی درجه‌دوم		۶) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{c^2}{z^2}=0$
سهموی بیضی‌وار (پارابولوئید الیپتیک)		۷) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-2cz=0$
سهموی هذلولوی‌وار (پارابولوئید هیپربولیک)		۸) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-2cz=0$
استوانهٔ بیضی‌وار (استوانهٔ الیپتیک)		۹) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$
استوانهٔ بیضی‌وار موهومی		۱۰) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$
دو صفحهٔ موهومی متقاطع		۱۱) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$
استوانهٔ هذلولی‌وار		۱۲) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$
دو صفحهٔ متقاطع		۱۳) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$
استوانه سهمی‌وار (پارابولیک)		۱۴) $y^2-2px=0$
دو صفحهٔ متوازی		۱۵) $x^2-a^2=0$
دو صفحهٔ متوازی موهومی		۱۶) $x^2+a^2=0$
دو صفحهٔ منطبق بر هم		۱۷) $x^2=0$

صفحه و نُه معادلهٔ کانونی آخر (۹ تا ۱۷) جمله‌های شامل z را ندارند و عبارت‌اند از

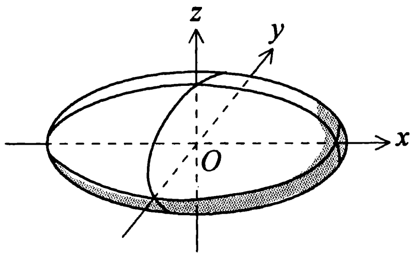
همان معادله‌های کانونی منحنی‌های درجه دوم در صفحهٔ Oxy. در فضا، این معادله‌ها استوانه‌هایی هستند که منحنی هادی آن‌ها همان منحنی درجه دوم مربوط روی صفحه Oxy و مولد آن‌ها موازی محور Oz است. درحقیقت اگر مختصات نقطه‌ای مثل $(x_1, y_1, 0)$ در یکی از این معادله‌ها صدق کند، مختصات نقطهٔ (x_1, y_1, z) هم برای هر مقدار دل‌خواه z در آن صدق می‌کند، زیرا در معادله، جملهٔ شامل z وجود ندارد

دربارهٔ معادله‌های ۱ تا ۸ به‌سادگی دیده می‌شود که معادلهٔ ۲ برای هیچ مقداری از x، y و z برقرار نیست و معادلهٔ ۶ تنها برای نقطهٔ $(0, 0, 0)$ – مبدأ مختصات – صادق است. به این ترتیب تنها شش معادلهٔ ۱، ۳، ۴، ۵، ۷ و ۸ را بررسی می‌کنیم.

بیضوی (الیپسوئید). دو سطحی را که به‌وسیلهٔ معادله‌های

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \quad \text{و} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

بیان می‌شوند، مقایسه می‌کنیم. روشن است معادلهٔ دوم عبارت است از معادلهٔ کرهٔ C به‌مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد، زیرا $x^2 + y^2 + z^2$ برابر است با مجذور فاصلهٔ تا مبدأ مختصات. اگر (x,y,z) نقطه‌ای واقع بر کره باشد، یعنی در معادلهٔ دوم صدق کند، در این صورت (ax,by,cz) نقطه‌ای است که مختصات آن در معادلهٔ اول صدق می‌کند. بنابراین سطحی که به‌وسیلهٔ معادلهٔ اول بیان می‌شود از کرهٔ C به‌دست می‌آید، به‌شرطی که طول‌های x نقطه‌های واقع بر کره را به ax، y را به by و z را به cz تغییر دهیم، یعنی کرهٔ C را به‌طور یکنواخت از صفحه‌های Oyz، Oxz و Oxy با ضریب‌های a، b و c «دور» کنیم. سطحی که به این ترتیب به‌دست می‌آید بیضوی نامیده می‌شود (شکل ۵۳).



شکل ۵۳

هذلولی و مخروط درجه دوم. حالا به مطالعهٔ معادله‌های ۳، ۴ و ۵ می‌پردازیم، یعنی معادله‌های به‌صورت

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\delta \tag{19}$$

که در آن δ برابر ۱، ۱− یا ۰ است. این معادله را با معادلهٔ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\delta \tag{20}$$

مقایسه می‌کنیم، که در آن مخرج y^2 را برابر a^2 گرفته‌ایم و نه مثل معادلهٔ (۱۹) برابر b^2. شبیه حالت قبل، در این‌جا هم می‌توان سطح (۱۹) را از سطح (۲۰)، با «دور» کردن آن از صفحهٔ Oxy به ضرب $\frac{b}{a}$، به‌دست آورد.

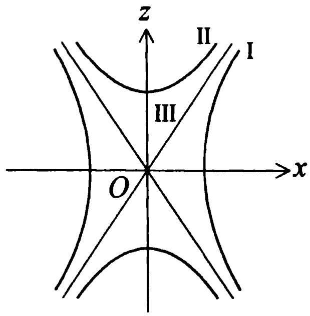
اکنون ببینیم سطح (۲۰) چگونه سطحی است. صفحهٔ $z=h$ عمود بر محور Oz را انتخاب می‌کنیم و برخورد آن را با سطح (۲۰) بررسی می‌کنیم. اگر در معادلهٔ (۲۰)، $z=h$ بگیریم به‌دست می‌آید:

$$x^2+y^2=a^2\left(\delta+\frac{h^2}{c^2}\right)$$

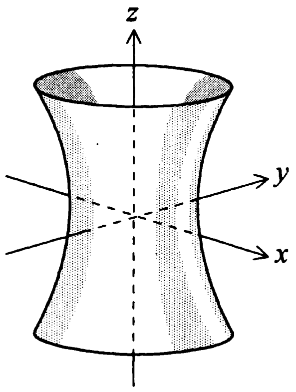
اگر $\delta+\frac{h^2}{c^2}$ مثبت باشد، این معادله همراه با $z=h$ دایره‌ای را می‌دهد که بر صفحهٔ $z=h$ قرار دارد و مرکز آن روی محور Oz است. اگر $\delta+\frac{h^2}{c^2}$ منفی باشد، و در مثل برای $\delta=-1$ و مقدار کوچکی از h^2، صفحهٔ $z=h$ سطح (۲۰) را قطع نمی‌کند، زیرا مجموع مربع‌های x^2+y^2 نمی‌تواند برابر عددی منفی بشود.

به این ترتیب، تمام سطح (۲۰) تشکیل شده است از دایره‌هایی که بر صفحه‌های عمود بر محور Oz قرار دارند و مرکزهای آن‌ها بر محور Oz واقع است. درنتیجه، در این حالت سطح (۲۰) عبارت است از سطح دوار دور محور Oz. تنها باید این سطح را با صفحه‌ای که از محور Oz عبور می‌کند برخورد دهیم تا «نصف‌النهار» آن، یعنی منحنی واقع بر صفحه‌ای که از محور دوران سطح می‌گذرد، به‌دست آید.

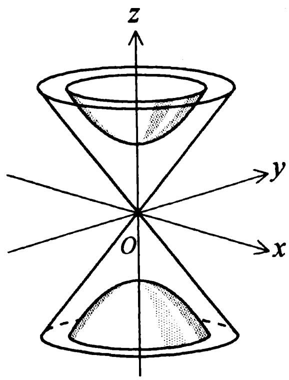
سطح (۲۰) را با صفحهٔ مختصات Oxz، یعنی صفحهٔ $y=0$ برخورد می‌دهیم (شکل ۵۴). $y=0$ را در معادلهٔ (۲۰) قرار می‌دهیم، معادلهٔ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=\delta$ نصف‌النهار به‌دست می‌آید. در حالت $\delta=1$ این نصف‌النهار همان هذلولی I، در حالت $\delta=-1$ هذلولی II و در حالت $\delta=0$ دو خط راست متقاطع III به‌دست می‌آید. با دوران این نصف‌النهارها دور



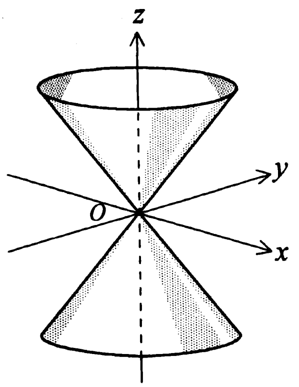
شکل ۵۴



شکل ۵۵



شکل ۵۶

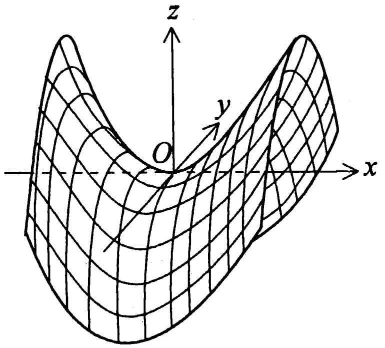


شکل ۵۷

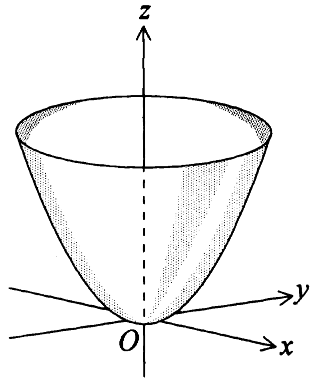
محور Oz به‌ترتیب هذلولی دوار یک‌پارچه (شکل ۵۵)، هذلولی دوار دوپارچه (شکل ۵۶) و مخروط دوار (شکل ۵۷) پیدا می‌شود. حالت کلی هذلولی یک‌پارچه و دوپارچه و مخروط درجه‌دوم (۳، ۴ و ۵) از همین سطح‌های دوار با «دور» کردن آن‌ها از صفحهٔ Oxz به ضریب $\frac{b}{a}$ به‌دست خواهد آمد.

سهموی (پارابولوئید). تنها معادله‌های ۷ و ۸ باقی مانده است. اولی یعنی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz$ را با این معادله مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 2cz$$



شکل ۵۹



شکل ۵۸

که در آن شبیه حالت قبل مخرج‌های x^2 و y^2 را برابر گرفته‌ایم؛ این معادله، سطحی را مشخص می‌کند که از دوران سهمی $x^2 = 2a^2cz$ دور محور Oz به‌دست آمده باشد و سهموی دوار (شکل ۵۸) نامیده می‌شود و ما دربارهٔ آن، وقتی از آینه سهمی‌وار صحبت می‌کردیم، بحث کرده‌ایم. حالت کلی سهموی بیضی‌وار ۷ از همین سهموی دوار، با «دور» کردن آن از صفحهٔ Oxz به‌دست می‌آید.

سطح ۸ را به‌طریق دیگری بررسی می‌کنیم، یعنی برخورد آن را با صفحه‌های $z = h$ در نظر می‌گیریم که درنتیجه هذلولی‌هایی به‌دست می‌آید. نقشهٔ سطح ۸ را در تصویرهای افقی شکل ۵۰ و در وضع دیگر محورهای مختصات، همین سطح را در شکل ۵۱ نشان داده‌ایم. این سطح در شکل ۵۹ مشخص شده است و سهموی هذلولی‌وار نام دارد. از برخورد این سطح با صفحه‌های موازی Oxz سهمی‌های یک‌جور پیدا می‌شود. همین وضع هم در برخورد سطح با صفحه‌های موازی Oxz به‌دست می‌آید.

مولدهای مستقیم هذلولی یک‌پارچه. این مطلب خیلی جالب است، ولی خیلی روشن نیست که هذلولی یک‌پارچه و سهموی هذلولی‌وار را مثل سطح مخروطی و سطح استوانه‌ای می‌توان از حرکت خط مستقیم به‌دست آورد. در حالت هذلولی، کافی است این مطلب را دربارهٔ هذلولی یک‌پارچه دوار $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ ثابت کنیم، زیرا حالت کلی هذلولی یک‌پارچه از همین هذلولی با «دور» کردن آن از صفحه Oxz به‌دست می‌آید و ضمن این تبدیل هر خط راستی دوباره به خط راست منجر می‌شود. هذلولی دوار را با صفحهٔ $y = a$، موازی صفحهٔ

Oxz، برخورد می‌دهیم؛ با قرار دادن $y=a$ به‌دست می‌آید:

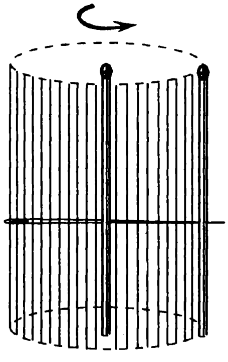
$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}}+\frac{a^{۲}}{a^{۲}}-\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۱ \Rightarrow \frac{x^{۲}}{a^{۲}}-\frac{z^{۲}}{c^{۲}}=۰$$

ولی این معادله همراه با $y=a$، دو خط متقاطع $\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=۰$ و $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=۰$ را در صفحهٔ $y=a$ می‌دهد.

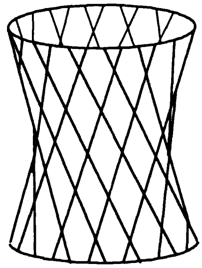
به این ترتیب معلوم می‌شود که روی هذلولی دو خط راست متقاطع وجود دارد. حالا اگر خود هذلولی را دور محور Oz دوران دهیم، هریک از این خط‌ها تمام هذلولی را به‌وجود می‌آورند (شکل ۶۰).

به‌سادگی ثابت می‌شود که: ۱) هر دو خط راستی که متعلق به یکی از این خانواده‌های به‌دست‌آمده باشد (هر خط که ضمن دوران دور محور Oz جابه‌جا می‌شود، مجموعهٔ خط‌هایی را به‌وجود می‌آورد که یکی از خانواده‌ها را تشکیل می‌دهد)، بر یک صفحه قرار ندارند (متنافرند)؛ ۲) هر خط یکی از این خانواده‌ها، همهٔ خط‌های خانوادهٔ دیگر را قطع می‌کند (به‌جز خط متقابل، که با آن متوازی است)؛ ۳) سه خط از یک خانواده با هیچ صفحه‌ای موازی نیست.

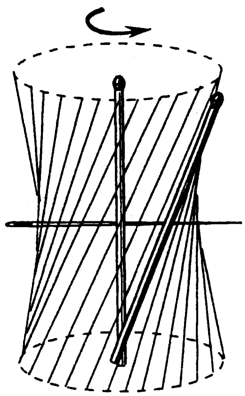
به‌کمک دو چوب‌کبریت و یک سوزن می‌توان به‌سادگی یک هذلولی دوار یک‌پارچه به‌دست آورد. سوزن را از وسط یک چوب‌کبریت عبور می‌دهیم، طوری که چوب کبریت از وسط سوزن عبور کرده و بر آن عمود باشد، سپس نوک تیز سوزن را از وسط چوب‌کبریت دوم می‌گذرانیم، به‌نحوی که با چوب‌کبریت اول موازی باشد. حالا اگر چوب‌کبریت دوم را دور چوب‌کبریت اول دوران دهیم، مثل دوران دور یک محور، از حرکت چوب‌کبریت دوم



شکل ۶۱



شکل ۶۰



شکل ۶۲

یک سطح استوانه‌ای به‌دست می‌آید (شکل ۶۱). اگر چوب‌کبریت دوم را عمود بر سوزن ولی غیرموازی با چوب‌کبریت اول قرار دهیم، ضمن چنین دورانی یک سطح هذلولی یک‌پارچه به‌دست می‌آید، که اگر دوران را باسرعت انجام دهیم این سطح به‌خوبی دیده می‌شود (شکل ۶۲).

نتیجهٔ بررسی معادله‌های درجه دوم. معادلهٔ کلی درجه‌دوم با سه متغیر می‌توانند به ۱۷ صورت مختلف سطح بیان شود. ۹ معادلهٔ آخر استوانه‌هایی هستند که بر روی ۹ منحنی ممکن درجه دوم قرار گرفته‌اند. هشت معادلهٔ اول هم به چهار زوج تقسیم می‌شود: دو بیضوی (حقیقی و موهومی)، دو هذلولی (یک‌پارچه و دوپارچه)، دو مخروط درجه دوم (حقیقی و موهومی) و دو سهموی (بیضی‌وار و هذلولی‌وار). همهٔ این سطح‌ها در مکانیک، فیزیک و صنعت اهمیت بسیار دارند (بیضوی ماند، بیضوی ارتجاع، هذلولی در تبدیل *لورنس* در فیزیک، سهموی دوار برای آینه‌های سهمی‌وار وغیره).

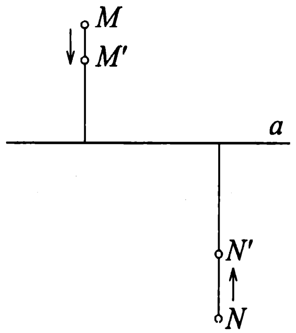
۱۱. تبدیل‌های آفینی و اورتوگونال (یا قائم)

مرحلهٔ اساسی بعدی در تکامل هندسهٔ تحلیلی، و به‌طور کلی هندسه، پیدایش نظریهٔ تبدیل‌هاست. در این‌جا به‌تفصیل به روشن کردن این مطلب می‌پردازیم.

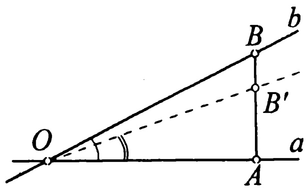
«به‌هم فشردن» صفحه به‌طرف خط. یکی از ساده‌ترین تبدیل‌های صفحه را بررسی می‌کنیم: «به‌هم فشردن» یکنواخت خط راست با ضریب k. فرض کنیم خط راست a و ضریب مثبت k، مثل $k=\frac{۲}{۳}$، در صفحه داده شده باشد. همهٔ نقطه‌های خط a را ثابت می‌گیریم، ولی هر نقطهٔ M، که بر خط a واقع نیست، به نقطهٔ M' تغییر می‌کند به‌نحوی که M' در همان طرف M نسبت به خط a و روی عمودی باشد که از M بر a رسم می‌شود؛ درضمن، فاصلهٔ M' از a برابر $\frac{۲}{۳}$ فاصلهٔ M از a باشد. وقتی ضریب k مثل این‌جا کوچکتر از واحد باشد، به‌هم‌فشردگی صفحه به‌طرف خط پیش می‌آید در حالتی که k بزرگتر از واحد باشد، صفحه از دو طرف a «باز» می‌شود، ولی برای سهولت بیان در هر دو حالت وضعی را که پیش می‌آید «به‌هم‌فشردگی» گویند. درحقیقت «به‌هم‌فشردگی» بیانی برای این نوع تبدیل (هم در حالت $k<۱$ و هم در حالت $k>۱$) می‌شود.

نقطه یا شکلی را که تبدیل می‌شود «تبدیل‌شونده» و آن‌چه پس از تبدیل به‌دست می‌آید «تبدیل‌شده» می‌نامیم. در مثل نقطهٔ M' تبدیل‌شدهٔ نقطهٔ M است (شکل ۶۳).

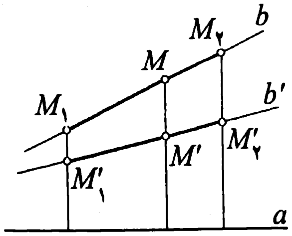
ثابت می‌کنیم، ضمن «به‌هم فشردن» صفحه به‌طرف خط، هر خط راستی از صفحه به‌یک خط راست تبدیل می‌شود. فرض کنید صفحه به‌طرف خط راستی که روی آن قرار دارد با ضریب فشردگی برابر k «به‌هم‌فشرده» می‌شود. b را خط راستی از صفحه، O را نقطه‌ای که در آن‌جا خط راست a را قطع کرده است، B را نقطهٔ دل‌خواه دیگری از آن و AB را عمودی که از B بر خط راست a رسم شده است، می‌گیریم (شکل ۶۴). بعد از تبدیل، نقطهٔ B به نقطه‌ای مانند B'، روی این عمود، منجر می‌شود، به‌نحوی که $|B'A|=k\cdot|BA|$. بنابراین تانژانت زاویهٔ $B'OA$ برابر است با $\frac{|AB'|}{|OA|}=\frac{k\cdot|AB|}{|OA|}$ یعنی k برابر تانژانت زاویه‌ای است که



شکل ۶۳



شکل ۶۴



شکل ۶۵

خط b با خط a می‌سازد، یعنی برای هر نقطهٔ B' که از نقطه‌های مختلف خط b به دست می‌آید، مقدار ثابتی است. به این ترتیب همهٔ نقطه‌های B' بر یک خط راست واقع می‌شوند که از نقطهٔ O عبور می‌کند و با خط a زاویه‌ای با تانژانت مذکور می‌سازد.

ضمن «به‌هم فشردن»، خط‌هایی که موازی یکدیگر باشند باز هم به خط‌هایی موازی تبدیل می‌شوند. درحقیقت، اگر تانژانت زاویه‌هایی که خط‌های راست b و c با خط راست a می‌سازند یکی باشد، در این صورت تانژانت زاویه‌هایی که b' و c' (تبدیل‌شده‌های b و c) با a می‌سازند، تنها ضریبی برابر k پیدا می‌کنند و بنابراین یکی هستند، یعنی دو خط b' و c' با هم موازی می‌شوند.

هر پاره‌خط راست صفحه، ضمن «به‌هم فشردن» صفحه به‌طرف خط، به‌طور یکنواخت کوتاه (یا بلند) می‌شود. صحبت بر سر «یکنواختی» کوتاه شدن است. توجه می‌کنیم که وسط هر پاره‌خط راست ضمن تبدیل بر وسط پاره‌خط تبدیل‌شده قرار می‌گیرد، نقطهٔ ثلث آن بر نقطهٔ ثلث تبدیل‌شده واقع می‌شود وغیره، یعنی پاره‌خط راست در تمام طول خود به‌طور یکنواخت «به‌هم‌فشرده» می‌شود. درحقیقت نقطهٔ M به هر نسبتی که پاره‌خط M_1M_2 را تقسیم کرده باشد، تبدیل‌شدهٔ آن M' هم پاره‌خط تبدیل‌شدهٔ $M'_1M'_2$ را به همان نسبت تقسیم می‌کند، زیرا خطهای موازی (در این‌جا خط‌های راست عمود بر a) خط‌های دیگر را (در این حالت b و b') به‌طور متناسب قطع می‌کنند (شکل ۶۵).

بیضی به‌عنوان نتیجه «به‌هم فشردن» دایره. دایره‌ای به‌مرکز مبدأ مختصات و شعاع برابر a در نظر می‌گیریم. با توجه به قضیهٔ فیثاغورس معادلهٔ $x^2+\bar{y}^2=a^2$ برای آن به‌دست می‌آید. به این مناسبت از $\bar{y}$ به‌جای y استفاده کردیم که بعد به y نیاز داریم. ببینیم، وقتی صفحه با ضریب $\frac{b}{a}$ به‌طرف محور Ox به‌هم‌فشرده می‌شود، دایره به چه شکلی تبدیل خواهد شد (شکل ۶۶).

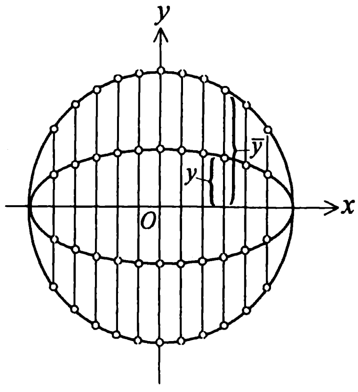
بعد از این تبدیل، مقدارهای x همهٔ نقطه‌ها ثابت می‌ماند و مقدارهای $\bar{y}$ برابر $y=\bar{y}\cdot\frac{b}{a}$ یعنی $\bar{y}=y\cdot\frac{a}{b}$ می‌شود. $\bar{y}$ را در معادلهٔ دایره قرار می‌دهیم، به‌دست خواهد آمد:

$$x^۲ + \frac{a^۲}{b^۲}y^۲ = a^۲ \quad \Rightarrow \quad \frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

و این معادلهٔ منحنی است که از «به‌هم فشردن» دایره به‌طرف محور Ox، در همان دستگاه محورهای مختصات، به‌دست می‌آید و همان‌طور که می‌بینیم این، معادلهٔ یک بیضی است. به این ترتیب ثابت کردیم که بیضی عبارت است از نتیجه «به‌هم فشردن» دایره.

از این مطلب که بیضی از «به‌هم فشردن» دایره به‌دست می‌آید، به‌طور مستقیم ویژگی‌های بسیاری از بیضی نتیجه می‌شود. از جمله این ویژگی که اگر خط‌های راست موازی با هم یک بیضی را قطع کنند، وسط‌های وترهایی که به‌دست می‌آید بر یک خط راست قرار دارند (شکل ۱۲ را ببینید)، را می‌توان به‌طریق زیر ثابت کرد. به‌ترتیب عکس، بیضی را به‌صورت دایره «باز» می‌کنیم.

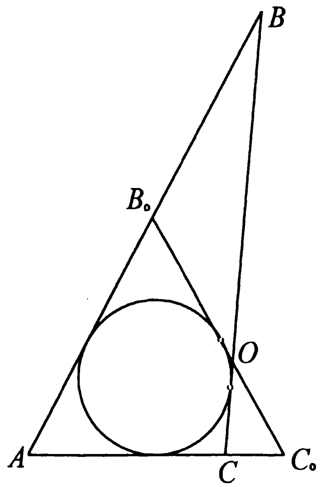
وترهای موازی بیضی به وترهای موازی در دایره تبدیل می‌شود، به‌نحوی که وسط وترهای اخیر، بر وسط وترهای اصلی قرار می‌گیرد. ولی می‌دانیم که وسط وترهای موازی در یک دایره، بر قطر آن، یعنی بر یک خط راست قرار دارد؛ بنابراین، وسط وترهای موازی در یک بیضی هم، بر یک خط راست قرار دارد. به‌ویژه، این نقطه‌ها بر خط راستی واقع‌اند که از «به‌هم فشردن» خط راست متناظر آن در دایره (ضمن تبدیل به بیضی)، به‌دست می‌آید.



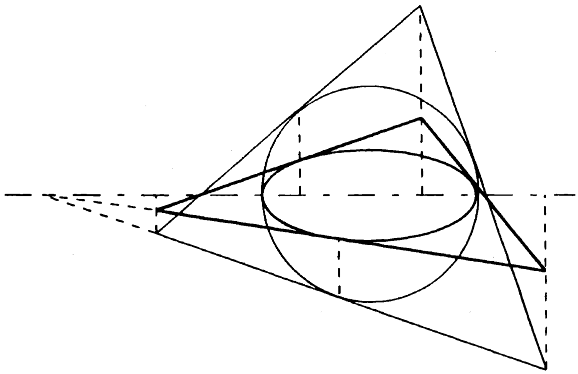
شکل ۶۶

این هم نمونهٔ دیگری از کاربرد نظریهٔ «به‌هم‌فشردگی». از آن‌جا که، عرض هر نوار قائم دایره، ضمن تبدیل آن به بیضی، تغییر نمی‌کند و طول آن در $\frac{b}{a}$ ضرب می‌شود، مساحت این نوار، بعد از تبدیل، برابر می‌شود با مساحت نخستین آن، ضرب در $\frac{b}{a}$؛ چون مساحت دایره، برابر است با πa^2، مساحت بیضی متناظر با آن برابر با $\frac{b}{a} \times \pi a^2$ یعنی πab می‌شود.

نمونه‌ای از حل یک مسألهٔ پیچیده‌تر. فرض کنید بخواهیم مثلثی با کمترین مساحت ممکن، بر یک بیضی مفروض محیط کنیم. نخست، این مسأله را برای دایره حل می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که در حالت دایره، این مثلث، متساوی‌الاضلاع است. اگر این مثلث، متساوی‌الاضلاع نباشد، کوچکترین زاویهٔ آن (که به B نشان می‌دهیم) کوچکتر از ۶۰ درجه می‌شود. بدون این‌که زاویهٔ A را تغییر دهیم، ضلع BC را جابه‌جا می‌کنیم تا به‌وضع B_0C_0 درآید (شکل ۶۷). رأس B را به‌طرف رأس A می‌بریم تا جایی که یکی از زاویه‌های B_0 یا C_0 برابر ۶۰ درجه شود. مثلث AB_0C_0، محیط بر دایره و با مساحتی کمتر از مساحت مثلث محیطی ABC به‌دست می‌آید، زیرا به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که $|OB| > |OC|$ و $|OB_0| \leq |OC_0|$، و بنابراین مساحت مثلث OBB_0 بیشتر از مساحت مثلث OCC_0 می‌شود. حالا، اگر مثلث AB_0C_0، متساوی‌الاضلاع نباشد، می‌توانیم با تکرار استدلال بالا، به مثلث متساوی‌الاضلاعی که مساحتی کمتر دارد، برسیم. به این ترتیب، هر مثلث غیرمتساوی‌الاضلاعی که بر دایره محیط باشد، مساحتی بیشتر از مثلث متساوی‌الاضلاع محیطی دارد.



شکل ۶۷



شکل ۶۸

اکنون، به بیضی برمی‌گردیم. بیضی را از طرف قطر بزرگتر آن باز می‌کنیم تا به دایره‌ای برسیم که از «به‌هم فشردن» آن، این بیضی، به‌دست می‌آید. ضمن این تبدیل (شکل ۶۸): ۱) همهٔ مثلث‌های محیط بر بیضی، به مثلث‌هایی محیط بر دایره، تبدیل می‌شود؛ ۲) مساحت همهٔ شکل‌ها، و در حالت خاص، همهٔ مثلث‌ها، به یک نسبت بزرگ می‌شود. از این‌جا، معلوم می‌شود که کمترین مساحت، مربوط به آن مثلث‌های محیطی بیضی است، که ضمن تبدیل به مثلث‌های متساوی‌الاضلاع محیط بر دایره منجر شود. تعداد این مثلث‌ها بی‌نهایت است، گرانیگاه آن‌ها بر مرکز بیضی و نقطه‌های تماس ضلع‌های مثلث با بیضی بر وسط این ضلع‌ها قرار دارد و روش رسم آن‌ها را هم می‌توان به‌سادگی و با آغاز از دایره، پیدا کرد (شکل ۶۸ را ببینید).

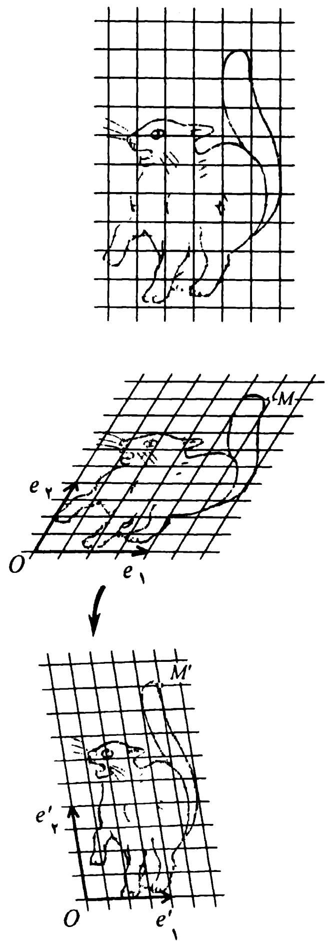
«به‌هم فشردن» صفحه به‌طرف خط راست، تنها حالت خاصی از تبدیل کلی‌تری است که آن را ***تبدیل آفینی*** صفحه گویند.

تبدیل‌های آفینی عمومی. دو بردار $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ را «پایهٔ» مختصاتی صفحه گوییم، وقتی که در مبداء O مشترک و در امتداد، متفاوت باشند. مختصات نقطهٔ M صفحه، نسبت به پایهٔ $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ عبارت است از دو عدد x و y، به‌نحوی که برای رسیدن از مبداء O به نقطهٔ M، باید x برابر بردار $\mathbf{e}_1$ و سپس y برابر بردار $\mathbf{e}_2$ را (از نقطهٔ O) جدا کنیم. این، حالت کلی مختصات دکارتی در صفحه است. به همین ترتیب، می‌توان حالت کلی مختصات دکارتی را در فضا تعریف کرد. دستگاه معمولی مختصات قائم دکارتی، که تاکنون استفاده می‌کردیم، حالت خاصی از این دستگاه

است. در دستگاه مختصات قائم دکارتی، بردارهای مختصاتی $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ بر هم عمودند و طول هرکدام از آن‌ها، برابر است با طول واحدی که همهٔ پاره‌خط‌ها را به‌کمک آن اندازه می‌گیریم.

تبدیل عمومی آفینی صفحه، تبدیلی است که به‌کمک آن، شبکهٔ متوازی‌الاضلاع‌های برابر مفروض، به شبکهٔ دل‌خواه دیگری از متوازی‌الاضلاع‌های برابر، تغییرشکل پیدا کند. به بیان دقیق‌تر، این، چنان تبدیلی است که به‌ازای آن، پایهٔ مختصاتی مفروض $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$، به پایهٔ دیگری تبدیل شود (یعنی در حالت کلی، هم طول بردارهای $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ و هم زاویهٔ بین آن‌ها تغییر کند)، و هر نقطهٔ دل‌خواه M، به نقطه‌ای مانند M' بدل شود که مختصات آن نسبت به‌پایهٔ تازه، همان مختصات M نسبت به پایهٔ قبلی باشد (شکل ۶۹).

«به‌هم فشردن» به‌طرف محور Ox با ضریب k، عبارت است از حالت خاصی که در آن،



شکل ۶۹

پایهٔ قائم Oe_1e_2، به پایهٔ Oe_1ke_2 تبدیل شود.

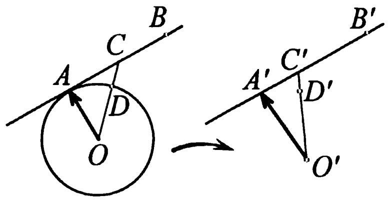
به‌سادگی می‌توان ثابت کرد در تبدیل عمومی آفینی، هر خط راست منجر به یک خط راست؛ خط‌های راست موازی منجر به خط‌های راست موازی می‌شود و اگر نقطه‌ای، پاره‌خطی را به‌نسبتی تقسیم کرده باشد، تبدیل‌شدهٔ آن نیز، پاره‌خط تبدیل‌شده را به همان نسبت تقسیم می‌کند. علاوه بر آن، می‌توان این قضیهٔ مهم را ثابت کرد که: هر تبدیل آفینی صفحه را می‌توان از راه یک حرکت صفحه روی خودش (به‌عنوان یک واحد بی‌تغییر) و سپس دو «به‌هم‌فشردگی» (یعنی با ضریب‌های مختلف k_1 و k_2 و به‌طرف دو خط راست عمود بر هم)، به‌دست آورد.

برای اثبات این حکم همهٔ شعاع‌های دایره‌ای از صفحهٔ مورد تبدیل را در نظر می‌گیریم (شکل ۷۰). فرض کنید شعاع OA شعاعی باشد که بعد از تبدیل، کوتاه‌ترین آن‌ها باشد؛ $O'A'$ را تبدیل‌شدهٔ OA می‌گیریم: در این صورت، عمود AB بر OA به عمود $A'B'$ بر $O'A'$ تبدیل می‌شود، زیرا، اگر $O'C'$ که تبدیل‌شدهٔ OC و غیر از $O'A'$ است بر $A'B'$ عمود باشد، $O'D'$ تبدیل‌شدهٔ شعاع OD، کوچکتر از $O'C'$ می‌شود که کوچکتر از $O'A'$ است، و این مخالف با فرض است.

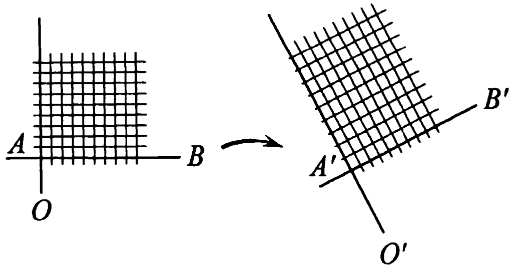
به این ترتیب، خط‌های راست عمود بر هم OA و AB، به خط‌های راست عمود بر هم $O'A'$ و $A'B'$، تبدیل می‌شود. بنابراین، شبکهٔ مربعی که روی OA و AB ساخته می‌شود، بعد از تبدیل، به شبکهٔ مستطیل‌های برابر منجر می‌شود (شکل ۷۱)، که نتیجهٔ «به‌هم فشردن» یکنواخت در طول خط‌های راست این شبکهٔ مربعی است.

درست به همین ترتیب، می‌توان تبدیل آفینی عمومی در فضا را تعریف کرد، که به‌ازای آن، پایهٔ مختصات فضایی $Oe_1e_2e_3$، به پایهٔ دیگر $O'e'_1e'_2e'_3$ تبدیل می‌شود. به‌زبان دیگر، پایهٔ تازه، با طول‌های دیگر و زاویه‌های دیگری خواهد بود؛ و نقطهٔ M به نقطهٔ M' تبدیل می‌شود که نسبت به دستگاه تازه دارای همان مختصاتی است که نقطهٔ M نسبت به دستگاه قدیم داشت.

همهٔ ویژگی‌هایی را که نام بردیم، دربارهٔ تبدیل آفینی فضا هم درست است، تنها دربارهٔ



شکل ۷۰



شکل ۷۱

قضیهٔ آخر، در حالت فضایی، گفت‌وگو از حرکت فضا (به‌عنوان یک واحد صُلب و بی‌تغییر) و سپس سه‌بار «به‌هم فشردن» به‌طرف سه صفحهٔ دوبه‌دو عمود بر هم و با ضریب‌های دل‌خواه k_1، k_2 و k_3 است.

مهم‌ترین کاربردهای تبدیل آفینی

۱. کاربرد در هندسه، برای حل مسأله‌های مربوط به ویژگی‌های آفینی شکل‌ها، یعنی ویژگی‌هایی که ضمن تبدیل آفینی، تغییر نمی‌کنند. قضیهٔ مربوط به قطرهای بیضی و مسألهٔ مربوط به مثلث محیطی، نمونه‌هایی از این مسأله‌ها هستند. برای حل این‌گونه مسأله‌ها، ابتدا شکل داده‌شده را، با تبدیل آفینی، به شکل ساده‌تری تبدیل می‌کنیم و روی آن ویژگی‌های لازم را کشف می‌کنیم، سپس دوباره به شکل اصلی برمی‌گردیم.

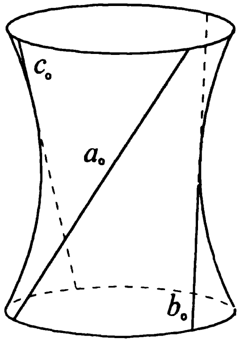
۲. کاربرد در هندسهٔ تحلیلی، برای گروه‌بندی منحنی‌ها و سطح‌های درجهٔ دوم. مطلب بر سر این است که چگونه می‌توان ثابت کرد که بیضی‌های مختلف خویشاوند یکدیگرند، به این معنا که می‌توان یکی را از دیگری با تبدیل آفینی به‌دست آورد (خود واژهٔ آفینی، *affinis*، در لاتینی به‌معنای خویشاوند است). همچنین همهٔ هذلولی‌ها با یکدیگر و همهٔ سهمی‌ها با یکدیگر خویشاوندند. درحالی که بیضی را به هذلولی یا سهمی، یا هذلولی را به سهمی، نمی‌توان با تبدیل آفینی، تغییر داد، یعنی آن‌ها خویشاوند یکدیگر، به‌مفهوم آفینی، نیستند. طبیعی است منحنی‌های درجه دوم را به گروه‌های آفینی تقسیم کنیم، به منحنی‌هایی که به‌مفهوم آفینی، خویشاوند یکدیگر باشند. معلوم می‌شود که تبدیل معادله، به‌صورت کانونی، درست همین گروه‌بندی را می‌دهد، یعنی منحنی‌های درجهٔ دوم، شامل ۹ گروه آفینی هستند (ما به این بحث نمی‌پردازیم که چرا بیضی‌های موهومی و دو خط موازی

موهومی، مربوط به دو گروه مختلف آفینی هستند. نه در این حالت و نه در حالت‌های دیگر منحنی‌های مسطحه، بررسی خاصی نمی‌کنیم. گفت‌وگو بر سر ویژگی‌های جبری خود معادله است).

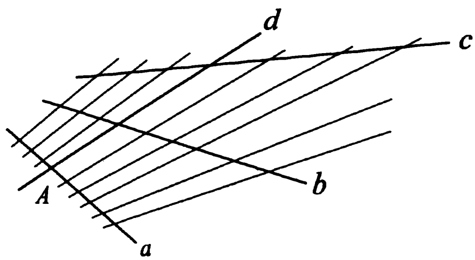
به همین ترتیب، گروه‌بندی سطح‌های درجهٔ دوم، نسبت به معادلهٔ کانونی آن‌ها، ۱۷ گروه مختلف آفینی را به‌دست می‌دهد.

نمونهٔ ساده‌ای از کاربرد گروه‌بندی آفینی سطح‌های درجه دوم را می‌آوریم. سه خط راست a، b و c را به‌دلخواه در فضا انتخاب می‌کنیم، به‌نحوی که ۱) هر دو خط دلخواه از آن‌ها، بر یک صفحه واقع نباشد (یعنی متباعد باشند) و ۲) هر سه خط با هم، موازی با یک صفحه نباشند. در این صورت ثابت می‌کنیم که مجموعهٔ همه خط‌های راست d از فضا، که هرکدام از آن‌ها با هر سه خط راست a، b و c برخورد دارد (شکل ۷۲)، تشکیل یک سطح کامل و یکپارچه هذلولی (هیپربولوئید) را می‌دهند.

ببینیم از چگونه مجموعه‌ای از خط‌های راست d گفت‌وگو می‌کنیم. از هر نقطهٔ A، متعلق به خط راست a، می‌توان صفحه‌ای مانند P شامل خط راست b، و صفحه‌ای مانند Q شامل خط راست c عبور داد. این دو صفحهٔ P و Q یکدیگر را در خطی مانند d قطع می‌کنند؛ این خط از نقطهٔ A (که روی خط راست a قرار دارد) می‌گذرد و خط‌های راست b و c را هم، قطع می‌کند. با پیدا کردن این‌گونه خط‌های راست d، که هریک از آن‌ها از نقطه‌ای از خط a می‌گذرد، مجموعهٔ همهٔ خط‌های d از فضا را به‌دست می‌دهد که هرکدام از آن‌ها با هر سه خط راست a، b و c، نقطهٔ برخورد دارد. مجموعهٔ این خط‌های راست، سطحی از فضا را مشخص می‌کند. یادآور می‌شویم که هر هیپربولوئید یکپارچهٔ مفروض را می‌توان با همین



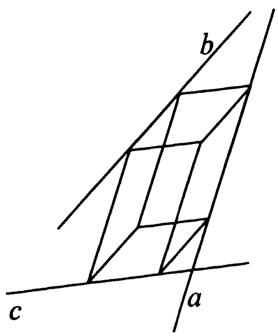
شکل ۷۳



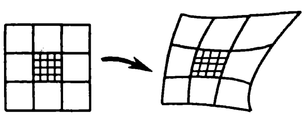
شکل ۷۲

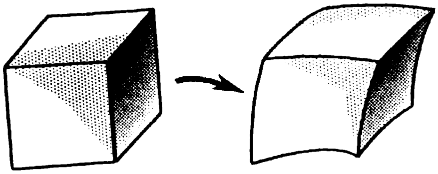
روش به‌دست آورد، تنها باید به‌عنوان خط‌های راست a، b و c، سه مولد راست مختلف a_0، b_0 و c_0 را از یک خانواده (شکل ۷۳)، و به‌عنوان خط‌های راست d، همهٔ مولدهای خانوادهٔ دیگر را، انتخاب کرد. برعکس، فرض کنید سه خط راست فضایی a، b و c، که دوبه‌دو متباعدند و هرسهٔ آن‌ها موازی با یک صفحه نیستند، داده شده باشد. در این صورت می‌توان ثابت کرد که آن‌ها سه یال یک متوازی‌السطوح را تشکیل می‌دهند – سه یالی که دوبه‌دو، نقطهٔ مشترکی ندارند (شکل ۷۴). متوازی‌السطوحی را برای خط‌های راست مفروض a، b و c، و متوازی‌السطوح دیگری را برای مولدهای هم‌خانوادهٔ a_0، b_0 و c_0، از یک هیپربولوئید یک‌پارچهٔ دل‌خواه، می‌سازیم؛ سپس آن تبدیل آفینی فضا را انجام می‌دهیم که متوازی‌السطوح a_0، b_0 و c_0 را به متوازی‌السطوح a، b و c تبدیل کند؛ روشن است که این تبدیل، این هیپربولوئید را به سطح مورد نظر ما تبدیل می‌کند. ولی، بنا بر گروه‌بندی آفینی سطح‌های درجه دوم، می‌دانیم که تبدیل آفینی یک هیپربولوئید یک‌پارچه، دوباره یک هیپربولوئید یک‌پارچه است.

۳. کاربرد در نظریهٔ تبدیل‌های پیوستهٔ یک محیط یک‌پارچه و کامل، از جمله در نظریهٔ قابلیت ارتجاع، در نظریهٔ جریان آب‌گونه‌ها، در نظریهٔ جریان الکتریکی یا مغناطیسی وغیره. عنصرهای بسیار کوچک محیط کامل مورد بررسی، «تقریباً» به‌صورت آفینی تبدیل می‌شوند؛ و به‌اصطلاح «به تبدیل کوچک خطی» (به عبارت‌های درجهٔ اول، خطی می‌گویند و ما خواهیم دید در هندسهٔ تحلیلی، دستورهای مربوط به تبدیل‌های آفینی، درجهٔ اول هستند). این مطلب در شکل ۷۵ دیده می‌شود. روی خط‌های راست مربع بزرگ شبکه، خمیدگی به‌طور نمایانی دیده می‌شود. برای قطعهٔ کوچک مربع‌های کوچکتر هم، همین



شکل ۷۴

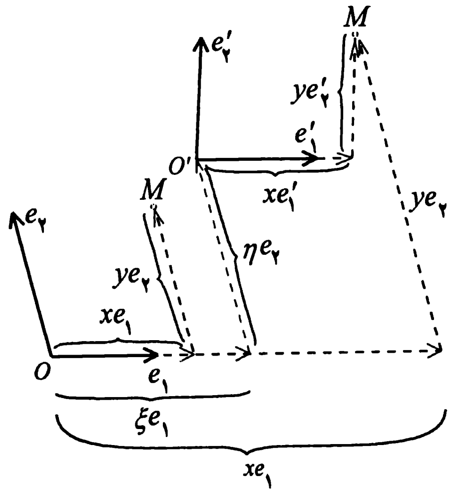

شکل ۷۵



شکل ۷۶

مطلب، منتهی مبهم‌تر، به‌نظر می‌رسد و «به‌تقریب» به شبکهٔ متوازی‌الاضلاع‌های موازی، تبدیل می‌شود. شبیه همین طرح در فضا هم به‌دست می‌آید (شکل ۷۶). به این مناسبت که هر تبدیل آفینی فضا، به یک انتقال و سه «به‌هم‌فشردگی» دوبه‌دو عمود بر هم، منجر می‌شود، نتیجه می‌شود که عنصر جسم، ضمن تغییرشکل ارتجاعی آن به‌عنوان یک جسم صُلب حرکت می‌کند، علاوه بر آن درمعرض سه «به‌هم‌فشردگی» دوبه‌دو عمود بر هم، قرار می‌گیرد.

رابطه‌های تبدیل آفینی. اگر $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ را پایهٔ مورد تبدیل، $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ را تبدیل‌شدهٔ آن، مختصات نقطهٔ O' را نسبت به پایهٔ قدیم ξ و η و مختصات بردارهای $\mathbf{e}'_1$ و $\mathbf{e}'_2$ را نسبت به آن a_1، a_2 و b_1، b_2 بگیریم رابطه‌های تبدیل آفینی (همان‌طورکه از شکل ۷۷ دیده می‌شود) چنین است:



شکل ۷۷

$$x' = a_1 x + b_1 y + \xi$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + \eta$$

به این معنا که اگر x و y مختصات نقطهٔ M نسبت به پایهٔ قدیم $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ باشد، x' و y'، که از این رابطه‌ها به‌دست می‌آید، عبارت است از مختصات نقطهٔ M'، تبدیل‌شدهٔ نقطهٔ M، نسبت به همان پایهٔ قدیم.

درواقع، فرض کنید $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ پایهٔ مورد تبدیل، $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ تبدیل‌شدهٔ آن، M نقطه‌ای از صفحهٔ مورد تبدیل و M' تبدیل‌شدهٔ آن باشد. بنا بر تعریف تبدیل آفینی، اگر مختصات نقطهٔ M نسبت به پایهٔ $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$، x و y باشد، مختصات تبدیل‌شدهٔ آن، یعنی M'، نسبت به $O'\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2$ هم، همین x و y خواهد بود.

اگر $\mathbf{m}'$ را برداری فرض کنیم که از مبدأ O به نقطهٔ M'، تبدیل‌شدهٔ M، رفته است، داریم: $\mathbf{m}' = x'\mathbf{e}_1 + y'\mathbf{e}_2$. از طرف دیگر، برای این بردار داریم:

$$\mathbf{m}' = \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 + x\mathbf{e}'_1 + y\mathbf{e}'_2$$

و برای بردارهای $\mathbf{e}'_1$ و $\mathbf{e}'_2$ داریم:

$$\mathbf{e}'_1 = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 \quad , \quad \mathbf{e}'_2 = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2$$

و بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{m}' = \xi \mathbf{e}_1 + \eta \mathbf{e}_2 + a_1 x \mathbf{e}_1 + a_2 x \mathbf{e}_2 + b_1 y \mathbf{e}_1 + b_2 y \mathbf{e}_2$$

و یا

$$\mathbf{m}' = (a_1 x + b_1 y + \xi)\mathbf{e}_1 + (a_2 x + a_2 y + \eta)\,\mathbf{e}_2$$

که اگر این رابطه را، با رابطهٔ اول $\mathbf{m}'$ ، مقایسه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + \xi \\ y' = a_2 x + b_2 y + \eta \end{cases} \qquad (۲۱)$$

می‌توان ثابت کرد که دترمینان

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

مخالف صفر و برابر است با نسبت مساحت متوازی‌الاضلاعی، که روی بردارهای تازهٔ پایه ساخته شده است، بر مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای قدیم به‌دست می‌آید.

رابطه‌های مشابهی برای حالت فضایی به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 z + \xi \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 z + \eta \\ z' = a_3 x + b_3 y + c_3 z + \zeta \end{cases} \tag{۲۲}$$

که در آن (ξ, η, ζ) مختصات مبدأ O' از پایهٔ تبدیل‌شدهٔ $O'\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$، و (a_1, a_2, a_3)، (b_1, b_2, b_3)، (c_1, c_2, c_3) مختصات بردارهای آن ($\mathbf{e}'_1$، $\mathbf{e}'_2$ و $\mathbf{e}'_3$) نسبت به پایهٔ مورد تبدیل $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ است.

دترمینان

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

مخالف صفر و برابر است با نسبت حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای پایهٔ تازه ساخته شود، به حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای پایهٔ قدیم به‌دست می‌آید.

تبدیلهای قائم (اورتوگونال). حرکت‌های صفحه روی خودش، به‌عنوان یک واحد بی‌تغییر، یا چنین حرکت‌هایی به‌اضافهٔ انعکاس به‌طرف خط راستی از صفحه، ***تبدیل اورتوگونال صفحه*** نامیده می‌شود. همچنین، حرکت‌های فضا، به‌عنوان یک واحد تغییرناپذیر، یا چنین حرکت‌هایی به‌اضافهٔ انعکاس فضا به‌طرف صفحه‌ای از آن، ***تبدیل اورتوگونال فضا*** نامیده می‌شود. روشن است که تبدیل اورتوگونالی، همان تبدیل آفینی است، به‌شرطی که «اندازه‌های» پایهٔ آن تغییر نکند، بلکه تنها مورد انتقال، یا انتقال و انعکاس قرار می‌گیرد.

تبدیل اورتوگونالی به‌کمک مختصات قائم بررسی می‌شود، یعنی وقتی که بردارهای پایهٔ نخستین، دوبه‌دو بر هم عمود و طول‌هایی برابر واحد مقیاس داشته باشند. بعد از تبدیل اورتوگونالی، بردارهای پایه دوبه‌دو بر هم عمود باقی می‌مانند، یعنی حاصل‌ضرب داخلی (اسکالر) آن‌ها برابر صفر خواهد بود و از لحاظ طول، برابر واحد باقی می‌مانند. به این

ترتیب (رابطهٔ ۱۴ را ببینید) در حالت مسطحه داریم:

$$a_1b_1+a_2b_2=0\ ,\ a_1^2+a_2^2=1\ ,\ b_1^2+b_2^2=1 \qquad (21')$$

و در حالت فضایی

$$\begin{aligned} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \quad &, \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2=1 \\ a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0 \quad &, \quad b_1^2+b_2^2+b_3^2=1 \\ b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0 \quad &, \quad c_1^2+c_2^2+c_3^2=1 \end{aligned} \qquad (22')$$

بنابراین، اگر پایهٔ اصلی با زاویهٔ قائمه باشد، رابطه‌های (۲۱) وقتی، و تنها وقتی، یک تبدیل اورتوگونالی صفحه است که شرط‌های (′۲۱) برقرار باشد، و رابطهٔ (۲۲) وقتی، و تنها وقتی، یک تبدیل اورتوگونالی فضاست که شرط‌های (′۲۲) برقرار باشد. می‌توان ثابت کرد که در حالت $\Delta>0$، یک حرکت و در حالت $\Delta<0$، یک حرکت به‌اضافهٔ یک انعکاس داریم.

۱۲. نظریهٔ پایاها (آنواریان‌ها[1])

اندیشه پایاها. پایاهای معادلهٔ درجهٔ دوم شامل دو متغیر. در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم، مفهوم پایاها، که یکی از مهم‌ترین مفهوم‌های تازه است، به‌وجود آمد.

از جمله، چندجمله‌ای درجهٔ دوم دومجهولی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F \qquad (23)$$

اگر x و y را به‌عنوان مختصات قائم در نظر بگیریم و آن‌ها را به دستگاه محورهای قائم تازه‌ای ببریم، بعد از آن که در (۲۳) به‌جای x و y، مقدارهای آن‌ها را برحسب x' و y' قرار دهیم، پرانتزها را باز کنیم و جمله‌های متشابه را با هم جمع کنیم، به چندجمله‌ای تازه‌ای با ضریب‌هایی دیگر می‌رسیم:

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' \qquad (24)$$

به‌نظر می‌رسد باوجودی که خود ضریب‌ها تغییر کرده‌اند، عبارت‌هایی شامل این

۱. Invarians، به لاتین یعنی پایا و بی‌تغییر که در فارسی آن را «ناوردا» هم گفته‌اند.

ضریب‌ها وجود دارد که مقدار عددی آن‌ها، ضمن این تبدیل، تغییر نمی‌کند. این عبارت‌ها که از A'، B'، C'، D'، E' و F' تشکیل شده‌اند، از نظر مقدار عددی، برابر با عبارت‌هایی هستند که از مقدارهای متناظر A، B، C، D، E و F تشکیل شده باشند.

این‌گونه عبارت‌ها را، پایاهای چندجمله‌ای (۲۳)، نسبت به گروه تبدیل‌های اورتوگونال، گویند (یعنی نسبت به تبدیل از یک مختصات قائم x و y، به هر مختصات قائم دیگر x' و y').

این پایاها، چنین‌اند:

$$I_1 = A + C \quad ,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \quad ,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 \quad ,$$

یعنی

$$A + C = A' + C' \qquad , \qquad AC - B^2 = A'C' - B'^2$$

$$ACF + 2BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 = A'C'F' + 2B'D'E' - A'E'^2 - C'D'^2 - F'B'^2$$

می‌توان این قضیهٔ مهم را ثابت کرد که هر پایای اورتوگونال از چندجمله‌ای (۲۳)، به‌وسیلهٔ این سه پایای بنیانی بیان می‌شود.

اگر چندجمله‌ای (۲۳) را برابر صفر قرار دهیم، یک منحنی درجهٔ دوم به‌دست می‌آید. روشن است هر مقداری که به خود این منحنی، و نه به مکان این منحنی در صفحه، مربوط باشد، بستگی به این نخواهد داشت که معادلهٔ منحنی را در چه دستگاهی از محورهای مختصات نوشته‌ایم، و بنابراین، اگر این مقدار، برحسب ضریب‌ها نوشته شده باشد، عبارت پایای اورتوگونال ازچندجمله‌ای (۲۳) خواهد بود وبه‌این‌ترتیب، با توجه به‌قضیهٔ یادشده، به‌وسیلهٔ این‌سه پایای بنیانی بیان می‌شود. علاوه بر آن، از آن‌جاکه اگر شش ضریب معادله را در عددی مانند t ضرب کنیم، منحنی نمایش آن تغییر نمی‌کند، عبارتی را که برحسب I_1، I_2 و I_3 بیان می‌کنیم ـ و مقدار آن بستگی به خود منحنی دارد ـ باید طوری باشد که اگر در آن مقدارهای A، B، C، D، E و F را در t ضرب کنیم، مقدار t در آن حذف شود (به t

ساده شود). چنین عبارتی باید به‌اصطلاح، نسبت به A، B، C، D، E و F از درجهٔ صفر باشد.

این موضوع را روی مثالی، روشن می‌کنیم. فرض کنید معادلهٔ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

یک بیضی را مشخص کند. از آن‌جا که این معادله معرف یک بیضی است، می‌توان به‌کمک ضریب‌های آن، همهٔ مقدارهای اصلی مربوط به بیضی را محاسبه کرد. از جمله، می‌توان نیم‌قطرهای آن a و b را برحسب ضریب‌های این معادله محاسبه کرد. این عبارت‌ها، پایا خواهند بود و بنابراین، برحسب I_1، I_2 و I_3 قابل بیان هستند. با تبدیل معادله، به‌صورت کانونی و انجام بعضی محاسبه‌ها، عبارت زیر را (که به‌اندازهٔ کافی پیچیده است)، برای بیان نیم‌قطرها برحسب I_1، I_2 و I_3 به‌دست می‌آوریم:

$$\sqrt{\frac{2\,|I_3|}{|I_2|\cdot\left|I_1 \pm \sqrt{I_1^2 - 4I_2}\right|}}$$

و البته روشن است، این عبارت، درعین‌حال برحسب A، B، C، D، E و F است.

از آن‌چه گفته شد، معلوم می‌شود که خود پایاهای I_1، I_2 و I_3 و هر ترکیبی از آن‌ها که نسبت به ضریب‌ها، توان صفر نداشته باشد، دارای مفهوم هندسی نیست و تنها مفهوم‌های جبری هستند.

می‌توان ثابت کرد، عبارت

$$K_1 = \begin{vmatrix} A & D \\ D & F \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} = AF - D^2 + CE - E^2$$

گرچه، در انتقال (حرکت به‌موازات خود) تغییر می‌کند، ولی در دوران خالص محورهای قائم بی‌تغییر می‌ماند و به همین مناسبت آن را **نیم‌پایا** گویند.

برای این که نمونه‌ای از کاربرد پایاها و نیم‌پایاها را آورده باشیم، جدول زیر را می‌دهیم؛ از این جدول معلوم می‌شود که اگر I_1، I_2، I_3 و K_1 را محاسبه کنیم، بلافاصله می‌توان، بنا بر معادلهٔ گروه آفینی منحنی‌های درجه دوم، بیان تحلیلی آن را پیدا کرد:

معادلهٔ کانونی	معادله‌ای که درمی‌آید	نام منحنی	نشانهٔ گروه
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		بیضی	$I_2>0 \quad , \quad I_1I_3<0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$		بیضی موهومی	$I_2>0 \quad , \quad I_1I_3>0$
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\frac{I_3}{I_2}=0$	نقطه	$I_2>0 \quad , \quad I_3=0$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		هذلولی	$I_2<0 \quad , \quad I_3\neq 0$
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$		دو خط راست متقاطع	$I_2<0 \quad , \quad I_3=0$
$x^2=2py$	$I_1x^2+2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}y=0$	سهمی	$I_2=0 \quad , \quad I_3\neq 0$
$x^2=a^2$		دو خط راست متوازی	$I_2=0 , I_3=0 \quad , K_1<0$
$x^2=-a^2$	$I_1x^2+\frac{K_1}{I_1}=0$	دوخط راست‌متوازی‌موهومی	$I_2=0,I_3=0 \quad , K_1>0$
$x^2=0$		دو خط راست منطبق بر هم	$I_2=0,I_3=0 \quad , K_1=0$

در این جدول، شرط‌های لازم و کافی، برای این‌که یک معادلهٔ درجهٔ دوم به یکی از حالت‌های سه‌گانهٔ صورت کانونی خود تبدیل شود، داده شده است (منظور از I_1I_3، حاصل‌ضرب I_1 و I_3 است).

از جمله، معادلهٔ $x^2-6xy+5y^2-2x+4y+3=0$ را در نظر می‌گیریم. داریم: $A=1$، $B=-3$، $C=5$، $D=-1$، $E=2$، $F=3$؛ که از آن‌ها به‌دست می‌آید: $I_1=6$، $I_2=-4$ و $I_3=-9$. شرط سطر چهارم جدول برقرار است: $I_2<0$ و $I_3\neq 0$، یعنی، این معادلهٔ یک هذلولی است و مقدار نیم‌قطرهای آن چنین است:

$$\sqrt{\frac{2\times 9}{4\left|6\pm\sqrt{36+16}\right|}} \approx 0.57 \text{ و } 1.93$$

ضریب‌های معادله‌های «داده‌شدهٔ» I، II و III، برحسب پایاها و نیم‌پایا، به این ترتیب بیان می‌شود:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 \qquad (I)$$

$$I_1 x''^2 + 2\sqrt{-\frac{I_3}{I_1}}\, y'' = 0 \qquad (II)$$

$$I_1 x''^2 + \frac{K_1}{I_1} = 0 \qquad (III)$$

که در آن λ_1 و λ_2 عبارت‌اند از ریشه‌های به‌اصطلاح معادلهٔ مفسر (یا سرنوشت نما) درجه‌دوم زیر:

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0$$

به‌کمک رابطه‌های (I)، (II) و (III) می‌توان به‌طور مستقیم نیم‌قطرهای a و b در بیضی و هذلولی، پارامتر p در سهمی و فاصلهٔ $2a$ بین خط‌های متوازی را، پیدا کرد. رابطه‌های مربوط به نیم‌قطرها را پیش از این دیدیم. پارامتر p در سهمی و فاصلهٔ $2a$ بین خط‌های راست متوازی هم به این ترتیب بیان می‌شود:

$$p = \sqrt{-\frac{I_2}{I_1^3}} \quad , \quad 2a = 2\sqrt{-\frac{K_1}{I_1^2}}$$

درست شبیه همین نظریه را می‌توان برای به‌دست آوردن جدول تعیین گروه آفینی و رابطه‌های بین ضریب‌ها، در سطح‌های درجه‌دوم و فضای سه‌بُعدی، به‌کار برد.

همهٔ آن‌چه را تا این‌جا گفتیم مربوط به مفهوم و معنای پایاهایی است که در هندسهٔ تحلیلی برای منحنی‌ها و سطح‌های درجهٔ دوم به‌کار می‌رود. وگرنه، خود مفهوم کلی پایا، معنایی بسیار گسترده‌تر از این دارد.

پایای یک موضوع داده‌شده، نسبت به تبدیلی از آن، به هر مقداری (عددی، برداری و غیر آن) از این موضوع گفته می‌شود که ضمن این تبدیل‌ها تغییر نکند. در مثالی که بررسی کردیم موضوع عبارت بود از چندجمله‌ای درجه‌دوم دومجهولی (یعنی به‌خصوص ضریب‌های آن)، و نوع تبدیل عبارت بود از تبدیل چندجمله‌ای از راه گذار از یک دستگاه مختصات قائم به دستگاه مختصات قائم دیگر.

مثال دیگر. موضوع؛ تودهٔ مفروضی از گاز مفروض در حرارت مفروض. تبدیل؛ تغییر

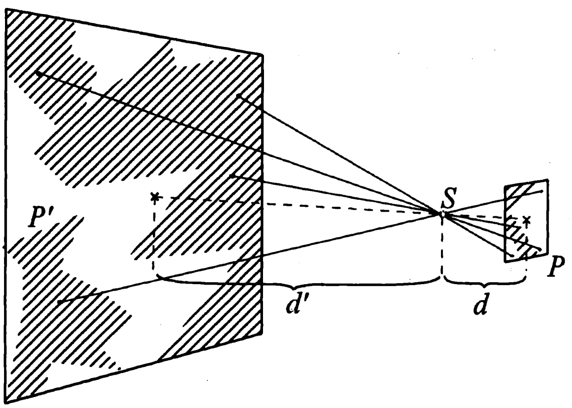
حجم یا فشار این تودهٔ گاز. پایا، بنا بر قانون *بویل ماریوت*؛ حاصل‌ضرب حجم در فشار. می‌توان از طول پاره‌خط‌ها در فضا یا مقدار زاویه‌ها، به‌عنوان پایاهای گروه حرکت‌های فضا دربارهٔ نسبت‌هایی که نقطه‌ها روی پاره‌خط‌ها به‌وجود می‌آورند، یا نسبت مساحت‌ها به‌عنوان پایاهای گروه تبدیل‌های آفینی فضا وغیره، صحبت کرد.

پایاهای مختلف، به‌خصوص در فیزیک، اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد.

۱۳. هندسهٔ تصویری

تصویر پرسپکتیوی. از خیلی قدیم، قانون‌های پرسپکتیو به‌وسیلهٔ نقاش‌ها بررسی شده است. و این به‌مناسبت آن است که انسان همه‌چیز را با تصویر پرسپکتیوی، روی شبکیهٔ چشم می‌بیند؛ در این بین، شکل و وضع متقابل چیزها هم، به‌نحو خاصی تغییر پیدا می‌کند. از جمله، وقتی در طول تیرهای تلگراف حرکت می‌کنیم، مثل این است که کوچک می‌شوند و درهم فرو می‌روند، خط‌های راست و موازی راه‌آهن، به‌ظاهر به هم نزدیک می‌شوند وغیره. ما در این‌جا پرسپکتیو فضایی، یعنی ویژگی‌های تصویر پرسپکتیوی چیزهای فضایی را روی صفحه بررسی نمی‌کنیم و تنها به بررسی ویژگی‌های تصویر پرسپکتیوی صفحه بر صفحه، می‌پردازیم.

عکس P (و مثلاً یک قطعه فیلم)، پردهٔ P' و عدسی S را که بین P و P' قرار دارد در نظر می‌گیریم (شکل ۷۸). آن‌وقت، اگر عکس شفاف باشد، از عقب (و اگر غیرشفاف باشد



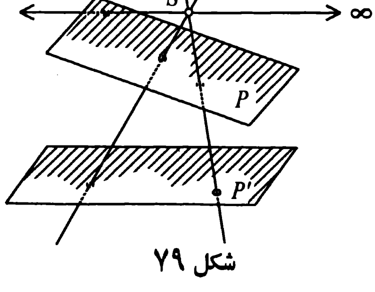
شکل ۷۸

ـ یعنی نور از آن عبور نکند ـ از جلو، یعنی از طرف عدسی) آن را روشن می‌کنیم. در این صورت، دسته‌شعاع‌هایی که از نقطه‌های روشن عکس منتشر می‌شود، در عدسی جمع می‌شود و سپس دوباره به‌صورت نقطه‌هایی، روی پردهٔ P' تصویر می‌شود. درواقع، مثل این است که نقطه‌های عکس P، به‌وسیلهٔ خط‌های راستی که از مرکز S می‌گذرد، بر پردهٔ P' تصویر شود.

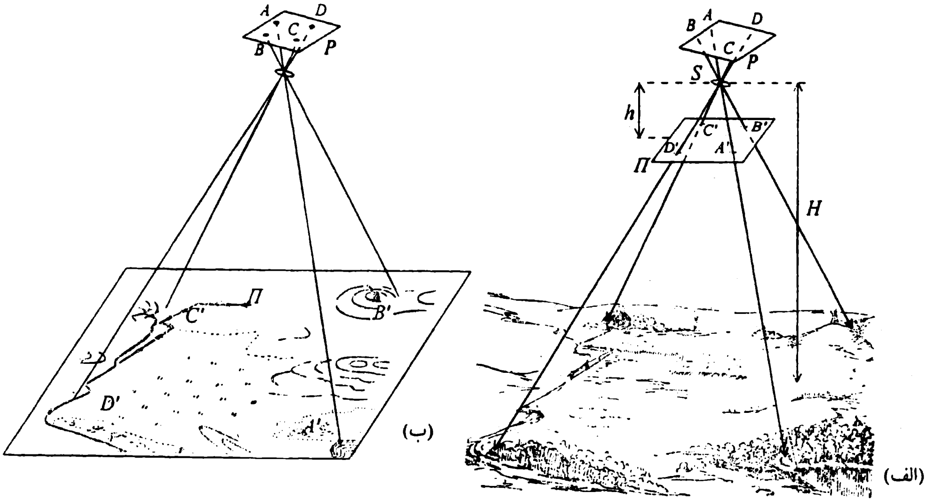
در حالتی که دو صفحهٔ P و P' متوازی باشند، کار خیلی ساده خواهد شد. روشن است که در این حالت، تصویری متشابه با آن‌چه روی صفحهٔ P قرار دارد، بر صفحهٔ P' نقش می‌بندد. این تصویر ممکن است کوچکتر یا بزرگتر از عکس اصلی باشد، بسته به این‌که نسبت $d':d$، کوچکتر یا بزرگتر از واحد باشد (d و d' به‌ترتیب عبارت‌اند از فاصلهٔ مرکز عدسی تا صفحه‌های P و P').

ولی، در حالتی که صفحه‌های P و P' متوازی نباشند، وضع پیچیده‌تری به‌وجود می‌آید (شکل ۷۹). در این حالت، تصویر به‌وسیلهٔ مرکز S، نه‌تنها اندازه‌های شکل، بلکه خود شکل را هم تغییر می‌دهد: ممکن است خط‌های موازی، ضمن تصویر، به خط‌های متقاطع تبدیل شود، نسبتی که به‌وسیلهٔ یک نقطه، روی پاره‌خطی به‌وجود آمده است، تغییر کند وغیره. به‌طور کلی، بعضی از رابطه‌هایی که حتی در تبدیل آفینی بدون تغییر می‌مانند، در این‌جا ممکن است تغییر کنند.

به‌عنوان مثال، در عکس‌برداری هوایی، نقش همین نوع تصویر، ظاهر می‌شود. هواپیما ضمن پرواز خود، تکان می‌خورد و بنابراین، دوربین عکاسی که به آن محکم شده است (شکل ۸۰ـ الف)، در حالت کلی، عدسی را به‌طور قائم به‌طرف پایین برنمی‌گرداند، و در لحظهٔ عکس‌برداری، اغلب کج قرار می‌گیرد، یعنی، تصویر محلی را که برمی‌دارد (و ما مسطح فرض می‌کنیم)، تحریف شده است.



شکل ۷۹



شکل ۸۰

این تصویر را چگونه اصلاح می‌کنند؟ برای این منظور، باید ویژگی‌های تصویر صفحهٔ P را بر صفحهٔ دیگری مانند π (که در حالت کلی با هم موازی نیستند)، به‌وسیلهٔ خط‌های راستی که از نقطهٔ S (که نه بر P قرار دارند و نه بر π) می‌گذرد، بررسی کرد. چنین تصویرهایی را **تصویرهای پرسپکتیوی** گویند. ما قضیهٔ مهم زیر را بعد ثابت می‌کنیم.

قضیه. اگر دو تصویر پرسپکتیوی صفحهٔ P بر صفحهٔ π، چنان باشد که در هر دو تصویر، نقطه‌های A، B، C و D، که چهار نقطهٔ کلی از صفحهٔ P هستند (یعنی هیچ سه نقطه از آن‌ها بر یک خط راست قرار ندارند)، به نقطه‌های A'، B'، C' و D' از صفحهٔ π تبدیل شود (یعنی در هر دو تصویر، A به A'، B به B' و غیره تبدیل شود)، در این صورت هر نقطهٔ دل‌خواهی از صفحهٔ P، در هر دو تصویر، به یک نقطه از صفحهٔ π بدل می‌شود.

به‌زبان دیگر، نتیجهٔ یک تصویر پرسپکتیوی وقتی به‌طور کامل مشخص است که تصویر چهار نقطهٔ غیرمشخص از صفحهٔ اصلی را در دست داشته باشیم.

این قضیه را، قضیهٔ منحصر بودن نظریهٔ نگاشت تصویری، یا قضیهٔ اساسی پرسپکتیو مسطح گویند.

کاربرد قضیهٔ اساسی پرسپکتیو مسطح در عکس‌برداری هوایی. ثابت می‌کنیم این قضیه، وسیلهٔ ساده‌ای برای اصلاح عکس‌برداری هوایی است.

در ذهن خود فرض می‌کنیم، در لحظهٔ عکس‌برداری، پردهٔ افقی π طوری قرار گرفته باشد که ارتفاع مرکز S عدسی نسبت به آن برابر h باشد (شکل ۸۰ـالف)؛ در این صورت، اگر تصویر عکسی را که روی صفحهٔ عکاسی P افتاده است، نسبت به مرکز S، در صفحهٔ π، در نظر بگیریم، روشن است که تصویری بدون انحراف و متشابه با محل افقی با مقیاس $h:H$ خواهد بود که در آن، H عبارت است از ارتفاع هواپیما نسبت به محل در لحظهٔ عکس‌برداری. برای این‌که تصویری را که روی صفحهٔ عکاسی P افتاده است، اصلاح کنند و از آن، تصویر درستی به‌دست آورند، به این ترتیب عمل می‌کنند: عکس ظاهرشدهٔ P را در دستگاه مجهز به نورافکن می‌گذارند؛ این دستگاه به سه‌پایه‌ای محکم شده است و به‌نحوی است که می‌توان آن را به پردهٔ π دور یا نزدیک کرد ویا به هر طرفی که لازم است، چرخاند.

به پردهٔ π (شکل ۸۰ـب)، نقشهٔ توپوگرافی محل را، با همان اندازه‌های روی زمین، محکم می‌کنند (این نقشهٔ مفصل نیست، درحالی که عکس صفحهٔ P همه‌چیز را به‌تفصیل در بر دارد، چیزهایی که ممکن است روی نقشه وجود داشته باشد). روی این نقشه‌ای که به پردهٔ π محکم شده است، چهار نقطهٔ A'، B'، C' و D' را که به‌سادگی روی عکس هم قابل تشخیص باشد، انتخاب می‌کنند (مثل محل برخورد جاده‌ها، گوشهٔ خانه‌ها وغیره)، و در نقطه‌های متناظر آن‌ها: A، B، C و D سوراخ‌هایی به‌وجود می‌آورند. در عقب صفحهٔ P، لامپ نورافکن قرار دارد، به‌نحوی که تصویر عکس را پردهٔ P، از طریق عدسی S (که به همان دستگاه متصل است)، می‌دهد. با جابه‌جا کردن و چرخاندن صفحهٔ P، آن را در وضعی قرار می‌دهند که نوری که از سوراخ‌ها خارج می‌شود، در پردهٔ تصویر π، درست روی نقطه‌های متناظر آن‌ها، یعنی A'، B'، C' و D' قرار گیرد. بعد از رسیدن به این وضع، بدون این‌که به دستگاه حرکتی داده شود، به‌جای نقشه، تصویر عکسی را که با هواپیما گرفته شده است، روی پردهٔ π، به‌دست می‌آورند. به این ترتیب، با توجه به قضیه‌ای که در بالا آوردیم، نقشهٔ درست محل (یعنی متشابه با آن) را پیدا می‌کنند.

اکنون به شرح نظریه‌ای می‌پردازیم که برای اثبات این قضیهٔ اساسی لازم است.

صفحهٔ تصویری. مجموعهٔ همهٔ خط‌های راست و صفحه‌های فضا، که از نقطهٔ داده‌شدهٔ S از فضا می‌گذرند؛ دسته‌خط‌ها و صفحه‌های تصویرکنندهٔ به مرکز S، نامیده می‌شود. اگر دسته، صفحهٔ P را (که از مرکز S نگذشته است) قطع کند، هر نقطه از صفحهٔ P، متناظر با خط راستی از دسته است که در این نقطه به صفحهٔ P برخورده است؛ و هر خط راست صفحهٔ P،

متناظر با صفحه‌ای از دسته است که در این خط با صفحهٔ P مشترک است. با وجود این، نمی‌توان به این ترتیب، بین مجموعهٔ خط‌ها و صفحه‌های دسته، با مجموعهٔ نقطه‌ها و خط‌های صفحهٔ P، تناظر یک‌به‌یک برقرار کرد، زیرا خط‌ها و صفحه‌هایی از دسته که موازی با صفحهٔ P هستند، به‌مفهوم عادی خود، متناظر با هیچ نقطه و هیچ خط راستی از صفحهٔ P نیستند (زیرا آن را قطع نمی‌کنند). ***قرار می‌گذاریم*** که چنین خط‌هایی از دسته هم، صفحهٔ P را قطع کنند، ولی در نقطه‌های غیرعادی (یا نقطه‌های بی‌نهایت دور) آن؛ همچنین صفحه‌هایی از دسته هم که با P موازی هستند، آن را در خط‌های راستی، که آن‌ها را غیرعادی (یا بی‌نهایت دور) می‌نامیم، قطع کنند. صفحهٔ P، همراه با این نقطه‌ها و خط‌های راست غیرعادی، ***صفحهٔ کامل*** یا ***صفحهٔ تصویری*** نامیده می‌شود. ما، این صفحه را به P^* نشان می‌دهیم. حالا دیگر، مجموعهٔ خط‌ها و صفحه‌های دستهٔ S، نسبت به مجموعهٔ نقطه‌ها (عادی و غیرعادی) و خط‌های (عادی و غیرعادی) این صفحهٔ تصویری P^*، در نگاشتی با تناظر یک‌به‌یک هستند.

به‌جز این، قرار می‌گذاریم، نقطه (عادی یا غیرعادی)، وقتی بر خط (عادی یا غیرعادی) از صفحهٔ تصویری P^* قرار گرفته باشد که خط متناظر این نقطه در دسته، بر صفحهٔ متناظر این خط در دسته واقع باشد. از این دیدگاه، هر دو خط راست صفحهٔ تصویری، یکدیگر را قطع می‌کنند (در یک نقطهٔ عادی یا غیرعادی)، زیرا هر دو صفحهٔ دلخواه از دسته، یکدیگر را در خط راستی از دسته، قطع می‌کنند. از این‌جا، درضمن به این نتیجه هم می‌رسیم که خط غیرعادی، چیزی جز مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های غیرعادی نیست.

درواقع، کامل کردن صفحه، به‌وسیلهٔ عنصرهای غیرعادی، این امکان را به‌وجود می‌آورد که بتوانیم به‌کمک این صفحه، به‌عنوان مقطع، دستهٔ همهٔ خط‌ها و صفحه‌هایی را که از یک نقطه گذشته‌اند، بررسی کنیم.

نگاشت‌های تصویری: قضیهٔ اصلی. نگاشت را **تصویری** گوییم، وقتی که صفحهٔ تصویری P^* را به صفحهٔ دیگری، به‌نام صفحهٔ $P^{*\prime}$، تبدیل کند (ممکن است صفحهٔ $P^{*\prime}$ بر صفحهٔ P^* منطبق باشد، که در این صورت دربارهٔ تبدیل تصویری صفحهٔ P^*، گفت‌وگو می‌شود)، به‌شرطی که ۱) در تناظر یک‌به‌یک باشد؛ ۲) مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحهٔ P^*، که بر یک خط راست قرار دارند، متناظر با مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحهٔ $P^{*\prime}$ باشد، که بر یک خط راست واقع‌اند، و برعکس (درضمن، وقتی از نقطه و خط راست صحبت می‌کنیم، برای ما فرق نمی‌کند که

عادی باشند یا غیرعادی).

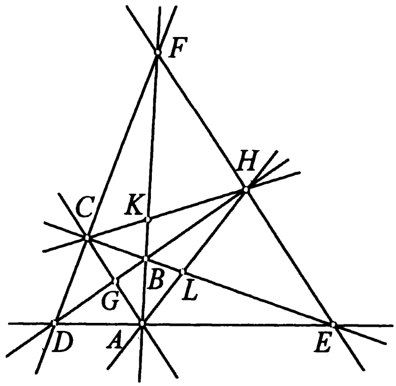
روشن است که دو تصویر پرسپکتیوی دلخواه یک صفحهٔ P^* بر صفحهٔ دیگر π^* را می‌توان از راه تبدیل‌های تصویری یکی به دیگری، به‌دست آورد.

درواقع، نخست، نقطه‌های آن‌ها (چه عادی و چه غیرعادی) در تناظر یک‌به‌یک نسبت به نقطه‌های (عادی و غیرعادی) صفحهٔ تصویری P^* هستند و بنابراین، بین نقطه‌های خود آن‌ها هم، این تناظر یک‌به‌یک برقرار است؛ دوم، نقطه‌های واقع بر یک خط راست از تصویر اول (و همچنین تصویر دوم)، متناظر است با نقطه‌های واقع بر یک خط راست از صفحهٔ P^* و برعکس. به این ترتیب، قضیه‌ای راکه در بالا از نظریهٔ پرسپکتیو نام بردیم، نتیجهٔ مستقیم این قضیه، که مربوط به تبدیل‌های تصویری است، می‌شود: اگر ضمن یک تبدیل تصویری صفحهٔ π^*، چهار نقطهٔ A، B، C و D از آن، که به‌صورت کلی برگزیده شده‌اند، در جای خود باقی بمانند، در آن صورت همهٔ نقطه‌های آن در جای خود باقی خواهند ماند.

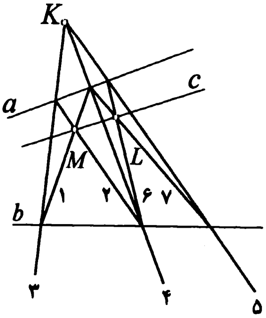
طرح اثبات این قضیه را، به‌یاری به‌اصطلاح **شبکهٔ موبیوس**، می‌ریزیم.

یادآور می‌شویم که: ۱) اگر ضمن تبدیل تصویری، دو نقطه بر جای خود باقی بمانند، در آن صورت خط راستی که از آن‌ها می‌گذرد به خودش تبدیل می‌شود؛ ۲) اگر دو خط راست به خودشان تبدیل شوند، نقطهٔ برخورد آن‌ها در جای خود باقی می‌ماند. به این ترتیب، از این فرض که نقطه‌های A، B، C و D از صفحهٔ π^* در جای خود باقی مانده‌اند، بلافاصله نتیجه می‌شود که نقطه‌های E، F، G، H، K، L وغیره هم بر جای خود می‌مانند (شکل ۸۱). با وصل نقطه‌هایی که به این ترتیب به‌دست آمده است، می‌توان نقطه‌های تازه‌ای از این‌گونه پیدا کرد. **شبکهٔ موبیوس** هم همین است. با ادامهٔ این ساختمان، می‌توان آن را تا بی‌نهایت، متراکم کرد. می‌توان ثابت کرد، مجموعهٔ این گره‌ها، همه‌جا به‌طور کامل صفحه را می‌پوشاند. بنابراین، اگر فرض کنیم، تبدیل تصویری، یک تبدیل پیوسته است (و می‌توان آن را، البته نه به‌سادگی، از تعریف این تبدیل، نتیجه گرفت)، معلوم می‌شود که اگر در تبدیل تصویری صفحهٔ π^*، نقطه‌های A، B، C و D در جای خود باقی بمانند، در آن صورت همهٔ نقطه‌های صفحهٔ π^* بر جای خود باقی خواهند ماند.

هندسهٔ تصویری. *هندسهٔ تصویری دومقیاسی*، به مجموعه‌ای از قضیه‌ها گفته می‌شود که گفت‌وگوی آن‌ها دربارهٔ ویژگی‌هایی از شکل‌های صفحهٔ تصویری باشد (یعنی صفحهٔ معمولی که با عنصرهای غیرعادی کامل شده است)، که ضمن هر تبدیل تصویری، تغییر نکند.



شکل ۸۱

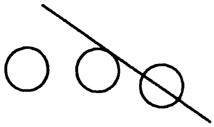


شکل ۸۲

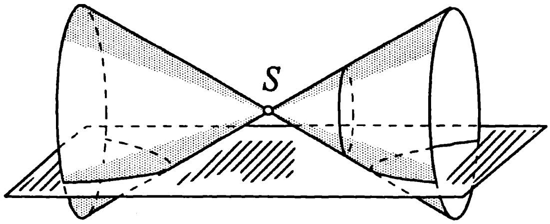
این نمونهٔ یک مسأله از هندسهٔ تصویری است: دو خط راست a و b و نقطه‌ای مانند M داده شده است (شکل ۸۲). خط راستی مانند c، طوری رسم کنید که از نقطهٔ M و نقطهٔ برخورد خط‌های a و b بگذرد، بدون این‌که از خود نقطهٔ برخورد دو خط استفاده شود (این وضع، از جمله وقتی لازم است که این نقطه برخورد، خیلی دور باشد). از نقطهٔ M، دو قاطع ۱ و ۲ را رسم می‌کنیم، سپس خط‌های راست ۳ و ۴ را از نقطه‌های برخورد آن‌ها با خط‌های a و b می‌گذرانیم، نقطهٔ K به‌دست می‌آید. از این نقطه، قاطع ۵ و سپس خط‌های ۶ و ۷ را رسم می‌کنیم. حالا دیگر می‌توان ثابت کرد که خط راست c، از نقطهٔ L (محل برخورد خط‌های ۶ و ۷) و نقطهٔ M می‌گذرد و به این ترتیب، خط راست لازم به‌دست می‌آید.

از نظریهٔ مقطع‌های مخروطی نتیجه می‌شود (شکل ۸۳) که بیضی، هذلولی و سهمی، تصویرهای پرسپکتیوی یکدیگرند و درضمن، همهٔ آن‌ها، تصویرهای پرسپکتیوی دایره‌اند.

اگر تصویرهای پرسپکتیوی را به‌عنوان نگاشت تصویری صفحه‌های تصویری P^* و $P^{*\prime}$ نسبت به‌هم بگیریم، در آن صورت اگر دو صفحه را یکی کنیم می‌بینیم که هر بیضی، هذلولی و سهمی، نتیجه‌هایی از تبدیل‌های تصویری دایره هستند. در آن تبدیل‌های تصویری دایره، که درنتیجهٔ آن‌ها خط‌های راستی که دایره را قطع نکرده‌اند به خط‌های راست بی‌نهایت دور تبدیل می‌شود، بیضی به‌دست می‌آید؛ و اگر خط‌های راستی که بر دایره مماس‌اند به خط‌های راست بی‌نهایت دور تبدیل شود، سهمی به‌دست می‌آید؛ و سرانجام، اگر خط‌های متقاطع با دایره به خط‌های بی‌نهایت دور تبدیل شود، هذلولی به‌دست می‌آید (شکل ۸۴).



شکل ۸۴



شکل ۸۳

دستورهای تبدیل‌های تصویری. اگر در صفحهٔ P^*، دستگاه محورهای مختصات قائم را برگزینیم، می‌توان ثابت کرد که دستورهای تبدیل‌های تصویری صفحه چنین است:

$$x' = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_3 x + b_3 y + c_3} \quad , \quad y' = \frac{a_2 x + b_2 y + c_2}{a_3 x + b_3 y + c_3}$$

که در آن، دترمینان

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

و برعکس.

اگر به‌ازای نقطه‌ای مانند (x,y)، مخرج‌ها برابر صفر شود، به‌معنای آن است که تبدیل‌شدهٔ آن (x', y')، یک نقطهٔ غیرعادی (بی‌نهایت دور) است. معادلهٔ

$$a_3 x + b_3 y + c_3 = 0$$

خط راستی را بیان می‌کند که ضمن تبدیل تصویری لازم، به خط راست غیرعادی (بی‌نهایت دور) تبدیل می‌شود.

۱۴. تبدیل لورنس

نتیجه‌گیری دستور تبدیل لورنس برای حرکت روی خط راست و در صفحه، از نظریهٔ مربوط به ثابت بودن سرعت انتشار نور. در پایان سدهٔ نوزدهم، تضاد عمیقی در فیزیک آشکار شد. آزمایش مشهور ***مایکلسن*** که ضمن آن سرعت نور را (که حدود ۳۰۰۰۰۰ کیلومتر در ثانیه است)، در جهت

حرکت زمین، روی مداری که به‌دور خورشید می‌چرخد (سرعت زمین حدود ۳۰ کیلومتر در ثانیه است)، و هم در جهت عمود بر این جهت، اندازه می‌گرفت، بدون هیچ ابهامی ثابت کرد که هر جسمی در طبیعت، ضمن حرکت خود، ولو این‌که در خلأ باشد، در جهت حرکت خود، کوتاه می‌شود. *لورنس*، فیزیک‌دان هلندی، این نظریه را به‌تفصیل بررسی کرد. معلوم شد، هرچه سرعت جسم به سرعتی که نور در خلأ دارد نزدیکتر شود، این کوتاه شدن بیشتر می‌شود. درضمن وقتی سرعت، برابر سرعت نور باشد این کوتاهی به حد نهایت خود می‌رسد. *لورنس* دستور این کوتاه شدن را نوشت. ولی به‌زودی *اینشتین* فیزیک‌دان، مسأله را از دیدگاه دیگری پیش کشید که **پوانکاره** هم به آن نزدیک شده بود. *اینشتین* به‌این‌ترتیب استدلال کرد: اگر قبول کنیم که برای انتشار نور هم، مثل حرکت معمولی جسم عادی، قانون **گالیله** دربارهٔ جمع سرعت‌ها، درست باشد، در این صورت سرعت نور $c' = c + v$ می‌شود، که در آن، v عبارت است از سرعت ناظری که به‌طرف انتشار نور حرکت می‌کند و c عبارت است از سرعت نور برای ناظر بدون حرکت. درضمن، از آزمایش *مایکلسن* نتیجه می‌شود که $c' = c$. قانون $c' = c + v$ براساس تبدیل زیر است:

$$\begin{aligned} x' &= x + v_x t \\ t' &= t \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

که مختص x نقطه‌ای نسبت به دستگاه مختصات I را به مختص x' نسبت به دستگاه مختصات II، که محور آن موازی محور دستگاه I است و با سرعت v_x نسبت به دستگاه I و در جهت محور Ox حرکت می‌کند، بستگی می‌دهد. روشن است که بنا به گفتهٔ *اینشتین*، این دستورها هم باید تغییر کنند.

می‌توان ثابت کرد، همان‌طور که چندی پیش *آ. د. آلکساندرف* ثابت کرد، که تنها از یک برابری سرعت نور در هر دو دستگاه مختصات x، y، z، t و x'، y'، z'، t' نتیجه می‌شود که دستورهای تبدیل از x، y، z، t به مختصات x'، y'، z'، t' خطی و متجانس است، یعنی به‌صورت

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t \ , \\ y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 t \ , \\ z' &= a_3 x + b_3 y + c_3 z + d_3 t \ , \\ t' &= a_4 x + b_4 y + c_4 z + d_4 t \ . \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

با ملاحظه‌های دیگری، می‌توان ثابت کرد که دترمینان[1] آن‌ها، برابر است با واحد.

اگر نقطه، در دستگاه I، در جهت معینی، به‌طور خطی و یکنواخت و با سرعت نور c حرکت کند، در آن صورت $x = v_x t$، $y = v_y t$، $z = v_z t$ و $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2$، از آن‌جا

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0 \tag{۲۷}$$

ولی بنا بر آزمایش ***مایکلسن***، این نقطه در دستگاه II هم باید با همین سرعت نور c حرکت کند، و بنابراین باید داشته باشیم:

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

به این ترتیب، رابطه‌های (۲۶)، رابطه‌های دل‌خواه خطی و متجانس و با دترمینان برابر واحد نیستند، بلکه باید چنان باشند که اگر x، y، z و t در معادلهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$$

صدق کند، نتیجهٔ تبدیل‌های آنها x'، y'، z' و t' هم در همین معادله صدق کند. چنین تبدیل‌های (۲۶) را ***تبدیل‌های لورنس*** گویند.

ساده‌ترین حالت را، یعنی وقتی که نقطه در طول Ox حرکت می‌کند، در نظر می‌گیریم. در این حالت، رابطه‌های (۲۶) به این صورت درمی‌آید:

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + d_1 t \\ t' &= a_2 x + d_2 t \end{aligned} \tag{۲۶'}$$

و معادلهٔ (۲۷) به این صورت

$$x^2 - c^2 t^2 = 0 \tag{۲۷'}$$

اگر $ct = u$ بگیریم، دستور ('۲۶) و معادلهٔ ('۲۷) چنین می‌شود:

$$x' = a_1 x + \frac{d_1}{c} u,$$

$$u' = a_2 c x + \frac{d_2 c}{c} u \tag{۲۶$_1$}$$

$$x^2 - u^2 = 0 \tag{۲۷$_1$}$$

---

۱. بخش شانزدهم را ببینید.

x و u را مثل مختصات قائم دکارتی در صفحه می‌گیریم، یعنی مسأله را به‌صورت هندسی بررسی می‌کنیم درضمن، دستورهای (26_1) را دستورهای تبدیل آفینی صفحهٔ Oxu به‌حساب می‌آوریم (که همان‌طور که گفتیم دترمینان آن‌ها برابر واحد است). این تبدیل را L می‌نامیم. اگر بنا بر فرض، از $x^2 - u^2 = 0$ به برابری $x'^2 - u'^2 = 0$ می‌رسیم، در آن صورت، این تبدیل، صلیب خط‌های راست $x^2 - u^2 = 0$ را به خودش تبدیل می‌کند. بنابراین، تبدیل L عبارت است از ترکیب «انقباض‌ها» و «انبساط‌ها» با ضریب‌های یکنواخت τ، در طول این خط‌های راست.

از شکل ۸۵ به‌دست می‌آید

$$x = \frac{p}{\sqrt{2}} - \frac{q}{\sqrt{2}}$$

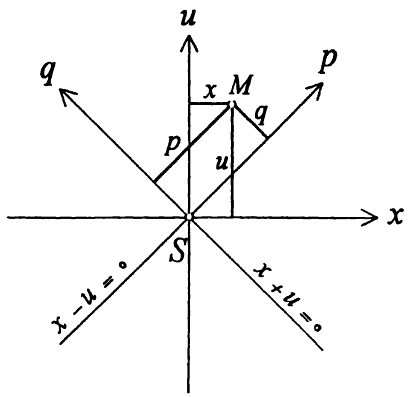
$$u = \frac{p}{\sqrt{2}} + \frac{q}{\sqrt{2}}$$

و چون، بعد از تبدیل L، p و q منجر به $p' = \frac{p}{\tau}$ و $q' = q\tau$ می‌شود، در این صورت

$$x'\sqrt{2} = \frac{p}{\tau} - q\tau$$

$$u'\sqrt{2} = \frac{p}{\tau} + q\tau$$

اگر از معادله‌های اول، p و q را برحسب x و u محاسبه کنیم و در معادله‌های دوم قرار دهیم، به‌دست می‌آید:



شکل ۸۵

$$x' = \frac{x - \frac{\tau^2 - 1}{\tau^2 + 1} ct}{\frac{2\tau}{\tau^2 + 1}} \quad , \quad t' = \frac{t - \frac{1}{c}\frac{\tau^2 - 1}{\tau^2 + 1} x}{\frac{2\tau}{\tau^2 + 1}}$$

که اگر فرض کنیم $\nu = c\frac{\tau^2 - 1}{\tau^2 + 1}$، خواهیم داشت:

$$x' = \frac{x - \nu t}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2}} \quad , \quad t' = \frac{t - \frac{\nu x}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2}}$$

و این همان ***دستورهای*** مشهور ***لورنس*** است.

اگر در این‌جا، حالت خاص $x = 0$ را انتخاب کنیم، یعنی حرکت مبدأ مختصات دستگاه I را بررسی کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x' = \frac{-\nu t}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2}} \quad , \quad t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2}}$$

با $x' = -\nu t'$، از این‌جا دیده می‌شود که ν عبارت است از سرعت حرکت دستگاه مختصات II، نسبت به دستگاه I.

برای نمونه، فرض کنید دو نقطه از محور Ox با مختصات x_1 و x_2 نسبت به دستگاه I، داده شده باشد، فاصلهٔ بین آن‌ها در دستگاه I چنین است: $r = |x_1 - x_2|$. ببینیم، برای ناظری که به دستگاه II بستگی دارد، چه فاصله‌ای بین آن‌هاست. داریم:

$$x'_1 = \frac{x_1 - \nu t}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2}} \quad , \quad x'_2 = \frac{x_2 - \nu t}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2}}$$

و از آن‌جا

$$r' = |x'_1 - x'_2| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2}}$$

روشن است، عامل $\sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{c}\right)^2}$، همان ضریب کوتاه شدن ***لورنس*** است. چون، c خیلی بزرگ است، برای مقدارهایی از ν که خیلی بزرگ نباشد، این ضریب خیلی به واحد نزدیک است و بنابراین، کوتاه شدن، قابل توجه نیست. ولی، اجزایی مثل الکترون و پوزیترون،

اغلب با سرعت‌هایی حرکت می‌کنند که با سرعت نور قابل مقایسه است و بنابراین برای بررسی حرکت آن‌ها باید این موقعیت، یعنی به‌اصطلاح اثر نسبیت را، به‌حساب آورد.

اکنون، به حالت پیچیده‌تر می‌پردازیم، وقتی که نقطه در صفحهٔ Oxy حرکت می‌کند. در این حالت، تبدیل‌های (۲۶) چنین‌اند:

$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + d_1 t \quad , \\ y' &= a_2 x + b_2 y + d_2 t \quad , \\ t' &= a_3 x + b_3 y + d_3 t \quad , \end{aligned} \tag{۲۶″}$$

که در آن داریم:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = 1$$

و معادلهٔ (۲۷) چنین می‌شود:

$$x^2 + y^2 - c^2 t^2 = 0 \tag{۲۷″}$$

و این ـ دستورهای *لورنس*، برای حرکت در صفحهٔ Oxy است.

دوباره $ct = u$ می‌گیریم. در این صورت، تبدیل (″۲۶) به این صورت نوشته می‌شود:

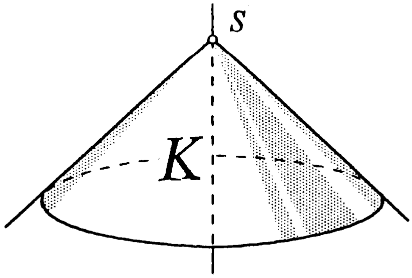
$$\begin{aligned} x' &= a_1 x + b_1 y + \frac{d_1}{c} u \quad , \\ y' &= a_2 x + b_2 y + \frac{d_2}{c} u \quad , \\ u' &= a_3 cx + b_3 cy + \frac{d_3 c}{c} u \quad , \end{aligned} \tag{$۲۶_۲$}$$

که درضمن دترمینان آن‌ها دوباره برابر واحد است؛ معادلهٔ (″۲۷) هم ساده‌تر می‌شود:

$$x^2 + y^2 - u^2 = 0 \tag{$۲۷_۲$}$$

x، y و u را مختصات قائم دکارتی نقطه‌ای از فضای معمولی سه‌بُعدی می‌گیریم، و دستورهای ($۲۶_۲$) را به‌عنوان دستورهای تبدیل‌های آفینی این فضا، به‌حساب می‌آوریم. معادلهٔ ($۲۷_۲$)، مخروط دوار قائم K را، با زاویهٔ ۹۰ درجه در رأس، بیان می‌کند (شکل ۸۶).

از دیدگاه این تعبیر هندسی تبدیل *لورنس* (هندسی، به این مناسبت که ما در این‌جا $u = ct$



شکل ۸۶

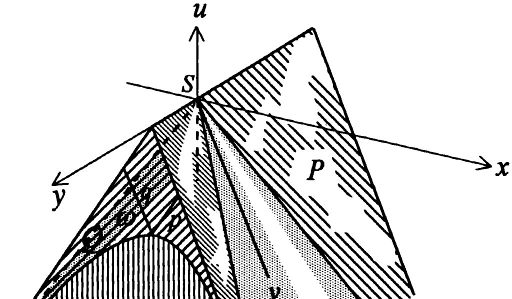
را، به‌طور ساده، یکی از مختصات فضایی به‌حساب آورده‌ایم)، حرکت در صفحه عبارت است از همهٔ تبدیل‌های آفینی هم‌ارز فضا، که مخروط K را به خودش، تبدیل می‌کنند (تبدیل آفینی هم‌ارز، یعنی چنان تبدیل آفینی که حجم‌ها را تغییر نمی‌دهد).

بعضی از حالت‌های خاص تبدیل *لورنس* را بررسی می‌کنیم:

۱. روشن است که هر دوران سادهٔ فضا، به‌عنوان یک واحد صُلب، دور محور مخروط K و به‌اندازهٔ زاویه‌ای مثل ω، عبارت است از یک تبدیل آفینی هم‌ارز فضا که مخروط K را به خودش تبدیل می‌کند، یعنی حالت خاصی از تبدیل *لورنس*. این تبدیل را با ω نشان می‌دهیم.

۲. انعکاس فضا در هر صفحهٔ π، که از محور مخروط K بگذرد، باز هم یک تبدیل *لورنس* است و ما آن را به π نشان می‌دهیم.

۳. سرانجام، تبدیل زیر را هم بررسی می‌کنیم (شکل ۸۷)، فرض کنید v و ω، دو مولد متقابل مخروط، و P و Q، صفحه‌های مماس بر این مخروط در این مولدها، باشد. این



شکل ۸۷

صفحه‌ها بر هم عمودند. فضا را در جهت صفحهٔ P، «منقبض» و از جهت صفحهٔ Q و با همان ضریب «منبسط» می‌کنیم، یا برعکس. برای مثال، فضا را سه بار به‌طرف صفحهٔ P منقبض و سه بار از طرف صفحهٔ Q منبسط می‌کنیم. روشن است که چنین تبدیلی از فضا هم، یک تبدیل آفینی است و مقدار همهٔ حجم‌ها را بی‌تغییر نگاه می‌دارد. این تبدیل را به L نشان می‌دهیم. ثابت می‌کنیم، این تبدیل، مخروط K را به خودش تبدیل می‌کند. چون مخروط K دارای محور u، محور دوران خود، می‌باشد، می‌توان تمام شکل را طوری پیچانید که مولدهای ν و ω، برای نمونه، بر صفحهٔ Sxu قرار گیرد. به این ترتیب، کافی است اثبات را برای این حالت بیاوریم.

برای اثبات، مخروط K را با صفحه‌ای مانند R که موازی صفحهٔ Sxu باشد، برخورد می‌دهیم. معادلهٔ چنین صفحه‌ای $y = b$ است، که در آن b عبارت است از مقداری ثابت. این مقدار را در معادلهٔ مخروط K قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$x^{2} - u^{2} = -b^{2}$$

و این معادلهٔ یک هذلولی است که مجانب‌های آن عبارت است از خط‌های برخورد صفحهٔ R با صفحه‌های P و Q. ولی، چون برای نقطه‌های واقع بر این هذلولی، حاصل‌ضرب p و q، فاصله‌های نقطه تا مجانب‌ها (یعنی تا صفحه‌های P و Q)، مقداری ثابت است، بنابراین ضمن تبدیل L، هر نقطهٔ این هذلولی، بر همین هذلولی باقی می‌ماند و درنتیجه، هذلولی به خودش تبدیل می‌شود. ولی، تمام سطح مخروط K، از چنین هذلولی‌هایی تشکیل شده است، و بنابراین وقتی که فضا را در تبدیل قرار می‌دهیم، مخروط K به خودش تبدیل می‌شود. به این ترتیب، تبدیل L هم یک تبدیل لورنس است.

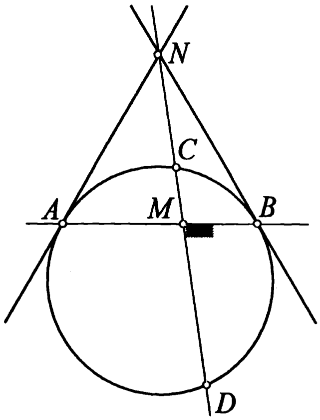
از آن‌جا که در تبدیل‌های آفینی، خط راست به خط راست و خط‌های راست متقاطع به خط‌های راست متقاطع، تبدیل می‌شود، دسته‌خط‌های S ضمن هر تبدیل لورنس، در نگاشت با تناظر یک‌به‌یک، به خودش تبدیل می‌شود. به‌جز آن، ضمن تبدیل‌های آفینی فضا، هر صفحه، منجر به یک صفحه می‌شود. به این ترتیب، ضمن این تبدیل‌های دسته‌خط‌های راست S به خودش، یک تبدیل تصویری از این دسته به‌دست می‌آید. فرض کنیم که این دسته، صفحه‌ای مانند π را، که بر محور مخروط K عمود است، قطع کند؛ صفحهٔ π را، که به‌عنوان یک واحد، در تبدیل‌های مورد بررسی لورنس از فضا شرکت نداشت، تا صفحهٔ تصویری π^* کامل می‌کنیم؛ در آن صورت تبدیل‌های لورنس، درحالی که دسته را

تبدیل می‌کند، درضمن تبدیل‌های تصویر Aاز صفحهٔ π^* را خواهد داد، که دایرهٔ α را ــ که در آن صفحهٔ π^* با بخش داخلی مخروط K برخورده است ــ به خودش تبدیل می‌کند. برای این‌که به ویژگی‌های تبدیل‌های لورنس پی ببریم، ساده‌تر از همه این است که تبدیل‌های تصویری Aاز دایرهٔ α به خودش را، دنبال کنیم.

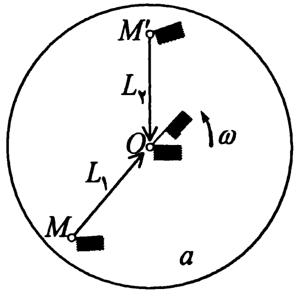
تبدیل‌های تصویری دایره به خودش. مجموعه‌ی یک نقطه، و یک نیم‌خط که از این نقطه شروع می‌شود، و یک نیم‌صفحه که این خط آن را تقسیم کرده است را پایه‌ی (یا کنج = frame) صفحه π^* می‌نامیم (آن را با پایه مختصاتی، بند ۱۱، مخلوط نکنید). ثابت می‌کنیم (شکل ۸۸) که اگر دو پایهٔ M و M' را انتخاب کنیم که از نقطه‌های داخلی دایرهٔ α باشد، می‌توان به‌کمک تبدیل‌های L، ω و π، یکی از این دو پایه را به دیگری تبدیل کرد. برای این منظور کافی است تبدیل $A = L_1 \cdot \omega \cdot L_2^{-1}$ (یا تبدیل $A = L_1 \cdot \omega \cdot \pi \cdot L_2^{-1}$) را انجام داد. تبدیل L_1 پایهٔ اول M را به مرکز O از دایرهٔ α بدل می‌کند تبدیل ω، آن را به صورتی که لازم است برمی‌گرداند و سرانجام، تبدیل L_2^{-1}، آن را بر پایهٔ دوم M' منطبق می‌کند.

به‌جز آن، ثابت می‌کنیم، این تبدیل A، که ضمن آن پایهٔ مفروض M به پایهٔ مفروض دیگر M' بدل می‌شود، یک تبدیل یگانه است. برای این منظور، یادآوری می‌کنیم، اگر به‌ازای دو تبدیل A_1و A_2، پایهٔ Mبه پایهٔ M'بدل شود، تبدیل $A = A_1 A_2^{-1}$یک تبدیل اتحادی نیست و پایهٔ Mرا به خودش بدل می‌کند. بنابراین، کافی است ثابت کنیم، اگر تبدیلی، M را به خودش بدل کند، یک تبدیل اتحادی است، یعنی همهٔ نقطه‌های صفحهٔ دایرهٔ α، به جای خود باقی می‌ماند.

فرض کنید، تبدیلی مثل A، پایهٔ Mرا به خودش بدل کند (شکل ۸۹). در این صورت، این تبدیل، خط ABاین پایه را به خودش بدل می‌کند. ولی چون این تبدیل، دایرهٔ α را به خودش بدل می‌کند، یا Aو B، به جای خود باقی می‌مانند و یا جای خود را با هم عوض می‌کنند. حالت اخیر ممکن نیست، زیرا این تبدیل نیم‌خط پایه را به خودش بدل می‌کند. از نقطه‌های Aو B، مماس‌هایی بر دایرهٔ α رسم می‌کنیم. این مماس‌ها به خودشان بدل می‌شوند، زیرا اگر این مماس به قاطع $A\bar{A}$بدل شود، در این صورت تبدیل معکوس، نقطه‌های مختلف A و $\bar{A}$را به یک نقطهٔ Aبدل می‌کند. ولی، تبدیل‌های A، تصویری است و بنابراین در تناظر یک‌به‌یک هستند. چون، در تبدیل A، این مماس‌ها به خودشان تبدیل



شکل ۸۹



شکل ۸۸

می‌شوند، نقطهٔ N، نقطهٔ برخورد آن‌ها هم بر جای خودش باقی می‌ماند و بنابراین، خط راست MN هم به خودش تبدیل می‌شود. از آن‌جا که نیم‌صفحهٔ پایهٔ M به خودش منجر می‌شود، نتیجه می‌گیریم که نقطه‌های C و D هم جایشان عوض نمی‌شود و بر جای خود باقی می‌مانند. به این ترتیب، در این تبدیل، چهار نقطهٔ A، B، C و D، که هیچ سه‌تایی از آن‌ها بر یک خط راست نیستند، بر جای خود باقی می‌مانند. بنابراین، بنا بر قضیهٔ یگانه بودن تبدیل‌های تصویری، این تبدیل اتحادی است.

در بند ۵ بخش هفدهم، ثابت خواهیم کرد که با استفاده از ویژگی‌های گروه ***لورنس***، هندسهٔ مسطحهٔ ***لباچوسکی*** تحقق می‌یابد، و اگر تبدیل‌های ***لورنس*** را برای حالت کلی حرکت نقطه در فضا، در نظر بگیریم، هندسهٔ فضایی ***لباچوسکی*** تحقق می‌یابد و مهم‌تر از همه، بی‌تناقضی هندسهٔ ***لباچوسکی*** ثابت می‌شود.

می‌بینیم، نظریهٔ تبدیل‌های ***لورنس***، هندسهٔ تصویری و نظریهٔ پرسپکتیو و هندسهٔ نااقلیدسی، با یکدیگر بستگی عمیقی دارند. همچنین معلوم می‌شود که تا حد زیادی تبدیل‌های به‌اصطلاح کنفورمی (یا همدیسی) در نظریهٔ تابع‌های با متغیرهای مختلط هم به آن‌ها بستگی دارد و مسأله‌های مهمی از فیزیک ریاضی، مثل مسألهٔ انتشار حرارت در صفحه‌ای که گرم می‌شود، مسألهٔ مربوط به برطرف کردن فشار هوا از دور و بر بال هواپیما، نظریهٔ میدان مسطحهٔ الکتروستاتیک، مسألهٔ مسطحهٔ نظریهٔ قابلیت ارتجاع و بسیاری دیگر را حل می‌کند.

نتیجه

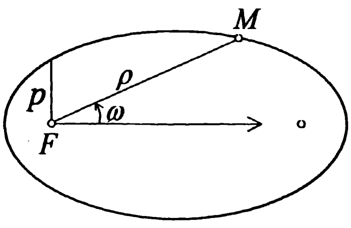
هندسهٔ تحلیلی، یکی از ضروری‌ترین روش‌های ریاضی، برای مطالعهٔ سایر رشته‌های ریاضیات، مکانیک، فیزیک و دیگر دانش‌های طبیعی است. به همین مناسبت، فراگرفتن آن؛ نه‌تنها برای دانشجویان دانشکده‌ها، بلکه برای دانشجویان انستیتوهای صنعتی و برای بسیاری از دانش‌آموزان دبیرستان‌های حرفه‌ای هم لازم است.

دستگاه‌های مختلف مختصاتی. همان‌طور که دیدیم، بخش مهمی از اندیشهٔ هندسهٔ تحلیلی، عبارت است از روش مختصات و مطالعهٔ معادله‌هایی که به این مختصات بستگی دارد. به‌جز مختصات دکارتی، مختصات مختلف دیگری هم بررسی شده است. از جمله، می‌توان در صفحه، نقطه‌ای مانند P (به‌نام قطب) و نیم‌خط راستی که مبدأ آن P است (به‌نام محور قطبی) برگزید و جای هر نقطهٔ M را به‌وسیلهٔ طول ρ (شعاع قطبی)، که فاصلهٔ M را تا قطب نشان می‌دهد، و مقدار زاویهٔ ω، که این شعاع با محور قطبی ساخته است، معین کرد (شکل ۹۰).

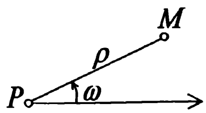
اگر دستگاه مختصات قطبی را طوری بگیریم که قطب آن بر کانون بیضی، هذلولی یا سهمی و محور قطبی آن نیم‌خطی باشد که از این نقطه آغاز و روی محور تقارن در جهت مخالفِ نزدیکترین رأس ادامه داشته باشد (شکل ۹۱)، برای هر سه منحنی، یک معادله به‌دست می‌آید:

$$\rho = \frac{p}{۱ - \varepsilon \cos\omega}$$

که در آن، ε خروج از مرکز منحنی و p پارامتر آن است. این معادله، اهمیت زیادی در اخترشناسی دارد، و این ناشی از قانون اینرسی و قانون جاذبهٔ عمومی است که حرکت



شکل ۹۱



شکل ۹۰

سیاره‌ها به دور خورشید را به‌صورت بیضی درمی‌آورد.

همچنین می‌توان از مختصات جغرافیایی ــ طول و عرض ــ نام برد که جای یک نقطه را روی کره مشخص می‌کند.

با همین روش می‌توان شبکهٔ مختصاتی در یک سطح دلخواه، شبیه آن‌چه در هندسهٔ دیفرانسیلی انجام می‌دهند، درست کرد (بخش هفتم را ببینید) وغیره.

هندسهٔ تحلیلی چندبُعدی و بی‌نهایت‌بعدی. هندسهٔ جبری. هندسهٔ تحلیلی، در سدهٔ نوزدهم، چنان راه پیشرفتی را پیموده بود (و ما خط‌های کلی آن را شرح دادیم) که به‌نظر می‌رسید به پایان راه خود رسیده است؛ ولی این‌طور نبود. در زمان ما، دو رشتهٔ تازه و بسیار گسترده، در ریاضیات، به پیشرفت توفانی خود ادامه می‌دهند که درواقع می‌توان آن‌ها را ادامهٔ اندیشهٔ هندسهٔ تحلیلی دانست: *آنالیز تابعی و هندسهٔ جبری*. راستش این است که در هر دوی این رشته‌ها، تنها بخشی ادامهٔ مستقیم هندسهٔ تحلیلی رسمی است: در آنالیز تابعی، به‌مقدار زیادی از آنالیز و در هندسهٔ جبری از تابع و مکان‌شناسی (توپولوژی) استفاده می‌شود.

ببینیم، گفت‌وگو بر سر چیست؟ از همان میانه‌های سدهٔ گذشته، بررسی هندسهٔ تحلیلی چهاربُعدی و به‌طور کلی، nبعدی را آغاز کردند. بعضی به بررسی مسأله‌هایی از جبر پرداختند که به‌طور مستقیم دنبالهٔ بررسی‌های مسأله‌هایی از جبر بود که در هندسهٔ تحلیلی دو یا سه‌بعدی مطالعه می‌شد، ولی این بار دارای ۴ یا n مجهول بودند. در پایان سدهٔ نوزدهم، بسیاری از آنالیزدان‌های مشهور به این‌جا رسیدند که بررسی هندسهٔ تحلیلی بی‌نهایت‌بعدی، برای هدف‌های آنالیز و فیزیک ریاضی، اهمیت جدی دارد.

در نگاه اول، ممکن است به‌نظر برسد، وقتی فضای nبعدی و حتی چهاربعدی، تنها یک تصور ذهنی ریاضی است، چگونه می‌توان دربارهٔ فضای بی‌نهایت‌بعدی صحبت کرد. ولی، واقع امر چنین نیست. بحث دربارهٔ فضای بی‌نهایت‌بعدی، به‌هیچ‌وجه دشوار نیست. حالا دیگر این بحث، بخش عمده‌ای از آنالیز تابعی را در بر گرفته است (بخش نوزدهم را ببینید). در نیمهٔ سدهٔ بیستم، در این رشتهٔ ریاضیات، نتیجه‌گیری‌های مهمی به‌وسیلهٔ دانشمندان شوروی به‌دست آمده است.

جالب است، هندسهٔ تحلیلی بی‌نهایت‌بعدی، کاربردهای عملی زیادی پیدا کرده است و در فیزیک امروزی، نقش تعیین‌کننده‌ای را به‌عهده دارد.

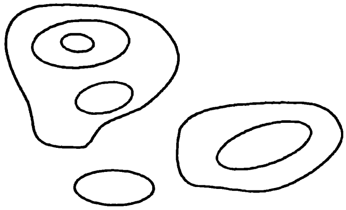
آن‌چه به هندسهٔ جبری مربوط می‌شود، باید آن را طبیعی‌ترین راه ادامهٔ هندسهٔ تحلیلی

معمولی دانست، که البته، هندسهٔ تحلیلی هم به‌نوبهٔ خود تنها بخشی از هندسهٔ جبری است. هندسهٔ جبری را می‌توان بخشی از ریاضیات دانست که موضوع آن، بررسی منحنی‌ها، سطح‌ها و فوق‌سطح‌هایی است که در دستگاه مختصات دکارتی، نه‌تنها به‌وسیلهٔ معادله‌های درجهٔ اول و درجهٔ دوم، بلکه به‌وسیلهٔ معادله‌هایی از درجه‌های بالاتر هم، بیان می‌شوند. به‌نظر می‌رسد، در این بررسی‌ها، نه‌تنها از فضاهای حقیقی، بلکه از هر نوع فضایی و از جمله فضاهای مختلط و موهومی هم، استفاده می‌شود. در سدهٔ نوزدهم، و به‌وسیلهٔ ***ریمان***، نتیجه‌گیری‌های بسیار مهمی در این رشته به‌دست آمد. به‌عنوان نمونهٔ درخشانی از قضیه‌های مربوط به منحنی‌های از درجه‌های بالا، از نتیجه‌گیری کلی ***ای.گ.*** **پتروسکی** دربارهٔ تعداد بیضی‌گونه‌هایی که می‌توان از تقسیم یک منحنی درجهٔ n به‌دست آورد، یاد می‌کنیم. **پتروسکی** ثابت کرد، اگر p، تعداد بیضی‌گونه‌هایی باشد که یا بر هیچ بیضی‌گونهٔ دیگر واقع نباشد ویا بر تعداد زوجی از آن‌ها واقع باشد و m تعداد بیضی‌گونه‌هایی باشد که بر تعداد فردی از بیضی‌گونه‌ها قرار دارد، و اگر منحنی‌هایی را در نظر بگیریم که بیضی‌گونه‌های محتوی آن، چه خودشان و چه دیگران را قطع نکرده باشند (شکل ۹۲)، در این صورت داریم:

$$p - m \leq \frac{۳n^{۲} - ۶n}{۸} + ۱$$

که در آن، n عبارت است از درجهٔ منحنی، یعنی درجهٔ معادله‌ای که منحنی را بیان می‌کند.

این نتیجه‌گیری به‌ویژه از این جهت اهمیت دارد که تاکنون چیزی دربارهٔ صورت کلی منحنی‌های درجهٔ بالا، روشن نشده است و به‌احتمالی، این، یکی از آخرین قضیه‌های کلی و مهمی باشد که در هندسهٔ تحلیلی به‌دست آمده است.



شکل ۹۲

بخش چهارم

جبر

(نظریه معادله‌های جبری)

ب. ن. دِلُون

۱. ورود به مطلب

این‌که جبر چیست و مسیرهای اصلی و مشخص‌کنندهٔ آن کدام است، بر همه به‌خوبی روشن است، زیرا آگاهیهای مقدماتی، ولی اساسی جبر، در برنامهٔ دبیرستانی وجود دارد. پیش از همه، جبر با روش خاص خود مشخص می‌شود، که درون‌مایهٔ آن عبارت است از به‌کار بردن حرف‌ها و عبارت‌های حرفی، که بنا بر قانون‌های معینی می‌توان آن‌ها را به صورت‌های مختلف، تبدیل کرد. در جبر مقدماتی، نقش عددهای معمولی به‌عهدهٔ حرف‌ها گذاشته شده است، و بنابراین قانون تبدیل عبارت‌های حرفی براساس همان قانون‌های کلی عمل‌هایی که روی عددها انجام می‌گیرد، بیان می‌شود (از جمله، جمع به ترتیب جمله‌های آن بستگی ندارد که به‌زبان جبری به‌صورت $a + b = b + a$ نوشته می‌شود؛ در ضرب مجموع دو عدد، می‌توان هرکدام از این دو عدد را به‌طور جداگانه ضرب و سپس حاصل‌ضرب‌ها را با هم جمع کرد $(a + b)c = ac + bc$ وغیره).

وقتی اثبات یک قضیهٔ جبری را دنبال می‌کنیم، برای ما به‌سادگی روشن می‌شود، این اثبات تنها به قانون‌هایی بستگی دارد که بنا بر آن‌ها، عمل‌های روی حرف‌ها انجام می‌شود، ولی به این‌که این حرف‌ها چه ماهیتی دارند، بستگی ندارد.

روش جبری، یعنی روش محاسبه‌های حرفی، که به همهٔ ریاضیات راه پیدا کرده است. اغلب به این بیان برخورد می‌کنیم که حل فلان مسألهٔ ریاضی، چیزی جز یک برداشت جبری، که پیچیدگی آن در حالت‌های مختلف فرق می‌کند، نیست. به‌جز این، در ریاضیات از محاسبه‌های حرفی مختلفی استفاده می‌شود، که در آن‌ها حرف، جانشین چیزهای دیگری، به‌جز عدد شده است. درضمن، ممکن است قانون‌هایی غیر از آن‌چه در جبر مقدماتی به‌کار می‌رود، دربارهٔ آن‌ها اعمال شود. برای نمونه، در هندسه، مکانیک و فیزیک، از بردارها

استفاده می‌کنند. همان‌طور که می‌دانیم، دربارهٔ بردارها عمل‌هایی انجام می‌شود که قانون‌های مربوط به آن‌ها، با قانون‌های عمل‌هایی که دربارهٔ عددها انجام می‌شود، فرق دارد، و تا اندازه‌ای این اختلاف مربوط به ماهیت قانون‌ها می‌باشد.

در سال‌های اخیر، اهمیت روش جبری در ریاضیات امروزی و کاربردهای آن، بی‌اندازه زیاد شده است:

نخست ـ خواست‌های روزافزون صنعت که در حل مسأله‌های دشوار آنالیز ریاضی، به نتیجه‌های عددی نیاز دارد، که به‌طور معمول تنها وقتی ممکن می‌شود که مسأله به‌طریق جبری حل شود و این هم به‌نوبهٔ خود، مسأله‌های تازه‌ای، که گاهی دشوار است، در خود جبر به‌وجود می‌آورد.

دوم ـ برخی از پرسش‌های آنالیز، تنها وقتی روشن و قابل درک می‌شود که دربارهٔ آن‌ها، روش‌هایی از جبر به‌کار برده شود که براساس تعمیم جدی (در حالتی که تعداد مجهول‌ها بی‌نهایت است) نظریهٔ دستگاه معادله‌های درجهٔ اول، قرار دارد.

سرانجام، بخش‌های عالی جبر، توانسته‌اند کاربردهایی در فیزیک امروزی پیدا کنند، از جمله در مفهوم‌های اساسی مکانیک کوانتایی، که به‌کمک موضوع‌های پیچیده و غیرمقدماتی جبری، بیان می‌شود.

مسیرهای اصلی تاریخ جبر را به‌یاد می‌آوریم.

پیش از هر چیز باید به‌یاد داشت که پاسخ به این پرسش که جبر چیست و مسألهٔ اساسی جبر کدام است، دو بار در جریان تاریخ تغییر کرده است، یک بار در نیمهٔ اول سدهٔ نوزدهم و بار دیگر در آغاز سدهٔ بیستم. به این ترتیب، وقتی از جبر، در زمان‌های مختلف، صحبت می‌شود، سه موضوع متفاوت در نظر است. از این بابت، تاریخ جبر از تاریخ سه رشتهٔ دیگر ریاضیات محاسبه‌ای متمایز می‌شود: هندسهٔ تحلیلی، حساب دیفرانسیل و حساب انتگرال. سه رشتهٔ اخیر با دست کسانی مثل ***فرما***، ***دکارت***، **نیوتن** و **لایب‌نیتس** و دیگران ساخته شد، سپس به‌طور عجیبی پیش رفت و به‌کمک رشته‌های تازه‌ای تکمیل شد، ولی هرگز، سیمای اصلی خود را تغییر نداد.

در زمان‌های پیشین، هر قانونی، که برای حل گروهی از مسأله‌های ریاضی به‌کار می‌رفت، خیلی ساده به‌وسیلهٔ بیان عبارت‌ها و واژه‌ها نوشته می‌شد، زیرا هنوز علامت‌گذاری حرفی به‌وجود نیامده بود. خود واژهٔ «جبر» از نام‌گذاری دانشمند بزرگ سدهٔ نهم خوارزم، ***محمد*** فرزند ***موسی خوارزمی*** (بخش اول را ببینید)، آمده است که در کتاب او،

نخستین قانون‌های کلی برای حل معادله‌های درجه اول و درجه دوم ذکر شده است. علامت‌گذاری حرفی، به **ویت** بستگی دارد، که نه‌تنها برای مجهول، بلکه برای مقدارهای داده‌شده هم، از نشانه‌های حرفی استفاده می‌کرد. سهم **دکارت** هم در پیش‌برد نشانه‌گذاری حرفی کم نیست؛ درضمن باید توجه داشت که البته، حرف‌ها را به‌جای عددهای معمولی می‌گذاشتند. از این زمان، جبر به‌عنوان دانش محاسبه‌های حرفی، دانش تبدیل رابطه‌هایی که از حرف‌ها تشکیل شده است، دانش معادله‌های جبری وغیره شناخته شد، که با دانش حساب، که همیشه روی عددهای مشخص عمل می‌کند، تفاوت دارد. تنها بعد از این بود که پیچیده‌ترین مفهوم‌های ریاضی، قابل مشاهده و ساده شد و برای بررسی در دسترس قرار گرفت. زیرا، در بیشتر حالت‌ها، با نظر انداختن به رابطهٔ حرفی، می‌توان به ساختمان کلی آن و قانون‌های مربوط به آن پی برد و همچنین می‌توان به‌سادگی آن را تبدیل کرد. در این زمان، هر چیزی از ریاضیات را که به هندسه و آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها مربوط نبود، جبر می‌نامیدند. این نخستین برداشت (به‌اصطلاح برداشت ویتی)، از جبر بود. این برداشت را ***لئونارد اولر***، عضو آکادمی روس در کتاب «ورودی به جبر» خود، که آن را در سال‌های ۶۰ سدهٔ هفدهم، یعنی بیش از ۲۰۰ سال پیش، نوشته است، به خوبی و روشنی شرح داده است.

اولر، جبر را به‌عنوان نظریهٔ محاسبهٔ با مقدارهای مختلف، تعریف می‌کند. ***اولر***، در بخش نخست کتاب خود، از نظریهٔ محاسبهٔ با عددهای درست و گویا، کسرهای متعارفی، ریشهٔ دوم و سوم، نظریهٔ لگاریتم‌ها، تصاعدها، نظریهٔ محاسبهٔ چندجمله‌ای‌ها، نظریهٔ بسط دوجمله‌ای و کاربرد آن، گفت‌وگو می‌کند. بخش دوم کتاب، شامل نظریهٔ معادلهٔ درجهٔ اول و دستگاه معادله‌های درجهٔ اول، معادلهٔ درجهٔ دوم و نظریهٔ حل معادله‌های درجهٔ سوم و چهارم، و همچنین بخش مفصلی دربارهٔ روش‌های پیدا کردن جواب‌های درستِ معادله‌های مختلف سیال، می‌باشد. از جمله ثابت کرده است که معادلهٔ ***فرما***: $x^۳+y^۳=z^۳$، دارای جواب‌های درست برای x، y و z نیست.

در پایان سدهٔ هیجدهم و آغاز سدهٔ نوزدهم، به‌تدریج، یکی از مسأله‌های جبری، یعنی نظریهٔ حل معادله‌های جبری، در مرکز توجه قرار گرفت. مشکل اصلی، عبارت بود از حل معادلهٔ درجهٔ n یک‌مجهولی:

$$x^n + a_۱x^{n-۱} + a_۲x^{n-۲} + \cdots + a_{n-۱}x + a_n = ۰$$

و این، ناشی از اهمیت بی‌اندازه‌ای بود که این مسأله، برای همهٔ ریاضیات و کاربردهای آن داشت و به‌صورت مشکلی برای اثبات بسیاری از نظریه‌هایی که به آن بستگی داشت، درآمده بود.

همه، از این دستور کلی آگاهی دارند:

$$x = -\frac{p}{۲} \pm \sqrt{\frac{p^۲}{۴} - q}$$

که به‌یاری آن می‌توان، هر معادلهٔ درجهٔ دومی را حل کرد. جبردان‌های ایتالیایی در سدهٔ شانزدهم، توانستند دستورهای مشابهی ــ اگرچه پیچیده‌تر ــ برای حل هر معادلهٔ درجهٔ سوم و چهارم پیدا کنند. ولی، بررسی‌های بعدی که برای حل معادله‌های از درجه‌های بالاتر انجام شد، به دشواری‌های ناگشودنی برخورد کرد. بزرگترین ریاضی‌دان‌های سده‌های شانزده، هفده و هیجده و آغاز سدهٔ بیست (*تارتاگلیا*، *کاردان*، *دکارت*، *نیوتن*، *اولر*، *دالامبر*، *چیرنهاوزن*، *بزو*، *لاگرانژ*، *گوس*، *آبل*، *گالوا*، *لباچوسکی*، *شتورم* و دیگران)، مجموعهٔ عظیمی از قضیه‌ها و روش‌ها دربارهٔ این پرسش آوردند. در جبر دوجلدی *سه‌ره*، که در نیمه‌های سدهٔ نوزدهم، یعنی درست صد سال بعد از جبر *اولر* تنظیم شده است (و در زمان خودش، دوره‌ای را آغاز می‌کند، زیرا در آن برای نخستین بار، خط‌های اصلی نظریهٔ معادله‌های جبری ــ نظریهٔ *گالوا* ــ را شرح داده است)، دیگر جبر به‌عنوان نظریهٔ معادله‌های جبری، تعریف شده است. و این دومین دیدگاه در این باره است که: جبر چیست.

در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم، و براساس اندیشهٔ *گالوا* دربارهٔ نظریهٔ معادله‌های جبری، نظریهٔ گروه[1] و نظریهٔ عددهای جبری (که در تشکیل آن *ا. ای زولوتارف* سهم زیادی دارد)، پیشرفت زیادی کرد.

در همین دورهٔ دوم، به‌مناسبت حل معادله‌های جبری و هم‌چنین نظریهٔ چندنگاشت‌های جبری درجهٔ بالا، که در آن زمان در هندسهٔ تحلیلی بررسی می‌شد، جبر توانست در جهت‌های مختلف پیشرفت کند: نظریهٔ دترمینان و ماتریس، نظریهٔ جبری شکل‌های مربعی و تبدیل‌های خطی و به‌خصوص، نظریهٔ پایاها. به‌تقریب، در جریان تمام نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم، نظریهٔ پایاها، در مرکز بررسی‌های جبری قرار داشت. البته، پیشرفت نظریهٔ گروه و نظریهٔ پایاها در این دوره، به‌نوبهٔ خود در پیشرفت هندسه هم اثر داشت[2].

---

۱. بخش بیستم را ببینید.

۲. بخش هفدهم را ببینید.

دیدگاه تازه و سوم دربارهٔ این‌که جبر چیست، به این ترتیب به‌وجود آمد: در نیمهٔ دوم سدهٔ ۱۹، در مکانیک، فیزیک و در خود ریاضیات، موضوع‌هایی پیدا شد که لازم بود عمل‌های جمع و تفریق، و گاهی ضرب و تقسیم، دربارهٔ آن‌ها بررسی شود، درحالی که این عمل‌ها از قانون‌هایی پیروی می‌کرد که با قانون‌های مربوط به این عمل‌ها روی عددهای گویا، متفاوت بود.

ما دربارهٔ بردارها، گفت‌وگو کرده‌ایم. شکل‌های دیگر این‌گونه مقدارها را، که قانون‌های دیگری دربارهٔ عمل‌های مربوط به آن‌ها صدق می‌کند، در این‌جا تنها نام می‌بریم: ماتریس‌ها، تانسورها، سپینورها، عددهای فوق‌مختلط وغیره. همهٔ این مقدارها را با حرف نشان می‌دهند، ولی برای حالت‌های مختلف این مقدارها، قانون‌های عمل با یکدیگر فرق دارد. هر وقت، برای مجموعه‌ای از چیزها (که به‌کمک حرف نشان داده شده‌اند)، عمل‌هایی تعریف، و قانون‌هایی که دربارهٔ این عمل‌ها صادق است، معین شده باشد، گویند یک دستگاه جبری داده شده است. و دیدگاه سوم (دربارهٔ این پرسش که جبر چیست)، چنین است: هدف جبر عبارت است از بررسی دستگاه‌های مختلف جبری. چنین جبری را جبر اصل موضوعی یا جبر مجرد گویند. مجرد، به این مناسبت که در این دوره تفاوتی ندارد که در دستگاه جبری چه چیزهایی را به‌وسیلهٔ حرف نشان داده‌اند، بلکه تنها این موضوع مهم است که چه اصل‌هایی (قانون‌هایی) دربارهٔ عمل‌های این دستگاه صدق می‌کند. اصل موضوعی هم به این مناسبت، که برای ساختن آن، همیشه از اصل‌هایی آغاز می‌کنند که بنیان‌های دستگاه را تشکیل می‌دهد. به این ترتیب، دوباره به همان دیدگاه اول (دیدگاه ویتی) برگشتیم، ولی در سطحی بالاتر، که جبر عبارت است از نظریهٔ محاسبه‌های حرفی. این‌که منظور از حرف‌ها چه چیزهایی است، برای ما تفاوت نمی‌کند. تنها موضوعی که برای ما مهم است، وجود قانون‌هایی است که می‌توان در عمل‌های حرفی، از آن‌ها استفاده کرد؛ البته، تنها دستگاه‌هایی از جبر برای ما جالب است که یا در خود ریاضیات ویا در کاربردهای آن، اهمیت بیشتری دارد.

مواد ریاضی زیادی که در دورهٔ قبل جمع شده بود، زمینه را برای ساختمان جبر مجرد امروزی فراهم کرد.

در سال‌های ۳۰ سدهٔ بیستم، دورهٔ مشهور کتاب ***واندر واردن*** به‌نام «جبر امروزی» نقش بزرگی در شناساندن این دیدگاه سوم که «جبر چیست»، به‌عهده داشت. ***آ.گ.کورش*** هم یک دورهٔ جبر، به همین قصد تألیف کرده است.

جبر سدهٔ بیستم، کاربردهای فراوانی در هندسه (توپولوژی و نظریهٔ گروه‌های *لی*) و، همان‌طور که پیش از این گفتیم، در فیزیک امروزی (آنالیز تابعی و مکانیک کوانتایی) پیدا کرده است.

در سال‌های نزدیکتر، تلاش‌های زیادی در جهت ماشینی کردن محاسبه‌های جبری به‌کمک ماشینهای محاسبهٔ ریاضی و به‌ویژه به‌یاری رایانه‌ها (کامپیوترها)، انجام گرفته است. مسأله‌هایی که بستگی به این ریاضیات ماشینی پیدا می‌کند، به‌نوبهٔ خود مسأله‌های ویژه‌ای در برابر جبر قرار داده است.

در این کتاب، به‌جز این بخش، دو بخش دیگر هم به جبر مربوط است: جبر خطی (بخش شانزدهم) و نظریهٔ گروه‌ها و دیگر دستگاه‌های جبری (بخش بیستم).

۲. حل جبری معادله‌ها

معادلهٔ جبری درجهٔ n یک‌مجهولی، به معادله‌ای به‌صورت

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

گفته می‌شود که در آن a_1، a_2، ...، a_{n-1}، a_n، ضریب‌های داده‌شده‌ای هستند[1].

معادله‌های درجهٔ اول و درجهٔ دوم. اگر، معادله از درجهٔ اول باشد، به این صورت درمی‌آید:

$$x + a = 0$$

و به‌سادگی حل می‌شود:

$$x = -a$$

معادلهٔ درجهٔ دوم

$$x^2 + px + q = 0$$

هم در همان دوره‌های باستانی حل شده بود. این معادله هم به‌سادگی حل می‌شود: q را به

---

۱. فرض را بر این گرفته‌ایم که همهٔ جمله‌ها به سمت چپ برابری منتقل و دو طرف به ضریب بزرگترین درجه، تقسیم شده باشد.

طرف راست می‌بریم و سپس به دو طرف، عدد $\frac{p^۲}{۴}$ را می‌افزاییم، به‌دست می‌آید:

$$x^۲+px+\frac{p^۲}{۴}=\frac{p^۲}{۴}-q$$

ولی داریم:

$$x^۲+px+\frac{p^۲}{۴}=\left(x+\frac{p}{۲}\right)^۲$$

و بنابراین

$$x+\frac{p}{۲}=\pm\sqrt{\frac{p^۲}{۴}-q}$$

و از این‌جا، دستور معروف حل معادلهٔ درجهٔ دوم به‌دست می‌آید:

$$x=-\frac{p}{۲}\pm\sqrt{\frac{p^۲}{۴}-q}$$

معادلهٔ درجهٔ سوم. وضع معادله‌های بالاتر از درجهٔ دوم، به‌نحو دیگری است. حالت کلی معادلهٔ درجهٔ سوم، در برابر همهٔ کوشش‌های ریاضی‌دان‌های باستانی، تسلیم‌ناپذیر باقی ماند. این معادله، تنها در آغاز سال‌های ۱۵۰۰ و در دوره بازسازی (رنسانس) در ایتالیا و به‌وسیلهٔ ***سی‌پیو دل‌فه‌رو***، ریاضی‌دان ایتالیایی حل شد. بنا بر عادت زمان، ***فه‌رو*** کشف خود را منتشر نکرد، ولی آن را به یکی از شاگردان خود اطلاع داد. بعد از مرگ ***فه‌رو***، این شاگرد، یکی از بزرگترین ریاضی‌دانان ایتالیا، یعنی ***تارتاگلیا*** را برای حل چند معادلهٔ درجهٔ سوم به مسابقه دعوت کرد. ***تارتاگلیا*** (۱۵۵۷-۱۵۰۰)، دعوت را پذیرفت و ۸ روز پیش از پایان مسابقه، روش حل هر معادلهٔ درجهٔ سوم به‌صورت $x^۳+px+q=۰$ را پیدا کرد.

او در ۲ ساعت، همهٔ مسأله‌های رقیب خود را حل کرد. ***کاردان*** (۱۵۷۱-۱۵۰۱)، پروفسور ریاضیات و فیزیک در میلان، از کشف ***تارتاگلیا*** آگاهی پیدا کرد و از او خواهش کرد، کشف خود را، برای او فاش کند. ***تارتاگلیا***، سرانجام موافقت کرد، ولی با این شرط که ***کاردان***، روش او را پنهان نگاه دارد. ***کاردان***، پیمان خود را شکست و دستور ***تارتاگلیا*** را در کتاب خود به‌نام «هنر بزرگ» (*Ars magna*)، منتشر کرد.

از این زمان، دستور حل معادلهٔ درجهٔ سوم را **دستور *کاردان*** می‌نامند، درحالی که حق این است که **دستور *تارتاگلیا*** نامیده شود.

دستور کاردان به این ترتیب به‌دست می‌آید:

نخست ـ حل معادلهٔ کامل درجهٔ سوم

$$y^{۳} + ay^{۲} + by + c = ۰ \tag{۱}$$

به‌سادگی، منجر به حل معادله‌ای به این صورت می‌شود:

$$x^{۳} + px + q = ۰ \tag{۲}$$

که شامل جملهٔ درجهٔ دوم نیست. برای این منظور، کافی است $y = x - \frac{a}{۳}$ بگیریم. درواقع، اگر این مقدار را به‌جای y در معادلهٔ (۱) قرار دهیم، بعد از باز کردن پرانتزها به‌دست می‌آید:

$$\left(x - \frac{a}{۳}\right)^{۳} + a\left(x - \frac{a}{۳}\right)^{۲} + b\left(x - \frac{a}{۳}\right) + c = x^{۳} - ۳x^{۲}\frac{a}{۳} + \cdots + ax^{۲} + \cdots$$

که در آن، نقطه‌ها به‌معنای جمله‌هایی هستند که از درجهٔ دوم پایین‌ترند (یا درجهٔ اول‌اند و یا مقدار ثابت). می‌بینیم که جمله‌های درجهٔ دوم (جمله‌های شامل $x^{۲}$)، از بین می‌روند. اکنون معادلهٔ

$$x^{۳} + px + q = ۰$$

را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $x = u + v$، یعنی به‌جای یک مجهول، دو مجهول u و v را قرار می‌دهیم و مسأله را به معادله‌ای که شامل دو مجهول است، تبدیل می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$(u+v)^{۳} + p(u+v) + q = ۰$$

و یا

$$u^{۳} + v^{۳} + q + (۳uv + p)(u+v) = ۰$$

مجموع $u+v$ هرچه باشد، همیشه می‌توان ترتیب کار را طوری داد که حاصل‌ضرب آن‌ها uv، برابر عدد دل‌خواه ما باشد. اگر $u + v = A$ باشد و ما بخواهیم $uv = B$ باشد؛ از آن‌جا که $v = A - u$، به‌دست می‌آید:

$$u(A-u) = B$$

یعنی u باید برابر ریشهٔ این معادلهٔ درجهٔ دوم باشد:

$$u^{۲} - Au + B = ۰$$

و هر معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشه‌های حقیقی و یا موهومی است که از دستور معینی به‌دست می‌آید. در این حالت، $u+v$ عبارت است از مقدار مجهول x، ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم. فرض می‌کنیم

$$uv = -\frac{p}{۳}$$

یعنی $۳uv+p=۰$. با این انتخاب به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u^۳ + v^۳ + q &= ۰ \\ ۳uv + p &= ۰ \end{aligned} \qquad (۳)$$

بنابراین، اگر u و v را طوری پیدا کنیم که در این دستگاه صدق کند، عدد $x=u+v$، ریشهٔ معادله خواهد بود.

به‌کمک دستگاه (۳) می‌توان به‌سادگی معادلهٔ درجهٔ دومی پیدا کرد که ریشه‌های آن برابر $u^۳$ و $v^۳$ باشد. درواقع داریم:

$$u^۳ + v^۳ = -q$$

$$u^۳v^۳ = -\frac{p^۳}{۲۷}$$

و بنابراین $u^۳$ و $v^۳$، ریشه‌های این معادلهٔ درجهٔ دوم هستند:

$$z^۲ + qz - \frac{p^۳}{۲۷} = ۰$$

که با حل آن به‌دست می‌آید:

$$u^۳ = -\frac{q}{۲} + \sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}} \quad , \quad v^۳ = -\frac{q}{۲} - \sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}}$$

و بنابراین

$$x = \sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}+\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}}} + \sqrt[۳]{-\frac{q}{۲}-\sqrt{\frac{q^۲}{۴}+\frac{p^۳}{۲۷}}}$$

و این همان دستور کاردان است.

معادلهٔ درجهٔ چهارم. بلافاصله، بعد از حل معادلهٔ درجهٔ سوم، حالت کلی معادلهٔ درجهٔ چهارم

هم به‌وسیلهٔ *فِراری* (۱۵۶۵-۱۵۲۲)، حل شد. درضمن، همان‌طور که برای حل معادلهٔ درجهٔ سوم لازم بود معادلهٔ کمکی درجهٔ دوم

$$z^{۲} + qz - \frac{p^{۳}}{۲۷} = ۰$$

را حل کنیم، که در آن z برابر $u^{۳}$ یا $v^{۳}$ بود، برای حل معادلهٔ درجهٔ چهارم هم باید ابتدا یک معادلهٔ درجهٔ سوم کمکی را حل کنیم.

روش *فِراری* چنین است. این معادلهٔ درجهٔ چهارم کلی را در نظر می‌گیریم:

$$x^{۴} + ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d = ۰$$

و آن را به این صورت می‌نویسیم:

$$x^{۴} + ax^{۳} = -bx^{۲} - cx - d$$

و به هر دو طرف برابری، $\frac{a^{۲}x^{۲}}{۴}$ را اضافه می‌کنیم، سمت چپ معادله به‌صورت مجذور کامل درمی‌آید و معادله چنین می‌شود:

$$\left(x^{۲} + \frac{ax}{۲}\right)^{۲} = \left(\frac{a^{۲}}{۴} - b\right)x^{۲} - cx - d$$

دوباره به دو طرف برابری، این جمله‌ها را اضافه می‌کنیم:

$$\left(x^{۲} + \frac{ax}{۲}\right)y + \frac{y^{۲}}{۴}$$

که در آن، y یک مجهول تازه است که بعد، شرطی دربارهٔ آن پیدا خواهیم کرد. در این صورت باز هم سمت چپ معادله به‌صورت مجذور کامل درمی‌آید و خواهیم داشت:

$$\left(x^{۲} + \frac{ax}{۲} + \frac{y}{۲}\right)^{۲} = \left(\frac{a^{۲}}{۴} - b + y\right)x^{۲} + \left(\frac{ay}{۲} - c\right)x + \left(\frac{y^{۲}}{۴} - d\right) \qquad (۴)$$

به این ترتیب، به معادله‌ای با دو مجهول می‌رسیم.

سمت راست برابری (۴)، یک سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم نسبت به x است که ضریب‌های آن بستگی به y دارد. y را طوری انتخاب می‌کنیم که این سه‌جمله‌ای برابر مجذور یک دوجمله‌ای درجهٔ اول $\alpha x + \beta$ باشد.

برای این‌که یک سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم $Ax^{۲} + Bx + C$ برابر مجذور دوجمله‌ای $\alpha x + \beta$

باشد، کافی است داشته باشیم:

$$B^2 - 4AC = 0$$

زیرا، در این صورت خواهیم داشت:

$$Ax^2 + Bx + C = (\sqrt{A}\,x + \sqrt{C})^2$$

یعنی

$$Ax^2 + Bx + C = (\alpha x + \beta)^2$$

که در آن داریم:

$$\alpha = \sqrt{A} \quad , \quad \beta = \sqrt{C}$$

بنابراین، اگر yرا طوری انتخاب کنیم که داشته باشیم:

$$\left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)\left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0$$

در آن صورت، سمت راست معادلهٔ (۴) برابر مجذور کاملی به‌صورت $(\alpha x + \beta)^2$ خواهد بود. اگر پرانتزها را باز کنیم، به معادلهٔ درجهٔ سومی نسبت به yمی‌رسیم:

$$y^3 - by^2 + (ac - bd)y - \left[d(a^2 - 4b) + c^2\right] = 0$$

با حل این معادلهٔ کمکی درجهٔ سوم (مثلاً به‌کمک دستور کاردان)، می‌توانیم α و β را برحسب ریشهٔ آن y_0، پیدا کنیم و به‌دست می‌آید:

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2}\right)^2 = (\alpha x + \beta)^2$$

و از آن‌جا

$$x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = \alpha x + \beta \quad \text{یا} \quad x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y_0}{2} = -\alpha x - \beta$$

از این دو معادلهٔ درجهٔ دوم، هر چهار ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ چهارم به‌دست می‌آید.

به این ترتیب، ریاضی‌دانان ایتالیایی، در سال‌های ۱۵۰۰، معادله‌های درجهٔ سوم و چهارم را حل کردند.

موفقیت ریاضی‌دانان ایتالیایی، اثر بی‌اندازه‌ای داشت. نخستین بار بود که دانش زمان جدید از دانش باستان فراتر می‌رفت. تا این‌جا، و در جریان تمام سده‌های میانه، هدف خود

را فهمیدن نوشته‌های گذشته قرار داده بودند، ولی در این‌جا، سرانجام مسأله‌هایی را حل کردند که پیشینیان موفق به حل آن‌ها نشده بودند. و این در سال‌های ۱۵۰۰ بود، یعنی صد سالی پیش از کشف محاسبه‌های تازه: هندسهٔ تحلیلی، دیفرانسیلی و انتگرالی، که سرانجام برتری دانش تازه را بر دانش پیشینیان نشان داد. بعد از آن، ریاضی‌دان بزرگی نبود که برای ادامهٔ موفقیت‌های ایتالیایی‌ها و جست‌وجوی راه‌حل‌های مشابهی برای معادله‌های درجهٔ پنجم و ششم تلاش نکند.

چیرنهاوزن (۱۷۰۸-۱۶۵۱)، جبردان مشهور سدهٔ هفدهم، گمان کرد که سرانجام روش کلی حل را پیدا کرده است. روش او براساس تبدیل معادله به معادلهٔ ساده‌تر قرار داشت، ولی این تبدیل مستلزم حل بعضی معادله‌های کمکی بود. بعدها، و با بررسی‌های دقیق‌تری، معلوم شد که روش تبدیل ***چیرنهاوزن***، درواقع، حل معادله‌های درجهٔ دوم، سوم و چهارم را می‌دهد، ولی برای حل معادلهٔ درجهٔ پنجم، باید در آغاز یک معادلهٔ کمکی درجهٔ ششم حل شود که به‌نوبهٔ خود راه‌حلی ندارد.

تجزیهٔ چندجمله‌ای به عامل‌ها، بنا بر دستور ویت. اگر قضیهٔ اصلی جبر را بدون اثبات بپذیریم[1]، که بنا بر آن، هر معادلهٔ

$$f(x) = 0$$

که در آن

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

چندجمله‌ای از x با درجهٔ داده‌شدهٔ n و ضریب‌های a_1، a_2، ...، a_n، عددهای حقیقی یا مختلط باشد، دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی یا موهومی دارد. درضمن، توجه داشته باشیم که هر محاسبه‌ای با عددهای مختلط، از همان قانون‌های مربوط به محاسبهٔ با عددهای حقیقی پیروی می‌کند. می‌توان ثابت کرد که چندجمله‌ای $f(x)$ را می‌توان، و تنها به یک طریق، به‌صورت ضرب عامل‌های درجهٔ اول تجزیه کرد:

$$f(x) = (x-a)\ (x-b)\ \cdots\ (x-l)$$

که در آن a، b، ...، l، عددهایی حقیقی هستند.

---

۱. اثبات قضیهٔ اصلی جبر دشوار است و خیلی بعدتر داده شد و ما آن را در بند ۳ روشن کرده‌ایم. ولی درستی آن را، از خیلی قبل از اثبات آن، قبول کرده بودند.

درواقع، فرض می‌کنیم، a ریشه‌ای از $f(x)$ باشد، $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم، چون مقسوم‌علیه از درجهٔ $(n-1)$ است، باقیماندهٔ تقسیم برابر عدد ثابت R خواهد شد، یعنی اتحاد زیر برقرار است:

$$f(x) = (x-a)\, f_1(x) + R$$

که در آن $f_1(x)$، چندجمله‌ای از درجهٔ $(n-1)$ و R، باقی‌ماندهٔ تقسیم است. در آن a را به‌جای x قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید:

$$f(a) = (a-a)\, f_1(a) + R = R$$

ولی، چون a ریشهٔ $f(x)$ است، بنابراین $f(a) = 0$ و از آن‌جا $R = 0$ می‌شود، یعنی، اگر a ریشهٔ چندجمله‌ای باشد، این چندجمله‌ای همیشه بر $x-a$ بخش‌پذیر است. به این ترتیب

$$f(x) = (x-a)\, f_1(x)$$

ولی، اگر قضیهٔ اصلی جبر درست باشد، چندجمله‌ای $f_1(x)$ هم به‌نوبهٔ خود دارای ریشه‌ای برابر b می‌باشد و شبیه قبل خواهیم داشت:

$$f_1(x) = (x-b)\, f_2(x)$$

که در آن، $f_2(x)$ چندجمله‌ای از درجهٔ $(n-2)$ می‌باشد وغیره. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که این تجزیه، منحصربه‌فرد است.

به این مفهوم، هر چندجمله‌ای درجهٔ n، دارای n، و تنها n ریشهٔ a، b، c، ...، l می‌باشد. درضمن، همهٔ این ریشه‌ها ممکن است با هم متفاوت باشند ویا ممکن است بین آن‌ها، ریشه‌های برابر هم وجود داشته باشد. وقتی که چند ریشه از چندجمله‌ای $f(x)$ با هم برابر باشند، گویند که این ریشه، تکراری است و تعداد ریشه‌های برابر را مرتبهٔ ریشهٔ تکراری گویند.

اگر پرانتزهای

$$(x-a)\,(x-b)\,(x-c)\,\cdots\,(x-l)$$

را در هم ضرب کنیم و ضریب‌های آن را با ضریب‌های جمله‌های متشابه آن‌ها در $f(x)$ مقایسه کنیم، بلافاصله به‌دست می‌آید:

$$-a_1 = a + b + c + \cdots + l$$

$$a_{۲} = ab + ac + \cdots + kl$$

$$-a_{۳} = abc + abd + \cdots$$

$$\vdots$$

$$(-۱)^n a_n = abc \cdots l$$

و این‌ها، همان *دستورهای ویت*، هستند.

قضیهٔ مربوط به چندجمله‌ای‌های متقارن. دستورهای ویت، شامل چندجمله‌ای‌هایی از n حرف a، b، ...، l هستند، که با هرگونه تبدیل این حرف‌ها، تغییر نمی‌کنند. درواقع $a+b+\cdots+k+l=b+a+\cdots+k+l$ وغیره. به‌طور کلی، هر چندجمله‌ای از n حرف، که با هر تبدیل این حرف‌ها، تغییر نکند، چندجمله‌ای متقارن نسبت به این n حرف نامیده می‌شود. از جمله $۵x^۲ + ۵y^۲ - ۷xy$، یک چندجمله‌ای متقارن نسبت به x و y است. می‌توان ثابت کرد، هر چندجمله‌ای درست متقارن نسبت به n حرف و با ضریب‌های A، B، ... را می‌توان به‌صورت درست و گویا (یعنی به‌کمک عمل‌های جمع، تفریق و ضرب) برحسب ضریب‌های A، B، ... و چندجمله‌ای‌های ویت نسبت به این حرف‌ها، بیان کرد. در حالتی که a، b، ...، l ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ nام $x^n + a_۱x^{n-۱} + \cdots + a_n = ۰$ باشد، هر چندجمله‌ای متقارنی از a، b، ...، l با هر ضریب A، B، ...، می‌تواند به‌صورت درست و گویایی، برحسب این ضریب‌های A، B، ... و ضریب‌های $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n این معادله، بیان شود، و این قضیهٔ اصلی چندجمله‌ای‌های متقارن است.

کارهای لاگرانژ. *لاگرانژ*، ریاضی‌دان مشهور فرانسوی، در اثر بزرگ خود (که بیش از ۲۰۰ صفحه است) به‌نام «اندیشه‌هایی دربارهٔ حل معادله‌های جبری»، که در سال‌های ۱۷۷۰-۱۷۷۱ انجام داد، دربارهٔ راه‌حل‌هایی که تا آن زمان برای معادله‌های درجهٔ دوم، سوم و چهارم وجود داشت، بررسی انتقادی می‌کند و نشان می‌دهد که موفقیت در حل آن‌ها، همه‌جا براساس موقعیت‌هایی است که برای معادلهٔ درجهٔ پنجم ویا بالاتر، نمی‌توان از آن‌ها استفاده کرد. از زمان *فِه‌رو* تا زمان *لاگرانژ*، بیش از ۲۵۰ سال گذشته بود، و در این فاصلهٔ زمانی دراز، هیچ‌کس دربارهٔ امکان حل معادلهٔ درجهٔ پنجم و درجه‌های بالاتر، شک نکرده بود؛ همه گمان می‌کردند، این امکان وجود دارد که دستورهایی شامل تنها عمل‌های جمع، تفریق، ضرب،

تقسیم و ریشهٔ صحیح و مثبت، برای بیان ریشه‌ها برحسب ضریب‌ها، پیدا شود، شبیه دستوری که برای بیان ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم از قدیم وجود داشت و یا دستورهایی که در سال‌های ۱۵۰۰ برای معادله‌های درجهٔ سوم و چهارم به‌وسیلهٔ ایتالیایی‌ها پیدا شده بود. تنها گمان می‌کردند، کسی نتوانسته است توفیق کشف راز این راه‌حل‌ها را به‌دست آورد.

لاگرانژ در یادداشت‌های خود (صفحهٔ ۳۰۵ جلد سوم مجموعهٔ آثار) می‌گوید: «مسألهٔ حل معادله‌ها (به‌مفهوم به‌دست آوردن دستوری که شامل رادیکال‌ها باشد)، وقتی که درجه‌ای بالاتر از چهارم داشته باشند، یکی از مسأله‌های غیرقابل حل است، گرچه هیچ‌چیز، این عدم امکان حل را ثابت نمی‌کند»، و در صفحهٔ ۳۰۷ اضافه می‌کند: «از بررسی‌های ما نتیجه می‌شود، باید تردید داشت که روش‌های قابل استفاده، بتواند راه‌حلی برای معادلهٔ درجهٔ پنجم پیدا کند».

لاگرانژ، در بررسی‌های خود، به عبارت

$$a + \varepsilon b + \varepsilon^{۲} c + \cdots + \varepsilon^{n-۱} l$$

از ریشه‌های a، b، c، ... و l معادله می‌رسد که در آن ε عبارت است از ریشهٔ nام واحد[1]، و ثابت می‌کند که چنین عبارت‌هایی، به حل معادله برحسب رادیکال‌ها، بستگی دارد. امروز، این عبارت را «حلال لاگرانژ» گویند.

به‌جز این، ***لاگرانژ*** یادآور می‌شود که نظریهٔ تبدیل ریشه‌های معادله هم، در نظریهٔ حل معادله‌ها به‌صورت رادیکال‌ها، اهمیت زیادی دارد. او این فکر را بیان کرد که نظریهٔ تبدیل‌ها «فلسفهٔ حقیقی تمام پرسش» است، و همان‌طور که بررسی‌های بعدی ***گالوا*** نشان داد، در این باره حق داشت.

---

۱. یعنی، عدد مختلطی که توان nام آن برابر واحد باشد. از جمله، اگر ریشهٔ سوم واحد را محاسبه کنیم، به عددهای $-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$ ، $-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i$ و ۱ (که در آن‌ها $i=\sqrt{-۱}$) می‌رسیم. درواقع:

$$\left(-\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i\right)^{۳} = -\frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۸}\sqrt{۳}\,i + \frac{۹}{۸} - \frac{۳\sqrt{۳}}{۸}i = ۱$$

و به همین ترتیب:

$$\left(-\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i\right)^{۳} = ۱$$

اکنون دیگر برای **لاگرانژ**، حل معادله‌های درجه دوم، سوم و چهارم، آن‌طور که ریاضی‌دان‌های ایتالیایی گمان می‌کردند، جدا از هم نبود، به‌نحوی که برای هرکدام راه‌حلی که به‌تصادف پیدا شده است، در نظر گرفته شود. بلکه او این راه‌حل‌ها را از یک اندیشهٔ کلی و به‌کمک روش یگانه‌ای که به نظریهٔ چندجمله‌ای‌های متقارن، نظریهٔ تبدیل‌ها و نظریهٔ حلال‌ها، بستگی پیدا می‌کرد، نتیجه می‌گرفت.

برای نمونه، روش **لاگرانژ** را برای حل معادلهٔ کامل درجهٔ چهارم می‌آوریم:

$$x^۴ + mx^۳ + nx^۲ + px + q = ۰$$

ریشه‌های این معادله را a، b، c و d می‌گیریم. حلال

$$a + b - c - d$$

یعنی

$$a + \varepsilon c + \varepsilon^۲ b + \varepsilon^۳ d$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $\varepsilon = -۱$. با جابه‌جا کردن a، b، c و d در آن، به $۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$ حالت ممکن برمی‌خوریم، که روی هم شش عبارت مختلف به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{c} a + b - c - d \\ a + c - b - d \\ a + d - c - b \\ c + d - a - b \\ b + d - a - c \\ b + c - a - d \end{array} \qquad (۵)$$

بنابراین، معادلهٔ درجهٔ ششمی که این عبارت‌ها، ریشه‌های آن باشد، دارای ضریب‌هایی است که به‌ازای هرکدام از ۲۴ تبدیل a، b، c و d، تغییر نمی‌کند، زیرا هرکدام از ۲۴ تبدیل، تنها این عبارت‌ها را به یکدیگر بدل می‌کند و ضریب‌های معادلهٔ درجهٔ ششم مورد نظر هم، بستگی به این ندارد که ردیف ریشه‌ها را چگونه انتخاب کنیم. به این ترتیب، این ضریب‌ها، نسبت به a، b، c و d، چندجمله‌ای‌های متقارنی خواهد بود. ولی در این صورت، بنا بر قضیهٔ اصلی مربوط به چندجمله‌ای‌های متقارن، این ضریب‌ها، برحسب ضریب‌های m، n، p و q معادله، به‌صورت درست و گویا بیان می‌شود. به‌جز این، چون عبارت‌های (۵)، دوبه‌دو

قرینهٔ یکدیگرند، معادلهٔ درجهٔ ششم تنها شامل جمله‌های با توان‌های زوج است. درواقع، اگر عبارت‌های (۵) را به α، β، γ، $-\alpha$، $-\beta$ و $-\gamma$ نشان دهیم، سمت چپ معادلهٔ درجهٔ ششم ما، چنین می‌شود:

$$(y-\alpha)(y+\alpha)(y-\beta)(y+\beta)(y-\gamma)(y+\gamma) = (y^2-\alpha^2)(y^2-\beta^2)(y-\gamma^2)$$

محاسبهٔ مستقیم، معادلهٔ درجهٔ ششم را می‌دهد:

$$y^6 - (3m^2-8n)y^4+3(m^4-16m^2n-16n^2+16mp-64q)y^2-(m^2-4m+8p)^2 = 0$$

که با فرض $t = y^2$، به معادلهٔ درجهٔ سومی برحسب t می‌رسیم که اگر t'، t'' و t''' ریشه‌های آن باشد، داریم:

$$a + b - c - d = \sqrt{t'}$$
$$a + c - b - d = \sqrt{t''}$$
$$a + d - b - c = \sqrt{t'''}$$

به‌جز آن داریم:

$$a + b + c + d = -m$$

با جمع این چهار معادله، بعد از ضرب آن‌ها در ۱، ۱، ۱، ۱ یا ۱، ۱، −۱، −۱ یا ۱، −۱، ۱، −۱ یا ۱، −۱، −۱، ۱، به‌دست می‌آید:

$$a = \frac{1}{4}(-m + \sqrt{t'} + \sqrt{t''} + \sqrt{t'''})$$

$$b = \frac{1}{4}(-m + \sqrt{t'} - \sqrt{t''} - \sqrt{t'''})$$

$$c = \frac{1}{4}(-m - \sqrt{t'} + \sqrt{t''} - \sqrt{t'''})$$

$$d = \frac{1}{4}(-m - \sqrt{t'} - \sqrt{t''} + \sqrt{t'''})$$

به این ترتیب، حل معادلهٔ درجهٔ چهارم، منجر به حل معادلهٔ درجهٔ سوم می‌شود. به همین ترتیب، معادله‌های درجهٔ سوم و دوم هم حل می‌شود.

لاگرانژ، در نظریهٔ معادله‌های جبری، به موفقیت‌های زیادی رسید. با وجود این، حتی بعد از کوشش‌های سخت او، پرسش مربوط به حل معادله‌های جبری بالاتر از درجهٔ چهارم

برحسب رادیکال‌ها، بی‌پاسخ باقی ماند. این پرسش، که دربارهٔ آن قریب سیصد سال کار بی‌ثمر انجام گرفته بود، به‌قول **لاگرانژ** «عقل و اندیشهٔ آدمی را به‌مبارزه طلبیده بود».

کشف آبل. چقدر ریاضی‌دان‌ها دچار شگفتی شدند، وقتی در سال ۱۸۲۴، از کار *آبل* (۱۸۰۲-۱۸۲۹)، جوان نابغهٔ نروژی، آگاهی یافتند که در آن ثابت شده بود، اگر ضریب‌های a_1، a_2، ...، a_n معادله را حرف‌های ساده‌ای به‌حساب آوریم، هیچ عبارت رادیکالی از این ضریب‌ها وجود ندارد که ریشه‌های معادلهٔ متناظر بالاتر از درجهٔ چهارم را معین کند. به این ترتیب معلوم شد، علت این‌که تلاش‌های چندصد ساله بزرگترین ریاضی‌دان‌های همهٔ کشورها نتوانست در حل رادیکالی معادلهٔ درجهٔ پنجم و بالاتر از آن، توفیقی به‌دست آورد، این بود که این مسأله جواب ندارد.

چنین دستوری برای معادلهٔ درجهٔ دوم وجود دارد، همان‌طور که می‌توانیم دستورهای مشابهی هم برای معادلهٔ درجهٔ سوم و برای معادلهٔ درجهٔ چهارم هم پیدا کنیم، ولی برای معادلهٔ درجهٔ پنجم و درجه‌های بالاتر، چنین دستوری وجود ندارد.

نظریهٔ گالوا. ولی، این هنوز همهٔ مطلب نیست. در نظریهٔ معادله‌های جبری، مهم‌ترین چیز، باقی مانده است. مطلب بر سر این است که هرچه بخواهید، حالت‌های خاصی از معادله‌ها (از همهٔ درجه‌ها) وجود دارد که برحسب رادیکال‌ها حل می‌شوند و این‌ها درست همان معادله‌هایی هستند که از نظر بسیاری از کاربردها، اهمیت دارند. از جمله، معادلهٔ دوجمله‌ای $x^n = A$، از این قبیل است. *آبل*، گروه خیلی گسترده‌تری از این‌گونه معادله‌ها را، که «معادله‌های دوری» نامیده می‌شوند و گروه باز هم کلی‌تری، که به «معادله‌های آبلی» مشهورند، پیدا کرد. **گوس**، به‌خاطر مسألهٔ ساختن چندضلعی‌های منتظم، به‌کمک پرگار و خط‌کش، معادلهٔ معروف به تقسیم دایره (معادلهٔ دایره‌بُری) را، به‌تفصیل بررسی کرد، یعنی معادلهٔ به‌صورت

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

که در آن p، عددی است اول، و ثابت کرد این معادله را همیشه می‌توان به حل یک‌رشته معادله‌های درجهٔ پایین‌تر منجر کرد. درضمن، شرط‌های لازم و کافی را برای این‌که این معادله برحسب رادیکال‌های با فرجهٔ ۲ حل شود، به‌دست آورد (شرط‌های لازم، به‌طور

دقیق به‌وسیلهٔ *گالوا* داده شد).

بنابراین، بعد از کار *آبل*، وضع به این ترتیب بود: گرچه، بنا بر آن‌چه *آبل* ثابت کرد، معادله‌های کلی بالاتر از درجهٔ چهارم، به‌طور کلی برحسب رادیکال‌ها حل نمی‌شوند، هرقدر بخواهیم، معادله‌های خاص مختلف با درجهٔ دل‌خواه وجود دارد که برحسب رادیکال‌ها قابل حل هستند. با کشف‌هایی که شده بود، پرسش مربوط به حل معادله‌ها برحسب رادیکال‌ها، بر زمینهٔ تازه‌ای قرار گرفته بود. باید به جست‌وجوی همهٔ معادله‌هایی رفت که به‌کمک رادیکال‌ها حل می‌شوند، به‌زبان دیگر، شرط لازم و کافی را، برای این‌که معادله‌ای برحسب رادیکال‌ها قابل حل باشد، پیدا کرد. این پرسش که پاسخ به آن به‌مفهومی، پایان حل تمام مسأله‌ها بود، به‌وسیلهٔ *اواریست گالوا*، ریاضی‌دان نابغهٔ فرانسوی، حل شد.

گالوا (۱۸۱۱-۱۸۳۲)، در یک دوئل در سن ۲۰ سالگی کشته شد؛ او در دو سال آخر زندگیش، نتوانست وقت زیادی را به ریاضیات اختصاص دهد، زیرا درگیر تندباد شدید زندگی سیاسی دوران انقلاب ۱۸۳۰ شده بود، و به‌خاطر مبارزه‌ای که علیه نظام ارتجاعی *لوئی فیلیپ* می‌کرد، به‌زندان افتاد وغیره. با وجود این، *گالوا*، در اثر کوچک خود «یادداشتی دربارهٔ شرط‌های قابل حل بودن معادله برحسب رادیکال»، که بعد از مرگش در دستنویس‌های او پیدا شد و برای نخستین بار در سال ۱۸۴۶ به‌وسیلهٔ *لیوویل* منتشر شد، از یک فکر ساده، ولی عمیق آغاز و سرانجام تمام مشکل مربوط به حل معادله‌ها برحسب رادیکال را حل می‌کند، مشکلی که به‌خاطر آن، بزرگترین ریاضی‌دانان، مبارزهٔ بی‌نتیجه‌ای کرده بودند. رمز موفقیت *گالوا* در این بود که نخست یک‌رشته مفهوم‌های کلی تازه و مهم را در نظریهٔ معادله‌ها به‌کار برد، مفهوم‌هایی که بعدها عهده‌دار نقش بزرگی درتمام ریاضیات، شد.

نظریهٔ *گالوا* را برای حالت خاص آن بررسی می‌کنیم، حالتی که ضریب‌های a_1، a_2، ...، a_n معادلهٔ درجهٔ n داده‌شده

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \qquad (6)$$

عددهایی گویا باشد. این حالت به‌ویژه جالب است و درواقع شامل همهٔ دشواری‌های نظریهٔ کلی *گالوا* می‌باشد. به‌جز این، فرض می‌کنیم همهٔ ریشه‌های a، b، c، ... این معادله، مختلف باشند.

گالوا، شبیه ***لاگرانژ***، عبارت درجهٔ اولی نسبت به a، b، c، ...، در نظر می‌گیرد

$$V = Aa + Bb + Cc + \cdots$$

ولی، ضریب‌های A، B، C، ... این عبارت را، ریشه‌های واحد فرض نمی‌کند، بلکه A، B، C، ... را عددهای درست و گویایی برمی‌گزینند، به‌نحوی که همهٔ $n!$ ($1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$) مقدار V، V'، V''، ...، $V^{(n!-1)}$ با هم متفاوت باشند. این مقدارها به این ترتیب به‌دست می‌آیند که در V، ریشه‌های a، b، c، ... را به همهٔ $n!$ طریق ممکن، جابه‌جا کنیم. این عمل همیشه ممکن است. ***گالوا***، سپس معادله‌ای از درجهٔ $n!$ تشکیل می‌دهد، که ریشه‌های آن V، V'، V''، ...، $V^{(n!-1)}$ باشد. به‌سادگی و به‌کمک نظریهٔ مربوط به چندجمله‌ای‌های متقارن می‌توان ثابت کرد که ضریب‌های این معادلهٔ $\Phi(x) = 0$، که از درجهٔ $n!$ است، عددهایی گویا هستند.

تا این‌جا، همه‌چیز کم و بیش شبیه کارهای ***لاگرانژ*** است.

سپس، ***گالوا***، مفهوم تازه و مهمی را در جبر وارد می‌کند: مفهوم تحویل‌ناپذیری چندجمله‌ای‌ها، در یک میدان عددی داده‌شده. اگر یک چندجمله‌ای از x، با ضریب‌های گویا داده شده باشد، آن را در میدان عددهای گویا تحویل‌پذیر گویند، وقتی که بتوان آن را به‌صورت ضرب چندجمله‌ای‌هایی با درجهٔ پایین‌تر با ضریب‌های گویا تبدیل کرد. اگر این تجزیه ممکن نباشد، چندجمله‌ای را تحویل‌ناپذیر گویند. چندجمله‌ای $x^3 - x^2 - 4x - 6$ در میدان عددهای گویا، تحویل‌پذیر است، زیرا برابر است با $(x^2 + 2x + 2)(x - 3)$ درحالی که، درضمن، می‌توان ثابت کرد، چندجمله‌ای $x^3 + 3x^2 + 3x - 5$، در میدان عددهای گویا، تحویل‌ناپذیر است.

روش‌هایی وجود دارد، و البته منجر به محاسبه‌های درازی می‌شود، که به‌کمک آن‌ها می‌توان هر چندجمله‌ای داده‌شده با ضریب‌های گویا را، به ضرب عامل‌های تحویل‌ناپذیر در میدان عددهای گویا، تجزیه کرد.

گالوا فرض می‌کند چندجمله‌ای $\Phi(x) = 0$، که به ترتیب مذکور در بالا به‌دست آمده است، در میدان عددهای گویا، به عامل‌های تحویل‌ناپذیر تجزیه شده باشد.

$F(x)$ را یکی از این چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر می‌گیریم که از درجهٔ m باشد. در این صورت، $F(x)$ برابر است با حاصل‌ضرب m عامل از $n!$ عامل درجهٔ اول $x-V$، $x-V'$، ...، $x-V^{(n!-1)}$، که چندجمله‌ای $\Phi(x) = 0$ از درجهٔ $n!$، به‌صورت ضرب آن‌ها قابل تجزیه است. این m عامل را $x-V$، $x-V'$، ...، $x-V^{(m-1)}$ فرض می‌کنیم. ریشه‌های a، b، ...، l

معادلهٔ دادهشدهٔ درجهٔ nام (۶) را بهوسیلهٔ عددهای (شمارههای) ۱، ۲، ...، n، شمارهگذاری میکنیم. در این صورت در V، V'، ...، $V^{(n!-1)}$، همهٔ $n!$ تبدیل ممکن شمارههای ۱، ۲، ...، n ریشهها وجود دارد، درحالی که در V، V'، ...، $V^{(m-1)}$، تنها m تا از آنها پیدا میشود. مجموعهٔ G این m تبدیل شمارههای ۱، ۲، ...، n را، ***گروه گالوا***، از معادلهٔ دادهشدهٔ (۶) گویند[1].

سپس ***گالوا***، باز هم مفهومهای تازهای را میپذیرد و با استدلالهای ساده، ولی دقیق، نتیجه میگیرد که شرط لازم و کافی برای اینکه معادلهٔ (۶) برحسب رادیکالها حل شود، این است که گروه G از تبدیلهای شمارههای ۱، ۲، ...، n در شرط معینی صدق کند.

به این ترتیب، پیشبینی ***لاگرانژ***، مبنی بر اینکه بنیان تمام پرسش، بر نظریهٔ تبدیلها قرار دارد، درست از آب درآمد.

و حالا، قضیهٔ ***آبل*** دربارهٔ غیرقابل حل بودن معادلهٔ درجهٔ پنجم برحسب رادیکالها را میتوان بهعنوان یک حالت خاص، ثابت کرد. میتوان ثابت کرد که هرقدر بخواهیم، معادلهٔ درجهٔ پنجم، ولو با ضریبهای گویا و درست، وجود دارد، بهنحوی که برای آنها چندجملهای متناظر $\Phi(x)$ با درجه ۱۲۰، تحویلناپذیر است، یعنی گروه ***گالوا***، گروه همهٔ ۱۲۰ تبدیل شمارههای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ از ریشهها میشود. ولی میتوان ثابت کرد که این گروه با معیار ***گالوا*** نمیسازد و بنابراین اینگونه معادلههای درجهٔ پنجم، برحسب رادیکالها قابل حل نیستند.

میتوان ثابت کرد که معادلهٔ $x^5+x-a=0$، که در آن a عددی درست و مثبت است، اغلب برحسب رادیکالها، قابل حل نیست، از جمله در حالتهایی که a برابر ۳، ۴، ۵، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ... باشد، برحسب رادیکالها، حل نمیشود.

کاربرد نظریهٔ گالوا، دربارهٔ حل مسألههای هندسی، بهکمک پرگار و خطکش. یکی از کاربردهای ویژهٔ نظریهٔ ***گالوا*** را یادآور میشویم. بسیاری از مسألههای ساختمانی هندسهٔ مسطحه را میتوان بهکمک پرگار و خطکش حل کرد و بسیاری را نمیتوان. از جمله، میتوان مثلث متساویالاضلاع، مربع، پنجضلعی منتظم، هشتضلعی منتظم، دهضلعی منتظم وغیره را بهکمک پرگار و خطکش رسم کرد، درحالی که هفتضلعی، نهضلعی یا یازدهضلعی منتظم، با پرگار و

۱. بررسی بیشتر دربارهٔ گروه گالوا را میتوانید در بند ۵ بخش بیستم پیدا کنید.

خط‌کش قابل رسم نیستند. کدام مسأله‌هایی را می‌توان با پرگار و خط‌کش حل کرد و چه مسأله‌هایی با این دو وسیله قابل حل نیستند؟ تا پیش از *گالوا*، برای این پرسش، پاسخی وجود نداشت، ولی با توجه به نظریهٔ *گالوا*، این پاسخ هم پیدا می‌شود.

اگر معادله‌های دو خط راست، یا یک خط راست و یک دایره ویا دو دایره را با هم حل کنیم، به یک معادلهٔ درجهٔ اول یا درجهٔ دوم می‌رسیم. این مطلب، برای دو خط راست یا یک خط راست و یک دایره، روشن است؛ برای حالت دو دایرهٔ

$$(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2 \quad , \quad (x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2$$

اگر یکی از معادله‌ها را از دیگری کم کنیم، x^2و y^2حذف می‌شود و یک معادلهٔ درجهٔ اول به‌دست می‌آید که باید آن را با معادلهٔ یکی از دایره‌ها، حل کرد و درنتیجه به یک معادلهٔ درجهٔ دوم می‌رسیم. به این ترتیب، مسأله‌ای که با کمک پرگار و خط‌کش حل می‌شود، در هر مرحله، منجر به معادله‌های درجهٔ اول یا دوم خواهد شد و بنابراین، تمام مسأله، به یک معادلهٔ جبری یک‌مجهولی منجر می‌شود که حل آن، به یک‌رشته رادیکال‌های با فرجهٔ ۲، می‌رسد. برعکس، اگر حل یک مسألهٔ هندسی، منجر به چنین معادلهٔ جبری بشود، می‌توان آن را به‌کمک پرگار و خط‌کش حل کرد، زیرا، همان‌طور که می‌دانیم، ریشهٔ دوم را می‌توان به‌کمک پرگار و خط‌کش ساخت.

وقتی یک مسألهٔ هندسی داده شده باشد، باید معادلهٔ جبری آن را که ضمن حل جبری به‌دست می‌آید تشکیل داد. اگر تشکیل چنین معادلهٔ جبری ممکن نباشد، مسأله هم به‌کمک پرگار و خط‌کش حل نمی‌شود. ولی اگر چنین معادله‌ای پیدا شود، باید عامل تحویل‌ناپذیری از آن را جدا کرد که به حل مسأله بستگی دارد، و تحقیق کرد آیا این معادلهٔ تحویل‌ناپذیر برحسب ریشه‌های دوم حل می‌شود یا نه. آن‌طور که نظریهٔ *گالوا* ثابت می‌کند، برای این منظور لازم و کافی است که m، تعداد تبدیل‌هایی که از آن‌ها گروه *گالوا* تشکیل می‌شود، برابر توانی از ۲ باشد.

با توجه به این نشانه، اثبات قضیهٔ **گوس** به‌دست می‌آید که بنابرآن، یک چندضلعی منتظم، وقتی که تعداد ضلع‌های آن، p، عددی اول باشد، وقتی و تنها وقتی، به‌کمک پرگار و خط‌کش ساخته می‌شود که pبه‌صورت $2^{2^n}+1$ باشد، یعنی وقتی که p برابر ۳، ۵، ۱۷، ۲۵۷ وغیره باشد. ولی وقتی که pبرابر ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱ وغیره باشد، ساختن چندضلعی منتظم به‌کمک پرگار و خط‌کش، ممکن نیست. **گوس**، از این دو حکم، تنها حکم

اول را ثابت کرده بود.

از همین راه ثابت می‌شود که یک زاویهٔ دلخواه را نمی‌توان به‌کمک پرگار و خط‌کش، به سه بخش برابر تقسیم کرد. به‌کمک پرگار و خط‌کش نمی‌توان مسألهٔ دوبرابر کردن مکعب (تضعیف مکعب) را حل کرد، یعنی با در دست داشتن ضلع یک مکعب، ضلع مکعب دیگری را که حجمی دوبرابر حجم مکعب اول دارد، به‌دست آورد وغیره.

عدم امکان تربیع دایره، یعنی عدم امکان ساختن ضلع مربعی که هم‌ارز با یک دایرهٔ داده‌شده باشد (به‌کمک پرگار و خط‌کش)، با روش دیگری ثابت می‌شود. می‌توان ثابت کرد که ضلع چنین مربعی، به‌وسیلهٔ هیچ معادلهٔ جبری، به شعاع دایره بستگی ندارد. به‌اصطلاح، ضلع مربع نسبت به شعاع دایره، غیرجبری (ترانساندانت) است، و بنابراین، نمی‌تواند نسبت به شعاع با یک‌رشته رادیکال‌های ریشهٔ دوم، بیان شود. اثبات این موضوع، دشوار است و به نظریهٔ *گالوا* بستگی ندارد.

دو مسألهٔ اساسی حل‌نشده، در نظریهٔ *گالوا*. در نظریهٔ *گالوا*، دو پرسش اساسی باقی مانده است که باوجود کوشش بسیاری از بزرگترین ریاضی‌دانان، تاکنون در حالت کلی، حل نشده است.

نخستین پرسش، دربارهٔ حلال‌های ***هیلبرت - چه‌بوتارف*** می‌باشد (با حلال‌های ***لاگرانژ*** اشتباه نکنید)، و عبارت است از پرسش کلی مستقیم، دربارهٔ حل معادله‌ها برحسب رادیکال‌ها. موضوع این است که، چه بگوییم معادله برحسب رادیکال‌ها قابل حل است و چه بگوییم حل آن منجر به حل یک‌رشته معادله‌های دوجمله‌ای می‌شود، تفاوتی ندارد، زیرا رادیکال $\sqrt[n]{A}$، چیزی جز ریشهٔ معادلهٔ دوجمله‌ای $x^n = A$ نیست. ولی، اگر ممکن است که نتوانیم معادله را به رشته‌ای از این‌گونه معادله‌های سادهٔ دوجمله‌ای تبدیل کنیم، همیشه می‌توانیم آن را منجر به معادله‌های ساده‌تر دیگری کنیم. در پایان سدهٔ هیجدهم هم، ثابت شد که یک معادلهٔ کلی درجهٔ پنجم را می‌توان به یک‌رشته معادله‌های دوجمله‌ای و درضمن یک‌معادلهٔ به‌صورت $x^5 + x + A = 0$، منجر کرد، که گرچه معادلهٔ اخیر، دوجمله‌ای نیست، ولی یک پارامتر A بیشتر ندارد، یعنی مثل دوجمله‌ای‌ها، یک‌پارامتری است.

پس از آن، ثابت شد که معادلهٔ درجهٔ ششم را نمی‌توان به یک‌رشته معادله‌های یک‌پارامتری منجر کرد. برای هر درجه‌ای از معادله، باید به‌طور جداگانه به این پرسش پاسخ

داد که به چه معادله‌های ساده‌ای ــ یعنی معادله‌هایی با کمترین تعداد پارامتر ــ می‌تواند منجر شود.

اگر معادلهٔ داده‌شده، به رشته‌ای از معادله‌های یک‌پارامتری مشخص تبدیل شود، آن‌وقت می‌توان برای هرکدام از این معادله‌های یک‌پارامتری جدولی درست کرد که ریشهٔ آن را برحسب مقدارهای مختلف پارامتر به ما بدهد. در این صورت، حل یک معادله، منجر به استفاده از تعدادی از این‌گونه جدول‌ها می‌شود.

پرسش دوم، که جدی‌تر از اولی است، مربوط به عکس نظریهٔ *گالوا* است. *گالوا*، ثابت کرد که ویژگی‌های حل یک معادله، بستگی به گروه آن دارد. ولی برعکس، آیا هر گروه تبدیل، می‌تواند گروه گالوا از یک معادله باشد، و چگونه می‌توان همهٔ معادله‌هایی را پیدا کرد که گروه تبدیل آن‌ها معلوم است.

دربارهٔ پرسش نخست، باوجودی که ریاضی‌دانان بزرگی چون *کلین* و *هیلبرت* به‌طور جدی روی آن کار کرده‌اند، تنها بعضی نتیجه‌گیری‌های خاص به‌دست آمده است؛ نخستین قضیهٔ کلی در این باره، به‌وسیلهٔ جبردان نامی شوروی، *ای. گ. چه‌بوتارف* ثابت شد.

به پرسش دوم، یعنی گروه‌های به‌اصطلاح قابل حل، گروه‌هایی که با نشانهٔ *گالوا* سازگارند، به‌مفهوم مثبت آن، در سال‌های اخیر به‌وسیلهٔ *ای. ر. شافارویچ*، ریاضی‌دان شوروی، پاسخ داده شده است[1].

۳. قضیهٔ اصلی جبر

در بند قبل، به کوشش‌هایی که در جریان سه سده برای حل رادیکالی معادلهٔ درجهٔ n انجام گرفته است، اشاره کردیم. موضوع، بیش از آن‌چه گمان می‌رفت، دشوار و عمیق از آب درآمد و منجر به تشکیل مفهوم‌های تازه‌ای شد که نه‌تنها برای جبر، بلکه برای تمامی ریاضیات، مهم بود. آن‌چه به حل عملی معادله‌ها بستگی دارد، نتیجهٔ تمام این کارهای عظیم بود: روشن شد حل رادیکالی همهٔ معادله‌ها ممکن نیست، در حالت‌هایی هم که این حل

۱. در سال‌های دهه نود مساله‌ی عکس گالوا (The Inverse Galois Problen) به یکی از مساله‌های کلیدی جبر تبدیل شده است. برای حل حالت‌های خاص این مسأله، ریاضیدان‌ها از روش‌های توپولوژی جبری، هندسه‌ی جبری، و نظریه‌ی نمایش‌ها استفاده کرده‌اند (ویراستار).

ممکن است، به‌جز حالت معادلهٔ درجهٔ دوم، خیلی کم به‌درد عمل می‌خورد.

به این مناسبت، ریاضی‌دانانی که روی نظریهٔ معادله‌های جبری کار می‌کردند، مسیر بررسی‌های خود را در سه جهت دیگر، که به‌کلی با مسیر پیشین فرق داشت، انداختند، یعنی: ۱) مسألهٔ وجود ریشه؛ ۲) این مسأله که بدون حل معادله، و تنها به‌کمک ضریب‌های آن، بتوان آگاهی‌هایی دربارهٔ ریشه‌ها به‌دست آورد، از جمله این‌که آیا معادلهٔ داده‌شده، ریشه‌های حقیقی دارد، و اگر دارد، چندتا؛ ۳) مسألهٔ محاسبهٔ تقریبی ریشه‌های معادله.

پیش از هر چیز، باید ثابت کرد که به‌طور کلی، هر معادلهٔ جبری درجهٔ n با ضریب‌های حقیقی یا مختلط، دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی یا مختلط دارد[1].

این قضیه، یکی از مهم‌ترین قضیه‌های تمامی ریاضیات است، که تا مدت‌ها اثبات دقیق آن پیدا نمی‌شد. این قضیه را به‌مناسبت اساسی بودن آن و دشواری اثبات آن، «قضیهٔ اصلی جبر» می‌نامند، گرچه در واقع امر، روش اثبات آن، همان‌قدر که به جبر بستگی دارد به آنالیز بی‌نهایت کوچک‌ها هم مربوط است. نخستین اثبات این قضیه را، **دالامبر** داد. آن‌طور که بعدها روشن شد، اثبات **دالامبر**، در یکی از بندهای خود، غیرکافی بود. **دالامبر**، این پیش‌قضیهٔ کلی آنالیز را واضح گرفته بود که تابع پیوسته، که در مجموعهٔ بسته‌ای از نقطه‌ها داده شده باشد، در جایی به می‌نیمم خود می‌رسد. این، درست است، ولی نیاز به اثبات دارد. اثبات دقیق این موضوع، تنها در نیمهٔ دوم سدهٔ هیجدهم، یعنی صد سال بعد از بررسی‌های **دالامبر**، به‌دست آمد.

معمول است که، نخستین اثبات دقیق قضیهٔ اصلی جبر را، از **گوس** می‌دانند، ولی کمبودهایی که در اثبات **گوس** وجود دارد، کمتر از نارسایی اثبات **دالامبر** نیست. امروز روش‌های زیادی برای اثبات دقیق این قضیه، برای ما معلوم است.

در این بند، قضیهٔ اصلی جبر را براساس پیش‌قضیهٔ **لاگرانژ** ثابت می‌کنیم؛ درضمن، اثبات دقیق این پیش‌قضیه را هم می‌آوریم.

نظریهٔ عددهای مختلط. پیش از بررسی اثبات قضیهٔ اصلی جبر، باید نظریهٔ عددهای مختلط را به‌یاد بیاوریم. دشواری‌هایی که ضمن حل معادلهٔ درجهٔ دوم پیش آمده بود، برای نخستین

---

۱. مطلب بر سر این است که معادله‌های غیرجبری، مثل $a^x = 0$، وجود دارد که هیچ ریشهٔ حقیقی یا مختلطی ندارند.

بار، منجر به تشکیل نظریهٔ عددهای مختلط شد. اگر $q-\frac{p^2}{4}$، که در دستور حل معادلهٔ درجهٔ دوم، زیر ریشهٔ دوم قرار دارد، منفی شد، چه باید کرد؟ هیچ عدد حقیقی، نه مثبت و نه منفی، وجود ندارد که بتواند ریشهٔ دوم یک عدد منفی باشد، زیرا مجذور هر عدد حقیقی، عددی است مثبت یا صفر.

بعد از تردید درازی که بیش از صد سال ادامه داشت، ریاضی‌دانان به این نتیجه رسیدند که باید نوع تازه‌ای از عدد را، که عدد مختلط نامیده شد، بپذیرند.

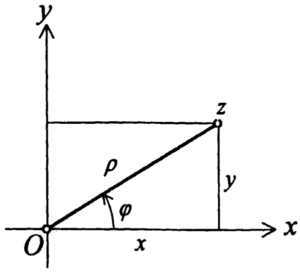
چهرهٔ تازه‌ای به‌صورت $i=\sqrt{-1}$، به عددها وارد شد، به‌نحوی که $i^2=-1$ باشد و عددهای به‌صورت $a+bi$ مورد بررسی قرار گرفت که در آن a و b عددهای حقیقی معمولی‌اند. عدد $a+bi$ را مختلط گویند. دو عدد $a+bi$ و $c+di$ را وقتی برابر به‌حساب می‌آوریم که $a=c$ و $b=d$ باشد. مجموع این دو عدد به‌صورت $(a+c)+(b+d)i$ و تفاضل آن‌ها به‌صورت $(a-c)+(b-d)i$ نشان داده می‌شود. ضرب این دو عدد را، مثل ضرب دوجمله‌ای‌ها، به‌دست می‌آوریم (با توجه به این‌که $i^2=-1$)، یعنی

$$(a+bi)(c+di) = ac + bci + adi + bdi^2 = (ac-bd) + (bc+ad)i$$

اگر a و b را مختصات قائم نقطه‌ای بگیریم، و این نقطه را با عدد $a+bi$ متناظر کنیم، در این صورت مجموع و تفاضل عددهای مختلط، متناظر می‌شود با مجموع و تفاضل بردارهایی که ابتدای آن‌ها، مبدأ مختصات و انتهای آن‌ها، نقطه‌هایی به‌مختصات (c,d) و (a,b) باشد، زیرا برای جمع دو بردار، باید مختصات آن‌ها را با هم جمع کرد. برای این‌که به معنای هندسی ضربی که در این‌جا آوردیم، در صفحهٔ به‌اصطلاح عددهای مختلط، پی ببریم، بهتر است طول ρ، برداری که از مبدأ مختصات به نقطهٔ (x,y) می‌رود (این طول را ***کالبد*** – یا ***مدول*** – عدد مختلط $z=x+iy$ گویند) و زاویهٔ φ که این بردار با محور Ox می‌سازد (این زاویه را ***آوند*** – یا آرگومان – عدد مختلط $z=x+iy$ گویند)، در نظر بگیریم؛ به‌زبان دیگر به‌جای مختصات دکارتی x و y نقطه‌ای که متناظر با عدد مختلط z است، مختصات قطبی ρ و φ آن را در نظر بگیریم (شکل ۱). نقطهٔ $x=\rho\cos\varphi$، $y=\rho\sin\varphi$ و بنابراین، خود عدد مختلط به این ترتیب نوشته می‌شود:

$$x + iy = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

اگر داشته باشیم:



شکل ۱

$$a + bi = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) \quad , \quad c + di = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

در این صورت

$$ac - bd = \rho_1\rho_2\,(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$bc + ad = \rho_1\rho_2\,(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

از این‌جا دیده می‌شود که برای ضرب دو عدد مختلط، کالبدهای ρ_1و ρ_2در هم ضرب و آوندهای φ_1و φ_2با هم جمع می‌شود. در تقسیم ــ چون درواقع، عمل تقسیم، عکس عمل ضرب است - کالبدها بر هم تقسیم و آوندها از هم کم می‌شوند:

$$\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \rho_1\rho_2\,[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\,[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

بنابراین، برای این‌که عدد مختلطی را به توان درست nبرسانیم، کالبد آن به توان nمی‌رسد و آوند آن در nضرب می‌شود:

$$[\rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

و به همین ترتیب برای ریشه گرفتن:

$$\sqrt[n]{\rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

ولی برای ریشه گرفتن، مطلب به همین‌جا تمام نمی‌شود. اگر nعددی درست و مثبت باشد، در این صورت

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

برابر است با عدد

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

زیرا، اگر این عدد را به توان n برسانیم، عدد زیر رادیکال به‌دست می‌آید. ولی این، تنها یکی از مقدارهای ریشه است. موضوع این است که عدد مختلط

$$\sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

هم، که در آن k می‌تواند برابر یکی از عددهای ۱، ۲، ...، $n-1$ باشد، ریشهٔ nام این عدد است:

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

درواقع، اگر این عدد را به توان n برسانیم، به‌دست می‌آید:

$$(\sqrt[n]{\rho})^n\left[\cos n\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin n\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] =$$

$$= \rho\,[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)]$$

درضمن، روشن است که می‌توانیم $2k\pi$ را از جلو کسینوس و سینوس برداریم، زیرا، در این صورت مقدار کسینوس و سینوس تغییر نمی‌کند. به این ترتیب، توان nام این عدد، برابر

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

می‌شود، یعنی خود عدد برابر است با

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

به‌سادگی دیده می‌شود که هیچ عدد مختلط دیگری، به‌جز این n عدد (که به‌ازای ۰، ۱، ۲، ...، $n-1$ برای k به‌دست می‌آید)، نمی‌تواند برابر ریشهٔ nام عدد زیر باشد:

$$\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

معنای هندسی ریشهٔ nام، چنین است: نقطه‌هایی از صفحهٔ مختلط، متناظر با ریشهٔ nام عدد $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ هستند که بر رأس‌های یک nضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به‌مرکز مبدأ

مختصات و شعاع برابر $\sqrt[n]{\rho}$ قرار گرفته باشد، این nضلعی باید طوری قرار گرفته باشد که یکی از رأس‌های آن، آوندی برابر $\frac{\varphi}{n}$ داشته باشد (شکل ۲).

به این یادداشت توجه کنید. اگر

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n$$

یک چندجمله‌ای از z، با ضریب‌های حقیقی یا مختلط c_1، c_2، ...، c_n باشد و ما z را به‌طور پیوسته تغییر دهیم، یعنی نقطهٔ $z=x+iy$ روی صفحهٔ مختلط به‌طور پیوسته حرکت کند، در این صورت، نقطهٔ مختلط $Z=X+iY=f(z)$ هم، روی صفحهٔ مختلط، حرکت پیوسته‌ای خواهد داشت. این حکم از این‌جا روشن می‌شود که اگر در $f(z)$، مقدارهای $z=x+iy$، $c_1=a_1+b_1 i$، $c_2=a_2+b_2 i$، ...، $c_n=a_n+b_n i$ را قرار دهیم و همهٔ محاسبه‌ها را دنبال کنیم، به این نتیجه می‌رسیم که

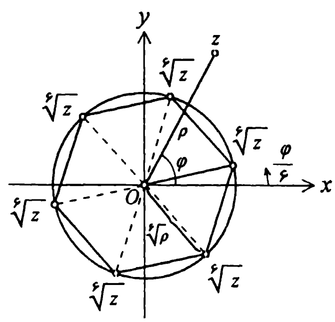
$$f(z) = X + iY$$

که در آن

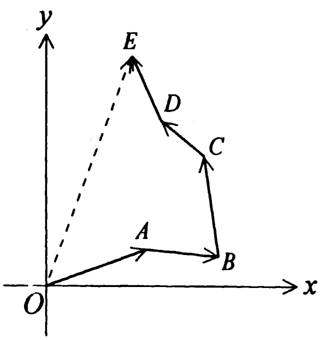
$$X = P(x,y) \quad , \quad Y = Q(x,y)$$

چندجمله‌ای‌هایی از درجهٔ n نسبت به x و y و با ضریب‌های حقیقی هستند که برحسب همهٔ a_iها و b_iها بیان شده‌اند. وقتی که x و y، تغییر پیوسته‌ای داشته باشند، این چندجمله‌ای‌ها هم به‌طور پیوسته، تغییر خواهند کرد.

این را هم یادآوری کنیم که چون کالبد $|f(z)| = \rho$ برابر $\sqrt{X^2+Y^2}$ است، بنابراین به‌ازای حرکت پیوستهٔ نقطهٔ z در صفحهٔ مختلط، کالبد $|f(z)|$ هم به‌طور پیوسته تغییر



شکل ۲



شکل ۳

مـی‌کند. بـه‌زبان دیگـر، اگـر نـقطهٔ z بـه‌انـدازهٔ کـافی بـه نـقطهٔ α نـزدیک بـاشد، تـفاضل $|f(\alpha)| - |f(z)|$ از لحاظ قدرمطلق، کوچکتر از هر عدد مثبت دلخواهی که از پیش در نظر گرفته شود، خواهد بود.

حکم دیگری را هم به‌یاد بیاوریم که کالبد مجموع چند عدد مختلط، همیشه کوچکتر یا برابر است با مجموع کالبدهای این عددها. این حکم هم‌ارز با این حکم است که بگوییم، پاره‌خط راست OE (شکل ۳)، از خط شکستهٔ $OABCDE$ کـوچکتر ویـا بـرابـر آن است؛ برابری وقتی، و تنها وقتی برقرار است که همهٔ پاره‌خط‌های خط شکسته بر یک خط راست واقع و در یک جهت باشند.

سرانجام، به این هم توجه کنیم که دو حکم «عدد مختلط برابر است با صفر» و «کالبد عدد مختلط برابر است با صفر» هم‌ارز است، زیرا کالبد ρ عدد مختلط، همان فاصلهٔ نقطهٔ متناظر آن از نقطهٔ صفر است.

اکنون، از نظریهٔ عددهای مختلط، برای اثبات قضیهٔ اصلی جبر استفاده می‌کنیم، ولی باید توجه داشت کـه اهـمیت نـظریهٔ عـددهای مـختلط، تـنها مـحدود بـه جـبر نـیست. در بسیاری از بخش‌های دیگر ریاضیات هم، مـثل جـبر، بـدون وجـود ایـن نـظریه، نـمی‌توان پیشرفت کرد. در بسیاری حالت‌ها، و از آن جمله در نظریهٔ جریان‌های متغیر، پرسش‌هایی وجود دارد که به‌یاری عددهای مختلط، خیلی سـاده بـه آن‌هـا پـاسخ داده مـی‌شود. امـا، مهم‌تر از همه این است که عددهای مختلط، و درواقع نـظریهٔ تـابع‌های بـا مـتغیر مـختلط، در نظریهٔ بعضی از تابع‌های خـاص بـا دو مـتغیر حـقیقی، بـه‌نام تـابع‌های هـمساز، بـه‌کـار می‌رود. به‌کمک این تـابع‌ها، مسأله‌هـای مـهمی از نـظریهٔ پـرواز هـواپـیما، نـظریهٔ حـرکت گرما در صفحه، نـظریهٔ مـیدان مسـطح الکـتریکی و بـعضی مسأله‌هـای مـربوط بـه نـظریهٔ ارتجاع، حل می‌شود. قضیهٔ مشهور مربوط به نـیروی نگـه‌دارنـدهٔ بـال هـواپـیما، بـه‌وسیلهٔ **ن. ا. ژوکوسکی**، بانی آیرودینامیک امـروزی، بـه‌یاری بـررسی تـابع‌های بـا مـتغیر مـختلط، به‌دست آمد[۱].

حالا به اثبات قضیهٔ اصلی جبر می‌پردازیم.

قضیه. هر چندجمله‌ای

---

۱. بخش نوزدهم را ببینید.

$$f(z) = a_\circ z^n + a_\text{۱} z^{n-\text{۱}} + \cdots + a_{n-\text{۱}} z + a_n$$

که ضریب‌های آن

$$a_\circ\,,\, a_\text{۱}\,,\, \dots\,,\, a_{n-\text{۱}}\,,\, a_n$$

عددهای دل‌خواه حقیقی یا موهومی هستند، دارای دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی یا موهومی است.

فرض را بر این می‌گیریم که این چندجمله‌ای از درجهٔ n، یعنی $a_\circ \neq \circ$ باشد.

سطح کالبدهای چندجمله‌ای. تمام مسأله را با روش هندسی بررسی می‌کنیم. از هر نقطهٔ z در صفحهٔ مختلط، عمود t را برابر کالبد $|f(z)|$ در این نقطه، رسم می‌کنیم. انتهای این عمودها، سطحی مانند M را به‌وجود می‌آورند که می‌توان آن را سطح کالبدهای چندجمله‌ای $f(z)$ نامید. می‌بینیم که این سطح: ۱) هیچ جا تا زیر صفحهٔ مختلط پایین نمی‌آید، زیرا کالبد هر عدد مختلط (که در این‌جا، عدد $f(z)$ است)، غیرمنفی است؛ ۲) برای هر نقطهٔ z از صفحهٔ مختلط، نقطه‌ای، و تنها یک نقطه، در این سطح وجود دارد که یا بالای این نقطه، در جهت قائم، ویا منطبق بر آن قرار گرفته است، یعنی سطح M، به‌صورت یک ورق، بالای تمام صفحهٔ مختلط گسترش می‌یابد، و ممکن است در بعضی از نقطه‌ها به خود این صفحه برسد؛ ۳) این سطح پیوسته است، یعنی اگر جای نقطهٔ z، روی صفحهٔ مختلط، به‌طور پیوسته تغییر کند، عدد $t = |f(z)|$، یعنی انتهای عمودهای t در این سطح، هم به‌طور پیوسته تغییر می‌کند (این مطلب را پیش از این، ثابت کردیم).

قضیهٔ اصلی جبر، منجر به این می‌شود که ثابت کنیم، سطح M، دست‌کم در یک نقطه، به صفحهٔ مختلط می‌رسد، نه این‌که در همه‌جا با ارتفاعی نسبت به این صفحه، ادامه پیدا کند.

صعودی بودن کالبد چندجمله‌ای، ضمن دور شدن از مبدأ. ثابت می‌کنیم، عدد مثبت G هرقدر بزرگ باشد، می‌توان شعاعی مثل R پیدا کرد که برای هر نقطهٔ z از صفحهٔ مختلط، که بیرون دایرهٔ به‌شعاع R و مرکز مبدأ مختصات باشد، عمودهای t مربوط به نقطه‌های سطح M، از G بزرگتر شود.

چندجمله‌ای $f(z)$ را به این صورت می‌نویسیم:

$$a_\circ z^n \left[\text{۱} + \left(\frac{a_\text{۱}}{a_\circ z} + \frac{a_\text{۲}}{a_\circ z^\text{۲}} + \cdots + \frac{a_n}{a_\circ z^n} \right) \right]$$

کالبد عبارت $\left|\frac{a_1}{a_0 z}+\frac{a_2}{a_0 z^2}+\cdots+\frac{a_n}{a_0 z^n}\right|$، بزرگتر از مجموع کالبدهای جمله‌های $\left|\frac{a_1}{a_0 z}\right|+\left|\frac{a_2}{a_0 z^2}\right|+\cdots+\left|\frac{a_n}{a_0 z^n}\right|$ نیست. درضمن با بزرگ‌کردن کالبد z، هرکدام از جمله‌های این مجموع کوچک می‌شود، و بنابراین، خود مجموع هم کوچک می‌شود. به‌این ترتیب، برای هر عدد z، که کالبد آن بزرگتر از عددی مثل R' باشد، کالبد این پرانتز، کوچکتر از عددی مثل یک‌دوم می‌شود.

ولی در این صورت، برای همهٔ چنین zهایی، کالبد کروشه

$$\Omega=\left[1+\left(\frac{a_1}{a_0 z}+\frac{a_2}{a_0 z^2}+\cdots+\frac{a_n}{a_0 z^n}\right)\right]$$

بزرگتر از $\frac{1}{2}$ است. کالبد عامل اول $a_0 z^n$ برابر است با $|a_0|.|z|^n$، و بنابراین، با اضافه شدن کالبد z، بزرگ می‌شود و درضمن به هر اندازه که بخواهیم بزرگ می‌شود. به این ترتیب، عدد مثبت G هرقدر بزرگ باشد، عدد مثبتی مثل R وجود دارد که برای همهٔ zهایی که کالبدی بزرگتر از R دارند، $|f(z)|=|a_0|.|z|^n.|\Omega|$ بزرگتر از G است.

وجود می‌نیمم‌های سطح M. گوییم سطح M، در نقطهٔ α از صفحهٔ مختلط، می‌نیمم دارد، به‌شرطی که مقدار عمود t از سطح M در این نقطهٔ α، کوچکتر یا برابر مقدار آن در همهٔ نقطه‌های حومهٔ معینی از نقطهٔ α باشد، یعنی در همهٔ نقطه‌های واقع در دایره‌ای به‌مرکز α (و با شعاعی به‌دلخواه کوچک).

فرض کنید، عمود t مربوط به نقطه‌ای از سطح M که متناظر با مبدأ مختصات، یعنی $z=0$، از صفحهٔ مختلط است، برابر g باشد، یعنی $g=|f(0)|$. $G>g$ انتخاب می‌کنیم. وقتی که نقطهٔ z روی صفحهٔ مختلط، به‌طور پیوسته حرکت کند، نقطهٔ t از سطح M، غیرمنفی باقی می‌ماند و به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. سطح M، در بیرون دایرهٔ به‌مرکز مبدأ مختصات و شعاع R، دارای $t>G$ و در درون آن دارای $t=g<G$ است. *دالامبر*، این نتیجه را روشن به‌حساب می‌آورد که جایی در درون دایرهٔ R، نقطه‌ای پیدا می‌شود که در آن طول عمود t، کوچکترین است ویا به‌زبان دقیق‌تر، در آن، عمود t از سطح M، کوچکتر یا برابر عمودهای همهٔ نقطه‌های دیگر دایرهٔ R است، یعنی سطح M، دارای دست‌کم یک می‌نیمم است.

اثبات دقیق وجود می‌نیمم، براساس *اصل پیوستگی* زیر دربارهٔ مجموعهٔ عددهای حقیقی، انجام می‌گیرد.

اگر دو دنباله، از عددهای حقیقی داده شده باشد:

$$a_۱ \le a_۲ \le \cdots \le a_n \le \cdots \quad و \quad b_۱ \ge b_۲ \ge \cdots \ge b_n \ge \cdots$$

به‌نحوی که برای همهٔ مقدارهای n: $b_n > a_n$ و وقتی $n \to \infty$، تفاضل $b_n - a_n$ به‌سمت صفر میل کند، در این صورت یک، و تنها یک عدد c وجود دارد، طوری که برای همهٔ مقدارهای n داشته باشیم: $a_n \le c \le b_n$.

ویژگی پیوستگی، از نظر هندسی، به این معناست که اگر روی خط راست، دنبالهٔ پاره‌خط‌های $[a_n , b_n]$ (شکل ۴)، به‌نحوی داده شده باشد که هر پاره‌خط قبلی، شامل پاره‌خط بعدی باشد و طول پاره‌خط‌ها به هر اندازه که بخواهیم، کوچک شود؛ در این صورت، نقطه‌ای مانند c وجود دارد که متعلق به همهٔ پاره‌خط‌های دنباله است. به‌زبان دیگر، به‌طرف یک نقطه، و نه «یک جای تهی»، «متمرکز» می‌شوند.

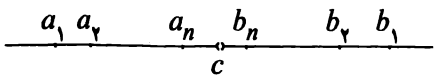
با توجه به این‌که با بزرگ شدن n، پاره‌خط $[a_n , b_n]$ به‌سمت صفر میل می‌کند، نقطهٔ c منحصربه‌فرد است. از این ویژگی پیوستگی برای مجموعهٔ عددهای حقیقی، یعنی برای مجموعهٔ نقطه‌های واقع بر محور عددها، می‌توان بلافاصله، ویژگی پیوستگی را برای عددهای مختلط، یعنی برای نقطه‌های واقع بر صفحه، نتیجه گرفت. ما، طرح هندسی این ویژگی را در این‌جا می‌آوریم.

اگر دنبالهٔ مستطیل‌های $(\Delta_۱ , \Delta_۲ , \ldots , \Delta_n , \ldots)$ در صفحه داده شده باشد، به‌نحوی که ضلع‌های آنها موازی محورهای مختصات و هر مستطیل قبلی شامل مستطیل بعدی باشد، و درضمن قطر این مستطیل‌ها به‌طور نامحدود کوچک شود، در این صورت یک، و تنها یک نقطه وجود دارد که متعلق به همه مستطیل‌های دنباله است. این ویژگی پیوستگی صفحه، نتیجهٔ مستقیم ویژگی پیوستگی خط راست است. برای اثبات، کافی است مستطیل‌ها را روی محور عددها تصویر کنیم.

حالا دیگر می‌توانیم قضیهٔ به‌اصطلاح ***بولتسانو ـ وایرشتراس*** را مطرح کنیم.

اگر در یک مستطیل، دنبالهٔ بی‌پایان نقطه‌های

$$z_۱ , z_۲ , \ldots , z_n , \ldots$$



شکل ۴

داده شده باشد، در این صورت در درون یا در مرز مستطیل، نقطه‌ای مثل $z_{\circ}$ پیدا می‌شود، به‌نحوی که در داخل هر حومهٔ به‌دل‌خواه کوچک آن (یعنی داخل هر دایرهٔ به‌دل‌خواه کوچک به‌مرکز $z_{\circ}$)، بینهایت نقطه از دنبالهٔ فوق وجود دارد.

برای اثبات، مستطیل داده‌شده را به $\Delta_۱$ نشان می‌دهیم. با رسم خط‌های راستی موازی محورهای مختصات، آن را به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنیم. دست‌کم در یکی از این بخش‌ها، باید بی‌نهایت نقطه، از دنبالهٔ داده‌شده، وجود داشته باشد. این بخش را به $\Delta_۲$ نشان می‌دهیم. مستطیل $\Delta_۲$ را دوباره به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنیم و از بین آن‌ها، $\Delta_۳$ را که شامل بی‌نهایت نقطه از دنبالهٔ داده‌شده است، برمی‌گزینیم وغیره.

به این ترتیب، دنباله‌ای از مستطیل‌های $\Delta_۱$، $\Delta_۲$، $\Delta_۳$، ... به‌دست می‌آید که قطرهای آن‌ها، به‌ترتیب کوچک و کوچکتر می‌شود. بنا بر ویژگی پیوستگی، نقطه‌ای مانند $z_{\circ}$ وجود دارد که متعلق به همهٔ این مستطیل‌هاست. و این همان نقطهٔ مورد نظر است. درواقع، هر حومهٔ کوچکی که برای نقطهٔ $z_{\circ}$ انتخاب کنیم، مستطیل‌های دنبالهٔ $\Delta_۱$، $\Delta_۲$، ...، Δ_n، از جایی به بعد داخل این حومه قرار می‌گیرد، به‌نحوی که قطر آن‌ها از شعاع حومه کوچکتر می‌شود، درضمن، می‌دانیم که در داخل هرکدام از این مستطیل‌ها، بی‌نهایت نقطه از دنبالهٔ $z_۱$، $z_۲$، ...، z_n، ... وجود دارد. قضیهٔ ***بولتسانو ـ وایرشتراس*** ثابت شد.

اکنون دیگر به‌سادگی قضیهٔ مربوط به می‌نیمم کالبد $|f(z)|$ چندجمله‌ای، ثابت می‌شود. مثل قبل، $g=|f(\circ)|$ و G عددی بزرگتر از g فرض می‌کنیم و R را طوری می‌گیریم که اگر $z>R$ باشد، $|f(z)|>G$ شود.

اگر $g=\circ$، یعنی $f(\circ)=\circ$، آن‌وقت کالبد $|f(z)|$ چندجمله‌ای، در نقطهٔ $\circ$ می‌نیمم می‌شود، زیرا در همهٔ نقطه‌ها از $\circ$ بزرگتر است.

اگر $g>\circ$ و برای همهٔ نقطه‌های z، $|f(z)|\geq g$، باز هم $|f(z)|$ در نقطهٔ $\circ$ می‌نیمم است. فرض کنیم $g>\circ$ و نقطه‌هایی از z وجود داشته باشد که در آن‌ها $|f(z)|<g$، در این صورت در رشته‌عددهای

$$\circ\,,\frac{g}{n}\,,\frac{۲g}{n}\,,\ \dots\ ,\frac{ng}{n}=g \qquad (*)$$

بزرگترین عدد $c_n=\frac{i}{n}g$ را پیدا می‌کنیم، به‌نحوی که برای همهٔ مقدارهای z داشته باشیم: $|f(z)|\geq c_n$. برای عدد بعدی $c'_n=\frac{i+۱}{n}g$ از رشتهٔ (*)، دست‌کم یک نقطهٔ z_n پیدا می‌شود که برای آن داشته باشیم:

$$|f(z_n)| < c'_n$$

n را به‌طور نامحدود بزرگ می‌کنیم. برای همهٔ مقدارهای n داریم $|z_n| \leq R$، زیرا اگر $|z_n| > R$، آن‌وقت $|f(z_n)|$ بزرگتر از G و بنابراین، بزرگتر از g می‌شود.

به این ترتیب، همهٔ نقطه‌های z_n درون مستطیل به‌ضلع $2R$ و مرکز مبدأ مختصات، قرار می‌گیرد. ممکن است، بعضی از این نقطه‌ها بر هم منطبق باشند.

بنا بر قضیهٔ ***بولتسانو ـ وایرشتراس*** نقطه‌ای مثل z_0 پیدا می‌شود که در هر حومهٔ آن، بی‌نهایت نقطه از دنبالهٔ z_1، z_2، ...، z_n، ... وجود داشته باشد.

ثابت می‌کنیم، همین نقطهٔ z_0، می‌نیمم $|f(z)|$ را برقرار می‌کند.

z را نقطهٔ دل‌خواهی می‌گیریم. در این صورت

$$|f(z)| \geq c_n = c'_n - \frac{g}{n} > |f(z_n)| - \frac{g}{n} = |f(z_0)| + (|f(z_n)| - |f(z_0)|) - \frac{g}{n}$$

این نابرابری به‌ازای هر مقداری از n درست است. اگر برای n، مقدارهایی برگزینیم که z_n به‌طور نامحدود به z_0 نزدیک شود، بنا بر پیوستگی $|f(z)|$، $|f(z_n)| - |f(z_0)|$ و هم $\frac{g}{n}$، از لحاظ قدرمطلق، به‌دل‌خواه، کوچک می‌شود.

بنابراین $|f(z)| \geq |f(z_0)|$، یعنی $|f(z)|$، در نقطهٔ z_0 به می‌نیمم خود می‌رسد.

پیش‌قضیهٔ دالامبر. نظر به این‌که همهٔ عمودهای t نقطه‌های سطح M، به‌عنوان کالبدها، غیرمنفی‌اند، روشن است که هر ریشهٔ چندجمله‌ای $f(z)$، یعنی نقطهٔ z از صفحهٔ مختلط، که در آن خود چندجمله‌ای $f(z)$، و بنابراین کالبد آن $|f(z)|$، برابر صفر است، متناظر با می‌نیممی از سطح M، یعنی سطح کالبدها، می‌باشد. ولی، همان‌طور که **دالامبر** ثابت کرد، عکس آن هم درست است: هر می‌نیمم سطح M، تا خود صفحهٔ مختلط پایین می‌آید و بنابراین، ریشهٔ چندجمله‌ای $f(z)$ در آن وجود دارد. به‌زبان دیگر، می‌نیممی از سطح M وجود ندارد که در آن عمود t برابر صفر نباشد؛ و این مطلب را از پیش‌قضیهٔ **دالامبر** می‌توان نتیجه گرفت:

اگر α، عدد مختلط دل‌خواهی با شرط $f(\alpha) \neq 0$ باشد، همیشه می‌توان عدد مختلط h را، که کالبد آن به‌دل‌خواه کوچک باشد پیدا کرد، به‌نحوی که داشته باشیم: $|f(\alpha+h)| < |f(\alpha)|$.

اثبات. این چندجمله‌ای را در نظر می‌گیریم:

$$f(\alpha+h) = a_0(\alpha+h)^n + a_1(\alpha+h)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(\alpha+h) + a_n$$

این چندجمله‌ای را که شامل دو حرف α و h است، برحسب توان‌های صعودی h، منظم می‌کنیم. در این چندجمله‌ای، جمله‌هایی وجود دارد که شامل h نیستند، یعنی

$$a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\alpha + a_n = f(\alpha) \neq 0$$

همچنین، جملهٔ شامل h^n هم خواهیم داشت، یعنی $a_0 h^n$، زیرا بنا بر فرض $a_0 \neq 0$ است، دوباره بقیهٔ جمله‌ها با توان‌های بینابینی h، ممکن است بعضی و گاهی همهٔ آن‌ها، وجود نداشته باشند. فرض می‌کنیم، کوچکترین توانی از h که در این عبارت به آن برخورد می‌کنیم، برابر m باشد، که در آن $1 \leq m \leq n$، یعنی عبارت ما به این صورت درآید:

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + Ah^m + Bh^{m+1} + Ch^{m+2} + \cdots + a_0 h^n$$

آن را به این صورت می‌نویسیم:

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + Ah^m + Ah^m \left(\frac{B}{A}h + \frac{C}{A}h^2 + \cdots + \frac{a_0}{A}h^{n-m}\right)$$

که در آن $A \neq 0$ و B، C وغیره می‌توانند برابر صفر باشند یا نباشند.

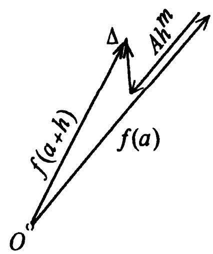
بعد از این آمادگی، پیش‌قضیهٔ دالامبر را می‌توان به این ترتیب ثابت کرد. h را عدد مختلطی می‌گیریم که از نظر کالبد، به‌اندازهٔ کافی کوچک باشد، به‌نحوی که طول بردار Ah^m کوچکتر از طول بردار $f(\alpha)$ شود، و آوند آن چنان باشد که جهت بردار Ah^m، عکس جهت بردار $f(\alpha)$ درآید. در این صورت، بردار $f(\alpha)+Ah^m$ کوتاهتر از بردار $f(\alpha)$ خواهد شد. ولی، برای همهٔ hها، که کالبد آن‌ها به‌اندازهٔ کافی کوچک است، کالبد پرانتز $\left(\frac{B}{A}h + \frac{C}{A}h^2 + \cdots + \frac{a_0}{A}h^{n-m}\right)$، به هر اندازه که بخواهیم، و از جمله از واحد، کوچکتر می‌شود و بنابراین، طول بردار

$$\Delta = Ah^m\left(\frac{B}{A}h + \frac{C}{A}h^2 + \cdots + \frac{a_0}{A}h^{n-m}\right)$$

کوچکتر از طول بردار Ah^m می‌شود، و از آن‌جا، بردار

$$f(\alpha+h) = f(\alpha) + Ah^m + \Delta$$

هم، همان‌طور که از شکل ۵ دیده می‌شود، از بردار $f(\alpha)$ کوچکتر می‌شود، حتی اگر جهت بردار Δ، در خلاف جهت بردار Ah^m باشد.



شکل ۵

همراه با این اثبات، این نتیجه‌ها به‌دست می‌آید:

۱. از آن‌جا که ضمن ضرب، آوندهای عامل‌ها با هم جمع می‌شود، آوند h را باید طوری گرفت که داشته باشیم:

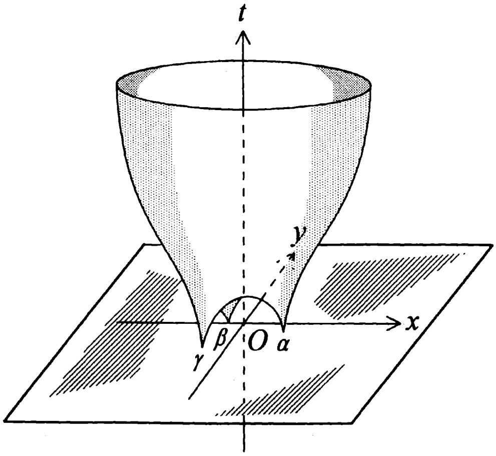
$$\arg A + m.\arg h = \arg f(\alpha) + ۱۸۰°$$

یعنی باید این‌طور برگزید:

$$\arg h = \frac{\arg f(\alpha) - \arg A + ۱۸۰°}{m}$$

۲. کالبد پرانتز $\left(\frac{B}{A}h + \frac{C}{A}h^۲ + \cdots + \frac{a_۰}{A}h^{n-m}\right)$ بزرگتر از مجموع کالبدهای جمله‌های آن $T = \left|\frac{B}{A}h\right| + \left|\frac{C}{A}h^۲\right| + \cdots + \left|\frac{a_۰}{A}h^{n-m}\right|$ نیست. درضمن، در ضرب کالبد h، هرکدام از جمله‌های این مجموع، و بنابراین، همهٔ این مجموع به هر اندازه که بخواهیم کوچک می‌شود. به این ترتیب، اگر h عدد مختلطی با آوند ذکرشده، و $h_۰$ کالبدی که کالبد h کوچکتر از آن باشد، و هر دو شرط $|Ah^m| < |f(\alpha)|$ و $T < ۱$ برقرار باشد، در این صورت، برای همهٔ hها با این آوند و کالبدی کوچکتر از $h_۰$، خواهیم داشت: $|f(\alpha+h)| < |f(\alpha)|$، که درواقع، همان اثبات پیش‌قضیهٔ **دالامبر** است.

از پیش‌قضیهٔ **دالامبر**، بلافاصله نتیجه می‌شود که هر می‌نیمم سطح M از کالبدهای چندجمله‌ای $f(z)$، یکی از ریشه‌های این چندجمله‌ای را می‌دهد. درواقع، اگر در نقطهٔ α، داشته باشیم: $f(\alpha) \neq ۰$، بنا بر پیش‌قضیهٔ **دالامبر**، برای نقطه‌های $\alpha+h$، که به‌اندازهٔ کافی به‌آن نزدیک‌اند، خواهیم داشت: $|f(\alpha+h)| < |f(\alpha)|$ ، یعنی دایره‌ای به‌مرکز نقطهٔ α وجود ندارد، که برای همهٔ نقطه‌های آن، کالبد $f(z)$، کوچکتر از کالبد $f(\alpha)$ نباشد، و بنابراین در نقطهٔ α، می‌نیمم کالبد $f(z)$ وجود ندارد. قضیهٔ اصلی جبر عالی، به‌طور کامل ثابت شد.



شکل ۶

صورت کلی کالبدها. سطح M، مربوط به کالبدهای چندجمله‌ای $f(z)$، روی صفحهٔ مختلط z، قرار گرفته است. این سطح، به‌صورتی است که در شکل ۶ نشان داده شده است. می‌توان ثابت کرد که این سطح، در نقطه‌هایی که مقدار t بزرگ باشد، خیلی کم با سطحی که از دوران سهمی درجهٔ nام $t = |a_\circ| x^n$ دور محور Ot به‌دست می‌آید، تفاوت دارد. ولی برای مقدارهای کوچک t، سطح M دارای می‌نیمم‌هایی است که تعداد آن‌ها برابر است با تعداد ریشه‌های مختلف معادلهٔ $f(z) = \circ$. سطح M، در همهٔ این می‌نیمم‌ها، بر خود صفحهٔ مختلط z، متکی است.

۴. جست‌وجوی وضع ریشه‌های چندجمله‌ای روی صفحهٔ مختلط

پرسش‌های زیادی، که از نظر علمی اهمیت دارد، وجود دارد که مربوط به این موضوع است: بدون حل معادله، آگاهی‌هایی دربارهٔ وضع ریشه‌های آن در صفحهٔ مختلط، به‌دست آوریم. نخستین آن‌ها، پرسش مربوط به تعیین تعداد ریشه‌های حقیقی معادله است. به این معنی که اگر معادله‌ای با ضریب‌های حقیقی داده شده باشد، بدون حل آن بتوانیم بنا بر قاعده‌ای که مربوط به رابطهٔ بین ضریب‌های آن است، بگوییم، آیا این معادله ریشهٔ حقیقی دارد یا نه، تعداد این ریشه‌های حقیقی چندتاست؛ چند ریشهٔ مثبت و چند ریشهٔ منفی دارد؛

یا در مثل، در فاصلهٔ داده‌شده (a,b)، چند ریشهٔ حقیقی دارد؟

مشتق‌های چندجمله‌ای. در این بند، مشتق چندجمله‌ای‌ها، نقش اساسی دارد. دربارهٔ مشتق یک تابع، در بخش دوم صحبت کرده‌ایم.

همان‌طور که می‌دانیم، مشتق چندجمله‌ای $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$، عبارت است از چندجمله‌ای:

$$na_0x^{n-1} + (n-1)a_1x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

در بخش دوم، مفهوم مشتق را تنها برای تابع‌های با متغیر حقیقی، بررسی کردیم. در جبر، باید چندجمله‌ای را با ضریب‌های مختلط، و متغیری که می‌تواند هر مقدار مختلط را قبول کند، به‌حساب آوریم. با وجود این، تعریف مشتق، مثل سابق، به‌عنوان حد نسبت نمو تابع به نمو متغیر مستقل، معتبر باقی می‌ماند. رابطهای مربوط به محاسبهٔ مشتق از چندجمله‌ای‌های با ضریب‌های مختلط، همچنین قاعده‌های اساسی دیفرانسیل‌گیری (مشتق مجموع، حاصل‌ضرب، توان وغیره) هم تغییر نمی‌کند[1].

ریشه‌های ساده و ریشه‌های تکراری چندجمله‌ای. در بند ۲ این بخش ثابت کردیم که اگر عدد a، ریشهٔ چندجمله‌ای $f(x)$ باشد، آن‌گاه $f(x)$ بدون باقی‌مانده بر $x-a$ بخش‌پذیر است. اگر در این حالت، $f(x)$ بر $(x-a)^2$ بخش‌پذیر نباشد، عدد a را ریشهٔ سادهٔ چندجمله‌ای $f(x)$ گویند. به‌طور کلی، اگر چندجمله‌ای $f(x)$ بر $(x-a)^k$ بخش‌پذیر باشد، ولی بر $(x-a)^{k+1}$ بخش‌پذیر نباشد، عدد a را، ریشهٔ تکراری از مرتبهٔ k گویند.

وقتی a، ریشهٔ تکراری از مرتبهٔ k باشد، اغلب به‌عنوان k ریشهٔ برابر در نظر گرفته می‌شود. این شکل بحث، به این مناسبت پیش آمده است که عامل $(x-a)^k$، ضمن تجزیهٔ $f(x)$ به عامل‌های خطی، به‌صورت ضرب k عامل برابر $(x-a)$ درمی‌آید.

با توجه به این‌که، هر چندجمله‌ای درجه n، به‌صورت ضرب n عامل خطی، تجزیه می‌شود، و به‌شرطی که هر ریشه را به‌تعدادی که تکرار شده است در نظر بگیریم، تعداد ریشه‌های هر چندجمله‌ای برابر با درجهٔ آن می‌شود.

---

۱. بخش نهم را ببینید.

این قضیه‌ها درست است:

۱. ریشهٔ سادهٔ چندجمله‌ای، ریشهٔ مشتق آن نیست.

۲. ریشهٔ تکراری چندجمله‌ای، درضمن ریشهٔ تکراری مشتق آن نیز می‌باشد، منتهی از مرتبه‌ای یک واحد کمتر از مرتبهٔ ریشهٔ تکراری خود چندجمله‌ای.

درواقع، اگر داشته باشیم: $f(x)=(x-a)^k f_1(x)$، و $f_1(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر نباشد (یعنی $f_1(a)\neq 0$)، در آن صورت داریم:

$$f'(x) = k(x-a)^{k-1}\cdot f_1(x) + (x-a)^k\cdot f_1'(x) =$$
$$= (x-a)^{k-1}\,[\,kf_1(x) + (x-a)\,f_1'(x)] = (x-a)^{k-1}\cdot F(x)$$

چندجمله‌ای $F(x)=kf_1(x)+(x-a)f_1'(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر نیست، زیرا $F(a)=kf_1(a)\neq 0$.

بنابراین، $f'(x)$ به‌ازای $k=1$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر نیست و برای $k>1$ بر $(x-a)^{k-1}$ بخش‌پذیر و بر $(x-a)^k$ بخش‌ناپذیر است. و به این ترتیب، هر دو قضیه ثابت شد.

قضیهٔ رُل و برخی نتیجه‌های آن. بنا بر قضیهٔ مشهور رُل[1]، اگر عددهای حقیقی a و b ریشه‌های یک چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی باشد، در این صورت عددی مثل c وجود دارد که بین a و b واقع است و ریشهٔ مشتق چندجمله‌ای است.

از قضیهٔ رُل می‌توان نتیجه‌های جالبی به‌دست آورد:

۱. اگر در چندجمله‌ای $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$، همهٔ ریشه‌ها حقیقی باشند، آن‌گاه همهٔ ریشه‌های مشتق آن هم حقیقی هستند؛ درضمن بین هر دو ریشهٔ پشت‌سرهم $f(x)$، یک ریشه از $f'(x)$ قرار دارد، که بی‌تردید ریشه‌ای ساده است.

درواقع، اگر $x_1<x_2<\cdots<x_k$ را، ریشه‌های تکراری $f(x)$ و به‌ترتیب از مرتبه‌های m_1، m_2، …، m_k بگیریم: روشن است که خواهیم داشت: $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$ (توجه کنید: مفهوم ریشهٔ تکراری را، به صورت کلی خود در نظر گرفته‌ایم، یعنی ممکن است بعضی از mها برابر واحد باشد). در این صورت، مشتق $f'(x)$، بنا بر قضیهٔ مربوط به ریشه‌های تکراری، دارای ریشه‌های تکراری x_1، x_2، …، x_k، ولی به‌ترتیب از مرتبه‌های m_1-1،

۱. این قضیه، حالت ساده‌ای از قضیهٔ میانه است، که دربارهٔ آن در بخش دوم، صفحهٔ ۱۶۳ گفتگو کرده‌ایم.

m_2-1، ...، m_k-1، و بنا بر قضیهٔ رُل، دارای ریشه‌های y_1، y_2، ...، y_{k-1} – که بین هرکدام از فاصله‌های (x_1, x_2)، (x_2, x_3)، ...، (x_{k-1}, x_k)، یعنی بین هر دو ریشهٔ مجاور $f(x)$قرار دارند – می‌باشد. بنابراین، تعداد ریشه‌های حقیقی $f'(x)$ (به‌شرطی که هر ریشهٔ تکراری را، به‌تعداد تکرار خود در نظر بگیریم) دست‌کم برابر است با

$$(m_1-1)+(m_2-1)+\cdots+(m_k-1)+k-1=n-1$$

ولی، چون $f'(x)$، یک چندجمله‌ای از درجهٔ $(n-1)$ است، دارای $n-1$ ریشه می‌باشد. درنتیجه، اول، همهٔ ریشه‌های $f'(x)$حقیقی‌اند؛ دوم، y_1، y_2، ...، y_{k-1}ریشه‌های سادهٔ $f'(x)$ هستند و سوم، $f'(x)$، ریشهٔ دیگری ندارد.

۲. اگر همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای $f(x)$ حقیقی و در بین آن‌ها p ریشهٔ مثبت وجود داشته باشد (با به‌حساب آوردن هر ریشه، به‌تعداد تکرار آن)، در این صورت $f'(x)$ دارای p یا $p-1$ ریشهٔ مثبت خواهد بود.

فرض کنید $x_1<x_2<\ldots<x_k$ همهٔ ریشه‌های مثبت چندجمله‌ای $f(x)$ به‌ترتیب با مرتبه‌های تکرار m_1، m_2، ...، m_k باشد. در این صورت داریم: $m_1+m_2+\cdots+m_k=p$. مشتق $f'(x)$ هم، همین ریشه‌های مثبت x_1، x_2، ...، x_kرا با مرتبه‌های تکرار m_1-1، m_2-1، ...، m_k-1، و ریشه‌های سادهٔ y_1، y_2، ...، y_{k-1}را – که به‌ترتیب در فاصله‌های (x_1, x_2)، (x_2, x_3)، ...، (x_{k-1}, x_k) قرار دارند – و به‌احتمالی یک ریشهٔ سادهٔ y_0را که در فاصلهٔ (x_0, x_1) واقع است (x_0را بزرگترین ریشهٔ منفی $f(x)$گرفته‌ایم)، قبول می‌کند. بنابراین، تعداد ریشه‌های مثبت $f'(x)$ برابر است با

$$(m_1-1)+\cdots+(m_k-1)+(k-1)=p-1$$

ویا

$$(m_1-1)+\cdots+(m_k-1)+(k-1)+1=p$$

و این، همان حکمی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

قانون علامت‌های دکارت. **دکارت**، در کتاب مشهور خود «هندسه» (۱۶۳۷ میلادی) ــ که در آن نخستین طرح هندسهٔ تحلیلی را داده است ــ درضمن نخستین قضیهٔ بسیار جالب جبر را دربارهٔ نظریهٔ استقرار ریشه‌های چندجمله‌ای در صفحهٔ مختلط، می‌آورد که به ***«قانون علامت‌های دکارت»*** معروف است. این قانون را می‌توان به این ترتیب، بیان کرد:

اگر ضریب‌های یک معادله و همهٔ ریشه‌های آن حقیقی باشد، در آن صورت تعداد ریشه‌های مثبت این معادله (با در نظر گرفتن ریشه‌های تکراری)، برابر است با تعداد تغییرعلامت‌ها در ردیف ضریب‌های معادله. در حالتی هم که معادله دارای ریشه‌های مختلط باشد، تعداد ریشه‌های مثبت، به‌اندازهٔ عدد زوجی، از تعداد تغییرعلامت‌ها، کمتر است.

ابتدا روشن کنیم که منظور از تعداد تغییرعلامت‌ها در ردیف ضریب‌ها چیست! برای به‌دست آوردن این تعداد، همهٔ ضریب‌های معادله را به‌ردیف ــ و در مثل برحسب توان‌های نزولی مجهول و با به‌حساب آوردن ضریب x^n و مقدار ثابت ــ می‌نویسیم، ولی، ضریب‌های برابر صفر را، کنار می‌گذاریم. بعد هر دو عدد پشت‌سرهم را در این ردیف در نظر می‌گیریم. اگر علامت‌های دو عدد پشت‌سرهم، متفاوت باشد، آن را یک تغییرعلامت به‌حساب می‌آوریم. برای نمونه، به این معادله توجه کنید:

$$x^{۷} + ۳x^{۵} - ۵x^{۴} - ۸x^{۲} + ۷x + ۲ = ۰$$

ردیف ضریب‌ها، در این معادله چنین است:

$$۱ \ , \ ۳ \ , -۵ \ , -۸ \ , \ ۷ \ , \ ۲$$

و همان‌طور که می‌بینیم، تعداد تغییرعلامت‌ها در آن برابر است با ۲.

حالا به اثبات بخش اول قضیه می‌پردازیم[۱].

بدون این‌که به کلی بودن موضوع لطمه‌ای وارد شود، می‌توان ضریب بزرگترین درجه (یعنی $a_۰$) را در چندجمله‌ای $f(x) = a_۰x^n + ... + a_n$، عددی مثبت در نظر گرفت.

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر $f(x)$ تنها ریشه‌های حقیقی داشته باشد و در بین آن‌ها (با به‌حساب آوردن ریشه‌های تکراری) p ریشهٔ مثبت وجود داشته باشد، آنگاه علامت آخرین جملهٔ $f(x)$ (البته، جمله‌ای که مخالف صفر باشد)، برابر است با $(-۱)^p$.

فرض کنید داشته باشیم:

$$f(x) = a_۰x^n + ... + a_k x^{n-k} = a_۰x^{n-k}\,(x-x_۱)\,...\,(x-x_p)\,(x-x_{p+۱})\,...\,(x-x_k)$$

که در آن $x_۱$، ...، x_p، ریشه‌های مثبت و $x_{p+۱}$، ...، x_k، ریشه‌های منفی $f(x)$ هستند (هرکدام از ریشه‌ها را، به‌تعداد تکرار آن‌ها در نظر گرفته‌ایم). در این صورت داریم:

---

۱. برای اثبات این قضیه، روش مستقیمی هم وجود دارد که از مشتق استفاده نمی‌کند. ولی، آن روش تا اندازه‌ای طولانی است.

$$a_k = a_\circ (-1)^p x_1 \cdots x_p (-x_{p+1}) \cdots (-x_k)$$

که با توجه به این‌که همهٔ عددهای $a_\circ$، x_1، ...، x_p، $-x_{p+1}$، ...، $-x_k$ مثبت‌اند، علامت a_k، همان علامت $(-1)^p$ می‌شود[1].

دنبالهٔ استدلال براساس روش استقرای ریاضی قرار دارد.

برای چندجمله‌ای درجهٔ اول، درستی حکم روشن است. درواقع، چندجمله‌ای درجهٔ اول $a_\circ x + a_1$ یک ریشه دارد $\left(-\frac{a_1}{a_\circ}\right)$، که تنها وقتی می‌تواند مثبت باشد که $a_\circ$ و a_1، علامت‌های متفاوتی داشته باشند.

حالا فرض می‌کنیم که قضیه برای هر چندجمله‌ای از درجهٔ $(n-1)$ با ریشه‌های حقیقی، درست باشد، و با این فرض ثابت می‌کنیم که قضیهٔ ما برای چندجمله‌ای $f(x) = a_\circ x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ هم که از درجهٔ n است، درست است.

۱. حالت $a_n = \circ$. چندجمله‌ای $f_1(x) = a_\circ x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}$ را در نظر می‌گیریم. تعداد ریشه‌های مثبت، در دو چندجمله‌ای $f(x)$ و $f_1(x)$ یکی و تعداد تغییرعلامت‌ها هم در ردیف ضریب‌های این دو چندجمله‌ای یکی است. چون، قانون دکارت دربارهٔ $f_1(x)$ درست است، دربارهٔ چندجمله‌ای $f(x)$ هم درست خواهد بود.

۲. حالت $a_n \neq \circ$. مشتق چندجمله‌ای $f(x)$ را در نظر می‌گیریم:

$$f'(x) = n a_\circ x^{n-1} + (n-1) a_1 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$

روشن است، اگر علامت‌های a_{n-1} و a_n یکی باشد، تعداد تغییرعلامت‌ها در ضریب‌های $f(x)$ و $f'(x)$ یکی است و اگر علامت‌های a_{n-1} و a_n متفاوت باشد، تعداد تغییرعلامت‌ها در ضریب‌های $f(x)$ یک واحد بیشتر از تعداد تغییرعلامت‌ها در ضریب‌های $f'(x)$ است (اگر a_{n-1} برابر صفر باشد، باید نزدیک‌ترین ضریب مخالف صفر به a_n را در نظر گرفت).

بنا بر آن‌چه در آغاز اثبات گفتیم، در حالت اول، تعداد ریشه‌های مثبت $f(x)$ و $f'(x)$، از لحاظ زوج و فرد بودن، یکی و در حالت دوم، متفاوت است. ولی، همان‌طور که بنابر قضیهٔ رُل دیدیم، تعداد ریشه‌های مثبت یک چندجمله‌ای (به‌شرطی که همهٔ ریشه‌ها، حقیقی

---

۱. یادآوری می‌کنیم که این حکم، برای حالتی هم که بین ریشه‌های $f(x)$، عددهای مختلط وجود داشته باشد، درست است.

باشند)، یا با تعداد ریشه‌های مثبت مشتق آن برابر و یا یک واحد از آن بیشتر است. با توجه به این مطلب، نتیجه می‌گیریم در حالت اول، $f(x)$ به همان اندازهٔ $f'(x)$ ریشهٔ مثبت دارد، و در حالت دوم، یک واحد بیشتر. قانون دکارت برای $f'(x)$ برقرار است (بنا بر فرض استقرا)، یعنی، تعداد ریشه‌های مثبت $f'(x)$ برابر است با تعداد تغییرعلامت‌ها در ردیف ضریب‌های آن. درنتیجه، برای $f(x)$ هم در هر دو حالت، تعداد ریشه‌های مثبت برابر است با تعداد تغییرعلامت‌ها در ردیف ضریب‌ها؛ و این همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

اثبات قسمت دوم قانون دکارت هم دشوار نیست، ولی ما به آن نمی‌پردازیم.

یادداشت ۱. به‌ویژه حکم اول قضیهٔ دکارت اهمیت دارد، زیرا در بسیاری از مسأله‌های عملی، از پیش معلوم است که همهٔ ریشه‌های معادلهٔ داده‌شده، حقیقی است. در چنین حالتی، می‌توان به‌سرعت معلوم کرد چند ریشهٔ مثبت و چند ریشهٔ منفی داریم. تعداد ریشه‌های برابر صفر در معادله هم، به‌سادگی و از صورت معادله دیده می‌شود.

یادداشت ۲. اگر در چندجمله‌ای، فرض کنیم $x = y + a$ که در آن a عبارت است از عدد حقیقی دلخواه؛ یعنی چندجمله‌ای $f(y + a)$ را بنویسیم، در این صورت ریشه‌های مثبت y این چندجمله‌ای تازه، تنها آن‌هایی خواهند بود که ریشه‌های متناظر x آن‌ها در چندجمله‌ای $f(x)$، از a بیشتر باشد. بنابراین، تعداد ریشه‌های چندجمله‌ای داده‌شدهٔ $f(x)$، که همهٔ ریشه‌های آن حقیقی است، واقع در فاصلهٔ بین a و b ($b > a$)، برابر است با تعداد تغییرعلامت‌ها در چندجمله‌ای $f(y + a)$، منهای تعداد تغییرعلامت‌ها در چندجمله‌ای $f(z + b)$. در حالتی هم که همهٔ ریشه‌های $f(x)$ حقیقی نباشد، می‌توان ثابت کرد، این تعداد یا برابر است با این تفاضل و یا به تعداد زوجی کمتر از آن. و این، همان قضیهٔ ***بیودان*** است.

قضیهٔ شتورم. قانون علامت‌های ***دکارت*** و همراه با آن قضیهٔ ***بیودان*** به این پرسش‌ها پاسخ نمی‌دهد: آیا معادله‌ای که با ضریب‌های حقیقی داده شده است، دست‌کم یک ریشهٔ حقیقی دارد، یا روی هم چند ریشهٔ حقیقی دارد، و یا تعداد ریشه‌های حقیقی آن، در فاصلهٔ بین a و b چقدر است؟ بیش از دو سده، ریاضی‌دانان در تلاش حل این مسأله‌ها بودند و به نتیجه نمی‌رسیدند. ***دکارت***، ***نیوتن***، ***بیودان***، ***سیلوستر***، ***فوریه*** و بسیاری دیگر از ریاضی‌دانان، کارهای زیادی در این باره کردند، ولی حتی نتوانستند به نخستین پرسش از این مسأله‌ها پاسخ گویند، تا این‌که در سال ۱۸۳۵، **شتورم**، ریاضی‌دان فرانسوی، روشی پیدا کرد که به همهٔ این پرسش‌ها پاسخ می‌داد.

روش شتورم دشوار نیست، ولی به‌گونه‌ای است که ممکن است مدت درازی به‌دنبال آن باشیم و آن را پیدا نکنیم. شتورم، آدم خیلی خوشبختی بود که توانست این مسأله را، که برای مسأله‌های عملی جبر اهمیت جدی دارد، حل کند. وقتی خود شتورم در سخنرانی‌هایش، طرح نتیجه‌گیری‌هایش را می‌ریخت، اغلب می‌گفت: «این، همان قضیه‌ای است که شهرتش را من برده‌ام.» با وجود این، باید گفت که شتورم این مسأله را تصادفی حل نکرد؛ او سال‌های زیادی بود که دربارهٔ مسأله‌های نزدیک به آن فکر می‌کرد.

$f(z)$ را یک چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی، و $f_1(z)$ را مشتق آن فرض می‌کنیم. $f(z)$ را بر $f_1(z)$ تقسیم می‌کنیم، باقی‌ماندهٔ این تقسیم را بعد از تغییرعلامت دادن، $f_2(z)$ می‌نامیم. بعد $f_1(z)$ را بر $f_2(z)$ تقسیم می‌کنیم و باقی‌ماندهٔ تقسیم را، بعد از تغییرعلامت، $f_3(z)$ می‌نامیم وغیره.

می‌توان ثابت کرد که آخرین باقی‌ماندهٔ مخالف صفر، که در این ردیف تقسیم‌ها به‌دست می‌آید، عدد ثابتی است مثل c.

قضیهٔ شتورم این است: اگر $a < b$، دو عدد حقیقی و غیر از ریشه‌های چندجمله‌ای $f(z)$ باشند، با گذاشتن $z = a$ و $z = b$ در چندجمله‌ای‌های

$$f(z) \;,\; f_1(z) \;,\; \dots \;,\; f_{s-1}(z) \;,\; c$$

دو ردیف عددهای حقیقی به‌دست می‌آید:

$$f(a) \;,\; f_1(a) \;,\; f_2(a) \;,\; \dots \;,\; f_{s-1}(a) \;,\; c \qquad \text{(I)}$$

$$f(b) \;,\; f_1(b) \;,\; f_2(b) \;,\; \dots \;,\; f_{s-1}(b) \;,\; c \qquad \text{(II)}$$

به‌نحوی که تعداد تغییرعلامت‌ها در ردیف (I) بیشتر یا برابر تعداد تغییرعلامت‌ها در ردیف (II) است، و تفاضل بین این تعداد تغییرعلامت‌ها، درست برابر است با تعداد ریشه‌های حقیقی $f(z)$ که بین a و b قرار دارد؛ می‌گویند تعداد ریشه‌های حقیقی بین a و b، برابر است با تعداد تغییرعلامت‌هایی که ضمن عبور از a به b در ردیف (I) از دست می‌رود.

اثبات قضیهٔ شتورم، دشوارتر از اثبات قضیهٔ دکارت نیست، با وجود این، ما از آن می‌گذریم.

به‌کمک قضیهٔ شتورم می‌توان تعداد ریشه‌های یک چندجمله‌ای با ضریب‌های حقیقی را، روی هر پاره‌خط از محور حقیقی، حساب کرد. به این ترتیب، با به‌کار بردن قضیهٔ شتورم

دربارهٔ هر چندجمله‌ای داده‌شده، می‌توان طرح روشنی از وضع استقرار ریشه‌ها، روی محور حقیقی به‌دست آورد و به‌خصوص می‌توان فاصله‌هایی را پیدا کرد که در هرکدام از آن‌ها، یکی از ریشه‌های چندجمله‌ای قرار گرفته است.

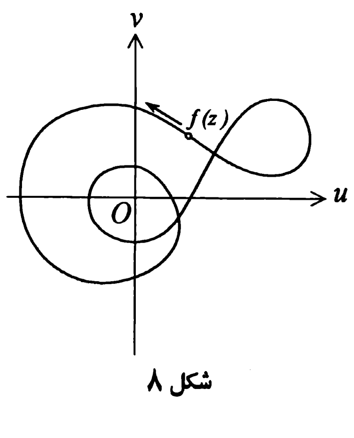
حل این مسأله برای حالتی هم که با ریشه‌های مختلط سر و کار داریم، اهمیت کمتری ندارد. ولی، چون عددهای مختلط متناظر با نقطه‌هایی هستند، که نه بر خط راست، بلکه بر صفحه قرار گرفته‌اند، نمی‌توان از «فاصله‌ای» گفت‌وگو کرد که ریشهٔ معادله در داخل آن قرار گرفته باشد؛ در این‌جا باید به‌جای فاصله، از حوزه، یعنی بخشی از صفحه که به‌صورتی جدا شده است، صحبت کنیم.

بنابراین، وقتی گفت‌وگو از ریشه‌های موهومی است، با این مسأله سر و کار داریم:

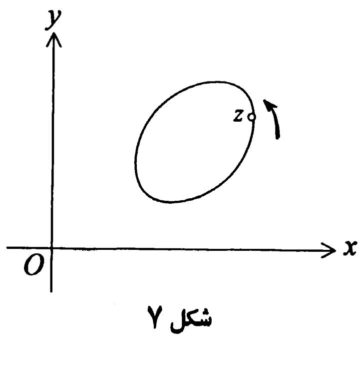
چندجمله‌ای $f(z)$ و حوزه‌ای بر صفحهٔ مختلط داده شده است. می‌خواهیم تعداد ریشه‌های چندجمله‌ای را در داخل این حوزه پیدا کنیم.

فرض می‌کنیم این حوزه، به دورهٔ بسته‌ای محدود شده باشد (شکل ۷) و درضمن روی دورهٔ حوزه، ریشه‌ای از چندجمله‌ای $f(z)$ وجود نداشته باشد.

پیش خود فرض می‌کنیم نقطهٔ z، دورهٔ حوزه را یک بار و در جهت مثبت دور بزند. هر مقدار چندجمله‌ای را هم می‌توان، به‌وسیلهٔ نقطه‌ای از صفحه نشان داد. وقتی z به‌طور پیوسته تغییر کند، چندجمله‌ای $f(z)$ هم به‌طور پیوسته تغییر خواهد کرد. بنابراین، وقتی z دوره را یک بار دور بزند، $f(z)$ یک منحنی بسته را رسم می‌کند. این منحنی از مبدأ مختصات عبور نمی‌کند، زیرا بنا به فرض، $f(z)$ در هیچ‌کدام از نقطه‌های دوره برابر صفر نمی‌شود (شکل ۸).



شکل ۸



شکل ۷

قضیهٔ زیر، پاسخ مسألهٔ بالا را به ما می‌دهد.

اصل آرگومان (آوند). تعداد ریشه‌های چندجمله‌ای $f(z)$ در داخل حوزه‌ای که محدود به دورهٔ بستهٔ C باشد، برابر است با تعداد دورهایی که نقطهٔ $f(z)$ دور مبدأ مختصات می‌زند، وقتی که z، دورهٔ C را یک بار و در جهت مثبت، بپیماید.

برای اثبات، $f(z)$ را به عامل‌های خطی تجزیه می‌کنیم:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = a_0 (z-z_1)(z-z_2) \cdots (z-z_n)$$

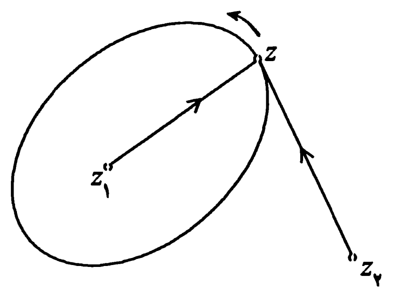
می‌دانیم آوند حاصل‌ضرب چند عدد مختلط، برابر است با مجموع آوندهای عامل‌های آن. بنابراین

$$\arg f(z) = \arg a_0 + \arg (z-z_1) + \arg (z-z_2) + \cdots + \arg (z-z_n)$$

نمو آوند $f(z)$ را، وقتی z دورهٔ C را یک بار دور می‌زند، به $\Delta \arg f(z)$ نشان می‌دهیم. روشن است که $\Delta \arg f(z)$، از چند مرتبه 2π تشکیل شده است (به همان تعدادی که $f(z)$ دور مبدأ مختصات می‌چرخد). روشن است که

$$\Delta \arg f(z) = \Delta \arg a_0 + \Delta \arg (z-z_1) + \Delta \arg (z-z_2) + \cdots + \Delta \arg (z-z_n)$$

معلوم است $\Delta \arg a_0 = 0$، زیرا a_0 مقداری است ثابت. $z-z_1$، نمایندهٔ برداری است که با آغاز از نقطهٔ z_1، به نقطهٔ z رفته است. فرض کنیم z_1 در داخل حوزه واقع باشد. از نظر هندسی روشن است (شکل ۹)، که بردار $z-z_1$، وقتی نقطهٔ z دورهٔ C را یک بار دور بزنند، یک دور کامل دور مبدأ خود می‌چرخد، به‌نحوی که $\Delta \arg (z-z_1) = 2\pi$. حالا فرض می‌کنیم که z_2 در خارج حوزه واقع باشد. در این حالت، بردار ما به این طرف و آن طرف «می‌لغزد» و



شکل ۹

به جای اولش برمی‌گردد، بدون این‌که دورانی دور مبدأ خود داشته باشد، و به این ترتیب $\Delta \arg(z-z_2) = 0$. به همین ترتیب، می‌توان دربارهٔ همهٔ ریشه‌ها استدلال کرد. بنابراین، $\Delta \arg f(z)$ برابر است با 2π، ضرب‌در تعداد ریشه‌هایی از $f(z)$ که در داخل حوزه قرار گرفته‌اند. به این ترتیب، تعداد ریشه‌های $f(z)$، که در داخل حوزه قرار گرفته‌اند، برابر است با تعداد دورهایی که نقطهٔ $f(z)$ دور مبدأ می‌زند. و این، همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

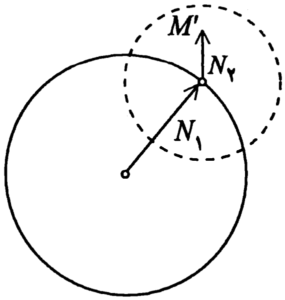
قضیه‌ای که ثابت کردیم به ما امکان می‌دهد تا مسأله را در هر حالت خاص خود حل و یا منحنی را که نقطهٔ $f(z)$ می‌پیماید، با دقت لازم، رسم کنیم. برای این منظور، باید مجموعه‌ای از نقطه‌های z را، که به‌اندازهٔ کافی به هم نزدیک‌اند، روی دورهٔ C انتخاب و مقدارهای متناظر $f(z)$ را محاسبه و آن‌ها را به‌وسیلهٔ خط پیوسته‌ای به هم وصل کنیم. با وجود این، در بعضی حالت‌ها، می‌توان بدون این محاسبه‌های خسته‌کننده، به نتیجه رسید. نمونه‌ای می‌آوریم.

مثال. می‌خواهیم تعداد ریشه‌های چندجمله‌ای $f(z) = z^{11} + 5z^2 - 2$ را در داخل دایرهٔ به‌شعاع واحد و مرکز مبدأ مختصات، پیدا کنیم.

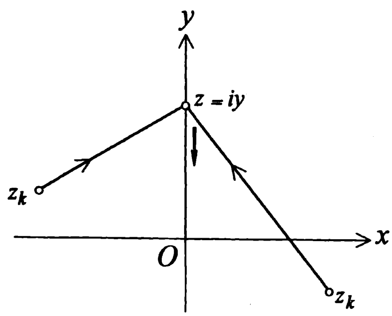
روی دایرهٔ $|z| = 1$، از میان سه جمله‌ای که چندجمله‌ای $f(z)$ را تشکیل داده‌اند، یکی، یعنی $5z^2$، بر دیگران برتری دارد. درواقع داریم: $|5z^2| = 5$، درحالی که $|z^{11} - 2| \le |z|^{11} + 2 = 3$. همین موقعیت امکان می‌دهد که به این ترتیب، استدلال کنیم. چندجمله‌ای $z^{11} + 5z^2 - 2$ را به w، $5z^2$ را به N_1 و $z^{11} - 2$ را به N_2 نشان می‌دهیم. وقتی نقطهٔ z، یک بار محیط دایرهٔ واحد را دور می‌زند، $N_1 = 5z^2$ محیط دایرهٔ به‌شعاع ۵ را دو بار دور می‌زند، زیرا $|N_1| = 5$ و $\arg N_1 = 2\arg z$. نقطهٔ w به نقطهٔ N_1 به‌وسیلهٔ برداری که طول آن $|N_2| \le 3$ است، «پیوند» خورده است، یعنی فاصلهٔ از نقطهٔ w تا نقطهٔ N_1، همیشه کوچکتر است از فاصلهٔ نقطهٔ N_1 تا مبدأ مختصات.

بنابراین، نقطهٔ w، به‌مناسبت این‌که دور N_1 می‌چرخد (شکل ۱۰)، نمی‌تواند «به‌طور مستقل» دور مبدأ دور بزند و دور مبدأ به همان اندازهٔ نقطهٔ N_1 دور می‌زند، یعنی دو بار. بنابراین، تعداد ریشه‌های $f(z)$ در داخل حوزه‌ای که در نظر گرفته‌ایم، برابر است با ۲.

مسالهٔ هورویتس. در مکانیک، و به‌خصوص در نظریهٔ حرکت‌های نوسانی و نظریهٔ «میزان کردن»، این موضوع اهمیت زیادی دارد که بتوانیم شرط‌هایی را پیدا کنیم که به‌ازای آن‌ها،



شکل ۱۰



شکل ۱۱

همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای مفروض $f(z)=a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ (با ضریب‌های حقیقی)، دارای بخش حقیقی منفی باشند، یعنی همهٔ ریشه‌های آن در نیم‌صفحهٔ سمت چپ محور موهومی باشند.

$a_0>0$ می‌گیریم. فرض می‌کنیم نقطهٔ z (شکل ۱۱)، محور موهومی را از بالا به پایین طی کند، یعنی فرض می‌کنیم $z=iy$، درضمن y، مقداری است حقیقی و از $+\infty$ تا $-\infty$ تغییر می‌کند. در این صورت $f(z)$، یک منحنی رسم می‌کند که دارای بی‌نهایت شاخه است. برای بررسی، بهتر است منحنی را که به‌وسیلهٔ تابع زیر داده شده است و با منحنی ما بستگی نزدیکی دارد، در نظر بگیریم:

$$f_1(z)=(i)^{-n} f(z) = a_0 y^n - a_2 y^{n-2} + a_4 y^{n-4} + \dots - i(a_1 y^{n-1} - a_3 y^{n-3} + \dots) =$$
$$= \varphi(y) - i\psi(y)$$

که در آن داریم:

$$\varphi(y) = a_{۰} y^n - a_{۲} y^{n-۲} + \dots$$

$$\psi(y) = a_{۱} y^{n-۱} - a_{۳} y^{n-۳} + \dots$$

چون $\arg i = \frac{\pi}{۲}$، درنتیجه $\arg f_{۱}(z) = -\frac{n\pi}{۲} + \arg f(z)$ و بنابراین، نمو آرگومان‌های $f(z)$ و $f_{۱}(z)$، یکسان است.

آرگومان نقطهٔ $f_{۱}(z)$ را، وقتی z محور موهومی را از بالا به پایین می‌پیماید، محاسبه می‌کنیم.

فرض کنید $f(z) = a_{۰}(z-z_{۱})(z-z_{۲})\dots(z-z_n)$. در این صورت

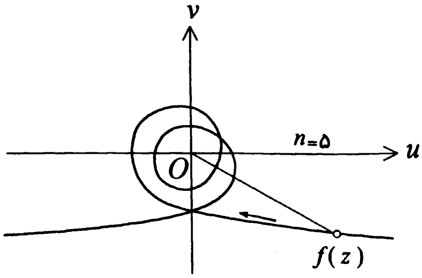
$$\arg f_{۱}(z) = \arg (a_{۰} i^{-n}) + \arg (z-z_{۱}) + \arg (z-z_{۲}) + \dots + \arg (z-z_n)$$

از نظر هندسی روشن است، نمو $\arg(z-z_k)$، در حالتی که z_k در نیم‌صفحهٔ راست باشد، برابر π، و در حالتی که z_k در صفحهٔ چپ باشد، برابر $-\pi$ است (شکل ۱۱).

به این ترتیب، نمو آرگومان $f_{۱}(z)$ برابر است با $\pi(N_{۱} - N_{۲})$، که در آن $N_{۱}$، عبارت است از تعداد ریشه‌های $f(z)$ در نیم‌صفحهٔ راست و $N_{۲}$، تعداد ریشه‌ها در نیم‌صفحهٔ چپ. برای این‌که همهٔ ریشه‌ها در نیم‌صفحهٔ چپ قرار گیرد، لازم و کافی است نمو آرگومان نقطهٔ $f_{۱}(z)$ برابر $-\pi n$ باشد، یعنی نقطهٔ $f_{۱}(z)$، n نیم‌دور در جهت حرکت عقربه‌های ساعت و دور مبدأ مختصات بچرخد (شکل ۱۲).

یادآوری می‌کنیم، نقطهٔ $f_{۱}(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$، به‌ازای مقدارهایی از y که ریشه‌های $\varphi(y)$ هستند، روی محور موهومی و به‌ازای ریشه‌های $\psi(y)$ روی محور حقیقی است. چون تعداد ریشه‌های $\varphi(y)$ بیشتر از n، و تعداد ریشه‌های $\psi(y)$ بیشتر از $(n-۱)$ نیست، از نظر هندسی به‌سادگی معلوم می‌شود که $f_{۱}(z)$ وقتی و تنها وقتی می‌تواند n نیم‌دور در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بزند که منحنی از ربع چهارم حرکت کند و سپس به‌نوبت بخش منفی محور موهومی، بخش منفی محور حقیقی، بخش مثبت محور موهومی و بخش مثبت محور حقیقی را قطع کند وغیره، به‌نحوی که تعداد کل نقطه‌های برخورد با محور موهومی برابر n (در هر نیم‌دور یک بار) و با محور حقیقی برابر $(n-۱)$ (یک بار کمتر از تعداد نیم‌دورها) باشد. به این ترتیب، باید ضریب $a_{۱}$ مثبت و همهٔ ریشه‌های $\varphi(y)$ و $\psi(y)$ حقیقی و متناوب باشد. منظور ما از متناوب این است که اگر $y_{۱} > y_{۲} > \dots > y_n$ ریشه‌های $\varphi(y)$ و $\eta_{۱} > \eta_{۲} > \dots > \eta_{n-۱}$ ریشه‌های $\psi(y)$ باشد، داشته باشیم:

$$y_{۱} > \eta_{۱} > y_{۲} > \eta_{۲} > \dots > y_{n-۱} > \eta_{n-۱} > y_n$$



شکل ۱۲

به این ترتیب، برای این‌که همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای

$$f(z) = a_۰ z^n + a_۱ z^{n-۱} + \dots + a_n$$

که در آن همهٔ ضریب‌ها حقیقی و $a_۰ > ۰$ است، در نیم‌صفحهٔ چپ قرار گیرد، لازم و کافی است که ضریب $a_۱$ مثبت باشد و به‌جز آن، همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای‌های

$$\varphi(y) = a_۰ y^n - a_۲ y^{n-۲} + a_۴ y^{n-۴} - \dots ,$$
$$\psi(y) = a_۱ y^{n-۱} - a_۳ y^{n-۳} + \dots$$

حقیقی و متناوب باشند.

این شرط، با شرط معروف **هورویتس** هم‌ارز است که بنا بر آن باید دترمینان‌های

$$a_۱ \ , \quad \begin{vmatrix} a_۱ & a_۰ \\ a_۳ & a_۲ \end{vmatrix} \ , \quad \begin{vmatrix} a_۱ & a_۰ & a_{-۱} \\ a_۳ & a_۲ & a_۱ \\ a_۵ & a_۴ & a_۳ \end{vmatrix} \ , \quad \dots \ , \quad \begin{vmatrix} a_۱ & a_۰ & a_{-۱} & \dots & a_{۲-n} \\ a_۳ & a_۲ & a_۱ & \dots & a_{۴-n} \\ . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . \\ a_{۲n-۱} & a_{۲n-۲} & a_{۲n-۳} & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

مثبت باشد، که در آن‌ها همهٔ a_iها به اندیس‌های کمتر از صفر یا بیشتر از n، باید با صفر عوض شوند (برای مفهوم دترمینان، بخش شانزدهم را ببینید).

۵. محاسبهٔ تقریبی ریشه‌ها

همان‌طور که پیش از این هم دیدیم، می‌توان از روش شتورم برای پیدا کردن مرزهای a و b

استفاده کرد، به‌نحوی که در داخل آن تنها یک ریشه قرار گرفته باشد. تنها این می‌ماند که در فاصلهٔ $a < b$، عددهای

$$\beta_{۱} < \beta_{۲} < \beta_{۳} < \cdots \quad و \quad \alpha_{۱} < \alpha_{۲} < \alpha_{۳} < \cdots$$

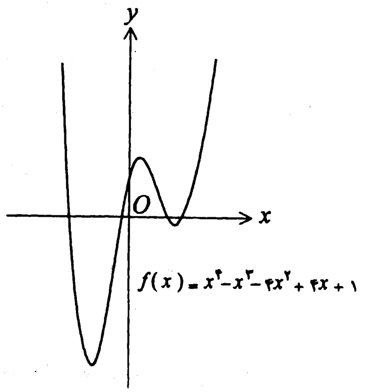
را طوری پیدا کنیم که مقدارهای آن‌ها مرتب به یکی از ریشه‌ها نزدیک و نزدیکتر شود؛ درضمن عددهای نخست، تقریب‌های نقصانی و عددهای دوم، تقریب‌های اضافی ریشه است. روشن است که اختلاف هریک از دو تقریب α_k و β_k با ریشهٔ x، کمتر از تفاضل $\beta_k-\alpha_k$ است، زیرا ریشه، بین آن‌ها قرار گرفته است. بنابراین، می‌توان مقدار ریشه را با هر تقریبی که بخواهیم به‌دست آورد.

نمودار چندجمله‌ای. این چندجمله‌ای درجهٔ n را با ضریب‌های حقیقی در نظر می‌گیریم:

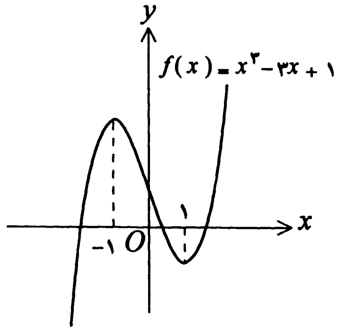
$$f(x) = a_{\circ}x^{n} + a_{۱}x^{n-۱} + \cdots + a_{n-۱}\,x + a_{n}$$

منحنی نمایش تغییر معادلهٔ $y=f(x)$ را در دستگاه محورهای قائم رسم می‌کنیم. گاهی، این منحنی را، سهمی درجهٔ n می‌گویند. روشن است که برای هر مقدار حقیقی x، یک مقدار و تنها یک مقدار برای $y=f(x)$ وجود دارد. بنابراین منحنی f، تا هرجا که بخواهیم، چه از طرف راست و چه از طرف چپ، جلو می‌رود. به‌جز آن، وقتی x به‌طور پیوسته تغییر کند، چه $f(x)$ و چه $f'(x)$ هم به‌طور پیوسته، یعنی بدون پرش، تغییر می‌کند. به این ترتیب، نمایش تغییرات f، یک منحنی هموار است. وقتی که x از لحاظ قدرمطلق بزرگ شود، نخستین جملهٔ چندجمله‌ای، یعنی $a_{\circ}x^{n}$، از لحاظ قدرمطلق از مجموع همهٔ جمله‌های دیگر بیشتر می‌شود، زیرا همهٔ جمله‌های دیگر توانی کوچکتر دارند. از این‌جا نتیجه می‌شود که اگر n عددی زوج و $a_{\circ} > \circ$ باشد، منحنی f، هم از طرف راست و هم از طرف چپ به‌طرف بالا می‌رود (و اگر $a_{\circ} < \circ$ باشد، به‌طرف پایین)؛ و در حالتی که n عددی فرد و $a_{\circ} > \circ$ باشد، منحنی از طرف راست به بالا و از طرف چپ به پایین می‌رود (و اگر $a_{\circ} < \circ$ باشد، برعکس).

نقطه‌های برخورد منحنی f با محور Ox، یعنی نقطه‌هایی که دربارهٔ آن‌ها $y=f(x) = \circ$، متناظر با ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = \circ$ هستند؛ و روشن است که تعداد آن‌ها، از n تجاوز نمی‌کند. در نقطه‌های ماکزیمم و می‌نیمم منحنی $y=f(x)$ داریم: $f'(x) = \circ$، و بنابراین، تعداد ماکزیمم‌ها و می‌نیمم‌ها از $(n-۱)$ تجاوز نمی‌کند. اگر در فاصله‌ای داشته باشیم:



شکل ۱۴



شکل ۱۳

$f''(x) > ۰$ در این صورت در این فاصله، مشتق اول صعودی است، یعنی کاوی منحنی به‌طرف بالاست؛ و اگر داشته باشیم: $f''(x) < ۰$، کاوِیِ آن به‌طرف پایین است. از آن‌جا که ممکن است بعضی از ریشه‌های $f(x) = ۰$، عددهایی مختلط باشند، تعداد ماکزیمم‌ها و می‌نیمم‌های منحنی هم ممکن است کمتر از $(n-۱)$ باشد.

نمونه‌هایی از نمودار چندجمله‌ای‌ها، در این‌جا آورده شده است:

(شکل ۱۳) $$f(x) = x^۳ - ۳x + ۱$$

(شکل ۱۴) $$f(x) = x^۴ - x^۳ - ۴x^۲ + ۴x + ۱$$

وقتی منحنی چندجمله‌ای را رسم کنیم، به‌سادگی می‌توانیم ریشه‌های آن را به‌دست آوریم. این ریشه‌ها، عبارت‌اند از طول‌های نقطه‌های برخورد منحنی با محور Ox.

روش تقریب‌های متوالی. در چندجمله‌ای $f(x)$ عدد درست دل‌خواهی، مثل ۳، قرار می‌دهیم، سپس عددهای ۴، ۵، ... را. اگر ضمن قرار دادن عددهای ۴، ۵ و ۶ به نتیجه‌ای برسیم که دارای همان علامت $f(۳)$ باشد، ولی با قرار دادن عدد ۷، به علامتی مخالف علامت $f(۳)$ برسیم، روشن است که $f(x)$ دارای ریشه‌ای بین ۶ و ۷ است. حالا، عددهای ۶، ۱ر۶، ۲ر۶، ... را به‌جای x در چندجمله‌ای قرار می‌دهیم و دو عدد مجاور را پیدا می‌کنیم که به‌ازای آن‌ها، برای چندجمله‌ای به عددهایی با علامت‌های متفاوت برسیم. فرض کنید که این دو عدد ۴ر۶ و ۵ر۶ باشد، که به‌معنای آن است، ریشهٔ معادله بین ۴ر۶ و ۵ر۶ قرار دارد.

حالا، عددهای ۴ر۶، ۴۱ر۶، ۴۲ر۶، ۴۳ر۶، ... را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که با قراردادن دو عدد ۴۲ر۶ و ۴۳ر۶، به دو علامت مختلف برای چندجمله‌ای برسیم. درنتیجه، ریشهٔ چندجمله‌ای بین ۴۲ر۶ و ۴۳ر۶ واقع است وغیره. این، همان روش تقریب‌های متوالی است. این روش را می‌توان، با تغییرهایی که باید در هر گام به چندجمله‌ای داد، ساده کرد، به نحوی که نیازی به استفاده از عددهای کسری و اعشاری نباشد و تنها از عددهای درست ۱، ۲، ۳، ...، ۹ استفاده شود، ولی ما به توضیح آن نمی‌پردازیم.

روش مماس‌ها و روش وترها. روش مماس‌ها، که به روش **نیوتن** هم مشهور است، و روش وترها، که به آن روش میان‌یابی هم گفته می‌شود، چه به‌طور جداگانه و چه با هم، برای ارزیابی خطا به‌کار می‌رود. فرض می‌کنیم: $a<b$، و بین a و b تنها یک ریشهٔ حقیقی از چندجمله‌ای $f(x)$ وجود داشته باشد [علامت‌های $f(a)$ و $f(b)$ یکی نیست]، و به‌جز آن علامت مشتق دوم، یعنی $f''(x)$، در همهٔ نقطه‌های بین a و b یکی باشد. در چنین صورتی، بخشی از نمودار f که بین $x=a$ و $x=b$ قرار دارد به یکی از چهار حالت شکل ۱۵ درمی‌آید.

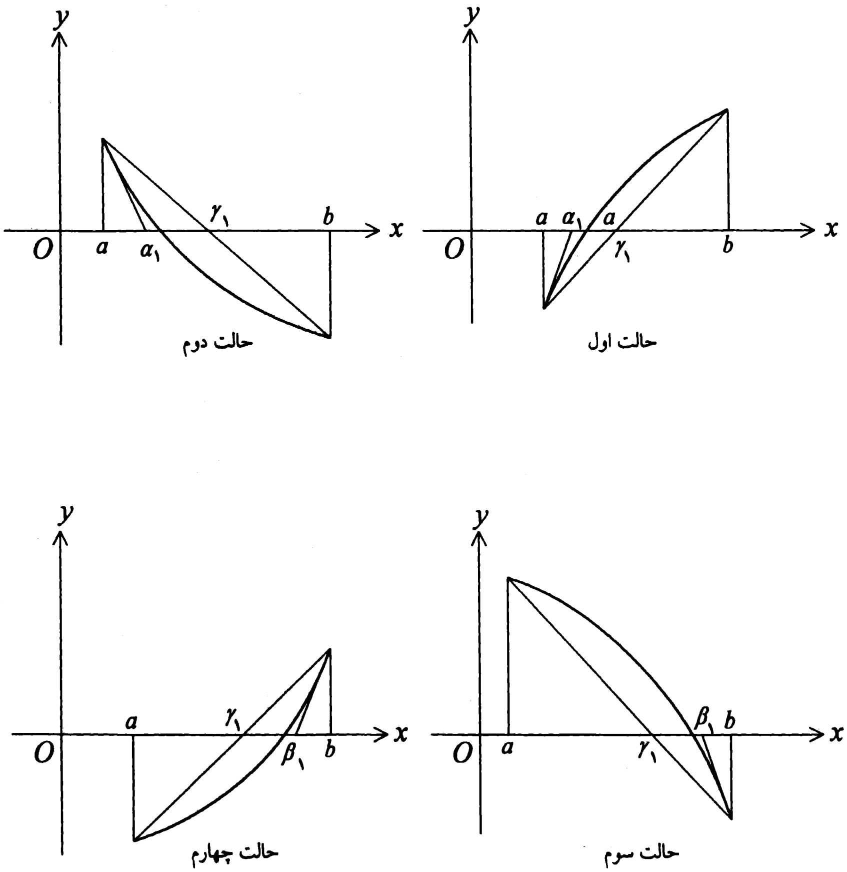
در حالت‌های اول و دوم، مماس بر منحنی در نقطهٔ به‌طول a، محور Ox را در نقطهٔ به‌طول α_1 قطع می‌کند، که بین ریشهٔ مجهول و a قرار دارد. طول α_1 را پیدا می‌کنیم و دوباره مماس بر منحنی را در نقطه به‌طول α_1 رسم می‌کنیم؛ این مماس، محور Ox را در نقطهٔ α_2 قطع می‌کند که بین نقطهٔ α_1 و ریشهٔ مورد نظر قرار دارد. به همین ترتیب، نقطهٔ α_3 را به‌دست می‌آوریم وغیره. به این ترتیب می‌توانیم مقدار تقریبی نقصانی ریشه را، با هر دقتی که بخواهیم به‌دست آوریم. همان‌طور که از شکل دیده می‌شود، این مقدارهای تقریبی، به‌سرعت به ریشهٔ مجهول نزدیک می‌شوند.

در حالت‌های سوم و چهارم، باید برعکس، از طول b آغاز کرد. در آن صورت به‌ترتیب به نقطه‌های β_1، β_2، β_3، ... می‌رسیم که هر بار تقریب اضافی بهتری از ریشه را به‌دست می‌دهد. در هرکدام از حالت‌های چهارگانه می‌توان به‌سادگی علامت‌های $f(a)$، $f(b)$ و $f''(x)$ را برای $a<x<b$ پیدا کرد.

چون معادلهٔ مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطهٔ به‌طول a چنین است:

$$y-f(a)=f'(a)\,(x-a)$$

بنابراین، طول α_1، یعنی نقطهٔ برخورد آن با محور Ox، از این معادله به‌دست می‌آید:



شکل ۱۵

$$0 - f(a) = f'(a)\ (\alpha_1 - a)$$

یعنی

$$\alpha_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

و به همین ترتیب:

$$\alpha_2 = \alpha_1 - \frac{f(\alpha_1)}{f'(\alpha_1)}\ ,\ \alpha_3 = \alpha_2 - \frac{f(\alpha_2)}{f'(\alpha_2)}$$

و شبیه آن

$$\beta_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}\ ,\ \beta_2 = \beta_1 - \frac{f(\beta_1)}{f'(\beta_1)}\ ,\ \beta_3 = \beta_2 - \frac{f(\beta_2)}{f'(\beta_2)}$$

و این، همان روش **نیوتن** است[1].

روش میان‌یابی یا روش وترها هم به این صورت است. معادلهٔ وتری که از دو نقطهٔ مفروض a و b می‌گذرد، چنین است:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

و طول نقطهٔ γ_1، نقطهٔ برخورد این وتر با محور Ox، که از معادلهٔ

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{0-f(a)}{f(b)-f(a)}$$

به‌دست می‌آید، برابر است با

$$\gamma_1=-\frac{(b-a)\,f(a)}{f(b)-f(a)}+a=\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$$

و حالا، اگر این نقطه را در حالت‌های اول و دوم به‌جای b، و در حالت‌های سوم و چهارم به‌جای a بگیریم، در حالت‌های اول و دوم به‌دست می‌آید:

$$\gamma_2=\frac{af(\gamma_1)-\gamma_1 f(a)}{f(\gamma_1)-f(a)},\ \ \gamma_3=\frac{af(b)-\gamma_2 f(a)}{f(\gamma_2)-f(a)}$$

و در حالت‌های سوم و چهارم:

$$\gamma_2=\frac{\gamma_1 f(b)-bf(\gamma_1)}{f(b)-f(\gamma_1)},\ \ \gamma_3=\frac{\gamma_2 f(b)-bf(\gamma_2)}{f(b)-f(\gamma_2)}$$

به‌ویژه، تلفیق این دو روش خیلی جالب است، زیرا (همان‌طور که روی شکل‌ها دیده می‌شود) چنین تلفیقی امکان می‌دهد که اگر تقریبِ از بالا و از پایین معلوم باشد، میزان خطا را محاسبه کنیم که بدون تردید از تفاضل آن‌ها بزرگ‌تر نیست، زیرا ریشه بین آن‌ها قرار گرفته است.

یادداشت. یادآوری می‌کنیم چندجمله‌ای بودن $f(x)$، نه در روش نیوتن و نه در روش

---

۱. از همین رابطه‌ها می‌توان، هر دو حکمی را که با بررسی شکل‌ها نتیجه گرفتیم بادقت ثابت کرد. مقدارهای α_n (و شبیه آن β_n) با بزرگ شدن n، به‌طور یکنوا (مونوتون) تغییر می‌کند، از جمله در حالت اول، بزرگ می‌شود و در مجموعهٔ خود، محدود می‌ماند، یعنی با توجه به پیش‌قضیه وایرشتراس به‌سمت حدی مثل α میل می‌کند. اگر در این رابطه‌ها به‌جای α_n، حدش α را قرار دهیم به برابری $\alpha=\alpha-\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$ می‌رسیم که از آن‌جا به‌دست می‌آوریم: $f(\alpha)=0$، یعنی α همان ریشهٔ چندجمله‌ای f است.

میان‌یابی، نقشی ندارد، یعنی از هرکدام این روش‌های و یا تلفیق آن‌ها، می‌توان، با شرط‌هایی که گفته‌ایم، برای معادله‌های غیرجبری هم استفاده کرد.

روش لباچوسکی. یکی از روش‌هایی که در زمان ما برای محاسبهٔ تقریبی ریشه‌ها، و به‌ویژه ریشه‌های مختلط به‌کار می‌رود، **روش *لباچوسکی***[1] است که ***نیکلای ایوانویچ لباچوسکی*** در سال ۱۸۳۴ در کتاب خود به‌نام «جبر» آورده است. اندیشهٔ اصلی این روش را باید مربوط به ***برنولی*** دانست.

ابتدا یادآوری می‌کنیم اگر x_1، x_2، ...، x_n ریشه‌های چندجمله‌ای مفروض باشند، به‌سادگی می‌توان چندجمله‌ای با همان درجهٔ n نوشت که ریشه‌های آن ${x^2}_1$، ${x^2}_2$، ...، ${x^2}_n$ (یعنی مجذور ریشه‌های چندجمله‌ای داده‌شده) باشد. درواقع، اگر x_1، x_2، ...، x_n ریشه‌های چندجمله‌ای

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

باشد، می‌توان چندجمله‌ای را به‌صورت

$$(x-x_1)\,(x-x_2)\,\dots\,(x-x_n)$$

نوشت. همچنین، چندجمله‌ای

$$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \dots \pm a_n$$

را، که ریشه‌های آن، قرینهٔ ریشه‌های معادلهٔ مفروض است، به‌صورت

$$(x+x_1)\,(x+x_2)\,\dots\,(x+x_n)$$

می‌توان نوشت. بنابراین، حاصل‌ضرب این دو چندجمله‌ای چنین می‌شود:

$$(x^2-{x^2}_1)\,(x^2-{x^2}_2)\,\dots\,(x^2-{x^2}_n)$$

این معادله، تنها شامل توان‌های زوج x است و بنابراین، اگر فرض کنیم $x^2=y$، به معادله‌ای از درجهٔ n، نسبت به y، می‌رسیم:

---

۱. این روش را *دانده‌لُن* (۱۸۲۶)، *لباچوسکی* (۱۸۳۴) و گره‌فه (۱۸۳۷) بدون اطلاع از کارهای یکدیگر به‌دست آوردند.

$$y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \dots + b_n$$

که برابر است با

$$(y^2 - x_1^2)(y^2 - y_2^2) \cdots (y^2 - x_n^2)$$

یعنی، ریشه‌های آن عبارت‌اند از x_1^2، x_2^2، ...، x_n^2. روشن است که برای به‌دست آوردن ضریب‌های b_k، باید دو چندجمله‌ای زیر را درهم ضرب کرد:

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$$

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \dots \pm a_n$$

به‌جای ضرب مستقیم، می‌توان از این روش استفاده کرد: ابتدا، ضریب‌های ۱، a_1، a_2، ...، a_n را در یک سطر می‌نویسیم و زیر آن‌ها خطی می‌کشیم. در زیر خط و زیر هرکدام از a_kها، اول مجذور آن‌ها را (یعنی a_k^2) و سپس در سطر دیگر قرینهٔ حاصل‌ضرب دو عدد مجاور آن ($-2a_{k-1}a_{k+1}$)، بعد $+2a_{k-2}a_{k+2}$ وغیره را قرار می‌دهیم. اگر مجموع هر ستون را به‌طور جداگانه پیدا کنیم، عددهایی که به‌دست می‌آید، به‌ترتیب برابر ۱، $-b_1$، $+b_2$، $-b_3$ و... خواهد بود، به این شکل:

۱	a_1	a_2	a_3	a_4	...
۱	a_1^2	a_2^2	a_3^2	a_4^2	...
	$-2a_2$	$-2a_1a_3$	$-2a_2a_4$	$-2a_3a_5$	...
		$2a_4$	$2a_1a_5$	$2a_2a_6$	...
			$-2a_6$	$-2a_1a_7$	...
				$2a_7$	...

یعنی:

$$b_1 = -(a_1^2 - 2a_2)\ ,\quad b_2 = a_2^2 - 2a_1a_3 + 2a_4\ ,$$

$$b_3 = -(a_3^2 - 2a_2a_4 + 2a_1a_5 - 2a_6)\ ,$$

$$b_4 = a_4^2 - 2a_3a_5 + 2a_2a_6 - 2a_1a_7 + 2a_7\ ,\ \dots$$

به این ترتیب، می‌توانیم ضریب‌های ۱، b_1، b_2، ...، b_n، از چندجمله‌ای که ریشه‌های آن برابر x_1^2، x_2^2، ...، x_n^2است، به‌دست آوریم. به همین ترتیب، می‌توان ضریب‌های ۱، c_1، c_2،

c_n ، ...، از چندجمله‌ای را به‌دست آورد که ریشه‌های آن مجذور ریشه‌های چندجمله‌ای

$$y^n + b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} + \dots + b_n$$

یعنی x_1^4، x_2^4، ...، x_n^4، باشد. بعد ضریب‌های ۱ ، d_1، d_2، ...، d_n از چندجمله‌ای با ریشه‌های x_1^8، x_2^8، ...، x_n^8 را پیدا می‌کنیم و بعد به‌دنبال چندجمله‌ای می‌رویم که ریشه‌های آن x_1^{16}، x_2^{16} ، ...، x_n^{16}باشد و غیره.

ما تنها به اساس روش *لباچوسکی* می‌پردازیم و درضمن، برای سادگی کار، تنها حالتی را در نظر می‌گیریم که همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای، حقیقی و از لحاظ قدرمطلق، متمایز باشند. فرض کنید

$$|x_1| > |x_2| > \dots > |x_n|$$

یعنی x_1، ریشه‌ای باشد که از لحاظ قدرمطلق، بزرگترین مقدار را داشته باشد و پس از آن x_2وغیره. Nرا به‌اندازهٔ کافی بزرگ می‌گیریم و فرض می‌کنیم ریشه‌های چندجمله‌ای

$$X^n + A_1 X^{n-1} + A_2 X^{n-2} + \dots + A_n$$

برابر با توان Nام ریشه‌های چندجمله‌ای مفروض ــ یعنی x_1، x_2، ...، x_nــ باشد، یعنی

$$-A_1 = x_1^N + x_2^N + \dots + x_n^N$$
$$A_2 = x_1^N x_2^N + x_1^N x_3^N + \dots + x^N_{n-1} x_n^N$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\pm A_n = x_1^N x_2^N \cdots x_n^N$$

در ردیف عددهای $|x_1^N|$ ، $|x_2^N|$ ، ...، $|x_n^N|$، وقتی N به‌اندازهٔ کافی بزرگ باشد، هر عدد بعدی، به‌اندازه‌ای از عدد قبلی کوچکتر است که در عبارت‌هایی که برای A_1، A_2، ...، A_n آوریم، می‌توان تنها جملهٔ اول را نگه‌داشت و از مجموع بقیهٔ جمله‌ها در برابر آن صرف‌نظر کرد. در این صورت این رابطه‌های تقریبی به‌دست می‌آید:

$$x_1^N \approx -A_1 \quad , \quad x_1^N x_2^N \approx A_2$$
$$x_1^N x_2^N x_3^N \approx -A_3 \quad , \quad \dots \quad , \quad x_1^N x_2^N x_3^N \dots\ x_n^N \approx \pm A_n$$

ویا با تقسیم متوالی دوبه‌دوی آن‌ها و گرفتن ریشهٔ Nام ، این رابطه‌ها برای محاسبهٔ ریشه‌ها

به‌دست می‌آید:

$$x_1 = \sqrt[N]{-A} \ , \quad x_2 = \sqrt[N]{-\frac{A_2}{A_1}} \ , \quad x_3 = \sqrt[N]{-\frac{A_3}{A_2}} \ , \quad \ldots \ , \quad x_n = \sqrt[N]{-\frac{A_n}{A_{n-1}}}$$

می‌توان ثابت کرد که ادامهٔ کار تا چندجمله‌ای که ضریب‌های آن، با تقریبی به دقت دل‌خواه، برابر مجذور ضریب‌های متناظر آن در چندجمله‌ای قبلی باشد، کافی است.

نمایه نام‌های خاص

فهرست عنوانهای جلد دوم «جوهر، روش و کارایی ریاضیات»

عنوان | **صفحه**

عنوان **صفحه**

فهرست عنوانهای جلد سوم «جوهر، روش و کارایی ریاضیات»

عنوان	صفحه

۶ ۸

شرکت انتشارات فنی ایران

شابک : ۰_۵۹_۶۲۳۲_۹۶۴

ISBN 964-6232-59-0

9789646232594

۲۰۰۰ تومان