کارنامهٔ دانشوران ایران و اسلام ۳۷

در قلمرو ریاضیات

بازنویسی و تلخیص کتاب مفتاح الحساب اثر غیاث‌الدّین جمشید کاشانی

به کوشش مهندس یونس کرامتی

در قلمرو ریاضیات

[بازنویسی و تلخیص کتاب مفتاح الحساب اثرِ

غیاث الدّین جمشید کاشانی]

ـ تألیف قرن نهم هجری ـ

به کوشش: مهندس یونس کرامتی

چاپ دوم

زمستان ۱۳۸۲

کارنامهٔ دانشوران ایران و اسلام
(۳۷)

مؤسسه فرهنگی

کرامتی، یونس، ۱۳۲۹ -
در قلمرو ریاضیات / به کوشش یونس کرامتی؛ زیر نظر اکبر ایرانی، علیرضا مختارپور؛ [برای] سازمان ملی جوانان.- تهران: اهل قلم، ۱۳۸۱.
۱۶۶ ص.: جدول، نمونه.
ISBN 964-5568-63-3
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
این کتاب بازنویسی و تلخیص کتاب «مفتاح الحساب» غیاث‌الدین جمشید کاشانی است.
۱. حساب - متون قدیمی تا قرن ۱۴. ۲. هندسه - متون قدیمی تا قرن ۱۴. ۳. نجوم - متون قدیمی تا قرن ۱۴. الف. غیاث الدین، جمشیدبن مسعود، - ۸۳۲ ق. مفتاح الحساب. ب. ایرانی، اکبر. ج. مختارپور، علیرضا. د. سازمان ملی جوانان. ه. عنوان. و. عنوان: مفتاح الحساب.
۵۱۲ ۲ د ۲ ک / ۱۰۱ QA
کتابخانه ملی ایران ۱۹۲۹۴ - ۸۱م

در قلمرو ریاضیات

[بازنویسی و تلخیص کتاب *مفتاح الحساب* اثرِ غیاث‌الدّین جمشید کاشانی]
- تألیف قرن نهم هجری -

به کوشش: مهندس یونس کرامتی
زیر نظر: اکبر ایرانی و علیرضا مختارپور

ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی اهل قلم
شمارگان: ۳۰۰۰ نسخه
چاپ دوم: زمستان ۱۳۸۲
لیتوگرافی؛ چاپ و صحافی: رویداد
شابک: ۳ - ۶۳ - ۵۵۶۸ - ۹۶۴

نشانی: تهران - ص. پ: ۳۹۶۸ - ۱۵۸۷۵
E-mail: Ahleqalam@yahoo.com

بها: ۱۳۵۰۰ ریال

تقدیم به:

«استاد پرویز شهریاری»

به پاس خدمات ایشان به دانش و فرهنگ ایران

مؤسسهٔ فرهنگی اهل قلم

بسم الله الرحمن الرحیم

مـطالعهٔ آثـار و دست‌نـوشته‌های بـه جـای مـانده (مـیراث مکـتوب) از اندیشمندان، نوابغ و مشاهیر مسلمان برای عموم مردم خصوصاً نسل آینده‌ساز، جوانانِ فرهیخته و فرهنگ‌دوست امروز ایران، ضروری است. زیـرا بـررسی آثـار علمی، ادبی، فکری و تاریخی اندیشمندان میهن اسلامی موجب می‌شود، تا آنان بـدانـند نـیاکـانشان از چـه پـیشینهٔ تـمدّنی درخشـانی بـرخـوردار بـوده، چگـونه می‌اندیشیده، چگونه می‌زیستند و چگونه توانستند تمام فـرهنگها بـویژه تـمدّن دنیای غرب را ـ چنانکه بزرگان آنها بارها اعتراف کرده‌اند ـ طیّ قرون پنجم تا نهم مدیون خود سازند و در علوم و فنون مختلف اعمّ از طب، ریاضی، فیزیک، شیمی، معماری و ادبیات پیشتاز همگان باشند.

این گذشتهٔ تابناک و غرورآفرین در آینهٔ کتیبه‌های سنگی و سفالینه‌ها و آثار منقوش بر لوحه‌ها و اسناد و نسخه‌های خطی نمایان و آشکار است. لیکن به رغم تلاشهای گسترده‌ای که برای معرّفی این آثار شده، باید اذعان نمود که این میراث گرانبها از دسترس و اطلاع نسل جوان امروز به دور مانده، به طوری که بسیاری از

جوانان این مرز و بوم حتّی اسامی برخی اندیشمندان شهیر هم وطن خود را که منشأ تحوّل دانش بشری بوده‌اند، نشنیده‌اند و آثار و کتابهای آنان را نمی‌شناسند.

خوشبختانه در عصر نظام شکوهمند اسلامی فرصتی پدید آمده است تا برای بازیابی هویّت فرهنگی و احیای تمدّن پرشکوه، اسلامی و ملّی تلاشهایی از سوی همه فرهنگ دوستان و فرهیختگان کشور صورت پذیرد. بی‌شک مهمترین هدف همه دست‌اندرکاران، هویت‌دار کردن نسل امروز و ایجاد ارتباط بین نسلها، بویژه با گذشتهٔ درخشان کشور است.

سازمان ملّی جوانان به عنوان دستگاه سیاستگذار در امور جوانان، از این حرکت فرهنگی غافل نمانده و در صدد برآمده است تا با همکاری و مشارکت مؤسسهٔ فرهنگی **اهل قلم**، زمینهٔ تلخیص، بازنویسی و تدوین و انتشار مجموعه‌ای از مهمترین و شاخصترین آثار کهن تأثیرگذار بر فرهنگ و تمدن ایران و جهان را برای جوانان علاقمند فراهم نماید.

امید است نسل جوان کشور با مطالعهٔ این آثار که متناسب با فهم و اطلاعات آنان است، با شناخت بیشتر از گذشتهٔ پرافتخار خود به سوی آینده‌ای روشنتر گام بردارند.

مؤسسهٔ فرهنگی اهل قلم — سازمان ملّی جوانان

فهرست تفصیلی

پیش‌گفتار

شیوهٔ نگارش کتاب حاضر

مقدمه

به نام خداوند جان و خرد   کزین برتر اندیشه برنگذرد

از سدهٔ ۱۸ میلادی بسیاری از پژوهشگران اروپایی به بررسی آثار علمی دانشمندان دورهٔ اسلامی توجه بسیار نشان دادند و کوشیدند با نشان دادن اهمیت علمی آثار دورهٔ اسلامی، تلاش‌های آنان را ارج نهند. اما متأسفانه تا به امروز کمتر کسی از میان ایرانیان، بدین کار مهم همت گمارده است. این مسأله هنگامی عجیب‌تر به نظر می‌رسد که بدانیم بسیاری از برجسته‌ترین دانشمندان دورهٔ اسلامی، ایرانی بوده‌اند. البته شادروان غلامحسین مصاحب در سال ۱۳۱۷ هجری شمسی با انتشار کتاب *جبر و مقابلهٔ خیام* و تجدید چاپ آن (با تغییرات بسیار و با نام *حکیم عمر خیام به عنوان عالم جبر*) در ۱۳۳۹ شمسی نخستین

گام جدی را در این راه برداشت. استاد گران‌مایه شادروان ابوالقاسم قربانی (که متأسفانه در آذر ماه ۱۳۸۰ به دیار باقی شتافت) نیز با نگارش چند کتاب مهم مانند *ریاضی‌دانان ایرانی*، *زندگی‌نامهٔ ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی*، *بوزجانی نامه* و بویژه *کاشانی نامه* گامی بلند در این راه برداشت. همچنین آقای مهندس محمد باقری با ترجمهٔ چند کتاب مهم تاریخ علم از عربی و انگلیسی به فارسی و نیز انتشار کتاب *از سمرقند به کاشان* در این راه کوششی قابل تقدیر داشته‌است. برخی پژوهشگران دیگر نیز به طور پراکنده آثاری در این زمینه منتشر ساخته‌اند. این تلاش‌ها هر چند همگی در خور ستایش‌اند، اما در مقابل کاری که باید صورت پذیرد اندک به نظر می‌رسند.

موضوع کتاب حاضر

تردیدی نیست که غیاث الدین جمشید کاشانی، زبردست‌ترین حساب‌دان و آخرین ریاضی‌دان برجستهٔ دورهٔ اسلامی و از بزرگ‌ترین مفاخر تاریخ ایران بشمار می‌آید. چنان که خواهیم دید بسیاری از شیوه‌های نوین اعمال اصلی حساب و روش‌های محاسبات عددی در حقیقت از ابتکارات او به شمار می‌رود. موضوع اصلی کتابی که اکنون پیش رو دارید، بازنویسی متن عربی *مفتاح الحساب* به زبان فارسی و بیان روابط آن به زبان ریاضی است؛ اما پیش از این کار، دربارهٔ زندگی و کارنامهٔ درخشان این دانشمند بزرگ بحث شده است. گفتنی است که بازنویسی و شرح دیگر آثار مهم کاشانی، به قلم نگارندهٔ این سطور در مجلدی دیگر از مجموعهٔ «کارنامهٔ دانشوران ایران و اسلام» منتشر خواهد شد.

شیوهٔ کار

در بازنویسی *مفتاح الحساب* کاشانی، چند هدف مد نظر بوده است:

۱. ترجمه و باز نویسی بخش‌هایی از کتاب به فارسی روان و بیان ساده‌تر برخی مطالب پیچیدهٔ کتاب.

۲. بازنویسی روابط ریاضی به زبان ریاضی کنونی.

۳. تعریف اصطلاحاتی که امروزه رایج نیستند.

۴. حفظ شیوهٔ کاشانی در حل مسائل تا حد امکان

۵. اشاره به نوآوری‌های کاشانی در *مفتاح الحساب*

۶. پرهیز از تکرار مگر در مواردی که موجب درک بهتر مطلب باشد

در نگارش این کتاب نشانه‌های زیر به کار رفته است:

برای مشخص کردن مطالبی که از کتاب کاشانی بازنویسی شده است.

برای مشخص کردن توضیحات بازنویسی کننده.

برای مقایسهٔ نظرات دانشمندان دیگر با نظرات کاشانی.

حرف ص و یک عدد در داخل پرانتز نشانهٔ صفحه‌ای از کتاب حاضر است. به طور مثال (ص۸۵) به معنی صفحهٔ ۸۵ همین کتاب است.

سپاسگزاری

هر چند در بازنویسی *مفتاح الحساب* بیشتر به متن عربی آن توجه داشته‌ام، اما از کتاب *کاشانی نامه*(بویژه بخش سوم آن)، نوشتهٔ شادروان استاد ابوالقاسم قربانی نیز بهرهٔ بسیار برده‌ام. گذشته از این، در مدت ۹ سالی که از نزدیک با

ایشان آشنا بودم و به منزلشان رفت و آمد داشتم، همیشه از راهنمایی‌های ارزشمند استاد بهره‌مند بودم و به قدر توان خویش از محضرشان سود جستم. افسوس که این دانشمند گران‌مایه امروز در میان ما نیست تا بتوانم از ایشان ایشان سپاسگزاری کنم. همچنین از دوست و همکارِ فاضل و ارجمندم، آقای مهندس محمد حسین احمدی که پس از مطالعهٔ دقیق و موشکافانهٔ این کتاب نکات ادبی و علمیِ سودمند بسیاری را یادآور شدند سپاسگزاری کنم. از برادرانم محسن و داریوش کرامتی نیز که پس از مطالعهٔ چند بارهٔ متن این کتاب، برخی نکاتی را به من گوشزد کردند متشکرم.

مرداد ماه ۱۳۸۱ هجری شمسی

یونس کرامتی

گفتار نخست

زندگی‌نامه و کارنامهٔ علمی غیاث الدین جمشید کاشانی

ایران در آستانهٔ تولد کاشانی

در اواخر قرن هشتم قمری، ایران یکی از بدترین دوران تاریخ خود را می‌گذراند. پس از سقوط دولت ایلخانیان (جانشینان چنگیز مغول) در ۷۳۶ قمری (۱۳۳۶ میلادی)، هر یک از فرمانروایان محلی، دولت‌های کوچکی در گوشه و کنار این سرزمین تشکیل داده بودند و تنها دغدغهٔ این به اصطلاح دولتمردان، افزودن شهری به متصرفات خود و چنگ انداختن به مالیات و دیگر منافع آن شهر بود. طبیعی است که در چنین شرایطی از هیچ یک از این «نو دولتان نو کیسه» انتظار نمی‌رفت که از دانشمندان و فرهیختگان عصر خود حمایت مادی و معنوی بکنند. از این رو، اگر استعداد درخشانی نیز در این سال‌ها پدید می‌آمد، کمتر اجازهٔ رشد می‌یافت. زیرا در روزگار قدیم پرداختن به علم و دانش

بدون کمک مالی و معنوی دولت‌مردان و ثروتمندان دانشور و دانش دوست تقریبا ناممکن بود. چه ابتدایی‌ترین وسایل مورد نیاز یک دانش‌پژوه یعنی کتاب، کاغذ، و قلم، چندان آسان به دست نمی‌آمد. ساخت کاغذ چندان ارزان تمام نمی‌شد و چاپ نیز هنوز اختراع نشده بود تا با کمک آن کتاب را با شمارگان (تیراژ) بسیار و بَهایی قابل قبول در دسترس دانش‌پژوهان قرار گیرد. از طرفی بحران‌های اجتماعی پی‌درپی، که در اواخر این قرن با یورش‌های وحشیانهٔ تیمور به اوج خود رسیده بود، به کمتر کسی فرصت می‌داد که به فعالیت علمی و پژوهشی بپردازد.

زندگی‌نامهٔ کاشانی

درست در بدترین سال‌های این روزگار سخت، یعنی در حدود سال ۷۹۰ قمری (۱۳۸۸ میلادی)، مردی در کاشان پا به عرصهٔ وجود نهاد که نه تنها در مدت عمر نسبتاً کوتاهش شهرتی عالم‌گیر یافت، که امروزه نیز زِبَردستی او در فن محاسبه و تیزهوشی ویژه‌اش در حل مسائل پیچیدهٔ ریاضی تحسین همهٔ پژوهشگران تاریخ ریاضیات، را برمی‌انگیزد. این مرد کسی نبود جز «جمشید ملقب به غیاث الدین»، فرزند پزشکی کاشانی به نام مسعود، که در همهٔ آثارش خود را چنین معرفی کرده است: «کمترین بندگان خداوند (یا نیازمندترین بندگان خدا به رحمت او)، جمشید، پسر مسعودِ طبیب کاشانی، پسر محمود پسر محمد».

تقریباً تمامی آنچه که از زندگی وی می‌دانیم از بررسی آثار علمی ارزندهٔ او و نیز دو نامه که خطاب به پدر خود و مردم کاشان نوشته به دست آمده است.

چنان‌که پیشتر نیز اشاره کردیم دورهٔ کودکی و جوانی وی درست مقارن اوج یورش‌های وحشیانهٔ تیمور به ایران بود. با این همه وی در همین شرایط نیز هرگز از آموختن علوم مختلف غافل نشد. پدرش مسعود، چنان‌که گفتیم، پزشک بود اما ظاهراً از علوم دیگر نیز بهرهٔ بسیار داشت. به طور مثال از یکی از نامه‌های کاشانی به پدرش معلوم می‌شود که پدر قصد داشته تا شرحی بر *معیار الاشعار* نصیر الدین طوسی بنویسد و برای پسر، یعنی جمشید بفرستد.

نخستین فعالیت علمی کاشانی که از تاریخ دقیق آن آگاهیم، رصد خسوف در ۱۲ ذیحجهٔ ۸۰۸ قمری، برابر با دوم ژوئن ۱۴۰۶ میلادی در کاشان است (وی در ۱۴ جمادی الثانی و ۲۰ ذیحجهٔ ۸۰۹ قمری برابر با ۲۶ نوامبر و ۲۲ مه ۱۴۰۷ میلادی این کار را تکرار کرد). غیاث الدین نخستین اثر علمی خود را در همین شهر و در ۲۱ رمضان ۸۰۹ قمری مطابق با اول مارس ۱۴۰۷ میلادی، یعنی ۲ سال پس از مرگ تیمور و فرو نشستن فتنهٔ او، نوشت. ۴ سال بعد در ۸۱۳ قمری هنوز در کاشان بود و رسالهٔ مختصری به فارسی دربارهٔ علم هیأت (کیهان شناسی) نوشت. در ۸۱۶ قمری کتاب نجومی مهم خود یعنی *زیج خاقانی* را به فارسی نوشت و به اُلُغْ بیگ، فرزند شاهرخ و نوهٔ تیمور، که در سمرقند به سر می‌برد، هدیه کرد. الغ بیگ، که در این هنگام تنها ۲۰ سال داشت، ۴ سال پیش از این، یعنی در ۸۱۲ قمری به فرمانروایی سمرقند و ماوراءالنهر رسیده بود. اما آوازهٔ دانش‌دوستی و دانش پروری وی حتی به کاشان نیز رسیده بود و کاشانی امید داشت که با حمایت وی بتواند با آسودگی بیشتر پژوهش‌های علمی خود را ادامه دهد. با این همه وی دست کم تا مدتی پس تألیف *تلخیص المفتاح*،

یعنی ۷ شعبان ۸۲۴ قمری مطابق با ۷ اوت ۱۴۲۱ میلادی، هنوز در کاشان به سر می‌برد. این نکته خود مایهٔ شگفتی بسیار است که چرا مردی دانشور چون الغ بیگ پس از مطالعهٔ *زیج خاقانی* به نبوغ کم نظیر مؤلف، یعنی کاشانی، پی نبرد! کاشانی در یکی از دو نامهٔ خود از یک سو تلویحاً از این‌که بسیار دیر مورد توجه دولت‌مردان قرار گرفته گلایه می‌کند و از سوی دیگر از این‌که پس از این مدت دراز به شهری چون سمرقند درآمده سر از پا نمی‌شناسد. وی در این نامه گفته است:

> مَردم سال‌ها سعی نمایند تا معاش ایشان و هنر ایشان در پیش مردمِ هم‌جنسْ نیکو نُماید. بلکه چُنان کنند که پیشِ مردمِ بزرگ نیز نیکو نماید. بِحَمْد الله و المَنّه که بعد از چندین مدت که در کنجِ خانه به سر برده بود، چون بیرون آمد، به چنان شهری مُعَظَّم و چُنین مردمی هنرمند و به حَضْرتِ (درگاه) چنان پادشاهی هنرمندِ دانا و عالِم رسید.

به هر حال کاشانی به احتمال قوی در ۸۲۴ قمری به همراه معین الدین کاشانی(همکار غیاث الدین در کاشان و سمرقند) از کاشان به سمرقند رفت و چنان که خود در نامه‌هایش کم و بیش اشاره کرده، در تأسیس رصد خانهٔ سمرقند نقش اصلی را ایفا نمود و از همان آغازِ کار، به ریاست آن‌جا برگزیده شد و تا پایان عمر نسبتاً کوتاه خود در همین مقام بود. وی سرانجام صبح روز چهارشنبه ۱۹ رمضان ۸۳۲ قمری مطابق ۲۲ ژوئن ۱۴۲۹ میلادی بیرون شهر سمرقند و در محل رصدخانه درگذشت.

نکته‌ای دربارهٔ درگذشت کاشانی

امین احمد رازی در کتاب *تذکرهٔ هفت اقلیم* دربارهٔ درگذشت کاشانی نوشته است (متن با اندکی تغییر نقل شده است):

> آورده‌اند که چون میرزا الغ بیگ گورکان خواست که کار رصد را آغاز کند، مولانا غیاث الدین جمشید را با اِعزاز و احترام طلب داشته و او را مصاحب و ملازم خویش قرار داد، اما چون مولانا در آداب و رسوم خدمت پادشاهان بسیار عاری (دور) افتاده بود، هر آینه آنچه آداب و روش مُلازِمَت (خدمت) بوده باشد از او به وقوع نمی‌پیوست (یعنی آداب دربار پادشاهان را نمی‌دانست و به آنها پایبند نبود) و جناب میرزا (الغ بیگ) از این رهگذر همواره مُکَدَّر بوده اظهار آزُردگی می‌فرمود. اما بنابر آن‌که معاملهٔ زیج بی‌وجود مولانا سِمَتِ اختتام نمی‌پذیرفت (از آنجا که بدون همکاری کاشانی کار رَصَد ستارگان بی‌سرانجام می‌ماند)، به ناچار بر سخنان گزنده و تلخ مولانا غیاث الدین صبر پیشه می‌کرد و همیشه می‌گفت: « این کار مهم (یعنی رَصَد) کِیْ به پایان می‌رسد تا من از رفتار و گفتار ناهنجار مولانا جمشید خلاص شوم» و بعضی باعث فوت مولانا را از جانب میرزا الغ بیگ می‌دانند.

به طور خلاصه، امین احمد رازی بر آن است که چون کاشانی چنان که باید و شاید آداب حضور در دربار را رعایت نمی‌کرده، الغ بیگ از وی آزرده خاطر بوده و تنها به خاطر نیازی که به وی داشته او را تحمل می‌کرده است و ظاهراً

سرانجام صبرش به سر آمده و به نوعی موجبات مرگ ناگهانی و زود هنگام وی را فراهم آورده و به عبارت بهتر فرمان به قتل او داده است.

هر چند به دشواری می‌توان پذیرفت که فرمانروایی دانشمند و دانش‌دوست چون الغ بیگ دست به چنین کار زشتی زده باشد، شواهدی نیز در دست است که می‌تواند به نوعی نشانهٔ درستی سخن امین احمد رازی باشد: نخست آن که خود کاشانی، همان گونه که سخنش را نیز نقل کردیم، به دوری از دربار پادشاهان و ناآشنایی با آداب درباری اشاره کرده است. گذشته از این، مرد فاضل و دانشمندی چون کاشانی که به همهٔ مسائل از دیدگاهی کاملاً علمی می‌نگریسته است، احتمالاً خود را چندان ملزم به رعایت مقام و منصب الغ بیگ نمی‌دانسته و حتی شاید گاهی اوقات برخی خطاهای علمی او را نیز به صراحت به وی یاد آور می‌شده است.

از سوی دیگر الغ بیگ در مقدمهٔ زیج خود، که البته نگارش آن بدون همکاری کاشانی، قاضی زاده (حدود ۷۶۶-۸۴۰ قمری، ریاضی‌دان و منجم ترک، و جانشین کاشانی در رصد خانهٔ سمرقند)، ملا علی قوشچی (جانشین قاضی‌زاده در رصدخانهٔ سمرقند) و دیگران ممکن نبود، گفته است:

> جِیب (معادل تابع ۶۰sin) یک درجه، که بنای عمل جدول جیب و ظِلّ (معادل تابع tg) بر آن است، تا به امروز هیچ کس به طریق برهان استخراج نکرده و همهٔ حُکَما تصریح کرده‌اند به آن‌که طریق عمل به استخراج آن نیافته‌اند و حیلت کرده‌اند (روش‌هایی به کار برده‌اند) تا به

تقریب به دست آورده‌اند، و ما به عنایت خداوند به طریق برهان آن مُلْهَم شدیم و در بیان آن کتابی جداگانه نوشتیم.

این در حالی است که همان گونه که کاشانی چند سال پیش از نگارش این مقدمه در رسالهٔ *وتر و جِیب*، جِیْب یک درجه را با روشی بسیار استادانه با دقتی تحسین برانگیز به دست آورده و نه تنها خود الغ بیگ و نزدیکانش، که اغلب دانشمندان دربار وی، به ویژه کسانی چونِ قاضی زاده و قوشچی از این موضوع آگاهی داشته‌اند. از این رو ادعای تعیین مقدار دقیق جیب یک درجه، از سوی هر شخصی به جز کاشانی، کاری غیر معقول بوده است و باید گفت که بی‌توجهی الغ بیگ به گزاف و نامعقول بودن این ادعا، خود مایهٔ حیرت بسیار است.

البته نگارندهٔ این سطور طی ماه‌های اخیر برای اولین بار به جزئیات روش مورد نظر الغ بیگ دست یافته و در ۸ خرداد سال ۱۳۸۱ در کنفرانس بین المللی عبد العلی بیرجندی دربارهٔ این روش و شباهت بسیار آن به روش کاشانی سخنرانی کرده است. نتیجهٔ این مقایسات حاکی از آن است که دو روشی که الغ بیگ برای محاسبهٔ سینوس یک درجه پیشنهاد داده اساساً همان روش کاشانی است با این تفاوت که دقت پاسخ‌های به دست آمده توسط الغ بیگ حتی کمتر از دقت پاسخ به دست آمده توسط کاشانی است! توضیحات بیشتر در این باره را به کتاب دیگری که به بازنویسی آثار دیگر کاشانی اختصاص یافته وامی‌گذاریم.

از این‌ها گذشته، از نامه‌های کاشانی به پدرش چنین برمی‌آید که پدر به دلایلی از سرنوشت فرزند خود در دربار الغ بیگ نگران بوده و در نامه یا نامه‌هایی، پسر را از خطرات معمول در دربار پادشاهان برحذر داشته و کاشانی نیز

در پاسخ برای کاستن از نگرانی‌های پدر، نمونه‌های متعددی از توجه خاص الغ بیگ به خود را برای پدر شاهد آورده است.

نوآوری‌های کاشانی و شخصیت علمی او

مهم‌ترین نوآوری‌های کاشانی از این قرار است:

۱. اختراع کسرهای دهگانی (اعشاری): گرچه کاشانی نخستین به کار برندهٔ این کسرها نیست، اما بی‌تردید رواج این کسرها را به او مدیونیم. در گفتار نهم این کتاب (ص ۱۴۹ به بعد) به تفصیل در این باره سخن خواهیم گفت.

۲. دسته بندی معادلات درجهٔ اول تا چهارم: این مبحث به علت اهمیت ویژه‌اش در مجلد دیگری که به بازنویسی آثار کاشانی اختصاص یافته بررسی خواهد شد.

۳. حل عددی معادلات درجهٔ چهارم و بالاتر: این موضوع را نیز در کتاب یاد شده در بالا توضیح داده خواهد شد.

۴. محاسبهٔ عدد π : کاشانی در *الرسالة المُحیطیة*(ص۲۸)، عدد π را با دقتی که تا ۱۵۰ سال پس از وی بی نظیر ماند محاسبه کرده است. وی نخست این عدد را در دستگاهِ شمارِ شَصْتگانی به دست آورده و سپس برای کسانی که حساب شصتگانی نمی‌دانند، مقدار 2π را در دستگاه ده‌دهی و با استفاده از کسرهای دهگانی برابر ۶/۲۸۳’۱۸۵’۳۰۷’۱۷۹’۵۸۶’۵ ثبت کرده که تمامی ارقام آن درست است. گفتنی است که امروزه در ماشین‌حساب‌های مهندسی معمولی و نیز برنامهٔ ماشین حساب ویندوز ۹۸ (calc.exe) این مقدار معمولاً برابر ۶/۲۸۳’۱۸۵’۳۰۷’۱۷۹’۵۸۶’۴۷۶’۹۲۵’۲۸۶’۷۶۶’۵۵۹’۰۱ در نظر گرفته

می‌شود که اگر بخواهیم آن را با تقریب کمتر از 10^{-13} گرد کنیم، رقم سیزدهم اعشار آن ۶ خواهد شد، در حالی که کاشانی آن را ۵ ثبت کرده است.

۵. تکمیل و تصحیح روش‌های قدیمی انجام چهار عمل اصلی و اختراع روش‌های جدیدی برای آنها: چنان که خواهیم دید کاشانی را باید مخترع روشهایی دانست که امروزه برای انجام چهار عمل اصلی حساب (بویژه ضرب و تقسیم) به کار می‌رود.

۶. اختراع روش کنونی پیدا کردن ریشهٔ n اُم عدد دلخواه. روش کاشانی اساساً همان روشی است که صدها سال بعد توسط پائولو روفینی (ریاضی‌دان ایتالیایی، ۱۷۶۵-۱۸۲۲میلادی)، و ویلیام جُرج هارنر (ریاضی‌دان انگلیسی،۱۷۸۶-۱۸۳۷میلادی)، مجدداً اختراع شد و روش روفینی - هارنر نام گرفت.

۷. اختراع روش کنونی پیدا کردن جذر (ریشهٔ دوم) که در اصل ساده شدهٔ روش پیدا کردن ریشهٔ n اُم است.

۸. ساخت یک ابزار رصدی: کاشانی ابزارِ رصدی جالبی اختراع کرد و آن را طَبَقُ المَناطِقْ نامید. رساله‌ای نیز به نام *نُزْهَةُ الحَدائِق* دربارهٔ طرز کار آن نوشت (ص۲۶).

۹. تصحیح *زیج ایلخانی*: کاشانی *زیج خاقانی* را نیز در تصحیح اشکالات *زیج ایلخانی* نوشت(ص۲۵).

۱۰. نگارش مهم‌ترین کتاب دربارهٔ حساب: کتاب *مفتاح الحساب* کاشانی مهم‌ترین و مفصل‌ترین اثر دربارهٔ ریاضیات عملی و حساب در دورهٔ اسلامی

است. در این کتاب به تفصیل دربارهٔ نکات جالب توجه *مفتاح الحساب* سخن خواهیم گفت.

۱۱. محاسبهٔ جِیْب یک درجه: کاشانی در رسالهٔ *وَتَر و جِیب* (ص۲۹) مقداری برای جِیْبِ یک درجه ($60 \sin 1^\circ$) به دست آورده که اگر آن را بر ۶۰ تقسیم کنیم مقدار ۰/۰۱۷٬۴۵۲٬۴۰۶٬۴۳۷٬۲۸۳٬۵۱۰٬۳۷۱٬۲ به دست خواهد آمد که تا ۱۷ رقم اعشاری با مقدار واقعی سینوس یک درجه موافق است. امروزه در ماشین‌حساب‌های مهندسی و نیز برنامهٔ ماشین حساب ویندوز ۹۸ این مقدار معمولاً برابر ۰/۰۱۷٬۴۵۲٬۴۰۶٬۴۳۷٬۲۸۳٬۵۱۲٬۸۱۹٬۴۱۸۹۷۸۵۱۶۳۱۶۲ در نظر گرفته می‌شود.

نظرات دانشمندان معاصر دربارهٔ اهمیت آثار کاشانی

چنان‌که خواهیم دید کاشانی برجسته‌ترین ریاضی‌دان عصر خود بوده است. اهمیت آثار وی موجب شد که چند تن از پژوهشگران برجستهٔ تاریخ علم آثار وی را به زبان‌های زندهٔ اروپایی ترجمه کنند. در این جا به نظرات برخی از آنان دربارهٔ اهمیت آثار کاشانی اشاره می‌کنیم.

نظر لوکی: پاول لوکی، پژوهشگر برجستهٔ آلمانی که بیش از هر مورخ دیگری در راه شناساندنِ اهمیت آثار ریاضی این دانشمند بزرگ به جهان علم کوشش کرده، دربارهٔ آثار کاشانی چنین آورده است:

> پس از پژوهش دربارهٔ برخی آثار کاشانی، که خوشبختانه بیشتر آنها در کتابخانه‌های شرق و غرب موجود است، او را ریاضی‌دانی هوشمند،

مخترع، نَقّاد و صاحب افکار عمیق یافتم. کاشانی از آثار ریاضی‌دانان پیش از خود آگاه و بویژه در فن محاسبه و به کار بستن روش‌های تقریبی متبحر و چیره دست بوده است. اگر *رسالۀ محیطیۀ* او به دست ریاضی‌دانان غربی معاصر وی رسیده بود، از آن پس مردم مغرب زمین از بعضی منازعات و تألیفات مبتذل دربارۀ اندازه‌گیری دایره (=محاسبۀ عدد π) بی‌نیاز می‌شدند. اگر نظریۀ واضح و روش علمی وی در مورد شناساندن کسرهای اعشاری انتشار یافته بود، فرانسوا وی‌یِت، اِستِوِن، و بورگی ناچار نمی‌شدند که یک قرن و نیم پس از کاشانی نیروی فکری و عملی خود را برای از نو یافتن این کسرها به کار اندازند.

وی در مقدمۀ ترجمۀ آلمانی *رسالۀ محیطیه* نیز چنین گفته است:

رسالۀ محیطیۀ کاشانی شاهکاری در فن محاسبه در دستگاه شمار شصتگانی است. کاشانی در آغاز این رساله با بیانی فصیح و روشن از ارشمیدس، از رساله‌ای که دربارۀ محاسبۀ محیط دایره به ابوالوفای بوزجانی منسوب است و نیز از ابوریحان بیرونی گفتگو می‌کند و سپس به محاسباتی می‌پردازد که نظم و ترتیب در آن مراعات شده و ماهرانه مدون گردیده است. کاشانی طی این محاسبات به کمک دو چند ضلعی منتظم محاطی و محیطی که هر یک $۸۰۵'۳۰۶'۳۶۸ = ۳\times۲^{۲۸}$ ضلع دارند، نسبت محیط دایره را به قطر آن، بسیار دقیق‌تر از آنچه پیشینیان وی توانسته‌اند به دست می‌آورد. از شیوۀ کاشانی در حساب شصتگانی، و روشی که در بازبینی عملیات و تخمین خطاهای محاسبه به کار می‌بندد،

می‌توان به آنچه در قلمرو علم حساب تا زمان کاشانی حاصل شده بود و نقایصی که هنوز وجود داشت پی برد. کاشانی مقدار تقریبی 2π را در دستگاه شمار شصتگانی برابر ۶;۱۶,۵۹,۲۸,۱,۳۴,۵۱,۶۴,۱۴,۵۰ به دست آورده که تمامی ارقام آن درست است (دربارهٔ چگونگی ثبت اعداد در دستگاه شصتگانی به گفتار ششم،ص۱۱۳ به بعد، مراجعه کنید).

لوکی در ادامهٔ سخن خود، به تبدیل این عدد به دستگاه اعشاری و اختراع کسرهای اعشاری توسط کاشانی اشاره کرده که این مبحث را به لحاظ اهمیت بسیار در کتابی جداگانه خواهیم آورد.

نظر کِندی: اِدوارد اِستوارت کِندی، محقق برجستهٔ آمریکایی، که مدتی نیز در ایران می‌زیسته و با زبان فارسی آشنایی دارد دربارهٔ وی چنین گفته است:

پیش از هر چیز باید گفت که کاشانی حاسِبی زبردست بود و در این فن مهارت خارق العاده داشت. و شاهد این مدعا این است که وی با اعداد شصتگانی خالص به آسانی و روانی حساب می‌کرد. کسرهای اعشاری را اختراع نمود، روش تکراری را در حساب به طور کامل و پیگیر به کار می‌بست. با چیره دستی مراحل محاسبه را طوری تنظیم می‌نمود که بتواند حداکثر مقدار خطا را پیش‌بینی کند و در هر جا صحت اعمال را امتحان می‌کرد. ابزار نجومی «طبق المناطق» که وی اختراع کرد، نمایندهٔ کامل‌ترین پیشرفتی است که برای این دسته افزارهای نجومی حاصل شده است. گذشته از این طبق المناطق تنها افزار مکانیکی بود که تعیین عرض‌های سیارات را ممکن می‌ساخت. حتی اگر دربارهٔ عملی

بودن نتایجی که از این آلت حاصل می‌شود با قید احتیاط بیندیشیم، در باب مهارتی که از جهت هندسی در آن به کار رفته است شک و تردید نمی‌توان داشت.

کندی در ادامه، دربارهٔ جایگاه کاشانی در تاریخ علم نجوم چنین گفته است:

چنین به نظر می‌رسد که کاشانی در کار رصد و نجوم فَنّی، کاملاً صاحب صلاحیت بوده و در این باره نه نسبت به زمان خود پیشی داشته و نه از آن عقب‌تر بوده است. دربارهٔ هیأت کاشانی (نظریهٔ وی دربارهٔ حرکت سیارات) نیز می‌توان همین گونه حکم کرد. او بی هیچ قید و شرطی این دیدگاه را که در *المجسطی* (کتاب نجومی بطلمیوس) نیامده می‌پذیرد: «زمین در مرکز گیتی، ثابت است، و ستارگان، ماه، خورشید، و ۵ سیاره دیگر (۵ سیارهٔ شناخته شده تا آن زمان) روی نوارهای پیوسته‌ای گرد زمین می‌چرخند». از این رو کاشانی اندازه‌گیری فواصل نجومی، مثلاً فاصلهٔ متوسط میان زمین و زحل را با واحدهای زمینی امکان پذیر می‌داند (یعنی این فاصله را بسیار کمتر از آنچه هست تصور می‌کند) پس معاصران وی که او را «بطلمیوس ثانی» نامیده‌اند زیاد سخاوت به خرج داده‌اند. اما نسل بعدی نیز که یکی از ریاضی‌دانان خود (ملا علی محمد اصفهانی، پدر نجم الدوله) را «غیاث الدین جمشید ثانی» خوانده‌اند، نسبت به میزان معلومات آن ریاضی‌دان (یعنی ملا علی محمد) زیاد خوشبین بوده‌اند!

از سخنان کندی درمی‌یابیم که کاشانی در نجوم نظری، بر خلاف ریاضیات، نوآوری نداشته تنها به پیروی از نظریات دانشمندان پیشین پرداخته است.

کارنامهٔ کاشانی

تقریباً همهٔ آثار ریاضی کاشانی از اهمیت بسیار برخوردارند و به همین لحاظ بسیاری از پژوهشگران دو سدهٔ اخیر دربارهٔ آنها به تحقیق پرداخته‌اند. در این کتاب تنها دربارهٔ *مفتاح الحساب* و *تلخیص المفتاح* کاشانی به تفصیل سخن خواهد رفت و دیگر آثار وی به اختصار معرفی خواهند شد. بررسی اهمیت علمی و بازنویسی آثار دیگر کاشانی (به ویژه *رسالهٔ محیطیه* و *وتر و جیب*) در مجلد دیگری از مجموعهٔ «کارنامهٔ دانشوران ایران و اسلام» به زودی منتشر خواهد شد.

۱. *سُلَّمُ السّماء* (نردبان آسمان) یا *رسالهٔ کمالیه* به عربی: کاشانی این رساله را در ۲۱ رمضان ۸۰۹ قمری (اول مارس ۱۴۰۷ میلادی) در کاشان به پایان رسانده است. کاشانی در این رساله از قطر زمین، و نیز قطر خورشید، ماه، سیارات، و ستارگان و فاصلهٔ آنها از زمین سخن گفته است.

۲. *مختصر در علم هیأت* به فارسی: کاشانی این رساله را در ۸۱۳ قمری برابر با ۱۴۱۰ میلادی، یا اندکی پیش از آن تألیف و آن را به «سلطان جلال الدین امیرزاده، اسکندر بهادرخان» هدیه کرده است. کاشانی در این رساله دربارهٔ مدراهای ماه، خورشید، ستارگان، و سیارات و چگونگی حرکت آنها سخن گفته است (فراموش نکنیم که وی مانند دانشمندان پیش از خود، می‌پنداشت که

تمامی ستارگان و سیارات، گِرد زمین می‌گردند). تعریف دایره‌های عظیمه (در باب سوم) و قوس‌های مهم (در باب چهارم) و شناختن خطّ نصف النهار و سمت قبله (در باب پانزدهم) از بخش‌های جالب این اثر است.

۳. *زیج خاقانی* به فارسی: این کتاب یکی از آثار مهم نجومی کاشانی به شمار می‌رود. کاشانی این زیج را در ۸۱۶ قمری (۱۴۱۳ میلادی) کامل کرده و آن را به الغ بیگ فرزند شاهرخ تیموری (ملقب به خاقان) تقدیم کرده است. در این هنگام نزدیک به ۴ سال از فرمانروایی الغ بیگ بر ماوراء النهر می‌گذشت. هدف کاشانی از نگارش این زیج، تصحیح اشتباهاتی است که در *زیج ایلخانی* روی داده است. *زیج ایلخانی* که در حدود ۶۷۰ قمری توسط خواجه نصیر الدین طوسی نوشته شده بود، حاصل ۱۲ سال تلاش نصیر الدین طوسی و همکارانش در رصدخانهٔ مراغه بود. کاشانی در مقدمهٔ زیج خود با به رغم انتقاد از مطالب *زیج ایلخانی*، از مؤلف آن، خواجه نصیرالدین طوسی، با تجلیل و احترام بسیار یاد کرده است.

۴. *شرح آلات رَصَد* به فارسی: کاشانی این رساله را در ذیقعدهٔ ۸۱۸ قمری(ژانویهٔ ۱۴۱۶ میلادی) برای شخصی به نام سلطان اسکندر نوشته است. برخی این اسکندر را «اسکندر بن قرایوسف قراقویونلو» دانسته‌اند. اما برخی دیگر، معتقدند که این اسکندر، پسر عموی الغ بیگ است که بر فارس و اصفهان حکومت می‌کرده و درست در سال تألیف این اثر درگذشته است. به نظر می‌رسد حدس دوم درست‌تر از حدس نخست باشد.

۵. *نُزهَةُ الحَدائِق* به عربی: کاشانی این رساله را در دهم ذیحجهٔ ۸۱۸ قمری مطابق ۱۰ فوریهٔ ۱۴۱۶ میلادی (حدود یک ماه پس از نگارش رسالهٔ شرح آلات رصد) نوشته و در آن دستگاهی به نام طبق المناطق را که اختراع خود وی بوده، شرح داده است. با این دستگاه می‌توان محل ماه و خورشید و پنج سیارهٔ شناخته شده تا آن زمان و نیز فاصلهٔ هر یک از آنها را تا زمین، و برخی پارامترهای سیاره‌ای دیگر را به دست آورد.

ذِیلِ *نزهة الحدائق*:کاشانی در نیمهٔ شعبان ۸۲۹ قمری (۲۲ ژوئن ۱۴۲۶ میلادی)، و هنگامی که در سمرقند اقامت داشته، ده «اِلْحاق» (پیوست) را به *نزهة الحدائق* افزوده است.

۶. *تَلخیصُ المِفْتاح* به عربی: این رساله، چنان که از نامش پیداست گزیدهٔ *مفتاح الحساب* کاشانی است. کاشانی کار تلخیص را در ۷ شعبان ۸۲۴ قمری (۷ اوت ۱۴۲۱ میلادی) به پایان رسانده است. وی در مقدمهٔ این رساله پس از ستایش خداوند چنین آورده است:

> اما بعد، نیازمندترین بندگان خداوند به بخشایش وی، «جمشید ملقب به غیاث، پسر مسعودِ پزشک کاشانی، پسر محمود» که خداوند روزگارش را نیکو گرداند، گوید که چون از نگارش کتابم موسوم به *مفتاح الحساب* فارغ شدم، آن دسته از مطالب این کتاب را که دانستن آنها برای نوآموزان واجب است در این مختصر گرد آوردم و آن را *تلخیص المفتاح* نامیدم. و این گزیده را در سی فصل قرار دادم.

کاشانی در این رساله معمولاً بخش‌هایی از *مفتاح الحساب* را عیناً نقل کرده، اما در مواردی، با توجه به این که کتاب برای نوآموزان نوشته شده، برخی توضیحات را افزوده و در چند مورد به جای مثال‌های *مفتاح الحساب*، مثال‌های ساده‌تری را آورده است.

عناوین فصل‌ها: ترجمهٔ فارسی عنوان فصل‌های *تلخیص المفتاح* چنین است:

۶-۱. در چگونگی نوشتن اعداد و مراتب آنها (توضیح دستگاه شمار دهگانی با ارزش مکانی).

۶-۲. در تضعیف (دو برابر کردن اعداد).

۶-۳. در تنصیف (نصف کردن اعداد).

۶-۴. تا ۶-۷. چهار عمل اصلی (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم).

۶-۸. در بیرون آوردن جذر اعداد.

۶-۹. در میزان‌ها (آزمایش درستی اعمال مختلف حساب).

۶-۱۰. در تعریف کسرها و چگونگی نوشتن آنها.

۶-۱۱. در شناختن تداخل و تشارک و تباین.

۶-۱۲. در تَجْنیس (تبدیل اعداد مرکب به کسر).

۶-۱۳. در رَفْع (عکس عمل تجنیس).

۶-۱۴. در گرفتن کسرهای مختلف از یک مخرج (مخرج مشترک).

۶-۱۵. تا ۶-۲۱. دربارهٔ تضعیف و تنصیف اعداد کسری و جمع، تفریق، ضرب، تقسیم کسرها و نیز پیدا کردن جذر اعداد کسری.

۶-۲۲. در تحویل کسر از یک مخرج به کسر دیگر.

۶-۲۳. در مساحت سطوح مستوی (مسطح) که محیط آنها از پاره‌خط‌های راست پدید آمده باشد.

۶-۲۴. در مساحت دایره و قطعهٔ دایره.

۶-۲۵. در مساحت سطوح مستدیر مانند استوانه و مخروط.

۶-۲۶. در اندازه گیری حجم اجسام.

۶-۲۷. در آنچه برای شروع مسائل (معادلات) شش‌گانهٔ جبری (صورت‌های مختلف معادلات درجهٔ اول و دوم) لازم است.

۶-۲۸. در ذکر مسائل شش‌گانهٔ جبری.

۶-۲۹. در خطأین

۶-۳۰. در یادکرد برخی قواعد که حسابگر به آنها نیاز دارد.

نسخه‌های خطی و چاپی: این رساله تا کنون به چاپ نرسیده اما چند نسخهٔ خطی آن در کتابخانه‌های مختلف موجود است. گفتنی است که نگارندهٔ این سطور، به زودی متن عربی این رساله را از روی نفیس‌ترین نسخهٔ خطی آن، که به خط معین الدین کاشانی است(ص۲۹ به بعد)، با حواشی و توضیحات مفصّل منتشر خواهد ساخت.

۷. *الرِسالةُ المُحیطیة* به عربی که برای سادگی آن را *رسالهٔ مُحیطیه* می‌نامیم: کاشانی این رساله را که یکی از مهم‌ترین آثار اوست در اواسط شعبان ۸۲۷ قمری (ژوئیهٔ ۱۴۲۴ میلادی) به پایان رسانده است. کاشانی در این رساله نسبت محیط دایره به قطر آن، یعنی عدد π را به دست آورده است.

۸. *مِفْتاحُ الحِساب* که در این کتاب به تفصیل بدان خواهیم پرداخت.

۹. *وَتر و جَیب*: کاشانی این رسالهٔ را دربارهٔ چگونگی محاسبهٔ جیب یک درجه ($60\sin 1^{\circ}$) نوشته است. متأسفانه متن اصلی این رساله باقی نمانده اما از شرح‌هایی که بر آن نوشته‌اند می‌توان به مطالب آن پی برد.

۱۰. *زیج تَسهیلات*: کاشانی این اثر را پیش از ۸۳۰ قمری تألیف کرده است زیرا در مقدمهٔ *مفتاح الحساب* از این کتاب نام برده(ص۳۶) ولی تا کنون وجود نسخه‌ای قطعی از آن گزارش نشده است.

مجموعهٔ خطی نفیس آثار کاشانی

نسخهٔ خطی شمارهٔ ۳۱۸۰ کتابخانهٔ ملی مَلِک (واقع در تهران) مجموعهٔ نفیسی از آثار غیاث الدین جمشید کاشانی و چند رسالهٔ دیگر است که همگی به خط معین الدین کاشانی است. آثار مندرج این مجموعه عبارت‌اند از:

۱. *مفتاح الحساب* (ص۳۱ به بعد)که در رجب ۸۳۰ قمری (یعنی تنها دو ماه پس از تألیف کتاب) در سمرقند کتابت شده است.

۲. بندی دربارهٔ نسبت قطر به محیط که از روی *الرسالة المحیطیة* (ص۲۸) نوشته شده است (یک صفحه).

۳. *تلخیص المفتاح* (ص۲۶ به بعد) که در نیمهٔ شعبان۸۳۰ قمری، یعنی تنها ۸ روز پس از تألیف کتاب، در کاشان کتابت شده و در سمرقند با دست‌نوشتهٔ غیاث الدین مقابله و برخی مواضع آن تصحیح شده است.

۴. *سُلّم السماء* (ص۲۴) که در صفر ۸۳۰ قمری در سمرقند از روی دست‌نوشتهٔ مؤلف کتابت و با آن مقابله شده است.

۵. *نزهة الحدائق* (ص۲۶)که احتمالا در شعبان ۸۳۰ قمری نوشته شده است.

۶. ذیل *نزهة الحدائق* (ص۲۶) که شعبان ۸۳۰ قمری، یعنی درست یک سال پس از نگارش این الحاقات، در سمرقند و به احتمال قوی از روی دست‌نوشتهٔ مؤلف کتابت شده است.

۷. *رسالة فی استخراج جیب درجة واحدة* نوشتهٔ قاضی زادهٔ رومی. این رساله همان رساله‌ای است که قاضی زاده بر اساس رسالهٔ *وتر و جیب* کاشانی(ص۲۹) نوشته است. این رساله نیز در ۸۳۶ قمری در سمرقند کتابت شده و تاریخ کتابت آن فاصلهٔ چندانی با تاریخ تألیف ندراد. زیرا قاضی زاده این رساله را پس از مرگ کاشانی و در نتیجه پس از ۸۳۲ قمری نوشته است.

با توجه به این که تاریخ کتابت این آثار چند سالی با یکدیگر تفاوت دارد، می‌توان دریافت که معین الدین کاشانی این رساله‌ها را برای خود رونویسی کرده است. ناگفته پیداست که این رساله‌ها گذشته از آن که کهن‌ترین نسخ موجود آثار کاشانی به شمار می‌روند، از لحاظ دقت نیز اهمیت بسیار دارند. زیرا همهٔ آنها توسط یک شخص متخصص (یعنی معین الدین) رونویسی شده و طبعاً اشتباهات رایج در نسخه‌های خطی، که بیشتر از بی‌سوادی کاتب ناشی می‌شده است، در این مجموعه دیده نمی‌شود.

گفتار دوم

ویژگی‌ها و اهمیت *مفتاح الحساب*

تاریخ تألیف *مفتاح الحساب*

کاشانی کار نگارش *مفتاح الحساب* را، که بی‌تردید مهم‌ترین، مفصل‌ترین و برجسته‌ترین کتابِ ریاضیات عملی در دورهٔ اسلامی بشمار می‌آید، در ۳ جمادی الاولی سال ۸۳۰ قمری برابر با ۲ مارس ۱۴۲۷ میلادی به پایان رسانده و آن را به الغ بیگ هدیه کرده است. اما پیش نویس این کتاب را دست کم از ۶ سال پیش، یعنی ۸۲۴ قمری فراهم آورده و در این مدت، مشغول تکمیل و اصلاح آن بوده است. زیرا او در مقدمهٔ *تلخیص المفتاح* که در همین سال نوشته شده، تأکید کرده که این تلخیص را پس از به پایان رساندن تألیف *مفتاح الحساب* فراهم آورده است (ص۲۶).

اهمیت *مفتاح الحساب* نزد پژوهشگران معاصر

آدُلف یوشکویچ، پژوهشگر مشهور روسیه در کتاب *تاریخ ریاضیات در سده‌های میانه* در این باره می‌نویسد:

> *مفتاح الحساب* کتابی درسی، دربارهٔ ریاضیات مقدماتی است که استادانه تألیف شده و مؤلف آنچه را که طبقات مختلف خوانندگان کتاب بدان نیاز داشته‌اند، در نظر گرفته است. این کتاب از حیث فراوانی و تنوع مواد و مطالب و روانی بیان تقریباً در همهٔ آثار ریاضی سده‌های میانه یگانه است.

یولیوس روسکا (Julius Ruska)، محقق برجستهٔ تاریخ علم نیز نام *مفتاح الحساب* را در ضمن آن دسته از آثار ریاضی دورهٔ اسلامی ثبت کرده است که ترجمه و انتشار آنها به زبان اروپایی باید در اولویت قرار گیرد.

برای نشان دادن اهمیت *مفتاح الحساب* کاشانی نزد شرق شناسان، بویژه محققان اروپایی، در این‌جا به چاپ‌های مختلف متن عربی و ترجمه‌های این اثر اشاره می‌کنیم:

۱. در ۱۸۶۴ میلادی فرانتس ووپکه، محقق آلمانی الاصل ساکن فرانسه، بخشی از این کتاب را به فرانسه ترجمه کرد.

۲. در ۱۹۴۴ میلادی، پاول لوکی بخش قابل توجهی از *مفتاح الحساب* را به آلمانی ترجمه و شرح کرد. این ترجمه نیز، همچون ترجمهٔ *رسالهٔ محیطیه*، پس از مرگ لوکی و در سال ۱۹۵۱ میلادی منتشر شد. وی همچنین مقالهٔ مهمی دربارهٔ روش کاشانی در پیدا کردن ریشهٔ n اُم اعداد نوشت.

۳. در ۱۹۵۱ میلادی نائلهٔ رجایی در پایان‌نامهٔ دورهٔ دکترای خود در دانشگاه آمریکایی بیروت، با استفاده از مطالب *مفتاح الحساب* و *رسالهٔ محیطیه* به بحث دربارهٔ اختراع کسرهای اعشاری توسط کاشانی پرداخت.

۴. در همان سال و در همان دانشگاه، عبدالقادر الداخل نیز در پایان‌نامهٔ دکترای خود روش کاشانی دربارهٔ پیدا کردن ریشهٔ n اُم در دستگاه شمار شصتگانی (گفتار ششم کتاب حاضر) را بررسی کرد.

۵. در ۱۹۵۶ میلادی نیز برویس رُزنفلد، آدُلف یوشکِویچ، و سِگال، تصویر یک نسخهٔ خطی این اثر (تصویر ۴ پایان کتاب) و نیز تصویر یک نسخهٔ خطی رسالهٔ محیطیهٔ را همراه با ترجمهٔ روسی آن در مسکو به چاپ رساندند (تصویر ۳ و تصویر ۵)

۶. در ۱۹۶۷ میلادی احمد سعید الدمرداش و محمد حمدی الحفنی الشیخ، متن عربی این کتاب را در قاهره به چاپ رساندند (تصویر ۷). غلط‌های این چاپ حتی از غلط‌های نسخهٔ خطی چاپ مسکو بیشتر است.

۷. در ۱۹۷۷ میلادی نادر النابلسی یک بار دیگر تمامی این کتاب را با حواشی نسبتاً سودمند و با دقتی بیشتر از دو مصحح قبلی در دمشق به چاپ رساند (تصویر ۶).

گفتنی است که در هیچ یک از ترجمه‌ها یا چاپ‌های یاد شده از نسخهٔ خطی کتابخانهٔ ملی ملک، که کهن‌ترین و بهترین نسخهٔ موجود *مفتاح الحساب* به بشمار می‌آید استفاده نشده است(ص۲۹ به بعد، نیز تصویر ۱ و تصویر ۲).

گفتار سوم

دیباچهٔ *مفتاح الحساب*

به نام خداوند بخشندهٔ مهربان

ستایش خداوندی را سزاست که در آفرینش یِک‌ها، یگانه و در به هم آمیختن اعداد گوناگون بی‌همتا است. و درود بر بهترین آفریدهٔ او محمد(ص) که والاترین شفیع روز رستاخیز است و درود بر خاندان او و فرزندانش که راه‌های رهایی و رستگاری را نشان می‌دهند.

اما بعد، نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آمرزش و بخشش او، جمشید ملقب به غیاث، پسر مسعودِ پزشکِ کاشانی، پسر محمود، که خداوند روزگارش را نیکو گردانَد، چنین گوید: چون در فراگیری اعمال حساب و قوانین هندسه کوشش بسیار کردم، به حقایق آن رسیدم و از نکات باریک آن آگاه شدم. پیچیدگی‌ها و دشواری‌های مسائل آن را از میان برداشتم و قوانین و دستورهای بسیاری در آن یافتم که به دست آوردن آنها برای حساب‌دانان پیش از من بسیار

دشوار بود. آنگاه همهٔ جدول‌های *زیج ایلخانی* را از نو با دقیق‌ترین شیوه استخراج کردم و *زیج خاقانی* را در تکمیل *زیج ایلخانی* وضع کردم. و آنچه را که خود از کارهای ستاره شناسان دیگر دریافته بودم و در زیج‌های دیگر اثری از آنها نبود در این زیج گرد آوردم. نیز *زیج تسهیلات* و جدول‌های گوناگون دیگری را فراهم آوردم و چند رسالهٔ دیگر نیز تألیف کردم مانند رسالهٔ موسوم به *سُلَّم السماء* در حل دشواری‌هایی که برای پیشینیان در اَبعاد و اَجرام (اندازهٔ اجرام آسمانی و فاصلهٔ آنها از یکدیگر) رخ داده بود، و *الرِسالةُ المُحیطیة* دربارهٔ نسبت قطر دایره به محیط آن، و رسالهٔ *وَتَر و جَیب* در استخراج وتر و جیب یک سوم «قوسی که وتر و جیب آن معلوم باشد»(یعنی محاسبهٔ $\sin\alpha$ از روی $\sin ۳\alpha$). این نیز از مسائلی بود که بر پیشینیان دشوار بوده است، چنان‌که بطلمیوس گفته است که برای به دست آوردن آن راهی نیست. و ابزاری رصدی، موسوم به «طبق المناطق» اختراع کردم و کتاب *نُزهَةُ الحَدائِق* را در چگونگی و ساختن و شناختن آن نوشتم. و آن ابزاری است که تقاویم و عرض‌های ستارگان هفت‌گانه (یعنی خورشید، ماه و پنج سیارهٔ شناخته شده در آن زمان)، و دوری آنها از زمین و رجوع آنها و کسوف و خسوف و آنچه متعلق به آنها است، از روی آن به دست می‌آید. همچنین جواب‌های مسائل بسیاری را که محاسبان زبردست برای آزمودن من، یا برای آموختن خود، با من در میان نهادند، و حل آنها به وسیلهٔ معادلات شش‌گانهٔ جبری حاصل نشده بود استخراج کردم. در اثنای این اعمال به دستورهای متعددی دست یافتم که با آنها اعمال مقدماتی حساب به آسان‌ترین وجه و ساده‌ترین راه و کوتاه‌ترین روش و بیشترین فایده و روشن‌ترین

وضع صورت می‌گیرند. پس بهتر دیدم که آنها را مدون کنم و بر آن شدم که به شرح آنها بپردازم تا دوستان را تذکری باشد و خردمندان را مهارت افزاید. این کتاب را نوشتم و هر آنچه را که مورد احتیاج حسابگران بود در آن گرد آوردم. و در این کار هم از پیش کشیدن مباحث طولانی خسته کننده و هم از تلخیص بیش از حدی که موجب اشتباه شود، دوری گزیدم. و برای بیشتر اعمال، دستوری در جدول قرار دادم تا به خاطر سپردن آنها بر مهندسان (هندسه دانان) آسان باشد. و همهٔ جدول‌هایی که در این کتاب آمده پرداختهٔ خود من است و مسئول آسانی و دشواری آنها من هستم مگر ۷ جدول که از این قرار است: ۱) جدول ضرب اعداد یک تا ۱۰؛ ۲) شبکهٔ ضرب (ص۵۲-۵۴)؛ ۳) جدولی که در آن اصول منازل قرار دارند(جدول ۴،ص۸۸)؛ ۴) مثال یکی کردن مخرج‌ها (پیدا کردن مخرج مشترک)؛ ۵) شناسایی مراتب حاصل ضرب و خارج قسمت؛ ۶) جدول جیب‌ها؛ ۷) شناسایی جنس حاصل‌ضرب و خارج قسمت.

و این کتاب را جزء کتابخانهٔ سلطان اعظم، الغ بیگ گورکان قرار دادم و چون کتاب را به پایان رسانیدم، آن را *مفتاح الحساب* نامیدم، و از خداوند مسئلت دارم که مرا به درستی و راستی موفق گرداند و راه راست را به من بنمایاند. و از کسی که به این کتاب نظر می‌افکند، استدعا دارم که ضعف عبارات آن را بر من ببخشاید و اگر لغزشی در آن روی داده است بر من خرده نگیرد؛ چه من به ناتوانی و تقصیر خود و سستی بیان و نوشتهٔ خود معترفم.

ساختار کتاب

📖 کتاب را در یک مقدمه و ۵ مقاله مدون ساختم. بدین شرح:

مقدمه: در تعریف حساب و عدد و انواع آن.

۱. مقالهٔ نخست، در حساب عددهای صحیح با ارقام هندی (دستگاهِ شمارِ دهگانی یا دستگاه شمار در پایهٔ ۱۰)، که ۶ باب دارد:

۱-۱. در شکل ارقام و تعریف مرتبه.

۱-۲. در تَضْعیف (دو برابر کردن) و تَنْصیف (نصف کردن) و جمع و تفریق.

۱-۳. و ۱-۴. در ضرب و تقسیم.

۱-۵. در یافتن ریشهٔ n اُم اعداد مانند جذر (ریشهٔ دوم) و کَعْب (ریشهٔ سوم) و ...

۱-۶. در میزان اعمال (آزمون درستی محاسبات).

۲. مقالهٔ دوم، در حساب کسر که مشتمل بر ۱۲ باب است:

۲-۱. در تعریف کسرها و گونه‌های آن.

۲-۲. در چگونگی نوشتن ارقام کسرها.

۲-۳. در شناخت تداخل و تشارک و تبایُن.

۲-۴. در تَجْنیس و رَفْع.

۲-۵. در یافتن مخرج مشترک کسرها.

۲-۶. در تبدیل کسرهای مرکب.

۲-۷. در تضعیف و تنصیف و جمع و تفریق کسرها.

۲-۸. و ۲-۹. در ضرب و تقسیم کسرها.

۲-۱۰. در بیرون آوردن ریشهٔ n اُم کسرها

۲-۱۱. در تحویل کسرها از یک مخرج به مخرج دیگر

۲-۱۲. در چگونگی انجام اعمال ضرب و تقسیم با دانگ‌ها و طسوج‌ها و شَعیرها (هر سه واحد اندازه‌گیری هستند).

۳. مقالهٔ سوم، در حساب منجمان (حساب در دستگاه شمار شصتگانی) که ۶ باب دارد:

۳-۱. در شناخت ارقام جُمَّل و چگونگی نوشتن آنها.

۳-۲. در تضعیف و تنصیف و جمع و تفریق.

۳-۳. و ۳-۴. در ضرب و تقسیم.

۳-۵. در یافتن ریشهٔ n اُم (در دستگاه شصتگانی)

۳-۶. در تحویل ارقام شصتگانی به ارقام هندی و بر عکس، چه صحیح باشد و چه کسری (تبدیل اعداد صحیح و کسری از دستگاه شمار شصتگانی به دستگاه شمار دهگانی)

۴. مقالهٔ چهارم، در مساحت و آن مشتمل بر یک مقدمه(در تعریف مساحت) و ۹ باب است:

در مساحت مثلث و آنچه مربوط به آن است که خود سه فصل دارد: الف) در تعریف مثلث و انواع آن؛ ب) در مساحت مثلث دلخواه و یافتن ابعاد آن؛ پ) در مساحت مثلث متساوی الاضلاع و استخراج ابعاد آن.

در مساحت چهار ضلعی‌ها و آنچه به آنها مربوط است که خود ۵ فصل دارد: الف) در تعریف‌ها؛ ب) در مساحت مربع و مستطیل و یافتن ابعاد آنها؛ پ) دربارهٔ لوزی و ذوالیمینین؛ ت) در شِبْهِ لوزی و ذوزنقه؛ ث) در ذوالرِجْلَین و منحرف.

در مساحت چند ضلعی‌ها و آنچه به آنها مربوط است که خود مشتمل بر ۵ فصل است: الف) در تعریف‌ها؛ ب) در مساحت چند ضلعی‌ها و پیدا کردن ابعاد آنها؛ پ) دربارهٔ چند ضلعی‌های منتظم به طور کلی؛ ت وث) دربارهٔ شش ضلعی و هشت ضلعی منتظم.

مساحت دایره، قطاع و قطعهٔ دایره، حلقه و جز آن که مشتمل بر ۵ فصل **است: الف) تعریف‌ها؛ ب) در مساحت دایره و یافتن محیط آن بر حسب قطر و برعکس؛ پ) در مساحت قطاعِ دایره و قطعهٔ دایره و استخراج ابعاد آنها؛ ت) در** مساحت سایر سطح‌ها که محیط آنها خطوط مستدیر است؛ ث) در بیان جدول جیب (جدول سینوس‌ها) و چگونگی کار با آن.

در مساحت سطح‌های مستوی دیگر مانند شِبْهِ دایره و مُطَبَّل و مُدَرَّج و غیره؛

در مساحت سطوح مستدیر مانند استوانه، مخروط، کره و غیره که مشتمل بر ۶ فصل است: الف) در تعریف‌ها؛ ب) و پ) مساحت سطح استوانه و مخروط؛ ت) مساحت سطح کره و یافتن قطر کره؛ ث) مساحت سطح قطعهٔ کره و استخراج ابعاد آن؛ ج) در مساحت قاچ یا ضلع کره.

مساحتِ حجم (=اندازهٔ حجم) اجسام و آن مشتمل بر ۸ فصل است: الف) حجم استوانه؛ ب) و پ) حجم مخروط و مخروط ناقص؛ ت) تفاوت حجم مخروط و متوازی السطوی که بر آن محیط باشد؛ ث، و ج) حجم کره و قطاع و قطعهٔ کره؛ چ) حجم چند وجهی‌های منتظم؛ ح) حجم سایر اجسام؛

در اندازه‌گیری حجم بعضی از اجسام از روی وزن آنها و بالعکس.

در حجم ساختمان‌ها که مشتمل بر سه فصل است: الف) در حجم طاق و ازج؛ ب) در حجم قُبّهٔ مجوفه (گنبد توخالی)؛ پ) در حجم سطوح مُقَرنس.

۵. مقالهٔ پنجم، در استخراج مجهولات به وسیلهٔ جبر و مقابله و خطأین و غیره با قواعد حسابی، و آن مشتمل بر ۴ باب است:

۵-۱. در جبر و مقابله که مشتمل بر ۱۰ فصل است: ۱) تعریفات؛ ۲) تا ۶) در جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و جذر اجناس مختلف (توان‌های مختلف مجهول)؛ **۷) در یاد کرد مسائل جبری؛ ۸) در چگونگی یافتن مجهول با معادلات شش‌گانهٔ** مشهور؛ ۹) در چگونگی یافتن مجهول، هرگاه معادله میان دو توان متوالی مجهول باشد یا آن‌که تفاوت توان‌ها ۲ باشد؛ ۱۰) در مسائلی که از اکتشافات خود ما (کاشانی) است و بیان آن را وعده داده بودیم.

۵-۲. در یافتن مجهول به روش خطأین.

۵-۳. در یاد کرد ۵۰ قاعدهٔ حسابی که در یافتن مجهول‌ها به آنها نیاز است.

۵-۴. ۴۰ مثال.

تعریف حساب و عدد و گونه‌های مختلف آن

📖 حساب: علم به قوانینی است که با کمک آن مجهولات عددی از روی معلومات مخصوصی به دست می‌آید و موضوع آن عدد است

📖 عدد: آن است که در شمردن به کار آید و عبارت است از یک و آنچه از گرد آمدن یک‌ها حاصل شود.

نکتهٔ مهمی که از تعریف فوق برمی‌آید آن است که کاشانی بر خلاف اغلب ریاضی‌دانان پیش از خود (و حتی پس از خود) «یک» را نیز جزء اعداد بشمار می‌آورده است. در حالی که ریاضی‌دانان قبل از وی فقط «مجموعهٔ یک‌ها» را عدد می‌نامیدند؛ پس از نظر آنان نخستین عدد ۲ بود؛ البته این طرز تلقی گاه موجب سوء تفاهم‌هایی می‌شد. تعریف ابوریحان بیرونی دربارهٔ عدد کاملاً نشانهٔ آن است که وی یک را در شمار اعداد نمی‌دانسته است: «عدد چیست؟ جمله‌ای (=مجموعه‌ای) است از یک‌ها گرد آمده. و از این جهت ‹یکی› را از عدد بیرون آوردند و گفتند که عدد نیست زیرا که «جمله» (=حاصل گرد آمدن دو یا چند «یک») نیست». به همین علت بیرونی در ادامه «۳» را نخستین عدد فرد نامیده است!

برای آنکه معلوم شود در نظر گرفتن عدد «یک» به عنوان عدد تا چه حد می‌تواند مهم باشد تأثیر این مسأله را در چند تعریف مهم ریاضی بررسی می‌کنیم: به طور مثال اگر یک را در شمار اعداد بدانیم تعریف عدد اول چنین خواهد بود: «عددی است که تنها بر خودش و بر یک بخش پذیر باشد» اما اگر یک را جزء اعداد ندانیم این تعریف چنین خواهد شد: «عددی است که تنها بر خودش بخش پذیر باشد». نیز کاشانی در تعریف تشارک (یا تَوافُق) و تَبایُن اعداد گفته است: «اگر عددی به جز یک دو عدد دیگر را بشمرد، آن دو عدد مُتِشارِک یا مُتوافِق هستند و اگر فقط عدد یک بتواند هر دو عدد را بشمرد آن دو را مُتبایِن گویند». در صورتی که اگر کاشانی «یک» را عدد نمی‌دانست باید می‌گفت: «دو عدد هنگامی با هم توافق یا تشارک دارند که عددی پیدا شود که هر دوی آنها را

بشمرد و اگر چنین عددی یافت نشود آن دو را متباین گویند (می‌دانیم که «یک» همهٔ اعداد را می‌شمرد و تعریف اخیر فقط هنگامی درست خواهد بود که «یک» را مطابق فرض عدد بشمار نیاوریم).

بعدها خواهیم دید که کاشانی نخستین کسی است که «صفر» را نیز یک عدد دانسته و حتی به مفهوم a° نیز اشاره کرده است(نگاه کنید به صفحات ۱۲۰به بعد کتاب حاضر). هر چند او نیز در پاره‌ای موارد، صفر را عدد به شمار نیاورده است (نگاه کنید به صفحهٔ ۴۹ کتاب حاضر).

عدد صحیح: اگر یک عدد به عدد دیگر مضاف نشود و به تنهایی یاد شود آن را صحیح می‌نامند مانند ۱،۲، ۱۰، ۱۵ و جز آن.

کسر: اگر عدد به عدد دیگر مضاف شود یا بدان نسبت داده شود عدد نخست را کسر و عدد دوم را مخرج می‌گویند. مانند «یک از دو» که همان «نصف» است و «سه از پنج» که همان «سه پنجم» است.

ریاضی‌دانان قدیم اصطلاح «کسر» را به معنی رایج کنونی به کار نمی‌بردند. مثلاً امروزه ما $\frac{a}{b}$ (a و b اعداد صحیح‌اند) را کسر، عدد بالای خط کسری (a) را صورت و عدد پایین خط کسری (b) را مخرج می‌نامیم. کاشانی در این‌جا a را کسر و b را مخرج نامیده و برای خودِ $\frac{a}{b}$ نامی در نظر نگرفته است. اما وی در آغاز مقالهٔ دوم اصطلاح کسر را هم برای $\frac{a}{b}$ و هم برای صورتِ کسر به کار برده و گاهی اوقات نیز صورت کسر را «عددِ کسر» نامیده است.

عدد مُفرَد: عددی است که تنها یک رقم معنی‌دار داشته باشد یعنی تنها دارای یک رقم غیر صفر باشد مانند ۲۰،۱۰۰، ۹۰۰۰ و جز آن.

توجه کنیم که «عدد مفرد» با عدد فرد تفاوت بسیار دارد.

عدد مُجَرَّد: در حالت خاصی که این رقم غیر صفر، «یک» باشد مانند ۱۰۰، ۱۰۰۰ و جز آن، بدان مجرد می‌گوییم.

به عبارت بهتر عدد مُفرد عددی است به صورت $a \times ۱۰^{n}$ که در آن n عددی طبیعی و a عددی یک رقمی است. اگر $a = ۱$، آنگاه این عدد را مجرد خواهیم گفت. به عبارت بهتر توان‌های صحیح ۱۰(۱۰^{n}) را مجرد گویند

عدد مُرَکَّب: عددی است که بیش از یک رقم معنی‌دار داشته باشد مانند ۷۲، ۵۷۰، ۱۰۹۲۴ و جز آن. یعنی همهٔ اعداد صحیحی که مفرد نباشند مرکب هستند.

زوج الزوج: عددی است که می‌توان آن را آن قدر بر دو قسمت کرد تا بدون پدید آمدن باقیمانده به عدد یک رسید

زوج الزوج و الفرد: عددی است که دست کم به $۲^{۲}$ قابل قسمت باشد اما زوج الزوج نباشد.

زوج الفرد: عدد زوجی است که بر $۲^{۲}$ قابل قسمت نباشد.

اعداد «زوج الزوج»، «زوج الزوج و الفرد» و «زوج الفرد» را به ترتیب می‌توان به صورت ۲^{n}، $۲^{n}(۲k+۱)$ و $۲(۲k+۱)$ نشان داد که در آن k و n اعدادی طبیعی‌اند و n بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

گفتار چهارم

حساب با اعداد صحیح در دستگاه شمار دهگانی

(مقالهٔ نخست *مفتاح الحساب*)

باب اول: در شکل ارقام و تعریف مرتبه

کاشانی در این باب دستگاه شمار دهگانی با ارزش مکانی را که توسط هندی‌ها اختراع شده و امروزه در همه جای دنیا به کار می‌رود شرح داده است. این سیستم عدد نویسی و محاسبه در قدیم به «حساب هندی» مشهور بود.

رقم: حکمای هند این ۹ رقم (=ارقام هندی) را برای ۹ عِقْد معروف وضع کرده‌اند: ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ ، ۸ ، ۹.

کاشانی اصطلاح «عِقْد» (به معنی گِرِه، جمع آن: عقود) را برای اعداد ۱ تا ۹ و اصطلاح «رقم» را برای نشانه‌های ۱، ۲،... ،۹ به کار برده است (دربارهٔ رقم صفر در ادامه توضیحاتی خواهد آمد). باید توجه کرد که به طور مثال «رقم ۹» با

عدد ۹ کاملاً متفاوت است و در واقـع «رقـم ۹» نشـانه‌ای اسـت کـه مـا بـرای رساندن مفهوم عدد ۹ از آن استفاده می‌کنیم. همان طور که در کشورهای غـرب جهان اسلام (مانند مراکش، مغرب و اسپانیای دورهٔ اسلامی) به جای این نشـانه، نشانهٔ 9 به کار می‌رفت و از آنجا به کشورهای اروپایی راه یافت. اما طبیعی است که مفهوم عدد ۹ هیچ ربطی به نشانهٔ آن (۹ یا 9 یا هر نشانهٔ دیگر) ندارد. ایـن تفاوت در مورد اعداد دو رقمی و بالاتر کاملاً واضح است زیرا بـرای مثـال بـرای نشان دادن عدد ۹۹ از دو رقم یا نشانهٔ ۹ در کنار هم استفاده می‌کنـیم. کاشـانی اصطلاحاتی چون «عقود نه‌گانهٔ عَشرات (دَه‌ها)» را برای اعـداد ۱۰، ۲۰، ...، ۹۰، «عقود نه‌گانهٔ مِآت (=صدها) »، را برای اعداد ۱۰۰، ۲۰۰، ...، ۹۰۰ به کـار بـرده است.

📖 مرتبه: جایگاه یک رقم در یک عدد از سمت راست به چپ است. این مراتب را به ترتیب از راست به چپ: یکان، دهگـان، صـدگان، یکـان هزارهـا، دهگـان هزارها، صدگان هزارها، یکان هزارهزارها (=یکان میلیون‌ها) و ... می‌نامند.

📖 ارزش مکانی:بدان که هر یک از این ارقام نه‌گانه اگر در مرتبهٔ نخست قـرار گیرند، نشانگر اعداد ۱ تا ۹ هستند و اگر در مرتبهٔ دوم قرار گیرند نشـانگر اعـداد ۱۰ تا ۹۰ و اگر در مرتبهٔ سوم باشند نشانگر اعداد ۱۰۰ تا ۹۰۰. و به همین ترتیب می‌توان مفهوم مراتب بعدی را دریافت.

📖 رقم صفر: و هر مرتبه‌ای که در آن عدد نباشـد بایـد کـه در آن صـفری بـه شکل دایره‌ای کوچک قرار دهیم تا مرتبهٔ ارقام بعدی اشتباه نشود.

نظر بیرونی: ابوریحان بیرونی نیز در کتاب *التفهیم* دربارهٔ نشانهٔ مرتبه‌های خالی، که امروزه به آن «رَقَمِ صِفْر» می‌گوییم، آورده است: «و چون مرتبه‌ای خالی باشد از عددی، به جای او نشانی کنند از بهر نگاه داشتْنْ اورا، که تُهی است. ولی ما او را دایره‌ای خرد کنیم و او را صفر نام کنیم، یعنی تهی. و هندوان او را نقطه کنند».

پس معلوم می‌شود که ایرانیان از قدیم صفر را به صورت دایره می‌نوشته‌اند **و نوشتن نقطه به جای صفر، که امروزه رواج دارد، کاری نادرست است. زیرا توخالی بودن «نشانهٔ صفر» (نمی‌گوییم «رقمِ صفر» زیرا در گذشته این نشانه را جزء ارقام نمی‌دانسته‌اند) خود رسانندهٔ مفهوم خالی بودن این مرتبه بوده است.**

همان گونه که می‌بینیم کاشانی به هنگام اشاره به ارقام از صفر به عنوان رقم یاد نکرده است. اما پس از تعریف «مرتبه» و اشاره به مراتب خالی، به «نشانهٔ صفر» (و نه رقم صفر) اشاره کرده است. به نظر نگارندهٔ این سطور، چنان که بعداً خواهیم گفت کاشانی خود از مفهوم «رقم صفر» و «عدد صفر» به خوبی آگاه بوده است ولی برای این‌که بتواند این مفهوم را، که درک آن برای مردم آن زمان مشکل بوده، توضیح دهد از این روش استفاده کرده است.

اکنون که اینها را دانستی، این را نیز بدان: بر محاسبه کننده واجب است که اعمال حسابی دو برابر کردن، نصف کردن، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را برای اعداد کمتر از ۱۰ حفظ کند تا انجام این اعمال برای اعداد بزرگ‌تر از ۱۰ برایش ممکن باشد.

باب دوم: در تضعیف، تنصیف، جمع و تفریق

تضعیف: افزودن یک عدد به عددی برابر خود (یعنی دو برابر کردن یک عدد) را گویند. برای تضعیف یک عدد از نخستین رقم سمت راست آن شروع می‌کنیم. ارقام هر مرتبه را در دو ضرب می‌کنیم. اگر حاصل کمتر از ۱۰ شد خود آن را در زیر همان رقم می‌نویسیم و اگر بیش از ده شد یکان حاصل را در زیر همان رقم می‌نویسیم و «دهِ باقی مانده را» را «یک» فرض می‌کنیم و در ذهن نگه می‌داریم تا به مرتبهٔ بالاتر اضافه کنیم (یعنی «ده بر یک» کردن) و به همین روش ادامه می‌دهیم تا همهٔ ارقام دو برابر شوند.

تنصیف: یافتن نصف یک عدد را گویند. برای این کار باید از رقم سمت چپ شروع کنیم و به ترتیب هر یک از آنها را نصف کرده و زیر آن بنویسیم و اگر رقمی فرد بود یکی از آن کم می‌کنیم و در عوض به نصف رقم سمت راست آن ۵ واحد می‌افزاییم (به عبارت بهتر ۱۰ واحد به خود رقم سمت راست اضافه می‌کنیم) و کار را ادامه می‌دهیم تا به مرتبهٔ یکان برسیم.

همان طور که می‌بینیم با آن‌که تضعیف و تنصیف حالت‌های خاص ضرب و تقسیم هستند اما کاشانی آنها را به صورت اعمالی جداگانه تعریف کرده و جالب‌تر آن‌که این دو عمل را در کنار جمع و تفریق (و نه ضرب و تقسیم) توضیح داده است.

در همهٔ آثار ریاضی دورهٔ اسلامی مانند کتاب حساب محمد بن موسی خوارزمی (سدهٔ ۳ قمری)، *اصول حساب الهند* کوشیار گیلانی (سدهٔ ۴ قمری)، *شمارنامهٔ* محمد بن ایوب طبری و *المقنع فی الحساب الهندی* علی بن احمد

نسوی (هر دو از سدهٔ ۵ قمری) و *عیون الحساب* ملا محمد باقر یزدی (سدهٔ یازدهم قمری) همین شیوه به کار رفته است.

آنچه کاشانی دربارهٔ روش تضعیف توضیح داده دقیقاً همان روش جمع یک عدد با خود آن عدد به روش امروزی است. شیوهٔ کاشانی برای جمع دو عدد دلخواه نیز دقیقاً مثل همین روش امروزی است.

در نظر نگرفتن صفر به عنوان عدد: کاشانی به هنگام نصف کردن عدد ۴۰۹۰۵۲۷ هنگامی که می‌خواهد صفر را بر دو تقسیم کند گفته است: «چون صفر، نصف ندارد خودش را زیر آن می‌نویسیم». یعنی در این‌جا کاشانی صفر را به عنوان عدد در نظر نگرفته است. زیرا در این صورت باید می‌گفت: «نصف صفر، همان صفر است».

باب سوم: در ضرب

ضربِ اعداد صحیح: ضرب کردن دو عدد صحیح عبارت است از یافتن حاصل مجموع مِثل‌های یکی از دو عدد به اندازهٔ یک‌های عدد دیگر.

به طور مثال ۱۸ ضرب در ۱۵ یعنی: «حاصل مجموع ۱۸ تا عدد ۱۵» یا «حاصل مجموع ۱۵ تا عدد ۱۸».

تعریف جامع ضرب: ضرب کردن دو عدد به دست آوردن عددی است که نسبت آن به یکی از آن دو عدد مساوی باشد با نسبت دیگری به واحد.

تعریف اخیر از نظر منطقی نادرست یا دست کم بی‌فایده است. زیرا کاشانی هنوز مفهوم «نسبت دو عدد» را توضیح نداده است تا بتواند با کمک آن مفهوم

جامع ضرب را توضیح دهد! در واقع علت آسان‌تر بودن درک تعریف جامع برای خوانندهٔ امروزی آن است که خواننده با توجه معلومات قبلی خود، از مفهوم نسبت دو عدد آگاه است.

ضرب یک عدد چند رقمی در یک عدد یک رقمی: برای مثال برای ضرب عدد ۵۴۷۸۰۰ در عدد ۴ بدین ترتیب عمل می‌کنیم: صفرهای سمت راست عدد چند رقمی را در نظر نمی‌گیریم. ۴ را در ۸ ضرب می‌کنیم، حاصل ۳۲ است . ۲ را زیر ۸ و ۳ را در سمت چپ آن (زیر ۷ می‌نویسیم). سپس ۴ را در ۷ ضرب می‌کنیم که ۲۸ می‌شود. این اعداد را در سطری پایین‌تر می‌نویسیم. این بار نیز یکان حاصل را زیر همان عدد (یعنی ۷) و دهگان آن را زیر ۴ می‌نویسیم. از این به بعد حاصل ضرب ۴ در ارقام دیگر را به همین روش یک بار در سطر اول حاصل و یک بار در سطر دوم می‌نویسیم (به ترتیب ۱۶ در سطر اول حاصل و ۲۰ در سطر دوم حاصل). پس از انجام تمامی مراحل اعداد این دو سطر را با هم جمع می‌کنیم و سرانجام صفرهای عدد اول را عیناً به جلوی حاصل انتقال می‌دهیم. پاسخ ۲۱۹۱۲۰۰ خواهد بود.

	۵	۴	۷	۸	۰	۰	۴ ضرب در
	۱	۶	۳	۲			
۲	۰	۲	۸				
۲	۱	۹	۱	۲	۰	۰	حاصل ضرب:

شکل ۱-ضرب به روش کاشانی

اگر دقت کنیم در مثال فوق ارزش مکانی رقم ۴ (دومین رقم عدد چند رقمی از سمت چپ) ۱۰۰ برابر ارش مکانی رقم ۸ است. در نتیجه ارزش هر

واحد از حاصل ضرب رقم ۴ در عدد ۴ (یعنی ۱۶) نیز ۱۰۰ برابر ارزش هر واحد از حاصل ضرب رقم ۸ در عدد ۴ (یعنی ۳۲) است. کاشانی نیز به همین علت هنگام ثبت عدد ۱۶ به اندازهٔ دو رقم به سمت چپ (ارزش مکانی بیشتر) رفته است. اما چون حاصل ضرب دو عدد یک رقمی هرگز بیش از ۲ رقم نخواهد داشت، می‌توان حاصل ضرب عدد یک رقمی (در این مسأله: ۴) در ارقام اول، سوم، پنجم، ... را در کنار یکدیگر در یک سطر (سطر اول) و حاصل ضرب این عدد در ارقام دوم، چهارم، ششم، ... را نیز در کنار هم در یک سطر (سطر دوم) ثبت کرد (۱۶ در سمت چپ ۳۲ در سطر اول، و ۲۰ در سمت چپ ۲۸ در سطر دوم). پس برای ثبت همهٔ حاصل‌ضرب‌های جزئی (رقم در رقم) فقط به دو سطر نیاز داریم.

روشی که کاشانی برای ضرب بکار برده تقریباً همین روش امروزی است. همین ضرب را به روش امروزی چنین ثبت می‌کنیم.

	۵	۴	۷	۸	۰	۰	×۴
	۱	۲	۳				سطر یادداشت ده بر یک‌ها
۲	۰	۶	۸	۲			سطر ثبت حاصل ضرب‌ها
۲	۱	۹	۱	۲	۰	۰	حاصل ضرب:

شکل ۲-ضرب به روش جدید

همان گونه که می‌بینیم در روش کاشانی(شکل ۱) در دو سطر مربوط به ثبت عملیات میانی برخی ارقام سطر اول و دوم (تقریباً به طور یک در میان) نسبت به روش جدید(شکل ۲) جابه‌جا شده‌اند. برای سادگی مقایسه، این ارقام با قلم شکسته و تیره‌تر از ارقام دیگر ثبت شده‌اند.

بی‌تردید کاشانی از روش امروزی ضرب اعداد یک رقمی در چند رقمی آگاه بوده و برای محاسبات خود از آن استفاده می‌کرده است. اما چون درک روش جدید را برای نوآموزان دشوار می‌دانسته روش نخست را شرح داده است. زیرا خود کاشانی در همین کتاب *مفتاح الحساب* ضمن یک عمل تقسیم از روش جدید ضرب استفاده کرده و در بخش حساب منجمان نیز استفاده از روش جدید ضرب را به خوانندهٔ با تجربه توصیه کرده است.

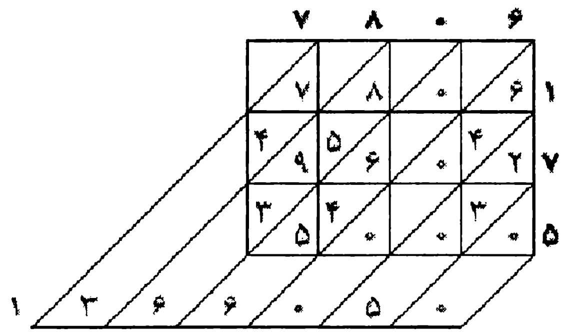
برای ضرب عدد «مُفرد» (دارای تنها یک رقم غیر صفر) در اعداد چند رقمی مرکب (غیر مفرد) از همین روش استفاده می‌کنیم و در پایان به اندازهٔ صفرهای عدد مفرد، جلوی حاصل ضرب صفر اضافه می‌کنیم. مثلاً در ضرب فوق اگر به جای ۴، ۴۰۰۰ باشد ابتدا ۴ را در آن عدد ضرب می‌کنیم و سپس سه تا صفر جلوی حاصل می‌گذاریم. یعنی: ۲۱۹۱۲۰۰۰۰۰.

اگر یکی از دو عدد، مُجَرَّد (توانی از ۱۰) بود تنها به اندازهٔ صفرهای عدد مجرد در جلوی عدد دیگر صفر اضافه می‌کنیم.

شبکهٔ ضرب: اگر هر دو عدد چند رقمی و «غیر مفرد» بودند (یعنی هر دوی آنها بیش از یک رقم معنی‌دار داشتند) شکلی چهار ضلعی رسم می‌کنیم و طول آن را به تعداد ارقام یکی از دو عدد و عرضش را به اندازهٔ ارقام دیگری تقسیم می‌کنیم تا به مربع‌های کوچکی تقسیم شود. سپس هر مربع را با خطوطی مورب و موازی یکدیگر به دو مثلث بالایی و پایینی تقسیم می‌کنیم. و این شکل را شبکه می‌نامیم....

مثال: اگر بخواهیم دو عدد ۷۸۰۶ و ۱۷۵ را در یکدیگر ضرب کنیم عدد نخست را در بالای مربع و عدد دیگر را در سمت چپ آن می‌نویسیم. سپس مستطیل را با خطوط عمودی به ۴ قسمت (تعداد ارقام عدد بالای مستطیل یعنی ۷۹۰۶) و با خطوط افقی به ۳ قسمت (تعداد ارقام عدد سمت چپ مستطیل یعنی ۱۷۵) تقسیم می‌کنیم. در نتیجه ۱۲ مربع کوچک ایجاد می‌شود که هر یک از آنها را با خطوط مورب به دو مثلث تقسیم می‌کنیم(شکل ۳، البته در این شکل برای سادگی عدد ۱۷۵ در سمت راست مستطیل اصلی، و نه در سمت چپ آن، نوشته شده است).

برای ضرب این دو عدد به ترتیب ارقام عدد بالایی را در ارقام عدد دیگر ضرب می‌کنیم و یکان حاصل را در مثلث پایینی مربع مربوطه و دهگان حاصل را در مثلث بالایی همان مربع می‌نویسیم. به طور مثال: حاصل ضرب ۸ (رقم صدگان عدد بالایی) در ۷ (دهگان عدد دیگر) برابر ۵۶ است. حال مربعی که زیر ۸ و سمت چپ ۷ قرار دارد در نظر می‌گیریم. رقم ۶ را در مثلث پایین آن و رقم ۵ را در مثلث بالایی آن می‌نویسیم. پس از ثبت تمامی حاصل ضرب‌های جزئی (حاصل ضرب ارقام در یکدیگر) اعداد به دست آمده را به صورت مورب با یکدیگر جمع می‌کنیم و اگر حاصل بیش از ۱۰ شد یکی به رقم سمت چپ حاصل می‌افزاییم. پس ارقام حاصل ضرب به ترتیب از سمت راست به چپ چنین به دست می‌آید: ۰، ۵ (= حاصل جمع ۲ و ۳)، ۰ (=یکان حاصل جمع ۴ و ۶، دهگان آن به ستون مورب بعدی منتقل می‌شود)، ۶ (یکان حاصل جمع ۶، ۴، ۵ و ۱ حاصل از ده بر یک ستون مورب قبلی) و الی آخر.

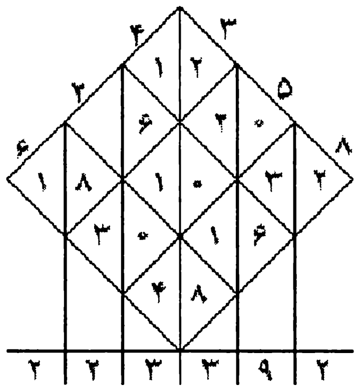


شکل ۳ – شبکهٔ ضرب معمولی

کاشانی هم در مقدمهٔ کتاب و هم در پایان باب سوم مقالهٔ اول (صفحات ۳۷ و ۵۸ کتاب حاضر) تأکید کرده که اختراع شبکهٔ ضرب معمولی کار وی نیست. احتمالاً مخترع شبکهٔ ضرب ریاضی‌دانی مراکشی به نام ابن بنا (درگذشت ۷۲۰ قمری) است. او در کتاب *تلخیص اعمال الحساب* خود ضرب را با همین روش انجام داده اما آن را «جدولِ ضرب» و نه «شبکهٔ ضرب» نامیده است.

شبکهٔ ضرب مورب: اما خود ما روش دیگری برای ترسیم این شبکه داریم که آن را شبکهٔ مورب نامیده‌ایم. برای ترسیم این شبکه یک چهار ضلعی مورب (با چرخاندن مستطیل قبلی به اندازهٔ ۴۵ درجه) رسم می‌کنیم و دو عددی را که می‌خواهیم در هم ضرب کنیم در کنار دو ضلع بالایی آن می‌نویسیم و سپس مانند شبکهٔ قبلی آنرا به مربع‌های کوچک و سپس هر مربع کوچک را با خطوط عمودی به دو مثلث سمت راست و چپ تقسیم می‌کنیم. آنگاه هر یک از ارقام دو عدد را در ارقام عدد دیگر ضرب و حاصل ضرب را در مربع مربوطه ثبت می‌کنیم به این ترتیب که یکان حاصل ضرب در مثلث سمت راست و دهگان آن

در مثلث سمت چپ نوشته می‌شود. سپس اعدادی را که در ستون‌های عمودی زیر هم ثبت شده‌اند با یکدیگر جمع می‌کنیم تا حاصل به دست آید (ضرب ۳۵۸ در ۶۲۴ به عنوان مثال در شکل ۴ آمده است).



شکل ۴- یافتن حاصل ۳۵۸ × ۶۲۴ با کمک شبکهٔ ضرب مورب

شبکهٔ ضرب مورب منطقاً تفاوتی با شبکهٔ ضرب معمولی ندارد اما درک آن برای نوآموز به مراتب ساده‌تر است. این مسأله نشان از آن دارد که کاشانی در نگارش *مفتاح الحساب* به سادگی روش‌ها توجه بسیار داشته است.

یکی از ریاضی‌دانان اندلس (بخشی از اسپانیا که صدها سال در دست مسلمانان بود) به نام علی قلصادی (درگذشتهٔ ۸۹۲ قمری) شبکهٔ ضرب مورب دیگری را پیشنهاد کرده که عملاً تفاوتی با شبکهٔ ضرب معمولی ندارد.

ضرب بدون استفاده از شبکه: روشی دیگر از خود ما که در آن نیازی به ترسیم شبکه نیست؛ در این روش برای مثال برای ضرب ۳۵۸ در ۶۲۴ چنین

عمل می‌کنیم: ابتدا ۸ (یکان ۳۵۸) را در ارقام عدد دیگر از راست به چپ ضرب می‌کنیم و هر یک از حاصل ضرب‌ها را در سطری جداگانه می‌نویسیم به طوری که هر بار به اندازه یک رقم به سمت چپ برویم. بدین صورت:

		۳	۲
	۱	۶	
۴	۸		

سپس ۵ (دهگان ۳۵۸) را در ارقام ۶۲۴ ضرب می‌کنیم. حاصل ضرب ۵ در یکان عدد دیگر (یعنی ۴) را در بالای عدد ۳۲ و البته با یک جابه‌جایی به سمت چپ می‌نویسیم و سپس حاصل ضرب‌های بعدی را مانند قبل یک سطر پایین‌تر و یک ستون عقب‌تر (به سمت چپ) ثبت می‌کنیم. بدین صورت (اعداد جدید با قلم شکسته و تیره‌تر از اعداد قبلی ثبت شده‌اند):

		۲	۰	
	۱	۰	۳	۲
۳	۰	۱	۶	
	۴	۸		

در مرحلهٔ سوم رقم صدگان عدد ۳۵۸ (یعنی ۳) را نیز به همین ترتیب در ارقام عدد دیگر ثبت می‌کنیم و با همان روش در جدول (شکل ۵) قرار می‌دهیم. سپس اعداد هر ستون را جمع می‌کنیم و در سطر پایین قرار می‌دهیم (البته با توجه به قانون ده بر یک)

		۱	۲		
		۶	۲	۰	
۱	۸	۱	۰	۳	۲
	۳	۰	۱	۶	
		۴	۸		
۲	۲	۳	۳	۹	۲

شکل ۵- ضرب بدون استفاده از شبکه

با کمی دقت می‌توان متوجه شد که این روش ضرب عملاً ، اما نـه دقیقـاً، همان روشی است که امروزه به کار می‌رود. با این تفاوت که به طور مثال هنگام ضرب رقم اول عدد ۳۵۸ (یعنی ۸) در ۶۲۴، به جای آنکه هر یک از اعـداد ۳۲، ۱۶، ۴۸ (در واقع: ۳۲، ۱۶۰ و ۴۸۰۰) را در سطری جداگانه بنویسیم، حاصل جمع همهٔ آنها را در یک سطر به صورت ۴۹۹۲ مـی‌نویسـیم و جمـع‌هـای ۳+۶، ۱+۸ (حاصل از عمل ده بر یک) را به صورت ذهنی انجام می‌دهـیم. و سـپس بـرای ضرب رقم بعدی ۳۵۸ (یعنی ۵) در ۶۲۴ یک سطر جدید در نظر می‌گیریم.

روش دیگر ضرب روشی دیگر از خود ما که در آن هر یک از ارقام یکـی از دو عدد را با روش ضرب اعداد یک رقمی در چند رقمـی، در عـدد دیگـر ضـرب می‌کنیم. پس حاصل هر یک از این ضرب‌ها دو سطر خواهـد شـد. البتـه توجـه می‌کنیم که یکان سطر اول ضرب دوم زیر یکـان سـطر دوم ضـرب اول نوشـته شود و به همین ترتیب تا آخر ادامه می‌دهیم. سـپس همـهٔ اعـداد ثبـت شـده در ستون‌ها را با هم جمع می‌کنیم و پس از ده بر یک کردن در خط حاصـل ضـرب می‌نویسیم.

به طور مثال: برای ضرب ۴۵۶ در ۲۷۸۳ چنین عمل می‌کنیم.

ضرب۶ در ۲۷۸۳	۸	۱	۲	۴			
		۸	۴	۲	۱		
ضرب ۵ در ۲۷۸۳		۵	۱	۵	۳		
			۰	۴	۰	۱	
ضرب ۴ در ۲۷۸۳			۲	۱	۸	۲	
				۲	۳	۸	
حاصل ضرب ۴۵۶ در ۲۷۸۳	۸	۴	۰	۹	۶	۲	۱

شکل ۶- روشی دیگر برای ضرب بدون استفاده از شبکه

دلیل درستی این روش بر هوشمندان - اگـر در آن تأمـل کننـد - پوشـیده نیست، و این نوع از سایر انواع آسان‌تر است. جـز آن‌کـه روش شـبکه بـه فهـم نوآموزان نزدیک‌تر است.

بی‌تردید خوانندگان هوشمند نیز متوجه شده‌اند که روش اخیـر همـین روش امروزی ضرب است. برای روشن‌تر شدن یکسانی این دو روش، ارقام را به روش امروزی ثبت می‌کنیم. البته همان گونه که پیش از این (در مبحث ضـرب عـدد یک رقمی در چند رقمی) نیز اشاره کردیم در روش کاشانی (شکل ۶) تنها محل ثبت برخی ارقام نسبت به روش امـروزی (شـکل ۷) بـا رقـم پـایینی یـا بـالایی جابه‌جا شده است. برای سادگی مقایسه، این ارقام با قلم شکسته و تیره‌تر از ارقام دیگر ثبت شده‌اند.

×	۲ ۷ ۸ ۳ ۴ ۵ ۶
ضرب۶ در ۲۷۸۳	۴ ۴ ۱ ۱ ۲ ۲ ۸ ۸
ضرب ۵ در ۲۷۸۳	۳ ۴ ۱ ۱ ۰ ۵ ۰ ۵
ضرب ۴ در ۲۷۸۳	۲ ۳ ۱ ۸ ۸ ۲ ۲
حاصل ضرب ۴۵۶ در ۲۷۸۳	۱ ۲ ۶ ۹ ۰ ۴ ۸

شکل ۷- روشی امروزی ضرب

هر چه در این باب گفتیم اختراع خود ما (کاشانی) است، جـز شـبکهٔ ضـرب عادی.

با توجه به شباهت بسیار دو روش اخیر کاشانی با روش امروزی ضرب، این روش را باید از اختراعات کاشانی بشمار آورد.

باب چهارم: در تقسیم

تقسیم اعداد صحیح: تقسیم در مورد عددهای صحیح یعنی تجزیهٔ مقسوم به اجزای متساوی که عدهٔ آنها برابر با تعداد یک‌های مقسوم علیه باشد. هر یک از این اجزا را خارج قسمت می‌نامند.

تعریف جامع تقسیم: عبارت است از به دست آوردن عددی که نسبت آن به واحد مساوی نسبت مقسوم به مقسوم علیه باشد، یا به دست آوردن عددی که نسبت آن به مقسوم مساوی با نسبت واحد به مقسوم علیه باشد.

تعریف جامع تقسیم نیز مانند تعریف جامع ضرب از نظر منطقی نادرست یا دست کم بی‌فایده است. زیرا تا این‌جای کار کاشانی هنوز مفهوم «نسبت دو عدد» را توضیح نداده است تا بتواند با کمک آن مفهوم جامع تقسیم را توضیح دهد!

تقسیم به روش قدیم: ابتدا مقسوم را می‌نویسیم و سپس خطی افقی روی آن می‌کشیم. سپس با خطوطی عمودی که از این خط افقی آغاز می‌شود ارقام مقسوم را از یکدیگر جدا می‌کنیم. سپس به تعداد ارقام مقسوم علیه از سمت چپ مقسوم جدا می‌کنیم اگر اعداد حاصل از این ارقام صرف نظر از ارزش مکانی خود بزرگ‌تر از مقسوم علیه باشد آنگاه مقسوم علیه را درست از زیر اولین رقم مقسوم از سمت راست می‌نویسیم در غیر این صورت از ستون سمت راست آن شروع

می‌کنیم. سپس بزرگ‌ترین عدد یک رقمی را می‌جوییم که اگر از سمت چپ در تک تک ارقام مقسوم علیه ضرب شود حاصل از ارقام متناظر مقسوم و ارقام سمت چپ آنها (به شرط وجود) کمتر باشد. وقتی این عدد را یافتیم آن را بیرون جدول و بالای خط عرضی درست بالای یکان مقسوم علیه می‌نویسیم. سپس این عدد را از سمت چپ در تک تک ارقام مقسوم علیه ضرب می‌کنیم و حاصل را از ارقام متناظر مقسوم و رقم سمت چپ آنها، اگر باشد، کم می‌کنیم (این کار را می‌توان در ذهن یا روی کاغذ و بیرون از جدول انجام داد) و باقی مانده را از سمت راست زیر این ارقام می‌نویسیم و این ارقام جدید را با خطی افقی از ارقام بالایی جدا می‌کنیم. پس از آن‌که رقم نخست خارج قسمت را در تمامی ارقام مقسوم علیه ضرب کردیم یکی از این دو کار را انجام می‌دهیم: ۱) ارقام مقسوم علیه را در سطر بالای آن تکرار می‌کنیم اما هر رقم را یک ستون به سمت راست منتقل می‌کنیم و زیر این ارقام یک خط افقی جدا کننده می‌کشیم(نوع اول روش قدیمی). ۲) یا آن‌که ارقام عدد باقی‌مانده از مقسوم را یک ستون به سمت چپ انتقال می‌دهیم و در سطر پایین‌تر می‌نویسیم و یک خط افقی جدا کننده روی آن می‌کشیم (نوع دوم روش قدیمی). پس از این کار مسأله مانند حالت اول خود خواهد شد با این تفاوت که این بار محل نوشتن رقم دوم مقسوم علیه معلوم است. و این مراحل را آن قدر تکرار می‌کنیم که باقی‌مانده کمتر از مقسوم علیه شود.

📖 مثال: برای تقسیم ۳۵۶۵۹۰۸ بر ۴۷۵ چنین عمل می‌کنیم. ارقام مقسوم را می‌نویسیم و یک خط افقی روی آن می‌کشیم (خط افقی ضخیم‌تر در شکل ۸).

چون ۴۷۵ از ۳ رقم سمت راست مقسوم (یعنی ۳۵۶) بزرگ‌تر است نخستین رقم آن را با فاصله‌ای مناسب زیر دومین رقم مقسوم (یعنی زیر ۵) مـی‌نویسـیم (اگـر ۴۷۵ از سه رقم نخست مقسوم کوچک‌تر بود ارقام نخسـت آنهـا زیـر هـم قـرار می‌گرفت). سپس بزرگ‌ترین عددی را می‌یـابیم کـه اگـر در ۴۷۵ ضـرب شـود حاصل آن از ۴ رقم نخست مقسوم کوچک‌تر باشد. این عدد ۷ اسـت. عـدد ۷ را روی خط افقی تیره‌تر و بالای یکان مقسوم علیه می‌نویسیم. این عدد از چپ بـه راست در ارقام مقسوم علیه ضرب می‌کنیم (یعنی به ترتیب ۴، ۷ و ۵). و حاصـل را به نحوی که گفته شد از ارقام متناظر مقسوم کمی مـی‌کنـیم. بـدین صـورت: ۷×۴ را که ۲۸ است زیر ۳۵ می‌نویسیم و حاصـل تفریـق را کـه ۸ اسـت زیـر ۵ می‌نویسیم و خط جدا کننده‌ای بالای حاصل مـی‌کشـیم. سـپس ۷×۷ را کـه ۴۹ است زیر ۷۶ می‌نویسیم و از آن کم می‌کنیم(در ذهـن خـود ۶ را پـایین آورده و سمت راست ۷ گذاشته‌ایـم) حاصـل ۲۷ اسـت. روی ۲۷ یـک خـط جـدا کننـده می‌کشیم. سپس ۷×۵ را که ۳۵ است زیر ۲۷۵ نوشته و از آن کم می‌کنیم حاصل را که ۲۴۰ است زیر آن می‌نویسیم و یـک خـط افقـی نیـز بـالای ایـن حاصـل می‌کشیم. مرحلهٔ اول تقسیم در این جا به پایان می‌رسد. سـپس یـا ۴۷۵ را یـک سطر بالاتی و یک ستون جلوتر می‌نویسـیم (بـه سـمت راسـت) و زیـر آن خـط می‌کشیم (نوع اول) یا آن‌که آخرین باقیمانده را به اضـافهٔ ارقـام اسـتفاده نشـدهٔ مقسوم در یک سطر پایین‌تر یک ستون عقب‌تر (یعنی به سمت چپ) می‌نویسیم (نوع دوم). و مرحلهٔ قبلی را تکرار می‌کنیم. در این مرحله اگر عـددی کـه بتـوان این کار را با آن تکرار کرد نیابیم یک صفر در مرتبهٔ مربوطهٔ خارج قسـمت قـرار

می‌دهیم. آخرین باقیمانده‌ای که از مقسوم علیه کوچک‌تر باشد (در این مثال عدد ۸۳) همان باقی‌ماندهٔ تقسیم است.

کاشانی ارقامی را که در شکل ۸ زیر آنها یک جفت خط کشیده شده (مانند رقم ۶ که در سومین سطر زیر خط ضخیم‌تر آمده است) ثبت نکرده است. اما در این جا برای سادگی درک این روش این ارقام تکرار شده‌اند. برای مقایسهٔ روش قدیمی با روش جدید کاشانی سطرهایی که در آن باقیمانده‌های جزئی ثبت شده با علامت * از دیگر سطرها متمایز شده‌اند(در نوع اول روش قدیم باقیماندهٔ مرحلهٔ سوم، یعنی ۳۴۰۸، در هیچ سطری ثبت نشده است).

چنان که می‌بینیم تفاوت نوع اول و دوم روش قدیمی تنها در چگونگی ثبت برخی ارقام در داخل جدول است. پس نمی‌توان آنها را از نظر منطقی روش‌های جداگانه‌ای دانست.

روش کاشانی برای تقسیم: پس از رسم جدول، نوشتن مقسوم و مقسوم علیه و پیدا کردن رقم نخست خارج قسمت، به جای آن‌که حاصل ضرب رقم نخست خارج قسمت را در تک تک ارقام مقسوم علیه بیابیم و از ارقام مقسوم علیه کم کنیم به یک باره این رقم را در مقسوم علیه ضرب کرده و از ارقام متناظر مقسوم کم می‌کنیم. و از این پس مراحل را ادامه می‌دهیم.

کاشانی با خلاصه کردن دو جدول فوق، روشی جدید برای تقسیم پیشنهاد کرده که بسیار شبیه به روش امروزی عمل تقسیم است (به ویژه نوع دوم روش کاشانی)

	نوع دوم							نوع نخست							
				۷	۵	۰	۷				۷	۵	۰	۷	
	۳	۵	۶	۵	۹	۰	۸	۳	۵	۶	۵	۹	۰	۸	
	۲	۸						۲	۸						
		۷	۶						۷	۶					
		۴	۹						۴	۹					
		۲	۷	۵					۲	۷	۵				
			۳	۵						۳	۵				
*		۲	۴	۰					۲	۴	۰				*
	۲	۴	۰	۹	۰	۸			۲	۰					
	۲	۰								۴	۰				
		۴	۰							۳	۵				
		۳	۵								۵	۹			
			۵	۹							۲	۵			
			۲	۵							۳	۴			*
*			۳	۴							۲	۸			
		۳	۴	۰	۸							۶	۰		
*	۳	۴	۰	۸								۴	۹		
	۲	۸										۱	۱	۸	
		۶	۰										۳	۵	
		۴	۹										۸	۳	*
		۱	۱	۸								۴	۷	۵	
			۳	۵							۴	۷	۵		
			۸	۳						۴	۷	۵			
		۴	۷	۵					۴	۷	۵				

شکل ۸- تقسیم به روش قدیمی

مثال: کاشانی مثال تقسیم ۲۲۷۴۱۲۶ بر ۵۶۵ را آورده ولی ما برای آن‌که شباهت‌های میان این دو روش را خاطر نشان کنیم همان مثال قبل را با این روش حل می‌کنیم (شکل ۹). در این‌جا نیز ارقامی که زیر آنها خط کشیده شده توسط کاشانی پایین نیامده‌اند و ما تنها برای سادگی این روش آنها را در جدول تکرار کرده‌ایم. برای مقایسهٔ روش قدیمی با روش جدید کاشانی سطرهایی که در آن باقیمانده‌های جزئی ثبت شده با علامت* مشخص شده‌اند (در روش نخست کاشانی باقی‌ماندهٔ مراحل دوم و سوم در یک سطر آمده‌اند). همان گونه که در جدول نیز دیده می‌شود باقیمانده‌های مراحل مختلف مانند قبل به ترتیب ۲۴۰، ۳۴، ۳۴۰۸، و ۸۳ است.

	نوع دوم روش کاشانی							نوع نخست روش کاشانی							
				۷	۵	۰	۷				۷	۵	۰	۷	
	۳	۵	۶	۵	۹	۰	۸	۳	۵	۶	۵	۹	۰	۸	
	۳	۳	۲	۵				۳	۳	۲	۵				
*		۲	۴	۰					۲	۴	۰	۹			*
	۲	۴	۰	۹	۰	۸			۲	۳	۷	۵			
	۲	۳	۷	۵							۳	۴	۰	۸	**
*			۳	۴							۳	۳	۲	۵	
		۳	۴	۰	۸								۸	۳	*
*	۳	۴	۰	۸								۴	۷	۵	
	۳	۳	۲	۵							۴	۷	۵		
*			۸	۳						۴	۷	۵			
		۴	۷	۵					۴	۷	۵				

شکل ۹ –روش کاشانی برای تقسیم

همان گونه که می‌بینیم در نوع نخست، تکرار مقسوم علیه در پایین جدول ضرورتی ندارد و در نوع دوم نیز تکرار ارقام باقی‌ماندهٔ مقسوم در سطری جداگانه نیز تنها به درک بهتر راه حل کمک می‌کند و آن هم ضروری نیست. اگر این تکرارهای غیر ضروری را از روش کاشانی حذف کنیم آنگاه هر دو نوع شبیه هم و دقیقاً مانند روش امروزی تقسیم خواهند شد. به عبارت دیگر روش نوین تقسیم را نیز باید از جملهٔ اختراعات کاشانی دانست.

کاشانی روش خاصی نیز برای تقسیم دو عدد هنگامی که ارقام مقسوم علیه زیاد باشد یا آن‌که ارقام مقسوم خیلی بیشتر از ارقام مقسوم علیه باشد پیشنهاد کرده است.

در روش‌هایی که ما (کاشانی) اختراع کرده‌ایم نیازی به کشیدن جدول‌های طولانی نیست. اما روش نخست را که پیشینیان ما گفته‌اند بدون هیچ تغییری در این کتاب آوردیم.

بدان که اگر خارج قسمت را در مقسوم علیه ضرب کنی مقسوم به دست می‌آید و اگر حاصل یک ضرب را بر یکی از دو عدد تقسیم کنی عدد دیگر به دست خواهد آمد.

باب پنجم: در یافتن ریشهٔ n اُم اعداد

ضلع اول: هرگاه عددی در خود ضرب شود و سپس حاصل در همان عدد ضرب شود و این حاصل نیز باز در همان عدد ضرب شود و الی آخر، آن عدد را در مقام مقایسه با آن حاصل ضرب‌ها ضلع اول (امروزه: ریشه، پایه) می‌گوییم.

مُضلّع: هر یک از حاصل ضرب‌های یاد شده در بالا (یعنی توان‌های دوم، سوم،...،n اُم یک عدد) را عموماً مُضلّع (بر وزن مُربّع) می‌نامیم اما برای هر مضلع اسم خاصی نیز وجود دارد. ما حاصل نخست(توان دوم) را «مجذور» یا «مال» می‌گوییم و حاصل دوم (توان سوم) را «مُکَعّب» یا کَعب؛ و بعدی را «مال مال» و بعدی را «مال کعب» و بعدی را «کعب کعب» و ...

گفتیم که به قوهٔ سوم عدد مکعب و کعب می‌گویند اما بهتر است که ریشهٔ سوم را کعب و قوهٔ سوم را فقط مکعب گویند. اما ریاضی‌دانان کعب را مجازا بر قوهٔ سوم اطلاق کرده‌اند.

ابوریحان بیرونی در *التفهیم* دربارهٔ این اصطلاح گفته است: گروهی از بهر سُبُک (=خلاصه) کردن سخن، «مُکَعّب» را «کَعْب» خوانند و آنگاه ناچار کَعْبش (ریشهٔ سومش) را «ضِلْع» باید خواند تا مشتبه نشود.

قاعدهٔ به دست آوردن نام هر یک از مضلع‌های بعد از «کعب»، از نام مضلع(توان) قبلی چنین است: نخستین واژهٔ کعب را به «مال مال» تبدیل می‌کنیم تا مضلع بعدی به دست آید. برای نامیدن دو قوهٔ بعدی نخست، دومین واژهٔ «مال» به «کعب» تبدیل می‌کنیم و سرانجام همین کار را با کلمهٔ «مال» اول انجام می‌دهیم.

همان گونه که در جدول ۱ دیده می‌شود این شیوهٔ نام‌گذاری در واقع همان دستور ضرب توان‌ها هنگام یکی بودن پایه‌ها است؛ یعنی در نام a^{3n}، n بار واژهٔ «کعب» به کار می‌رود و در نام a^{3n+1}، دو بار کلمهٔ مال و $n-1$ بار واژهٔ «کعب» و در نام a^{3n+2} نیز یک بار کلمهٔ «مال» و n بار واژهٔ «کعب» به کار

می‌رود. با روش فوق به طور مثال $a^{۲۱}$ را باید «کعب کعب کعب کعب کعب کعب کعب» نامید و برای $a^{۲۲}$ نیز باید «مال مال کعب کعب کعب کعب کعب کعب» نوشت. طبیعی است که با چنین روشی نوشتن نام توان‌های بالاتر یک عدد مثلاً $a^{۲۷۱}$ (دو بار مال و ۸۹ بار کعب!) جای خیلی زیادی می‌گرفت. اما مسلمانان در عمل توان‌های بیش از ۳ را به ندرت به کار برده‌اند و به همین لحاظ کمتر با چنین مشکلی مواجه شده‌اند.

نام قدیم	نماد جدید	تفسیر
مال	$a^{۲}$	$a^{۲}$
کعب	$a^{۳}$	$a^{۳}$
مال مال	$a^{۴}$	$a^{۲} \times a^{۲}$
مال کعب	$a^{۵}$	$a^{۲} \times a^{۳}$
کعب کعب	$a^{۶}$	$a^{۳} \times a^{۳}$
مال مال کعب	$a^{۷}$	$a^{۲} \times a^{۲} \times a^{۳}$
مال کعب کعب	$a^{۸}$	$a^{۲} \times a^{۳} \times a^{۳}$
کعب کعب کعب	$a^{۹}$	$a^{۳} \times a^{۳} \times a^{۳}$
مال مال کعب کعب	$a^{۱۰}$	$a^{۲} \times a^{۲} \times a^{۳} \times a^{۳}$

جدول ۱– نام توان‌های مختلف یک عدد

برای سادگی کار، مفهوم اصطلاحاتی را که کاشانی به کار برده و معادل کنونی آنها را در جدول ۲ خلاصه می‌کنیم.

اصطلاح کهن	مفهوم	معادل کنونی
ضلع اول	عدد a در قیاس با a^2، a^3،...،a^n	پایه یا ریشه
جذر	عدد a در قیاس با a^2 ($a=\sqrt{a^2}$)	جذر = ریشهٔ دوم
کَعْب	عدد a در قیاس با a^3 ($a=\sqrt[3]{a^3}$)	کعب = ریشهٔ سوم
مال	توان دوم عدد	a^2
کعب (مکعب)	توان سوم عدد	a^3
جزء الجذر	وارون یک عدد	$\frac{1}{a}$
جزء المال	وارون توان دوم یک عدد	$\frac{1}{a^2}$
جز الکعب	وارون توان سوم یک عدد	$\frac{1}{a^n}$
منزل	توان یا قوه(منزل پنجم=توان پنجم)	
عدد منزل	نمای توان (مثلاً n در a^n)	
مضلع	توان n اُم یک عدد، یا عددی که باید (ضلع)ریشهٔ n اُم آن را یافت	
مضلع مُنْطِق	عددی که ریشهٔ n اُم آن مُنطق (=گویا، در این‌جا=صحیح) باشد	
مضلع اَصَمّ	عددی که ریشهٔ n اُم آن اَصمّ (=گنگ) باشد	

جدول ۲-برخی اصطلاحات ریاضی قدیم

دور: کاشانی پیش از شرح روش گرفتن جذر (ریشهٔ دوم) و ریشهٔ n اُم به طور کلی اصطلاح دور (جمع آن: ادوار) را تعریف می‌کند و می‌گوید که مثلاً اگر بخواهیم ریشهٔ دوم یک عدد را بیابیم تعداد ارقام هر دور ۲ خواهد شد پس باید ارقام عدد مورد نظر را «۲ تا ۲ تا» از سمت راست جدا کنیم. و مثلاً اگر بخواهیم ریشهٔ پنجم یک عدد را بیابیم هر دور ۵ رقم خواهد داشت. پس باید ارقام عدد مورد نظر را از سمت راست ۵ به ۵ جدا کنیم.

روش کاشانی برای پیدا کردن جذر (ریشهٔ دوم) : عددی را که می‌خواهیم جذرش را بیابیم q می‌نامیم. این عدد را می‌نویسیم و خطی بالای آن می‌کشیم. بالای این خط را که محل ثبت ارقام جذر است، صف خارج می‌نامیم ، ارقام q را ۲ تا ۲ تا از سمت راست با خطوط عمودی جدا می‌کنیم. تعداد این دورها همان تعداد ارقام جذر است. سپس بزرگ‌ترین عددی را می‌جوییم که مربع آن برابر یا کمتر از عدد اولین دور سمت چپ باشد. این عدد که حتماً یک رقمی است و ما آن را با a نشان می‌دهیم اولین رقم جذر از سمت چپ (یعنی با ارزش‌ترین رقم آن) خواهد بود. این عدد را در بالای یکان نخستین دور عدد q از سمت چپ(= محل ثبت رقم اول جذر)و نیز در پایین جدول زیر همین رقم با فاصله‌ای مناسب می‌نویسیم. سپس عدد بالایی را در پایینی (که فعلا یکی هستند) ضرب می‌کنیم و حاصل را از عدد دور اول q کم می‌کنیم و حاصل تفریق را زیر همان دور ثبت می‌کنیم و زیر ارقام قبلی خطی می‌کشیم تا معلوم شود که آنها دیگر در محاسبه به کار نمی‌آیند (هم می‌توانیم حاصل ضرب را زیر این دور بنویسیم و تفریق را انجام دهیم و هم می‌توانیم این کار را ذهنی انجام داده و به یکباره

حاصل تفریق را بنویسیم). سپس عدد سطر خارج و عدد پایینی را (که هنوز یکی هستند) با هم جمع می‌کنیم و ارقام عدد حاصل را یک سطر به بالا و یک ستون به سمت چپ انتقال می‌دهیم.سپس عددی را می‌یابیم که اگر در جلوی این حاصل قرار گیرد و در خودش ضرب شود از عدد حاصل از ارقام دور دوم و باقیماندهٔ دور اول عدد q(در صورت وجود) کمتر باشد. این عدد را در بالای یکان دور دوم و در پایین جدول ثبت می‌کنیم و از این پس همین مراحل را تکرار می‌کنیم تا همهٔ ارقام جذر به دست آید.

اگر در صف عدد (بخش بالای جدول و زیر عدد q) در زیر خط جدا کننده عددی باقی نماند (یعنی اگر عمل یافتن جذر باقیمانده نداشته باشد) درمی‌یابیم که جذر ما عددی گویا (در این‌جا معادل صحیح) است. اما در صورت داشتن باقیمانده (که آن را r می‌نامیم)، جذر ما اَصَمّ (گنگ) است و مقدار واقعی آن عددی بین عدد به دست آمده در این روش (که آن را t می‌نامیم) و عدد بعدی آن (یعنی t+۱) است. در این صورت باقیماندهٔ عمل را بر « دو برابر مقدار صحیح جزر به اضافهٔ یک واحد» تقسیم می‌کنیم و مقدار این کسر به اضافهٔ مقدار صحیح به دست آمده (یعنی t) را «تقریب اصطلاحی» و مخرج آن کسر را نیز «مخرج اصطلاحی» می‌نامیم.

فرض می‌کنیم که عدد t، جزء صحیح جذر q و r باقیماندهٔ عمل جذر باشد (یعنی: $q = t^۲ + r;\ r < ۲t + ۱$). در این صورت خواهیم داشت:

مخرج اصطلاحی $= (t+۱)^۲ - t^۲ = ۲t + ۱$

$$\text{تقریب اصطلاحی} = t + \frac{r}{۲t+۱} \approx \sqrt{q}$$

به عبارت بهتر، مقصود از تقریب اصطلاحی همان جذر تقریبی عدد است.

کاشانی روش قدیمی یافتن جذر را اصلاح کرده و سپس با تلخیص این روش، روش فوق را که تقریباً خلاصهٔ همان روش و البته بسیار ساده تر از آن است اختراع کرده است. با کمی دقت می‌توان دریافت که روش کاشانی اساساً همان روشی است که امروزه برای یافتن جذر به کار می‌رود. با این تفاوت که اعمالی که وی در پایین جدول ثبت می کند، امروزه در بالای جدول و زیر ارقام جذر ثبت می‌شوند (یعنی تنها محل ثبت محاسبات فرعی تفاوت دارد). همچنین کاشانی ضرب‌های محاسبات فرعی را روی کاغذ ثبت نمی‌کند و فقط نتیجه را در جدول وارد می‌کند. پس شیوهٔ کنونی محاسبهٔ جذر نیز از اختراعات کاشانی است.

مثال: برای یافتن جذر عدد ۳۳۱۷۸۱ نخست ارقام آن را ۲ تا ۲ تا از سمت راست جدا می‌کنیم. مرحلهٔ ۱: بزرگ‌ترین عددی را می‌جوییم که چون در خودش ضرب شود از عدد دور اول (۳۳) کمتر باشد. این عدد ۵ است. آن را در بالای یکان دور اول و با فاصله‌ای مناسب در پایین جدول می‌نویسیم. عدد بالایی را در پایینی ضرب می‌کنیم(۵×۵) و زیر ۳۳ می‌نویسیم و از آن کم می‌کنیم. حاصل ۸ است. مرحلهٔ ۲: عدد پایین جدول را دو برابر می‌کنیم و حاصل را که ۱۰ است یک سطر بالاتر و یک ستون جلوتر (به سمت راست) می‌نویسیم. سپس بزرگ‌ترین عددی را می‌جوییم که چون جلوی ۱۰ قرار گیرد و حاصل در همان

عدد ضرب شود مساوی با، یا کمتر از ۸۱۷ باشد این عدد ۷ است. آن را در ۱۰۷ (حاصل از قرار دادن عدد ۷ جلوی ۱۰) ضرب می‌کنیم و ارقام حاصل ضرب را که ۷۴۹ است به ترتیب از راست به چپ از زیر یکان دور دوم می‌نویسیم. خود ۷ را نیز در بالای رقم یکان دور دوم می‌نویسیم. سپس یک بار دیگر اعمال مرحلهٔ دوم را تکرار می‌کنیم. یعنی عدد ۵۷ را که در پایین جدول است دو برابر می‌کنیم(حاصل =۱۱۴). عدد ۶ در شرط مسأله صدق می‌کند. آن را در ۱۱۴۶ ضرب می‌کنیم و حاصل را (که ۶۸۷۶ است) از باقیمانده مرحلهٔ قبل (یعنی ۶۸۷۱) کم می‌کنیم. پس جذر عدد ۳۳۱۷۸۱ برابر ۵۷۶ و باقیماندهٔ عمل ۵ است. مراحل کار در شکل۱۰ ثبت شده‌اند.

روش کاشانی						روشی که امروزه به کار می‌رود							
	۵		۷		۶								
۳	۳	۱	۷	۸	۱	۳	۳	۱	۷	۸	۱	۵ ۷ ۶	
۲	۵					۲	۵					۵ × ۲=۱۰	
	۸	۱	۷				۸	۱	۷			۱۰۷×۷=	
	۷	۴	۹				۷	۴	۹			۷۴۹	
		۶	۸	۸	۱			۶	۸	۸	۱	۵۷× ۲=۱۱۴	
		۶	۸	۷	۶			۶	۸	۷	۶	۱۱۴۶×۶=۶۸۷۶	
					۵						۵		
		۱	۱	۴	۶								
	۱	۰	۷										
	۵		۷		۶								

شکل۱۰- مقایسهٔ روش جدید جذر گرفتن با روش کاشانی

مانند موارد قبلی کاشانی ارقامی را که زیر آنها دو خط کشیده شده، ثبت نکرده (مانند ارقام ۷ و ۱ در عدد ۸۱۷) و ما در این‌جا تنها برای فهم آسان‌تر شیوهٔ کاشانی آنها را تکرار کرده‌ایم.

چون در صف عدد باقیمانده وجود دارد مقدار صحیح جذر یعنی ۵۷۶ را دو برابر می‌کنیم و یک واحد به آن می‌افزاییم تا مخرج اصطلاحی به دست آید. در نتیجه تقریب اصطلاحی این جذر $۵۷۶\frac{۵}{۱۱۵۳}$ خواهد بود. همچنین برای پیدا کردن مخرج اصطلاحی می‌توان آخرین عدد ثبت شده در پایین جدول یعنی ۱۱۴۶ را با آخرین رقم سطر خارج یعنی ۶ جمع کرد و یک واحد به آن افزود که حاصل این جمع نیز همان ۱۱۵۳ خواهد بود.

به عبارت بهتر کاشانی جذر تقریبی این عدد را چنین به دست آورده است: $\sqrt{۳۳۱۷۸۱} \approx ۵۷۶\frac{۵}{۱۱۵۳}$ که مقدار آن تا چهار رقم اعشار مطابق با مقدار واقعی است.

برتری این روش که خود ما آنرا اختراع کرده‌ایم، بر روش قدما در سادگی آن است، خصوصا وقتی که تعداد ارقام زیاد باشد. و ما برای پیدا کردن جذرهای گنگ روشی خواهیم آورد که دقیق‌تر از این روش است (برای این روش نگاه کنید به صفحهٔ ۱۱۰ به بعد).

یافتن ریشهٔ n اُم در حالت کلی: کاشانی ابتدا روش پیدا کردن ریشهٔ n اُم یک عدد را در حالت کلی شرح داده و سپس به عنوان مثال ریشهٔ پنجم یک عدد

را به دست آورده است. در این‌جا برای جلوگیری از تفصیل تنها همان مثال کاشانی را حل می‌کنیم زیرا از روی آن به سادگی می‌توان روش یافتن ریشه‌های دیگر را نیز دریافت.

مثال: روش یافتن ریشهٔ پنجم ۴۴,۲۴۰,۸۹۹,۵۰۶,۱۹۷

۱. رسم جدول: چون مقصود یافتن ریشهٔ پنجم این عدد است ارقام آن را از سمت راست به «دورهای» ۵ رقمی تفکیک می‌کنیم (این عدد سه دور دارد) و آنها را با خطوطی عمودی از هم جدا می‌کنیم و جدولی را به همان شیوه که دربارهٔ جذر گفته شد تشکیل می‌دهیم (شکل ۱۱). سپس ۵ صف یا خانهٔ افقی مستطیل شکل (در حالت کلی n صف) زیر عدد مفروض تشکیل می‌دهیم و آنها را به ترتیب از بالا صف عدد، صف قوهٔ چهارم (در حالت کلی قوهٔ ۱-n اُم)، صف قوهٔ سوم، صف قوهٔ دوم و صف پایه می‌نامیم (مثلاً اگر n=۱۰ باشد ۱۰ صف تشکیل می‌دهیم که بالاترین آنها صف عدد، سپس صف قوهٔ نهم، صف قوهٔ هشتم ... تا صف پایه خواهد بود). در بالای عدد نیز صفی برای نوشتن جذر آن رسم می‌کنیم و آن را صف خارج می‌نامیم.

۲. یافتن رقم نخست: بزرگ‌ترین عددی را می‌جوییم که توان پنجم (در حالت کلی: n اُم) آن کوچک‌تر یا مساوی ۴۴۲۴ باشد. این عدد ۵ و توان چهارم آن ۳۱۲۵ است. پس نخستین رقم ریشهٔ پنجم عدد مورد نظر از سمت چپ، ۵ است. آن را بالای رقم یکان دور اول می‌نویسیم و توان پنجم آن را که ۳۱۲۵ است زیر ارقام دور اول (۴۴۲۴) ثبت می‌کنیم و حاصل تفریق آن دو عدد را نیز زیر آنها می‌نویسیم این حاصل را که ۱۲۹۹ است با خطی افقی از اعداد بالایی

جدا می‌کنیم. سپس توان‌های اول تا چهارم (در حالت کلی: n اُم) عدد ۵ را به ترتیب در پایین صف پایه تا صف چهارم (در حالت کلی: n اُم) می‌نویسیم (یعنی اعداد ۵، ۲۵، ۱۲۵، و ۶۲۵). توجه داشته باشیم که یکان همهٔ این اعداد باید زیر یکان دور اول قرار گیرد.

۳. برای یافتن ارقام بعدی باید مراحل زیر را تکرار کنیم:

۳-۱. یافتن اعدادی که باید منتقل شوند: برای صف قوهٔ چهارم، این اعمال را در ستون مربوط به دور اول انجام می‌دهیم: عدد ستون خارج، یعنی ۵ را با آخرین عددی که در ستون پایه نوشته شده، یعنی ۵، جمع می‌کنیم و حاصل را، که ۱۰ است، در صف پایه بالای ۵ می‌نویسیم و میان این دو عدد خطی می‌کشیم (اصولاً پس از نوشتن هر عدد جدیدی یک خط بالای عدد قبلی می‌کشیم تا نشان دهیم که دیگر نیازی به آن عدد نیست) سپس این حاصل را در عدد سطر خارج یعنی ۵ (که ربطی به ریشهٔ پنجم ندارد) ضرب کرده حاصل، یعنی ۵۰ را در صف قوهٔ دوم بالای ۲۵ می‌نویسیم و حاصل جمع این دو عدد، یعنی ۷۵ ، را نیز بالای آنها می‌نویسیم. باز ۷۵ را در عدد سطر خارج، یعنی ۵ ضرب می‌کنیم و حاصل را که ۳۷۵ است در در صف قوهٔ بالاتر (یعنی بالای ۱۲۵) می‌نویسیم و حاصل جمع این دو عدد یعنی ۵۰۰ را نیز روی آنها می‌نویسیم. و همین کار را ادامه می‌دهیم. یعنی ۵۰۰ را در ۵ ضرب کرده در صف چهارم روی ۶۲۵ می‌نویسیم و حاصل جمع آنها را نیز که ۳۱۲۵ است بالای آنها می‌نویسیم. ۲) برای صف قوهٔ سوم: عدد سطر خارج یعنی ۵ و آخرین عدد ثبت شده در صف پایه یعنی ۱۰ را با هم جمع می‌کنیم و حاصل را بالای آنها می‌نویسیم. این عدد

را در ۵ ضرب می‌کنیم و حاصل را، یعنی ۷۵، در بالای ۷۵ قبلی می‌نویسیم و باز آنها را باهم جمع کرده حاصل را، یعنی ۱۵۰ روی آنها می‌نویسیم. باز ۱۵۰ را در ۵ ضرب می‌کنیم و حاصل یعنی ۷۵۰ را در صف قوهٔ سوم بالای ۵۰۰ قبلی می‌نویسیم و حاصل جمع آن دو را، یعنی ۱۲۵۰ در بالای ۷۵۰ می‌نویسیم. ۳) روش یافتن عدد صف قوهٔ دوم نیز شبیه روش یافتن اعداد صف‌های چهارم و سوم(مراحل ۱ و ۲) است یعنی عدد سطر خارج را که ۵ است با آخرین عدد ثبت شده در صف پایه، یعنی ۱۵ جمع می‌کنیم و حاصل بالای آن می‌نویسیم. ۲۰ را در ۵ (عدد صف خارج) ضرب کرده حاصل را که ۱۰۰ است در صف دوم بالای ۱۵۰ قبلی می‌نویسیم و حاصل جمع این دو عدد را که ۲۵۰ است در بالای آن دو می‌نویسیم. ۴) برای صف پایه عدد ستون خارج، یعنی ۵ را با عدد صف پایه، یعنی ۲۰ جمع می‌کنیم و حاصل، یعنی ۲۵ را بالای ۲۰ می‌نویسیم.

پس از انجام این مراحل در صف پایه عدد ۲۵، در صف قوهٔ دوم عدد ۲۵۰، در صف قوهٔ سوم عدد ۱۲۵۰ و در صف قوهٔ چهارم عدد ۳۱۲۵ ثبت شده است.

۳-۲. انتقال اعداد: به طور کلی برای انتقال این اعداد در حالتی که پیدا کردن ریشهٔ n اُم مد نظر باشد ارقام آخرین اعداد صف قوهٔ n-k اُم را به اندازهٔ k رقم به سمت راست و یک سطر به بالاتر انتقال می‌دهیم (البته در صورتی که ارقام اعداد دور بعدی و فعلی با یکدیگر اشتباه نشوند می‌توان سطر جدید را از پایین این صف شروع کرد، مانند ثبت عدد ۲۵ در پایین صف پایه پس از انتقال). پس در این مسأله باید عدد صف قوهٔ چهارم (n=۵ و k=۱)، یعنی ۳۱۲۵، را یک رقم به سمت راست و یک سطر به بالا انتقال دهیم. عدد صف سوم(n=۵ و k=۱)،

یعنی ۱۲۵۰ را نیز دو رقم به سمت راست و یک سطر به بالا انتقال می‌دهیم. اعداد صف‌های دوم و پایه، یعنی ۲۵۰ و ۲۵ را نیز به ترتیب ۳ و ۴ رقم به سمت راست و یک سطر به بالا انتقال می‌دهیم.

پس از انجام این مراحل همیشه رقم یکان عدد صف پایه زیر رقم دهگان دور بعدی عدد قرار خواهد گرفت.

در این مثال و هنگام یافتن رقم دوم، رقم یکان عدد سطر پایه یعنی ۵ زیر دهگان دور دوم عدد یعنی ۹ قرار گرفته است.

۳-۳. یافتن رقم بعدی: حال فرض کنیم که رقم بعدی ریشهٔ n اُم، m باشد. در این صورت این محاسبات را با آن انجام می‌دهیم. آنرا در سمت راست عدد صف پایه (که در حال حاضر خالی است) می‌نویسیم و حاصل را در خود m ضرب می‌کنیم. حاصل این ضرب را بالای عدد صف بالایی طوری می‌نویسیم که یکان آن زیر یکان دور فعلی قرار گیرد. سپس حاصل جمع عدد قبلی این صف و این حاصل جمع را در همان صف بالای این دو می‌نویسیم (توجه داشته باشیم که خانه‌های خالی جلوی اعداد انتقال یافته نشانگر «صفر»هایی هستند که برای پرهیز از شلوغی جدول ثبت نشده‌اند). سپس با این حاصل همین کار را تکرار می‌کنیم. یعنی آن را در m ضرب می‌کنیم و حاصل ضرب را بالای عدد صف بالاتر می‌نویسیم و سپس حاصل جمع عدد قبلی و این حاصل ضرب را در همان صف ثبت می‌کنیم و این کار را آن قدر ادامه می‌دهیم که به صف عدد برسیم. حال اگر m را درست انتخاب کرده باشیم عدد حاصل در صف عدد نباید بزرگ‌تر از عدد متشکل از ارقام دور فعلی و باقیماندهٔ ارقام دور قبلی باشد. اگر این شرط

برقرار بود تفاضل آنها را در صف عدد ثبت می‌کنیم و الا عدد دیگری را امتحان می‌کنیم. تا بزرگ‌ترین عدد یک رقمی دارای چنین شرایطی را بیابیم.

مراحل پیدا کردن رقم جدید در این‌جا به پایان می‌یابد. در صورتی که همهٔ ارقام ریشهٔ n اُم معلوم شده باشد عملیات در این جا خاتمه می‌یابد. در این صورت آخرین باقیمانده‌ای که در سطر عدد ثبت شده باقیماندهٔ کل عملیات یافتن ریشهٔ n اُم است. در غیر این صورت مراحل سه گانهٔ بند ۳ را مجدداً تکرار می‌کنیم تا آن‌که یکان ریشهٔ مورد نظر پیدا شود.

در این مثال و هنگام یافتن رقم دوم پس از امتحان اعداد مختلف معلوم می‌شود که عدد ۳ دارای شرایط بند فوق است. در این صورت مراحل محاسبهٔ اعداد هر صف بدین قرار است. این عدد را در سمت راست عدد ۲۵ قرار می‌دهیم. عدد به دست آمده یعنی ۲۵۳ را در ۳ ضرب می‌کنیم و حاصل، یعنی ۷۵۹ را در صف بالاتر می‌نویسیم و آن را با عددی که قبلا در این صف انتقال یافته بود، یعنی ۲۵۰۰۰ جمع می‌کنیم و حاصل، یعنی ۲۵۷۵۹ را در همین صف و بالای ۷۵۹ می‌نویسیم(توجه داریم که دو خانهٔ خالی جلوی ۲۵۰ به منزلهٔ ۲ رقم صفر است پس عددی که در این صف انتقال یافته بود در واقع ۲۵۰۰۰ است و نه ۲۵۰). سپس همین مراحل را تکرار می‌کنیم. یعنی ۲۵۷۵۹ را در ۳ ضرب می‌کنیم و حاصل، یعنی ۷۷۲۷۷ را در صف بالایی می‌نویسیم و حاصل دو عدد آخر این صف را نیز در همان صف بالای آن دو می‌نویسیم. باز عدد جدید این صف را در ۳ ضرب کرده در صف بالاتر (صف چهارم) می‌نویسیم و آن را با عدد قبلی این صف جمع می‌کنیم و در همین صف ثبت می‌کنیم. در نهایت با تکرار

همین کار به صف عدد خواهیم رسید. در مسألهٔ فعلی پس از انجام این کارها در صف پایه عدد ۲۵۳، در صف قوهٔ دومْ عددِ ۲۵۷۵۹، در صف قوهٔ سومْ عددِ ۱۳۲۷۲۷۷، در صف قوهٔ چهارم عدد ۳۵۲۳۱۸۳۱ و در صف عدد نیز عدد ۱۰۵۶۹۵۴۹۳ به دست می‌آید که از عدد ۱۲۹۹۰۸۹۹۵ (حاصل از ارقام باقیماندهٔ دور قبل و ارقام دور فعلی) کمتر است. اگر همین مراحل را با عدد ۴ انجام دهیم متوجه می‌شویم که عددی که برای «صف عدد» به دست می‌آید از عدد ۱۲۹۹۰۸۹۹۵ بیشتر است. پس دومین رقم ریشهٔ پنجم همین رقم ۳ است.

برای درک بهتر این روش برخی از مراحل یافتن رقم سوم (یکان) ریشهٔ مورد نظر را در این‌جا شرح می‌دهیم: مطابق بند ۳-۱ عدد سطر خارج (در این مرحله=۳) را با عدد صف پایه، جمع می‌کنیم و حاصل، یعنی ۲۵۶ را روی آن می‌نویسیم این عدد جدید را در عدد سطر خارج (یعنی ۳) ضرب می‌کنیم و حاصل ضرب، یعنی ۷۶۸ را بالای عدد صف بالاتر، یعنی ۲۵۷۵۹ می‌نویسیم و حاصل جمع این دو را نیز بالای آنها می‌نویسیم. سپس همین کار را با این حاصل جمع انجام می‌دهیم تا به صف قوهٔ چهارم برسیم. در این حالت عدد صف قوهٔ چهارم ۳۹۴۵۲۴۰۵ خواهد شد. مجدداً برای پیدا کردن عدد صف قوهٔ سوم عدد سطر خارج یعنی ۳ را با عدد صف پایه یعنی ۲۵۶ جمع می‌کنیم و حاصل یعنی ۲۵۹ را بالای آن می‌نویسیم. سپس حاصل ۳ در ۲۵۹ را در صف بالاتر می‌نویسیم و ... تا آن‌که عدد صف قوهٔ سوم، یعنی ۱۴۸۸۷۷۰ به دست آید. همین کار را برای یافتن اعداد نهایی سه صف بعدی انجام می‌دهیم. بدین ترتیب اعداد صف قوهٔ دوم و صف پایه نیز به ترتیب ۲۸۰۹۰ و ۲۶۵ خواهد بود. سپس مطابق

روش بند ۳-۲ این ارقام را به بالا و راست انتقال می‌دهیم. و باز در پـی عـددی می‌گردیم که در شرایط بند ۳-۳ صدق کند. این عدد ۶ است. در نهایت باقیماندهٔ کل عملیات ۲۱ خواهد بود که در سمت راست صف عدد مشخص است.

			۵					۳					۶	خارج
۴	۴	۲	۴	۰	۸	۹	۹	۵	۰	۶	۱	۹	۷	صف عدد
۳	۱	۲	۵											
۱	۲	۹	۹	۰	۸	۹	۹	۵						
۱	۰	۵	۶	۹	۵	۴	۹	۳						
	۲	۴	۲	۱	۳	۵	۰	۲	۰	۶	۱	۹	۷	
	۲	۴	۲	۱	۳	۵	۰	۲	۰	۶	۱	۷	۶	
												۲	۱	
		۴	۱	۲	۶	۹	۴	۹	۵	۸	۰	۸	۰	صف قوهٔ چهارم (صف مال المال)
				۹	۱	۳	۶	۵	۹	۰	۳	۸	۴	
		۴	۰	۳	۵	۵	۸	۳	۶	۷	۶	۹	۶	
				۹	۰	۳	۴	۳	۱	۷	۶	۹	۶	
		۳	۹	۴	۵	۲	۴	۰	۵					
	۳	۹	۴	۵	۲	۴	۰	۵						
		۴	۲	۲	۰	۵	۷	۴						
	۳	۵	۲	۳	۱	۸	۳	۱						
	۳	۱	۲	۵										
۳	۱	۲	۵											
۲	۵	۰	۰											
	۶	۲	۵											
				۱	۵	۳	۹	۹	۰	۶	۵	۶	۰	صف قوهٔ سوم (صف الکعب)
						۱	۷	۱	۴	۱	۴	۹	۶	
				۱	۵	۲	۲	۷	۶	۵	۰	۶	۴	
						۱	۷	۰	۴	۵	۴	۴	۸	
				۱	۵	۰	۵	۷	۱	۹	۶	۱	۶	
						۱	۶	۹	۴	۹	۶	۱	۶	
				۱	۴	۸	۸	۷	۷	۰				
		۱	۴	۸	۸	۷	۷	۰						
				۸	۱	۹	۱	۲						

<table>
<tr>
<td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td>
<td rowspan="2">۸
۱
۷
۷</td>
<td rowspan="2">۵
۸
۷
۷</td>
<td rowspan="2">۸
۵
۲
۲</td>
<td rowspan="2">۶
۹
۷
۷
۰</td>
<td rowspan="2">۰
۷
۲
۷
۵</td>
<td>۴
۳
۲</td>
<td>۱
۱
۱</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>۰
۰
۰
۵
۵</td>
<td>۵
۵
۰
۷
۲</td>
<td>۲
۷
۵
۳
۱</td>
<td>۱</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">صف قوهٔ دوم (صف المال)</td>
<td rowspan="2">۰
۴
۶
۸
۸
۲
۶
۶</td>
<td rowspan="2">۶
۴
۱
۰
۰
۷
۳
۳</td>
<td rowspan="2">۹
۰
۹
۰
۹
۹
۹
۹
۰</td>
<td rowspan="2">۲
۶
۶
۶
۰
۵
۴
۵
۹</td>
<td rowspan="2">۷
۱
۵
۱
۴
۱
۲
۱
۰</td>
<td rowspan="2">۰
۶
۴
۷
۷
۸
۹
۹
۸
۸
۸
۸
۸</td>
<td rowspan="2">۹
۸
۰
۷
۲
۶
۵
۵
۲
۲
۲
۲
۲</td>
<td rowspan="2">۰
۷
۳
۷
۵
۷
۷
۷
۰</td>
<td rowspan="2">۸
۷
۶
۵
۵</td>
<td rowspan="2">۲
۲
۲
۲
۲</td>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td rowspan="2"></td>
</tr>
<tr>
<td>۰
۰
۰
۵
۵
۰
۵</td>
<td>۵
۰
۵
۷
۷
۵
۲</td>
<td>۲
۱
۱</td>
</tr>
<tr>
<td>صف پایه (صف الضلع)</td>
<td>۰
۴
۸
۲
۶</td>
<td>۸
۷
۶
۶
۵</td>
<td>۶
۶
۶
۶
۶</td>
<td>۲
۲
۲
۲
۲</td>
<td></td>
<td>۵
۲
۹
۶
۳</td>
<td>۶
۶
۵
۵
۵</td>
<td>۲
۲
۲
۲
۲</td>
<td></td>
<td></td>
<td>۵
۰
۵
۰
۵</td>
<td>۲
۲
۱
۱</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

شکل ۱۱- یافتن ریشهٔ n اُم به روش کاشانی

در شکل ۱۱ نیز مطابق روش معمول در این کتاب، زیر ارقامی که توسط خود کاشانی تکرار نشده‌اند دو خط کشیده شده است. تکرار این ارقام برای سهولت درک این روش است.

کاشانی ۲۸۰۹۰ (در صف قوهٔ دوم) و اعداد ۲۵ و ۲۶۵ (در صف پایه) را پس از انتقال در پایین صف ثبت کرده است تا جای کمتری گرفته شود.

اگر دقت کنیم درمی‌یابیم اعدادی که در جدول با حروف تیره‌تر ثبت شده‌اند در محاسباتی به کار رفته‌اند که نتیجهٔ آنها پیدا کردن اعداد انتقالی به دور بعدی است. این اعداد به ترتیب از صف قوهٔ چهارم تا صف پایه عبارتند از: ۴۱۲۶۹۴۵۸۰۸۰، ۱۵۳۹۹۰۶۵۶۰، ۲۸۷۲۹۶۰ و ۲۶۸۰ (با در نظر گرفتن خانهٔ خالی سمت راست ۲۶۸ در صف پایه به عنوان صفر). اما در این‌جا دیگر دور بعدی وجود ندارد در نتیجه ممکن است خواننده تصور کند که کاشانی کاری اضافه و بیهوده انجام داده است. اما به هیچ وجه چنین نیست. زیرا همان گونه که پیش از این دربارهٔ ریشهٔ دوم اعداد دیدیم در این‌جا نیز کاشانی با جمع کردن این اعداد و افزودن یک واحد به این مجموع، مخرج اصطلاحی را به دست می‌آورد.

ریشهٔ n اُم تقریبی: اگر t جزء صحیح ریشهٔ n اُم عدد q و r باقیماندهٔ عمل یافتن ریشه باشد (یعنی $t = \left[\sqrt[n]{q}\right]$ و $r = q - t^n$)، خواهیم داشت

مخرج اصطلاحی $= (t+1)^n - t^n$

تقریب اصطلاحی $= t + \dfrac{r}{(t+1)^n - t^n} \approx \sqrt[n]{q}$

چون در صف عدد ۲۱ باقی مانده است پس جذر عددی گنگ خواهد بود و باید برای محاسبهٔ آن از تقریب اصطلاحی استفاده کرد. مخرج اصطلاحی در این‌جا $۵۳۷^۵ - ۵۳۶^۵$ است اما به جای محاسبهٔ این مقدار می‌توان اعداد صف‌های قوهٔ چهارم تا قوهٔ پایه را با یکدیگر جمع کرد و یک واحد بدان افزود (جدول ۳). حاصل این جمع همان مخرج اصطلاحی خواهد بود:

صف قوهٔ چهارم	۴۱۲,۶۹۴,۹۵۸,۰۸۰
صف قوهٔ سوم	۱,۵۳۹,۹۰۶,۵۶۰
صف قوهٔ دوم	۲,۸۷۲,۹۶۰
صف پایه	۲,۶۸۰
به اضافهٔ یک واحد	۱
مخرج اصطلاحی (مجموع اعداد فوق)	۴۱۴,۲۳۷,۷۴۰,۲۸۱
عدد باقیمانده در صف اعداد (r)	۲۱
تقریب اصطلاحی(مقدار تقریبی $\sqrt[5]{q}$)	$۵۳۶\frac{۲۱}{۴۱۴,۲۳۷,۷۴۰,۲۸۱}$

جدول ۳- محاسبهٔ تقریب اصطلاحی

برای یافتن ریشهٔ n اُمی که عدد صحیح نباشد (یعنی عملیات ریشه گرفتن باقیمانده داشته باشد) روشی دقیق‌تر از آنچه گفتیم وجود دارد که آن را در مقالهٔ بعدی خواهیم آورد (صفحهٔ ۱۱۰ به بعد کتاب حاضر) زیرا که فراگرفتن آن بدون دانستن چگونگی کار با اعداد کسری ممکن نیست.

یافتن ریشهٔ n اُم به شیوه‌ای که گفته شد اختراع خـود ماسـت و راهـی کـه متقدمان برای این کار رفته‌اند بسیار پیچیده و دشوار اسـت بـویژه هنگـامی کـه ارقام عددی که می‌خواهیم جذر آن را بگیریم بسیار باشد. و ما روشی دیگر برای این کار اختراع کرده‌ایم که آن را در رساله‌ای جداگانه خواهیم آورد.

همان گونه که دیدیم کاشانی به کارهای متقدمان دربارهٔ پیدا کـردن ریشـهٔ n اُم اشاره کرده اما روش کلی یـافتن ریشـهٔ n اُم را از اختراعـات خـود دانسـته است.

متأسفانه رساله‌ای که کاشانی وعدهٔ تألیف آن را داده یا هرگز نوشته نشده یا اگر نوشته شده به دست ما نرسیده است. از این رو مـا از چگـونگی روش دیگـر کاشانی هیچ اطلاعی نداریم.

تاریخچهٔ یافتن ریشهٔ n اُم توسط ایرانیان تا زمان کاشانی

ریاضی‌دانان ایرانی پیش از کاشانی کتاب‌هایی دربارهٔ پیدا کردن ریشـهٔ دوم، سوم و ریشه‌های بالاتر نوشته‌اند که با کمال تأسف بسیاری از آنها امروزه مفقـود شده و به دست ما نرسیده‌اند. در این‌جا به ترتیب تقدم تاریخی به مهم‌ترین آنهـا اشاره می‌شود:

۱. ابوالوفای بوزجانی (درگذشت پس از ۳۸۷ قمری/ ۹۹۷ میلادی) کتابی دربـارهٔ پیدا کردن ریشهٔ سوم و ریشهٔ چهارم و یافتن ریشـهٔ معـادلات دارای تـوان‌هـای سوم و چهارم نوشته است که متأسفانه امروزه نشانی از آن در دست نداریم.

۲. کوشیار گیلانی دانشمند سدهٔ ۴ قمری در فصل‌های نهم تـا شـانزدهم کتـاب اصول حساب هندی خود روش پیدا کردن جذر و کَعب (رِیشهٔ سوم) را شرح داده است.

۳. ابوریحان بیرونی نیز پیش از سال ۴۲۷ قمری (مطابق ۱۰۳۶ میلادی) کتابی نسبتاً مفصل دربارهٔ روش پیدا کردن ریشه‌های سـوم و بـالاتر نوشـته بـوده کـه متأسفانه آن نیز از بین رفته است.

۴. محمد بن ایـوب طَبـری (نیمـهٔ دوم سـدهٔ پـنجم قمـری) در کتـاب فارسـی *شمارنامه*، به تفصیل دربارهٔ روش یافتن ریشهٔ دوم و سوم اعداد صحیح و کسری و امتحان آنها سخن گفته است.

۵. علی بن احمد نسوی (معاصر محمد بن ایـوب طبـری) نیـز در کتـاب عربـی *المقنع فی الحساب الهندی* روش‌های کوشیار گیلانی (بند ۲) برای یافتن جذر و کعب را اصلاح کرده است.

۶. حکیم عمر خیام، شاعر و ریاضی‌دان نابغهٔ ایرانی نیز که در اواخر سدهٔ پنجم و اوائل سدهٔ ششم قمری می‌زیسته است، کتابی دربارهٔ یافتن ریشه‌هـای چهـارم و بالاتر داشته که آن نیز متأسفانه از بین رفته اسـت. خـود خیـام در کتـاب جبـر و مقابلهٔ خود در این باره گفته است: «هندیان برای پیدا کردن جذر و کعب روشـی دارند که مبتنی است بر جستجو در جدول توان‌های اعداد صحیح ... و ما (=خیام) کتابی در بارهٔ درستی این روش‌هـا نوشـته‌ایـم و نیـز ، روش یـافتن ریشـه‌هـای مختلف (چهارم، پنجم و بـالاتر) را کـه مطـالبی تـازه بـه شـمار مـی‌رود بـدان افزوده‌ایم». متأسفانه از کتاب خیام نیز نشانه‌ای در دست نیست.

۷. نصیرالدین طوسی (سدهٔ هفتم هجری) نیز در کتاب *جَوامِعُ الحِساب بالتَّخْتِ و التُّراب* چند فصل را به این موضوع اختصاص داده است. وی قاعدهٔ استخراج ریشهٔ n اُم را به تفصیل در مورد مثال زیر شرح داده است:

$$\sqrt[۶]{۲۴۴,۱۴۰,۶۲۶} = ۲۵\frac{۲}{۲۶^{۶} - ۲۵^{۶}} = ۲۵\frac{۱}{۶۴,۷۷۵,۱۵۱}$$

همان گونه که می‌بینیم تقریبی که طوسی به کار برده دقیقاً همان تقریب کاشانی است.

۸. نظام الدین اَعْرَج (= لَنْگ) مشهور به نِظام اَعْرَجِ نیشابوری نیز در کتاب *الشمسیة فی الحساب* قاعده‌ای کلی برای ریشهٔ n اُم ارائه کرده و این مثال را نیز حل کرده است:

$$\sqrt[۳]{۳۴,۰۱۲,۲۲۵} = ۳۲۴\frac{۱}{۳۲۴^{۳} - ۳۲۵^{۳}} = ۳۲۴\frac{۱}{۳۱۵,۹۰۱}$$

چنان که می‌بینیم تقریبی که نظام الدین اعرج به کار برده همان تقریب به کار رفته توسط نصیر الدین طوسی و کاشانی است.

اما همان گونه که گفته شد کاشانی ادعا نمی‌کند که هیچ کس پیش از وی روش کلی استخراج ریشهٔ n اُم را به دست نیاورده، بلکه مدعی است که روش دانشمندان قبلی بسیار پیچیده و دشوار و روش وی بسیار ساده و آسان است. همچنین وی در مورد روش محاسبهٔ تقریبی جذر (یعنی جذر اصطلاحی) هیچ ادعایی نداشته و معلوم است که این روش را از دانشمندان قبل از خود، مثلاً نصیر الدین طوسی یا نظام اعرج گرفته است.

روشی که کاشانی برای استخراج ریشهٔ n اُم به کار برده، همان روشی است که اروپاییان بعدها در سدهٔ ۱۹ میلادی به آن دست یافتند و امروزه به روش «روفینی-هارْنِر» مشهور است.

آدُلف یوشکوِیچ محقق برجستهٔ تاریخ ریاضیات دربارهٔ قاعدهٔ کلی کاشانی نوشته است: «تنها قاعدهٔ کلی که برای استخراج ریشهٔ n اُم اعداد صحیح در آثار ریاضی‌دانان اسلامی می‌شناسیم همان است که در *مفتاح الحساب* کاشانی آمده است» اما چنان که دیدیم دست کم دوتن از ریاضی‌دانان ایرانی پیش از کاشانی (نصیر الدین طوسی و نظام الدین اَعْرَج) قاعده‌ای کلی برای این کار ارائه کرده‌اند.

بسط دو جمله‌ای نیوتون، مثلث پاسکال و محاسبهٔ $a^n - b^n$

روش دیگری برای یافتن تفاضل میان یک توان از دو عدد (یعنی $a^n - b^n$) وجود دارد که در آن احتیاج به شناختن اعدادی داریم که آنها را «اصول این توان» می‌نامند.

بدان که اصل منزل توان دوم فقط یک عدد است و آن ۲ می‌باشد و اصول منزل توان سوم دو عدد است که عبارتند از ۳ و ۳ و برای هر یک از منزل‌های بعدی عدد آن یک واحد به ازای هر صف زیاد می‌شود و همچنین اعداد دو طرف یکی زیاد می‌شوند و اگر هر دو عدد مجاور از اصول یک منزل را با هم جمع کنیم یکی از اعداد وسط منزل بعدی به دست می‌آید. مثلاً اعداد منزل توان سوم ۳ و ۳ است که مجموعشان ۶ می‌شود. پس ۶ عدد وسط منزل توان چهارم

است و اصول منزل توان چهارم، ۴، ۶ و ۴ هستند و مجموع ۴ و ۶ یعنی ۱۰ یکی از دو عدد وسط منزل توان پنجم است و مجموع ۶ و ۴ عدد وسط دیگر است (که باز همان ۱۰ می‌شود) و به همین قیاس اصول منازل تا بی‌نهایت همان گونه که در جدول ۴ دیده می‌شود به دست می‌آیند.

صف‌ها	اصول توان دوم	اصول توان سوم	اصول توان چهارم	اصول توان پنجم	اصول توان ششم	اصول توان هفتم	اصول توان هشتم	اصول توان نهم
صف توان هشتم								۹
صف توان هفتم							۸	۳۶
صف توان ششم						۷	۲۸	۸۴
صف توان پنجم					۶	۲۱	۵۶	۱۲۶
صف توان چهارم				۵	۱۵	۳۵	۷۰	۱۲۶
صف توان سوم			۴	۱۰	۲۰	۳۵	۵۶	۸۴
صف توان دوم		۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶
صف پایه	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

جدول ۴–اصول توان‌های دوم تا نهم

منظور کاشانی از «اصل منزل توان دوم»، ضریب جملهٔ ab در بسط $(a+b)^2$ است و چون $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ پس اصل منزل توان دوم ۲ خواهد بود. به همین ترتیب منظور وی از «اصول منزل توان سوم»، ضرایب دو جملهٔ a^2b و ab^2 در بسط $(a+b)^3$ است و با توجه به این که $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 + 3ab^2 + b^3$، در نتیجه اصول منزل توان سوم

اعداد ۳ و ۳ خواهند بود. به همین ترتیب اصول منزل توان n اُم همان ضرایب بسط دو جمله‌ای نیوتون یعنی $(a + b)^n$ خواهند بود(البته به جز ضرایب جملات a^n و b^n که هر دو «یک» هستند).

مثلث حسابی پاسکال: اگر با دقت به جدول ۴ نگاه کنیم درمی‌یابیم که این جدول چیزی نیست مگر همان مثلثی که اروپاییان امروزه آن را مثلث حسابی پاسکال (جدول ۵) می‌نامند. میان این دو جدول تنها دو تفاوت جزئی وجود دارد نخست آن‌که اعدادی که در مثلث کاشانی در ستون‌ها آمده‌اند در مثلث پاسکال در سطرها ثبت شده‌اند (به طور مثال سطر دهم مثلث پاسکال همان ستون اصول قوهٔ نهم مثلث کاشانی است). دیگر آن‌که در مثلث کاشانی، یک‌های ستون اول و قطر مثلث حسابی ثبت نشده‌اند. البته کاشانی نیازی برای ثبت آنها نمی‌دیده است زیرا این یک‌ها ضرایب جملات a^n و b^n در بسط دو جمله‌ای نیوتون هستند و کاشانی می‌دانست که این ضرایب همیشه یک هستند.

سطر اول										۱
سطر دوم									۱	۱
سطر سوم								۱	۲	۱
سطر چهارم							۱	۳	۳	۱
سطر پنجم						۱	۴	۶	۴	۱
سطر ششم					۱	۵	۱۰	۱۰	۵	۱
سطر هفت				۱	۶	۱۵	۲۰	۱۵	۶	۱
سطر هشتم			۱	۷	۲۱	۳۵	۳۵	۲۱	۷	۱
سطر نهم		۱	۸	۲۸	۵۶	۷۰	۵۶	۲۸	۸	۱
سطر دهم	۱	۹	۳۶	۸۴	۱۲۶	۱۲۶	۸۴	۳۶	۹	۱

جدول ۵- مثلث حسابی منسوب به پاسکال

در این‌جا تذکر یک نکته حائز اهمیت بسیار است. کاشانی در مقدمهٔ *مفتاح الحساب* تأکید کرده که مثلث حسابی، یعنی جدول ۴ (و نیز دو جدول که بعداً خواهد آمد) از اختراعات خود وی نیست و او این جدول‌ها را از دانشمندان پیش از خود فراگرفته است؛ به عبارت بهتر مثلث حسابی منسوب به پاسکال مدت‌ها قبل از کاشانی توسط مسلمانان کشف شده بود و در زمان کاشانی استفاده از این مثلث کاملاً رایج بوده است. پس باید گفت که نسبت دادن آن به پاسکال نه تنها نادرست که بسیار عجیب و غیر منصفانه است.

مخترع مثلث حسابی: به طور قطعی نمی‌توان گفت که چه کسی برای نخستین بار این مثلث را اختراع کرده و به کار برده است. زیرا این کار مستلزم بررسی تمامی آثار دورهٔ اسلامی است. کاری که در حال حاضر ناممکن به نظر می‌رسد. در برخی آثار غیر علمی امروزی، عمر خیام، شاعر و ریاضی‌دان بزرگ ایرانی را مخترع این مثلث می‌دانند اما سابقهٔ به کارگیری این مثلث دست کم به حدود ۸۰ سال پیش از زمان خیام باز می‌گردد؛ زیرا تا جایی که می‌دانیم نخستین کسی که این مثلث را در آثار خود ثبت کرده، ابوبکر محمد بن حسین کرجی، ریاضی‌دان بزرگ ایرانی است که در فاصلهٔ ۴۱۰ تا ۴۲۰ قمری درگذشته. متأسفانه کتاب کرجی مستقیماً به دست ما نرسیده اما بخش‌هایی از آن که حاوی این مثلث نیز می‌باشد در کتاب ریاضی‌دان دیگری به نام ابونصر سموأل بن یحیی مغربی در کتاب *الباهر فی علم الحساب* نقل شده است. این دانشمند دست کم در اواخر عمر خود در ایران زندگی می‌کرد و در ۵۷۰ قمری در شهر مراغه درگذشت.

مثالی از بسط دوجمله‌ای با استفاده از مثلث کاشانی: طبق جدول کاشانی ضرایب جملات دوم تا ششم (در حالت کلی n اُم) بسط دو جمله‌ای به ترتیب ۶، ۱۵، ۲۰، ۱۵، و ۶ خواهد بود. یعنی:

$$(a+b)^{6} =$$

$$a^{6}+6a^{5}b+15a^{4}b^{2}+20a^{3}b^{3}+15a^{2}b^{4}+6ab^{5}+b^{6}$$

هرگاه بخواهیم تفاضل بین یک توان از دو عدد صحیح متوالی یعنی $(a+1)^{n}-a^{n}$ را بیابیم عدد کوچک‌تر (یعنی a) را در اصل صف پایهٔ آن توان ضرب می‌کنیم و مربع آن یعنی a^{2} را در اصل صف قوهٔ دوم و مکعب آن یعنی a^{3} و این کار را تا زمانی که قوای عدد a از قوهٔ مفروض (یعنی n) کوچک‌ترند ادامه می‌دهیم و سپس همهٔ این اعداد را با یکدیگر جمع می‌کنیم و یک واحد بر حاصل می‌افزاییم تا تفاضل مورد نظر حاصل شود.

مثال: برای محاسبهٔ $5^{5}-4^{5}$ جدول ۶ را تشکیل می‌دهیم که سطرهای آن صف‌های قوای کمتر از قوهٔ پنجم باشند. در ستون نخست اصول قوهٔ پنجم را با استفاده از جدول ۴ می‌نویسیم. در ستون دوم قوای عدد کوچک‌تر یعنی ۴ را ثبت می‌کنیم و در ستون سوم هر سطر، حاصل ضرب اعداد دو ستون قبلی را ثبت می‌کنیم. سپس حاصل ضرب‌ها را با هم جمع کرده و یک واحد بدان می‌افزاییم تا عدد مورد نظر آید. با توجه به جدول ۶ این مجموع برابر ۲۱۰۰ است در نتیجه:

$$5^{5}-4^{5}=2100+1=2101$$

صف‌ها	اصول قوهٔ پنجم	توان‌های عدد۴	حاصل ضرب‌ها
صف قوهٔ چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰
صف قوهٔ سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰
صف قوهٔ دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰
صف پایه	۵	۴	۲۰
حاصل جمع			۲۱۰۰

جدول ۶- محاسبهٔ $۵^۵ - ۴^۵$

هرگاه بخواهیم تفاضل یک توان از دو عدد غیر متوالی را بیابیم ۲ ستون به جدول ۶ اضافه می‌کنیم و در یکی از این دو ستون توان‌های متوالی تفاضل آن دو عدد را طوری می‌نویسیم که خود تفاضل در صف قوهٔ چهارم (n-۱ اُم) و توان چهارم(n-۱ اُم) این تفاضل نیز در صف پایه ثبت شود(مجموع توان‌های عدد کوچک‌تر و این تفاضل مطابق بسط دو جمله‌ای نیوتون همیشه همان n و در این‌جا برابر ۵ خواهد بود). سپس حاصل ضرب‌های قبلی را در اعداد این ستون ضرب می‌کنیم تا حاصل ضرب‌های دوم به دست آید. در آخر این حاصل ضرب‌های جدید را با هم جمع می‌کنیم و این بار به این حاصل جمع توان پنجم (n اُم) تفاضل را می‌افزاییم.

به طور مثال برای محاسبهٔ $۷^۵ - ۴^۵$ جدولی مطابق جدول ۷ تشکیل می‌دهیم. حاصل جمع حاصل ضرب‌های دوم ۱۵۵۴۰ است در نتیجه خواهیم داشت:

$$۷^۵ - ۴^۵ = ۱۵۵۴۰ + (۷ - ۴)^۳ = ۱۵۵۴۰ + ۲۴۳ = ۱۵۷۸۳$$

صف‌ها	اصول قوهٔ پنجم	توان‌های عدد ۴	حاصل ضرب‌ها	قوای تفاضل دو عدد (=۳)	حاصل ضرب‌های دوم
صف قوهٔ چهارم	۵	۲۵۶	۱۲۸۰	۳	۳۸۴۰
صف قوهٔ سوم	۱۰	۶۴	۶۴۰	۹	۵۷۶۰
صف قوهٔ دوم	۱۰	۱۶	۱۶۰	۲۷	۴۳۲۰
صف پایه	۵	۴	۲۰	۸۱	۱۶۲۰
حاصل جمع					۱۵۵۴۰

جدول ۷– محاسبهٔ $۴^{۵} - ۷^{۵}$

باب ششم: آزمون درستی محاسبات حساب

کاشانی در این باب برای بررسی درستی محاسبات از «طَرْحِ ۹ به ۹» استفاده می‌کند. واژهٔ طرح به معنی انداختن است و طرح ۹ بـه ۹ نیـز بـه معنـی کاسـتن پی‌در پی عدد ۹ از یک عدد است تا آن‌که دیگر نتوان از آن ۹ کاست. چون کـم کردن ۹ از یک عدد به منزلهٔ آن است که یک ۹ را از این عدد بیـرون بینـدازیم، اصطلاح طرح ۹ به ۹ برای این کار به کار رفته است. به زبان امروزی طرح ۹ به ۹ بررسی اجمالی (و نه دقیق) درستی محاسبات از طریق بررسی درسـتی روابـط «هَم‌نِهِشْتی به پیمانهٔ ۹» یا به عبارت بهتر محاسبهٔ باقیماندهٔ هر یـک از اجـزای محاسبه در تقسیم بر ۹ و بررسی آنها است.

میزان: کاشانی باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ را میزان آن عدد می‌نامد ما نیز برای سادگی کار از اصطلاح او استفاده می‌کنیم. مثلاً میزان عدد ۱۲۰ برابر ۳ است زیرا باقیماندهٔ تقسیم ۱۲۰ بر ۹ برابر ۳ است.

به طور مثال ریاضی‌دانان قدیم برای امتحان درستی ضرب دو عدد ۱۲۵ و ۱۱۰ ابتدا میزان دو عدد ۱۲۵ و ۱۱۰ را به دست می‌آوردند (به ترتیب ۸ و ۲) و آنها را در هم ضرب می‌کردند (حاصل=۱۶) و میزان این حاصل ضرب را نیز به دست می‌آوردند که برابر ۷ است. سپس میزان حاصل ضرب ۲ عدد را نیز به دست می‌آورند و اگر «میزان حاصل ضربِ میزان‌ها» (در این مثال میزان ۱۶ که برابر ۷ است) با «میزان حاصل ضرب دو عدد» یکی می‌شد معمولاً محاسبات را درست می‌پنداشتند. در صورتی که همان گونه که کاشانی تأکید کرده است همیشه نمی‌توان چنین نتیجه‌ای گرفت.

روابطی را که در بالا توضیح دادیم چنین می‌توان نشان داد:

میزان ۱۲۵ برابر ۸ است یعنی : (پیمانهٔ ۹) ۸ ≡ ۱۲۵

میزان ۱۱۰ نیز برابر ۲ است پس: (پیمانهٔ ۹) ۲ ≡ ۱۱۰

طبق قوانین هم‌نهشتی اگر حاصل ضرب این دو عدد یعنی ۱۳۷۵۰ را بر ۹ تقسیم کنیم باقیمانده باید برابر باقیماندهٔ حاصل ضرب باقیماندهٔ ۲ عدد باشد. یعنی:

باقیماندهٔ تقسیم (۱۲۵× ۱۱۰) بر ۹= باقیماندهٔ تقسیم ۸×۲ بر ۹

به زبان ریاضی داریم: (پیمانهٔ ۹) ۷ ≡ ۲ × ۸ ≡ ۱۱۰ × ۱۲۵

همان طور که می‌دانیم باقیماندهٔ تقسیم ۱۳۷۵۰ بر ۹ نیز ۷ است. اما اگر به طور مثال پس از محاسبه حاصل ضرب به اشتباه ۱۲۷۵۰ به دست آید باقیماندهٔ تقسیم این عدد بر ۹ برابر ۶ خواهد شد و چون برابری یاد شده صادق نیست معلوم است که در یکی از مراحل محاسبه اشتباهی رخ داده است. اما آنچه که باید به آن توجه کافی داشت آن است که درستی رابطهٔ هم‌نهشتی فوق شرط لازم است ولی کافی نیست. زیرا اگر به طور مثال ما به اشتباه حاصل ضرب را ۹۰ تا بیشتر یا ۹۰ تا کمتر از مقدار درست به دست آوریم (به ترتیب ۱۳۸۴۰ یا ۱۲۶۶۰) در هر دو حالت باقیماندهٔ تقسیم این اعداد بر ۹ همان عدد هفت خواهد بود. یعنی طرح ۹ به ۹ همیشه نمی‌تواند نشان دهندهٔ درستی محاسبه باشد. به عبارت بهتر هرگاه میزان اشتباه ما مضربی از عدد ۹ باشد آزمون طرح ۹ به ۹ فایده‌ای نخواهد داشت زیرا اشتباه ما معلوم نمی‌شود. چون در این حالت «باقیماندهٔ تقسیم حاصل نادرست بر ۹» با «باقیماندهٔ تقسیم حاصل درست بر ۹» یکی خواهد شد. بسیاری از ریاضی‌دانان دورهٔ اسلامی به این مسأله توجه نداشته‌اند به طور مثال ریاضی‌دانان بزرگی چون خوارزمی، کرجی در کتاب *الکافی فی الحساب* و نَسَوی در کتاب *المقنع فی حساب الهندی* گفته‌اند که هرگاه نتیجهٔ امتحان درست باشد محاسبه نیز درست خواهد بود. اما کاشانی درست در آغاز باب آزمون‌ها بر این پندار نادرست خط بطلان کشیده است:

📖 برای سنجش درستی محاسبات آزمونی وجود دارد که اگر حساب درست باشد آن نیز درست خواهد بود اما عکس این قضیه صادق نیست.

به عبارت بهتر: درست درنیامدن میزان نشانهٔ نادرستی محاسبات است. اما درستی میزان نمی‌تواند دلیل بر درستی محاسبات باشد.

کاشانی روش آزمایش درستی هر یک از چهار عمل اصلی حساب و نیز پیدا کردن جذر را با مثالی شرح داده است.

گفتار پنجم

حساب با کسرها در دستگاه شمار دهگانی

(مقالهٔ دوم *مفتاح الحساب*)

باب اول: تعریف کسرها

کسر: کمّیتی است که به مقدار دیگری به نام مخرج، کـه بـه عنـوان واحـد فرض شده است، نسبت داده می‌شود.

در واقع کاشانی در این‌جا اصطلاح کسر را هم برای آنچـه مـا امـروز کسـر می‌نامیم و هم برای صورت کسر به کار برده است. البتـه وی در برخـی جاهـای دیگر صورت کسر را «عدد کسر» نامیده است. البتـه کاشـانی در مقدمـهٔ *مفتـاح الحساب* آنچه را که ما امروزه صورت کسر می‌نامیم، کسـر نامیـده و بـرای خـود کسر (به معنی امروزی) نامی در نظر نگرفته است! در این کتاب همیشه منظور ما

از کسر همان اصطلاح رایج امروزی است و به جای اصطلاح «کسر» کاشانی نیز اصطلاح رایج «صورت کسر» را به کار می‌بریم.

تقسیم بندی کسرها: کسرهای یا مفردند یا مرکب. کسر مفرد کسری است مخرج آن عددی صحیح و بزرگ‌تر از یک باشد. که خود بر دو نوع است. مجرد و مکرر. کسر مجرد، کسر مفردی است که صورت آن یک باشد مانند $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۷}$، و $\frac{۱}{۲۰}$. کسر مکرر نیز کسری مفرد است که صورت آن عدد صحیح و بزرگ‌تر از یک باشد مانند $\frac{۲}{۳}$ و $\frac{۵}{۱۱}$

هر کسر را می‌توان به صورت‌های مختلفی نشان داد. مثلاً کسرهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۲}{۴}$، $\frac{۳}{۶}$، ... و $\frac{a}{۲a}$ (a عددی طبیعی) همگی با هم برابرند. اما همیشه باید بکوشیم که از میان آنها آنرا که صورت و مخرجش کوچک‌تر است به کار بریم. و به کار بردن صورت‌های دیگر کاری ناپسند است. به طور مثال از میان کسرهای یاد شده باید $\frac{۱}{۲}$ را به کار برد و به کار بردن $\frac{۳}{۶}$ ناپسند است.

به عبارت بهتر کاشانی در این‌جا تأکید می‌کند که همیشه کسرها را تا نهایت امکان ساده کرد تا محاسبات ساده‌تر انجام پذیرد.

انواع کسرهای مرکب: کسر مرکب یا معطوف است، یا مستثنی، یا مضاف، یا منکسر، یا ترکیبی از این چهار نوع یا برخی از آنها.

کسر معطوف: آن است که در نامش حرف عطف بیاید. مانند «یک دوم و یک سوم) که همان $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ است یعنی $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$.

کسر مستثنی: یعنی کسری یا کسرهایی را از کسر یا کسرهای دیگر کم کنیم. مانند «دو سوم به جُز (یا منهای، در عربی: اِلاّ) یک پنجم»($\frac{2}{3}-\frac{1}{5}$) و مانند آن.

کسر مضاف: آن است که مخرج جزء اول را واحد یا بیشتر انگاشته آن را به مخرج دیگری نسبت دهیم (یعنی کسری از کسر دیگر به شرط آن‌که کسر دوم به منزلهٔ واحد باشد). مانند نصف یک ششم یعنی $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}$ یا رُبعِ سه پنجم یعنی $\frac{3}{5}\times\frac{1}{4}$ و ممکن است که این کار چند بار تکرار شود مانند: نصف سه پنجم از چهار نهم از یک دهم یعنی $\frac{1}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}$.

در کسرهای مضاف و معطوف بهتر است که نام کسر بزرگ‌تر زودتر بیاید.

کسر منکسر: کسری است که صورت یا مخرج آن، یا هر دوی آنها عدد صحیح نباشد. مانند: $\frac{\frac{1}{2}}{3}$ یا $\frac{\frac{1}{9}}{4\frac{1}{2}}$ یا $\frac{1}{3\frac{1}{2}}$ یا $\frac{1\frac{1}{2}}{5}$

آخرین نوع کسر مرکب، کسری است که از ترکیب این چهار نوع با یکدیگر به دست آید: مانند $\frac{\frac{۱}{۳}}{۲\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۰}$.

همچنین ممکن است که صورت یا مخرج کسر یا هر دوی آنها، خود عددی کسری به شکل بالا باشد.

مانند اعداد کسری زیر:

$$\frac{\frac{\frac{۱}{۳}}{۲\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۰}}{\frac{\frac{۱}{۵}}{۲\frac{۱}{۳}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۰}}\ \text{یا}\ \frac{\frac{\frac{۱}{۳}}{۲\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۰}}{۳}\ \text{یا}\ \frac{۱}{\frac{\frac{۱}{۳}}{۲\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۰}}$$

منجمان کسرهای معطوفه‌ای به کار می‌برند که مخرج‌های آنها شصت و قوای متوالی شصت است تا هرجا بخواهند و آنها را به ترتیب دقیقه‌ها، ثانیه‌ها، ثالثه‌ها، رابعه‌ها و غیره می‌نامند و ما (کاشانی) به قیاس حساب منجمان (دستگاه شمار شصتگانی) کسرهایی آورده‌ایم که مخرج‌های متوالی آنها ده و قوای متوالی ده می‌باشد، تا هر جا که بخواهیم، و آنها را به ترتیب اعشار، دومین اعشار، سومین اعشار، چهارمین اعشار و ... نامیده‌ایم.

همان گونه که می‌بینیم کاشانی در این‌جا به صراحت مدعی اختراع کسرهای دهگانی شده‌است. از آن‌جا که این موضوع اهمیت بسیار دارد، در گفتار نهم کتاب حاضر (صفحهٔ ۱۴۹ به بعد، به ویژه صفحهٔ ۱۵۱) به طور جداگانه بدان خواهیم پرداخت.

باب دوم: چگونگی نوشتن کسرها

کاشانی برای نوشتن کسرها از علائم اختصاری زیر بهره برده است:

«و»: برای علامت جمع (در کسرهای معطوف) مانند «دو سوم و سه پنجم» ($\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۵}$)

«اِلاّ» (= به جز) برای علامت تفریق(کسرهای مستثنی) مانند یک سوم الا یک چهارم ($\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}$)

«ل»: برای نشان دادن ضرب (کسرهای مضاف) مانند یک سوم «ل» یک چهارم ($\frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۴}$)

«مِنْ» (= از) برای نشان دادن تقسیم.

کاشانی برای ثبت کسرها ابتدا جزء صحیح هر کسر و سپس صورت و مخرج جزء کسری را زیر هم می‌نویسد. در جدول زیر شکل ثبت کسرها به شیوهٔ کاشانی و به شیوهٔ نوین با یکدیگر مقایسه شده‌اند. اگر کسری کوچک‌تر از یک باشد (جزء صحیح صفرباشد)، در سطر اول یک صفر قرار می‌دهیم.

روش کنونی	روش کاشانی	نوع کسر
$۳\frac{۱}{۲}$	۳ ۱ ۲	کسر با عدد صحیح
$\frac{۱}{۲}$ (در واقع $۰\frac{۱}{۲}$)	۰ ۱ ۲	کسر بدون عدد صحیح
$۳\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}$	۰ ۳ ۱ و ۱ ۲ ۲	کسر معطوف (جمع)
$\frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{۶} \times \frac{۱}{۴}$	۰ ۱ ۴ ل ۱ ۶ ل ۳ ۵	ضرب (کسر مضاف)

نوع کسر	روش کاشانی	روش کنونی
کسری که صورت و مخرج آن خود اعداد کسری باشند (یعنی تقسیم دو عدد کسری بر یکدیگر)	۲ ۱ ۲ من ۴ ۲ ۵	$\frac{2\frac{1}{2}}{4\frac{2}{5}}$
ترکیب چند عمل	۰ ۲ ۱ ۱ ۳ ۲ ۰ من و ل الا ۱ ۲ ۰ ۱۰ ۱ ۱ ۲ ۶	$\frac{\frac{1}{3}}{2\frac{1}{2}}+2\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$

در واقع کاشانی از کلمهٔ «مِنْ» به جای خط کسری بهره می‌برد. اما این کار را فقط در کسرهایی که صورت یا مخرج آنها خود عددی کسری باشد انجام می‌دهد و در مورد کسرهای معمولی هیچ خطی بین صورت و مخرج نمی‌کشد.

ابن بَنّا، ریاضی‌دان مشهور مراکشی که یک سده پیش از کاشانی می‌زیسته، از خط کسری برای جدا کردن صورت و مخرج بهره برده است. شاید ریاضی‌دانی مشهور به ابوزکریا حَصّار نیز که حدوداً ۲۰۰ سال پیش از کاشانی می‌زیسته این کار را کرده باشد. اما کاشانی دربارهٔ به کار بردن خط کسری گفته است: «بهتر

آن است که بین صورت و مخرج این کسرها واژهٔ «مِنْ» به کار رود زیرا در غیر این صورت در برخی اوقات با کسر مضاف اشتباه خواهد شد».

شایسته است روشن سازیم، که در کسرهای مرکب کدام بخش‌ها «عطف» (جمع) شده‌اند و کدام بخش‌ها مستثنی (تفریق). برای این کار در سمت راست جملاتی که باید جمع شوند خطی برای نشانه می‌گذاریم و کلمهٔ عطف (یعنی حرف «و» را که معادل علامت + است) روی آن می‌نویسیم و ... .

امروزه به جای نشانه‌هایی که کاشانی به کار برده از نشانه‌های () یا [ ] بهره می‌گیریم. ریاضی‌دانان قدیم معمولاً کمتر به این نکته توجه داشته‌اند و به همین جهت گاهی اوقات تردیدی در مفهوم کسرهای نوشته شده توسط آنان به وجود می‌آمد. در چنین حالاتی خواننده تنها با بررسی روند محاسبات می‌توانست منظور کسر مورد نظر مؤلف را تشخیص دهد. اما استفاده از روش کاشانی این سوء تفاهم‌ها را از بین می‌برد.

باب سوم: تَداخُل، تَشارُک، تَبایُن و تَماثُل اعداد طبیعی

شمارنده: برای درک ساده‌تر مفاهیم این بخش به ناچار مفهوم «شمارنده» را تعریف می‌کنیم: عدد طبیعی a را شمارندهٔ عدد طبیعی b گویند هر گاه حاصل $\frac{b}{a}$ عددی صحیح باشد. به عبارت دیگر b بر a بخش پذیر باشد. در این صورت می‌گوییم که «عدد a، عدد b را می‌شمرد». و این رابطه را به صورت $a|b$ نشان می‌دهیم.

هر دو عدد (طبیعی) دلخواه a و b به ناچار یا باهم برابرند که در این صورت آنها را متماثل (مثل هم) می‌خوانیم؛ یا با هم برابر نیستند. اگر این دو عدد با هم برابر نباشند (در این‌جا فرض کنیم: $a<b$) سه حالت ممکن است پیش آید:

۱. عدد کوچک‌تر عدد بزرگ‌تر را بشمرد ($a|b$) مانند ۳ و ۹ (۳|۹).

۲. عدد طبیعی سومی مانند c، به جز یک، هر دوی آنها را بشمارد($c|a$ و $c|b$ و $c \neq 1$) در این صورت این دو عدد را «شریک یکدیگر» یا «موافق یکدیگر» (در عربی: «مُتَشارکین» یا «مُتَوافقین»)، و این «شمارندهٔ مشترک» (c) را «مشترکٌ فیه» یا «وِفق» می‌نامیم. همچنین حاصل $\frac{a}{c}$ و $\frac{b}{c}$ را که هر دو اعدادی صحیح خواهند بود، به ترتیب «جزءِ وفق a» و «جزءِ وفق b» می‌نامیم. به طور مثال دو عدد ۱۰ و ۱۵ متشارک یا متوافق هستند زیرا عدد ۵ هر دوی آنها را می‌شمرد. پس وفق این دو عدد ۵ و جزء وفق آنها به ترتیب ۲ و ۳ ($\frac{۱۰}{۵}$ و $\frac{۱۵}{۵}$) است.

۳. حالت سوم آن است که این دو عدد هیچ شمارندهٔ مشترکی به جز عدد یک نداشته باشند. در این صورت این دو عدد را متباین می‌خوانیم (یا به اصطلاح امروزی می‌گوییم: این دو عدد نسبت به یکدیگر اولْ هستند) مانند ۱۵ و ۱۶

توضیحی دربارهٔ اصطلاح «شمارنده»: در کتاب‌های ریاضی درسی سال‌های اخیر به جای اصطلاح «شمارنده» معمولاً واژهٔ «مقسوم علیه» به کار رفته و اصطلاحات «مقسوم علیه مشترک» یا «بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک»

(مشهور به «ب.م.م») نیز از روی همین اصطلاح ساخته شده است؛ اما به کار بردن اصطلاح مقسوم علیه در این مورد چندان درست نیست. اصطلاح مقسوم علیه معمولاً در مورد تقسیم به کار می‌رود در صورتی که مقسوم علیه همیشه شمارندهٔ مقسوم نیست. به طور مثال در تقسیم ۷۰ بر ۶، عدد ۶ مقسوم علیه است اما شمارندهٔ آن نیست (زیرا تقسیم ۷۰ بر ۶ باقیمانده دارد). پس بهتر آن است که در بحث بخش‌پذیری اعداد بر یکدیگر، اصطلاح درست‌تر و زیباتر «شمارنده» به کار رود. در نتیجه به طور مثال می‌گوییم: شمارنده‌های عدد ۶ عبارتند از: ۱،۲،۳، و ۶ و شمارنده‌های مشترک دو عدد ۳۰ و ۴۵ عبارتند از: ۳، ۵، و ۱۵ و بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک این دو عدد نیز ۱۵ خواهد بود.

گفتنی است که اصطلاح شمردن را ابوریحان بیرونی حدود ۱۰۰۰ سال پیش در کتاب *التفهیم* به کار برده و در مورد شمارندهٔ مشترک دو گفته است: « و این عدد که ایشان را بشمرد، او را وِفْق خوانند میان ایشان»

کاشانی این مطالب را، که مربوط به اعداد طبیعی است و ظاهراً ربطی به اعداد کسری ندارد. به عنوان مقدمهٔ مبحث ساده کردن کسرها، یافتن مخرج مشترک دو کسر و مطالبی شبیه به این آورده است.

باب چهارم: دربارهٔ تجنیس و رفع

تجنیس: که بدان بسط نیز گویند تبدیل یک کسر مرکب به کسری ساده است. برای این کار باید جزء صحیح کسر مرکب را در مخرج آن ضرب و حاصل را با صورت جمع کرد و جای آن قرار داد. مانند:

$$۴\frac{۳}{۵} = \frac{۴ \times ۵ + ۳}{۵} = \frac{۲۳}{۵}$$

رفع: هر گاه صورت یک کسر از مخرج آن بزرگ‌تر باشد بهتر است آن را به صورت یک کسر مرکب بنویسیم. برای این کار صورت را به مخرج تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت جزء صحیح کسر مرکب خواهد شد و باقی‌مانده صورت جزء کسری آن: مثال آن: $۴\frac{۳}{۵} = \frac{۲۳}{۵}$

باب پنجم: پیدا کردن مخرج مشترک چند کسر

کاشانی برای پیدا کردن مخرج مشترک دو کسر ابتدا بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک مخرج‌های این دو کسر را از روش تقسیم‌های پی‌درپی مشهور به «روش نردبانی» پیدا می‌کند (مخترع این روش احتمالاً اُقلیدِس است)، سپس مخرج مشترک دو یا چند کسر را برابر «حاصل ضرب مخرج‌ها، بخش بر بزرگ‌ترین شمارندهٔ مشترک میان آنها» قرار می‌دهد.

باب ششم: دربارهٔ «اِفْرادِ» کسرهای مرکب

کاشانی در این باب چگونگی تبدیل کسرهای مرکب به کسرهای مفرد را توضیح می‌دهد.

اگر کسری متشکل از چند کسر مرکب بود، ابتدا هر یک از کسرهای مرکب را به کسر مفرد تبدیل می‌کنیم و سپس حاصل را مفرد می‌سازیم.

مثالی از تبدیل کسر مرکب به کسر مفرد:

<table>
<tr>
<td>۲
۱
۴
من
۵
۴
۵
ل
۲
۱
۲
من
۴</td>
<td>

الا</td>
<td>۱
۲
۳
من
۸</td>
<td>برابر است با: ۰
۹۵
۲۷۸۴</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
<td>به زبان ریاضی امروز:
$\frac{2\frac{1}{4}}{5\frac{4}{5}} \times \frac{2\frac{1}{2}}{4} - \frac{1\frac{2}{3}}{8} = \frac{95}{2784}$</td>
</tr>
</table>

باب‌های هفتم تا نهم: انجام اعمال اصلی حساب با کسرها

کاشانی در باب‌های هشتم و نهم دربارهٔ ضرب و تقسیم اعداد کسری سخن گفته است. شیوهٔ کار وی در مورد ضرب تقریباً مشابه روش رایج کنونی است. در مورد تقسیم، وی نخست مخرج کسرها را یکی می‌کند و سپس صورت کسر مقسوم را بر صورت کسر مقسوم علیه تقسیم می‌کند.

باب دهم: پیدا کردن ریشهٔ n اُم کسرها

در آغاز این بخش برای یاد آوری، دستور تقریب اصطلاحی (ریشهٔ n اُم تقریبی) یک عدد را تکرار می‌کنیم:

$$\sqrt[n]{a} = t + \frac{r}{(t+۱)^n - t^n}$$

که در آن r باقیماندهٔ عمل پیدا کردن ریشه و t جزء صحیح ریشهٔ n اُم عدد a است. یعنی $t = \left[\sqrt[n]{a}\right]$ و $r = a - t^n$.

ریشهٔ n اُم یک کسر برابر حاصل تقسیم ریشهٔ n اُم صورت آن کسر بر مخرج آن است. اما اگر ریشهٔ n اُم صورت یا مخرج گویا نباشد آنگاه صورت را در توان n-۱ اُم مخرج ضرب می‌کنیم و ریشهٔ n اُم آن را می‌گیریم و حاصل را بر مخرج تقسیم می‌کنیم.

کاشانی این روابط را توضیح داده است:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad ; \ \sqrt[n]{b} \in N$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-۱}}}{b} \ ; \ \sqrt[n]{b} \notin N$$

البته کاشانی نخست شرط استفاده از رابطهٔ نخست را گویا بودن ریشهٔ n اُم هر دو عدد a و b دانسته‌است اما عملاً فقط به گویا بودن مخرج ریشهٔ n اُم مخرج کسر توجه کرده است. رابطهٔ دوم در واقع همان دستور رفع ابهام از کسرهایی است که در مخرج آنها ریشهٔ n اُم یک عدد به کار رفته باشد.

چند مثال:

$$\sqrt{\frac{۴}{۹}} = \frac{\sqrt{۴}}{\sqrt{۹}} = \frac{۲}{۳}$$

$$\sqrt{\frac{۵}{۶}}=\frac{\sqrt{۵\times ۶}}{۶}\approx\frac{۵\frac{۵}{(۵+۱)^{۲}-۵^{۲}}}{۶}=\frac{۵\frac{۵}{۱۱}}{۶}=\frac{۶۰}{۶۶}=\frac{۱۰}{۱۱}$$

$$\sqrt[۴]{\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt[۴]{۴^{۳}}}{۴}\approx\frac{۲\frac{۴۸}{(۲+۱)^{۴}-۲^{۴}}}{۴}=\frac{۲\frac{۴۸}{۶۵}}{۴}=\frac{۱۷۸}{۲۶۰}=\frac{۸۹}{۱۳۰}$$

کاشانی در دو مثال آخر برای یافتن ریشهٔ صورت، از روش تقریبی یا به قول خود «تقریب اصطلاحی» استفاده کرده است.

اگر بخواهیم ریشهٔ n اُم عدد دلخواه a را به روش تقریبی بیابیم (یعنی هنگامی که $\sqrt[n]{a}$ عددی گنگ باشد) بهتر آن است که نخست این عدد را در توان n اُم عدد طبیعی دلخواهی مانند b (که قاعدتاً باید بزرگ‌تر از یک باشد) ضرب کنیم و ریشهٔ n اُم حاصل ضرب را با استفاده از تقریب اصطلاحی به دست آوریم و سپس این حاصل را بر عدد b قسمت کنیم.

این همان روشی است که کاشانی در بخش جذر اعداد صحیح بدان اشاره کرده بود. منظور کاشانی آن است که برای به دست آوردن نتیجهٔ بهتر، به جای آن‌که $\sqrt[n]{a}$ را به روش تقریبی بیابیم بهتر آن است که ابتدا $\sqrt[n]{ab^{n}}$ ($b>۱$) را بیابیم و سپس حاصل را بر b تقسیم کنیم. برای روشن‌تر شدن مقصود کاشانی مثالی می‌آوریم:

$$\sqrt{۵}\approx ۲\frac{۱}{(۲+۱)^{۲}-۲^{۲}}=۲/۲$$

$$\sqrt{۵}=\frac{\sqrt{۵\times ۲۰^{۲}}}{۲۰}=\frac{\sqrt{۲۰۰۰}}{۲۰}\approx\frac{۴۴\frac{۶۴}{(۴۴+۱)^{۲}-۴۴^{۲}}}{۲۰}$$

$$\sqrt{۵}\approx\frac{۴۴\frac{۶۴}{۸۹}}{۲۰}=\frac{۹۹۵}{۴۴۵}\approx ۲/۲۳۵۹۵۵$$

می‌دانیم که $\sqrt{۵}\approx ۲/۲۳۶$ (با تقریب کمتر از یک هزارم). همان طور که می‌بینیم این روش بسیار دقیق‌تر از روش نخست است.

به طور کلی روش تقریب اصطلاحی برای اعداد بزرگ، یعنی اعدادی که جزء صحیح ریشهٔ آنها، یعنی t بزرگ باشد مناسب است. پس کاشانی با روش فوق با گرفتن ریشهٔ تقریبی یک عدد بزرگ مقدار دقیق‌تری به دست می‌آورد.

بدان که اگر این عددی که در مخرج ضرب می‌کنیم توان n اُم عدد ۱۰ باشد انجام محاسبات بسیار ساده‌تر خواهد شد زیرا که ارقام عدد اصلی تغییر نخواهد کرد... .

این روش را که همان روش پیدا کردن ریشهٔ n اُم یک عدد با k رقم اعشاری است، جداگانه در مبحث کسرهای اعشاری توضیح خواهیم داد.

باب یازدهم: در تبدیل مخرج کسر به عددی دلخواه

کاشانی در این بخش نخست تناسب را شرح می‌دهد و سپس به عنوان مثال می‌گوید: «می‌خواهیم بدانیم $\frac{۵}{۷}$ برابر «چَنْدْ نُهُم» است». وی نخست مقدار

x را از تناسب $\frac{x}{۹}=\frac{۵}{۷}$ به دست می‌آورد که برابر $۶\frac{۳}{۷}$ است و سپس کسر را به شکل $\frac{۶\frac{۳}{۷}}{۹}$ می‌نویسد.

در پایان این بخش نحوهٔ تبدیل واحدهای وزن زیر را که در زمان وی در معاملات به کار می‌رفت توضیح می‌دهد.

هردانگ(دانق)= $\frac{۱}{۶}$ دینار

هر تسو (طسوج)= $\frac{۱}{۴}$ دانگ= $\frac{۱}{۲۴}$ دینار

هر شعیر= $\frac{۱}{۴}$ تسو= $\frac{۱}{۱۶}$ دانگ= $\frac{۱}{۹۶}$ دینار

باب دوازدهم: ضرب و تقسیم دانگ‌ها و تسوها و شعیرها

کاشانی برای انجام این ضرب‌ها از یک جدول استفاده می‌کند. اما از آن جا که این واحدها امروزه کاربرد ندارند از آوردن آنها خودداری می‌شود.

گفتار ششم

حساب در دستگاه شمار شصتگانی

(مقالهٔ سوم *مفتاح الحساب*)

مقدمه

کاشانی این مقاله را به بحث دربارهٔ «روش حساب منجمان» اختصاص داده است. منظور کاشانی از حساب منجمان، همان حساب شصتگانی یا «دستگاه شمار با رعایت ارزش مکانی در پایهٔ ۶۰» است. در این دستگاه شمار ارزش مکانی هر رقم ۶۰ برابر رقم سمت راست و یک شصتم رقم سمت چپ آن خواهد بود. در این دستگاه شمار ۶۰ رقم یا نشانه برای نشان دادن اعداد ۰ تا ۵۹ مورد نیاز است.

می‌دانیم که در دستگاه شمار دهگانی، که امروزه رایج است، ارزش مکانی هر رقم ۱۰ برابر رقم سمت راست و یک دهم رقم سمت چپ آن است. برای

نشان دادن اعداد در این دستگاه به ۱۰ رقم یا نشانه (۰ تا ۹) نیازمندیم. پس به طور کلی در دستگاه شمار در پایهٔ n (n عددی طبیعی و بزرگ‌تر از یک) ارزش مکانی هر رقم n برابر رقم سمت راست آن و یک n اُم رقم سمت چپ آن است برای نشان دادن ارقام در این دستگاه به n رقم (۰ تا n-۱) نیازمندیم.

باب اول: در شناخت ارقام آنان و چگونگی نوشتن اعداد

حساب جُمَّل: ارقامی که منجمان به کار می‌برند به ترتیب حروف الفبا است: «اَبْجَد، هَوَّز، حُطّی، کَلِمَن، سَعفَص، قَرَشَت، ثَخذ، ضظغ» که مجموعا ۲۸ حرف است، ۹ رقم برای اعداد ۱ تا ۹، ۹ رقم برای اعداد ۱۰ تا ۹۰، ۹ رقم برای اعداد ۱۰۰ تا ۹۰۰ و رقمی برای ۱۰۰۰ و دیگر اعداد با ترکیب این حروف به دست می‌آید. برای نوشتن هر عدد همیشه باید حروفی را که نشانگر اعداد بزرگ‌تر هستند اول بنویسیم و اگر عدد از ۲۰۰۰ بیشتر شد، تعداد هزارها را پیش از «غ» می‌آوریم (مثلاً برای اعداد بزرگ‌تر از ۹۰۰۰ پیش از حرف غ یک حرف «ط» یعنی ۹ می‌نویسیم که نشانهٔ ۱۰۰۰×۹ است). و این شیوه حساب جمل نام دارد و کاربرد آن در زیج‌ها و دیگر آثار منجمان رایج است (جدول ۸).

منجمان در حساب شصتگانی نقطهٔ حرف « ب » و « ج » و « ز » و « ی » را نمی‌گذارند و برای آن‌که ج با ح اشتباه نشود حرف ج را به صورت « ح » (ح کوچک) می‌نویسند(جدول ۹).

حرف	عدد	حرف	عدد	حرف	عدد
ا	۱	ی	۱۰	ق	۱۰۰
ب	۲	ک	۲۰	ر	۲۰۰
ج	۳	ل	۳۰	ش	۳۰۰
د	۴	م	۴۰	ت	۴۰۰
ه	۵	ن	۵۰	ث	۵۰۰
و	۶	س	۶۰	خ	۶۰۰
ز	۷	ع	۷۰	ذ	۷۰۰
ح	۸	ف	۸۰	ض	۸۰۰
ط	۹	ص	۹۰	ظ	۹۰۰
				غ	۱۰۰۰

جدول ۸-ارقام جُمَّل

۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	
ط	ح	ر	و	ه	د	حـ	ب	ا		۰
یط	یح	یر	یو	یه	ید	یحـ	یب	یا	ی	۱
کط	کح	کر	کو	که	کد	کحـ			ک	۲
لط	لح	لر	لو	له	لد	لحـ	لب	لا	ل	۳
مط	مح	مر	مو	مه	مد	محـ	مب	ما	م	۴
نط	نح	نر	نو	نه	ند	نحـ	نب	نا	ن	۵

جدول ۹-ارقام حساب شصتگانی(۱ تا ۵۹) و چگونگی ترکیب حروف

در جدول فوق برای به دست آوردن عدد دهگانی معادل هر رقم بدین ترتیب عمل می‌کنیم: رقم دهگانی نوشته شده در سمت چپ سطر مربوط را می‌نویسیم و سپس رقم دهگانی بالای ستون مربوط به رقم شصتگانی را جلوی

آن قرار می‌دهیم. به عنوان مثال رقم مه را در جدول در نظر می‌گیریم. در سمت چپ سطر مربوطه رقم ۴ و در بالای ستون آن رقم ۵ دیده می‌شود پس داریم:
مه=۴۵ (۵+۴۰)

شاید تصور کنید که در این صورت ممکن است مثلاً ارقام «ز» (=۷) و «ر» (=۲۰۰) باهم اشتباه شوند. اما همان گونه که قبلا گفتیم بزرگ‌ترین رقم حساب شصتگانی ۵۹ است پس اگر رقمی به شکل «ر» در یک جدول نجومی دیدیم، بدون تردید منظور همان رقم «ز» یعنی ۷ است. حذف نقطه‌های دو حرف ب و ی (یای کوچک) نیز اشتباهی بوجود نخواهد آورد. به طور مثال «یو» (بدون نقطه) هرگز «بو» (یعنی ۲+۶=۸) خوانده نمی‌شود زیرا برای ۷ یک رقم مستقل داریم (که همان ح است). پس منظور از «یو» (بدون نقطه) همیشه ۱۰+۶ است. اما اگر دربالای آن نقطه‌ای باشد یعنی «نو» مقصود ۵۶ (۵۰+۶) خواهد بود.

توجه داشته باشیم که اگر چه در حساب شصتگانی همان ارقام حساب جمل به کار می‌رود، اما نوشتن اعداد در این دو دستگاه کاملاً متفاوت است (به ویژه برای اعداد بزرگ‌تر از ۵۹).

در این کتاب هر یک از ارقام حروف شصتگانی را با استفاده از اعداد ۱ تا ۵۹ می‌نویسیم و برای آن‌که ارقام هر مرتبه با مراتب دیگر مخلوط نشود آنها را با یک علامت «،» از هم جدا می‌کنیم. بخش کسری این اعداد را نیز با نشانهٔ ; از بخش صحیح متمایز می‌سازیم.

مثال: عدد ۹۲۳۴۵ در دستگاه دهگانی برابر عدد ۲۵,۳۹,۵ در دستگاه شصتگانی است.

$$[92345]_{10} = [25,39,5]_{60} = (25 \times 60^2) + (39 \times 60^1) + 5$$

همین عدد را با ارقام شصتگانی قدیمی به شکل «که لط ه» می‌نویسیم. زیرا داریم: که=۲۵، لط=۱۲ و ه=۵ . چون ارقام هر یک از مراتب به همدیگر چسبیده‌اند دیگر به علامت جدا کنندهٔ مراتب نیاز نخواهیم داشت. برای نوشتن این عدد در حساب جمل باید عدد ۹۲ یعنی «صب» را به عنوان ضریب ۱۰۰۰ پیش از «غ» بیاوریم (یعنی «صبغ»=۹۲×۱۰۰۰) و سپس حروف ش (=۳۰۰)، «م» (=۴۰) و «ه» (=۵) را نیز بدان بیفزاییم. تا کلمهٔ «صبغشم» به دست آید. (=۵+۴۰+ ۳۰۰+۹۲×۱۰۰۰).

به طور مثال در حساب جُمّل کلمهٔ «علی» معادل ۱۱۰ خواهد شد. زیرا ع=۷۰، ل=۳۰ و ی=۱۰ .

یک نکتهٔ تاریخی: در گذشته برخی تاریخ‌های مهم را به همین شیوه به صورت کلماتی معنی‌دار ثبت می‌کردند و بدان مادهٔ تاریخ می‌گفتند. به طور مثال تاریخ امضای فرمان مشروطه و تأسیس مجلس شورای ملی توسط مظفر الدین شاه قاجار را به صورت «عدل مظفر» (۷۰+۴+۳۰+۴۰+۹۰۰+۸۰+۲۰۰) یعنی ۱۳۲۴ قمری ثبت کرده‌اند که بسیار جالب توجه است.

همان گونه که می‌بینیم در روش قدیمی نوشتن اعداد در حساب شصتگانی، ارزش مکانی ارقام، بر خلاف دستگاه شمار دهگانی، از سمت راست به چپ کاهش می‌یابد. یعنی در عدد یاد شده ارز مکانی «که»، ۶۰ برابر ارزش مکانی «لط» است

قدما به ترتیب مرتبهٔ یکان شصتگانی را درجه، و مرتبهٔ «شصتگان» آن (یعنی مرتبهٔ بالاتر، یا دومین رقم شصتگانی، مقایسه شود با دهگان) را «یک بار مرفوع» می‌نامیدند و مراتب بالاتر نیز به ترتیب «دو بار مرفوع»، «سه بار مرفوع» و ... نامیده می‌شد. همچنین اولین مرتبهٔ کسری را «دقیقه»، دومی را «ثانیه»، و مراتب پایین‌تر را به ترتیب ثالثه، رابِعه، خامِسه، سادِسه، سابِعه، ثامِنه، تاسِعه، عاشِره و غیره می‌نامیدند. و برای آن‌که مرتبهٔ کم ارزش‌ترین رقم یک عدد (در روش قدیم یعنی رقم سمت چپ) معلوم شود پس از نوشتن عدد نام کمترین مرتبه را نیز یاد می‌کردند: به طور مثال واژهٔ ثالثه در عدد «نو کد لط مه (ثالثه)» بدان معنا بود که کم ارزش‌ترین رقم این عدد یعنی «مه» در مرتبهٔ ثالثه قرار دارد پس این عدد ۵۶ (=نو) درجه و ۲۴ (=کد) دقیقه و ۳۹ (=لط) ثانیه و ۴۵ (=مه) ثالثه است و آن را با ارقام رایج امروزی می‌توان چنین نشان داد:

$$۵۶;۲۴,۳۹,۴۵ = ۵۶ + \frac{۲۴}{۶۰^{۱}} + \frac{۳۹}{۶۰^{۲}} + \frac{۴۵}{۶۰^{۳}}$$

عدد $۵۱,۴,۲۱;۲۴ = ۵۱ \times ۶۰^{۲} + ۴ \times ۶۰^{۱} + ۲۱ \times ۶۰^{۰} + \frac{۲۴}{۶۰^{۱}}$ نیز به صورت «نا د کا کد (دقیقه)» نوشته می‌شد و کلمهٔ دقیقه در پایان این عدد نشانگر آن بود که کم ارزش‌ترین رقم این عدد یعنی «کد» در مرتبهٔ دقیقه‌ها قرار دارد. در برخی آثار نجومی همین عدد را در به صورت زیر نیز ثبت کرده‌اند (از سمت راست به چپ بخوانید):

دو بار مرفوع	یک بار مرفوع	درجه	دقیقه
نا	د	کا	کد

باب دوم: تضعیف، تنصیف، جمع، و تفریق

در دو جدول زیر یک مثال برای جمع و یک مثال برای تفریق آمده است. در مثال نخست در ستون ثالثه، دقیقه و درجه، حاصل جمع دو عدد از ۶۰ بیشتر شده است. به همین علت با انجام عمل «۶۰ بر یک» (مقایسه شود با ۱۰ بر یک) ۶۰ واحد از حاصل جمع آن ستون کم کرده و یک واحد به مرتبهٔ بالاتر افزوده‌ایم. در مورد تفریق نیز در صورت لزوم عکس این عمل را انجام می‌دهیم.

مرفوع ۱ بار	درجه	دقیقه	ثانیه	ثالثه	ثالثه	ثانیه	دقیقه	درجه	مرفوع ۱ بار
د	کو	ل	کط	مه	۴۵	۲۹	۳۰	۲۶	۴
	ند	نح	ک	لو	۳۶	۲۰	۵۸	۵۴	
ه	کا	کح	ن	کا	۲۱	۵۰	۲۸	۲۱	۵

مرفوع ۱ بار	درجه	دقیقه	ثانیه	ثالثه	ثالثه	ثانیه	دقیقه	درجه	مرفوع ۱ بار
ط	کو	ل	کط	مه	۴۵	۲۹	۳۰	۲۶	۹
	نو	کا	کد	نط	۵۹	۲۴	۲۱	۵۶	
ح	ل	ط	د	مو	۴۶	۴	۹	۳۰	۸

باب سوم: در ضرب

برای انجام عمل ضرب در حساب منجمان، باید حاصل ضرب اعداد ۱ تا ۵۹ در یکدیگر(یعنی جدول ضرب اعداد ۱ تا ۵۹)، که بسیار مفصل است و نیز جدول جنس مرتبهٔ حاصل ضرب مراتب را بشناسیم.

اعداد مراتب: هر گاه برای مرتبهٔ درجه عدد صفر، و برای مرتبهٔ یک بار مرفوع و دقیقه، عدد ۲، و برای مرتبهٔ دو بار مرفوع و ثانیه عدد ۲، و برای مراتب بعدی پایین‌تر و بالاتر به ترتیب اعداد، ۳، ۴، و ... را در نظر بگیریم این اعداد فاصله‌های مراتب از درجه هستند و ما (کاشانی) آنها را اعداد مراتب می‌نامیم.

چنان که می‌بینیم مقصود کاشانی از اعداد مراتب نمای توان‌های پی‌درپی عدد ۶۰ است. به طور مثال عدد مراتب عدد a یعنی «ط کو ل کط مه (ثانیه)» به ترتیب از راست به چپ، ۲،۱، ۰، ۱، و ۲ است. اگر این عدد را به صورت توان‌های مثبت و منفی ۶۰ نشان دهیم خواهیم داشت:

مرفوع ۲ بار	مرفوع ۱ بار	درجه	دقیقه	ثانیه	ثانیه	دقیقه	درجه	مرفوع ۱ بار	مرفوع ۲ بار
ط	کو	ل	کط	مه	۴۵	۲۹	۳۰	۲۶	۹

$$a = 9\times 60^{2} + 26\times 60^{1} + 30\times 60^{0} + 29\times 60^{-1} + 45\times 60^{-2}$$

$$a = 9\times 60^{2} + 26\times 60^{1} + 30\times 60^{0} + \frac{29}{60^{1}} + \frac{45}{60^{2}}$$

همان گونه که می‌بینیم در رابطهٔ اول عدد مرتبه به صورت نمای توان‌های عدد ۶۰ ظاهر شده است(این نما در مراتب بالاتر از درجه مثبت و در مراتب پایین‌تر از درجه، یعنی مراتب کسری، منفی خواهد بود). مثلاً عدد مرتبهٔ «دو بار مرفوع» ۲ است و رقم این مرتبه نیز که ۹ است در 60^{2} ضرب شده است.

چنان که می‌بینیم کاشانی در این‌جا نه تنها صفر را یک عدد شمرده بلکه آن را به عنوان توان یک عدد نیز به کار برده و به عبارت بهتر 60^{0} را برابر با

یک گرفته است. تا جایی که می‌دانیم دانشمندان پیش از کاشانی صـفر را حتـی جزء اعداد نمی‌دانسته‌اند، چه رسد به آن‌که آن را به عنوان توان یک عدد صحیح نیز به کار برند و مفهومی نیز برای آن در نظر گیرند.

برای ضرب یک عدد مفرد (یعنی عددی که فقط یـک رقـم آن غیـر صـفر باشد) در عدد مفرد دیگر اگر رقم غیر صفر در یک طرف درجه واقع باشند (یعنی اگر عدد مرتبهٔ هر دو هم علامت باشد) عدد مرتبهٔ این دو عـدد را بـا هـم جمـع می‌کنیم و اگر این ارقام در دو طرف درجه (یعنی یکی کسری و دیگری چند بار مرفوع) باشد عدد مراتب آنها را از یکدیگر کـم مـی‌کنـیم و حاصـل از مرتبـه‌ای خواهد بود که عددش (به عبارت امروزی: قدر مطلق عدد مرتبه‌اش) بیشتر است.

رابطه‌ای را که کاشانی توضیح داده امروزه چنین بیان مـی‌کنـیم (در حالـت خاص مورد نظر کاشانی، a برابر ۶۰ است)

$$a^{i} \times a^{j} = a^{i+j}$$

در این رابطه و با توجه به توضیحات کاشـانی اعـداد i و j مـی‌تواننـد اعـداد صحیح مثبت، صفر یا منفی باشند. در نتیجه باید گفت که کاشانی «عدد مرتبـه» را برای مراتب کسری منفی فرض کرده است. مثال‌های زیر مقصود کاشـانی را روشن‌تر می‌سازد:

۷,۰,۰,۰ × ۵,۰=۳۵,۰,۰,۰,۰ $(۷ \times ۶۰^{۳} \times ۵ \times ۶۰^{۱} = ۳۵ \times ۶۰^{۴})$

۷,۰,۰,۰ × ۰;۰, ۵=۳۵,۰ $(۷ \times ۶۰^{۳} \times ۵ \times ۶۰^{-۲} = ۳۵ \times ۶۰^{۱})$

۷,۰,۰,۰ × ۰;۰,۰,۵=۳۵ $(۷ \times ۶۰^{۳} \times ۵ \times ۶۰^{-۳} = ۳۵ \times ۶۰^{۰})$

۰;۰,۷ × ۰;۰,۵=۰;۰,۰,۰,۳۵ $(۷ \times ۶۰^{-۲} \times ۵ \times ۶۰^{-۳} = ۳۵ \times ۶۰^{-۴})$

کاشانی برای ضرب اعداد دلخواه در یکدیگر نیز از شبکهٔ ضرب استفاده کرده است. کار با شبکهٔ ضرب دستگاه شصتگانی منطقاً شبیه به کار با شبکهٔ ضرب دستگاه دهگانی است که پیش از این توضیح داده شد.

باب پنجم: استخراج ریشهٔ n اُم

کاشانی قاعدهٔ کلی استخراج ریشهٔ n اُم در دستگاه شمار شصتگانی را به تفصیل شرح داده است. اما چون این شیوه منطقاً همانند استخراج ریشهٔ n اُم در دستگاه شمار دهگانی است، از توضیح مجدد آن خودداری می‌شود. وی به عنوان مثال ریشه‌های زیر را به دست آورده و در محاسبهٔ این مقادیر مهارت و زبردستی فراوان خود را به اثبات رسانده است.

$$\sqrt{۱۰,۹,۴۹,۲۰} = ۲۴,۴۱;۴۰$$

$$\sqrt[۳]{۱۸,۵۲;۵۹,۴۳,۵۱,۲۵} = ۱۰;۲۵,۳۰$$

$$\sqrt[۶]{۳۳,۵۹,۱,۷,۱۴,۵۴,۲۳,۳,۴۷,۳۷;۴۰} = ۱۴,۰;۳۰$$

ما در رسالهٔ خود موسوم به *محیطیه* جذرهای اعداد چندین رقمی را حساب کرده و نکات ظریفی را در این محاسبات به کار برده‌ایم.

باب ششم: تحویل اعداد از دستگاه شمار شصتگانی به دستگاه شمار دهگانی

بخشی از مباحث این باب به طور جداگانه در گفتار نهم کتاب حاضر(صفحهٔ ۱۵۲ به بعد) مطرح شده‌اند.

گفتار هفتم

مساحت و حجم اشکال هندسی

(مقالهٔ چهارم *مفتاح الحساب*)

کاشانی در این مقاله به مبحث اندازه گیری ابعاد و سطح و حجم شکل‌های مختلف هندسی پرداخته است. او در این مقاله علاقهٔ ویژهٔ خود به فن محاسبه را به خوبی نشان داده و از جمله سطح هر یک از چند ضلعی‌های منتظم مهم و نیز حجم چند وجهی‌های منتظم را، هم در دستگاه شمار شصتگانی و هم در دستگاه شمار دهگانی حساب کرده است. برخی از دستورهایی را که کاشانی آورده می‌توان به صورت ساده‌تری بیان کرد اما محاسبات او همچون همیشه از دقت بالایی برخوردار است.

مقدمه: تعریف مساحت و اصطلاحات رایج در این فن

مساحت: به دست آوردن شمار واحدهای سطح در یک سطح مفروض است

یعنی یافتن نسبت مساحت یک شکل به مساحت واحد سطح.

مقیاس: در مورد طول، یـک خـط مفـروض مانـند ذِراع و مانـند آن اسـت. مقیاس سطح و حجم نیز به ترتیب مربع و مکعب همین خط خواهد بود.

کاشانی در تعریف فوق در واقع مفاهیم واحد طول، واحد سطح و واحد حجم را بیان کرده است.

کاشانی در ادامه نقطه، خط، سطح، زاویه مسـطحه، کـنج و برخـی از دیگـر اصطلاحات رایج در هندسه را تعریف کرده است.

باب اول: در مساحت مثلث و یافتن طول اضلاع آن

کاشانی در این باب نخست نحوهٔ محاسبهٔ یـک ضـلع مثلـث بـا اسـتفاده از پارامترهای دیگر را شرح داده و سپس مساحت مثلـث دلخـواه (S) را بـر اسـاس داده‌های مختلف، ازجمله مساحت مثلث بر حسب طول سه ضلع آن (یعنـی a، b و c)، به دست آورده است.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ \ ;\ p=\frac{a+b+c}{۲}$$

امروزه این رابطهٔ را دستور هِـرون (Heron) مـی‌نامنـد. ابوالوفـا بوزجـانی همین رابطه را به شکلی به مراتب پیچیده‌تر بیان و اثبات کرده است. اما کاشانی دقیقاً رابطهٔ فوق را که امروزه رایج است ارائه کرده.

وی همچنین دستور زیر را برای شعاع دایرهٔ محاطی مثلث، بر حسب دو ضلع و سینوس زاویهٔ میان آنها ارائه داده و خود را مخترع این دستور دانسته است:

$$r=\frac{bc\sin A}{a+b+c}$$

کاشانی سپس مساحت مثلث را بر حسب شعاع دایرهٔ محاطی و چنین به دست آورده است:

$$S=\frac{r(a+b+c)}{۲}$$

عجیب آن‌که، کاشانی این دو دستور را با یکدیگر مقایسه نکرده است تا به دستور کلی و بسیار مفید زیر برسد!

$$S=\frac{۱}{۲}bcSinA$$

باب دوم: مساحت چهار ضلعی‌ها

در این‌جا فقط به نام قدیم و جدید برخی چهار ضلعی‌ها اشاره می‌شود: مُعَیَّن= لوزی؛ شبیه بالمعین یا شِبْهِ معین= متوازی الاضلاع؛ ذوزنقهٔ واحده= ذوزنقهٔ قائم الزاویه.

تعریف برخی از چهار ضلعی‌های دیگر بدین قرار است:

ذوالیمینین: چهار ضلعی محدبی است که دو ضلع مجاور آن با هم مساوی و دو ضلع دیگر آن نیز با هم مساوی ولی متفاوت با دو ضلع اول باشند. در این

چهار ضلعی زوایای بین اضلاع نابرابر با هم مساوی خواهند بود. بسته به این که این دو زاویه، قائمه، منفرجه یا حاده باشند چهار ضلعی را لوزه، باطیه یـا جودانـه (دانهٔ جو) گویند.

ذو الرجلین (دارای دو پا): چهار ضلعی مقعری است که چون بر ذوالیمینـین افزوده شود آن را تکمیل و به صورت یک لوزی درآورد.

منحرف: چهار ضلعی‌های نامشخص را گویند.

باب سوم: مساحت چند ضلعی‌های منتظم

قطر اقصر و اطول(قطر کوتاه‌تر و بلندتر): قطر دایرهٔ محاطی یک چند ضلعی منتظم را قطر اقصر و قطر دایرهٔ محیطی آن را قطر اطول آن چند ضلعی نامند.

دستوری که او برای شـعاع دایـره‌هـای محیطـی(R_n) و محـاطی (r_n) و مساحت (S_n) یک n ضلعی منتظم بر حسب طول ضلع آن (a) ارائه کرده چنین است:

$$R_n = \frac{a}{۲\sin\frac{۱۸۰^\circ}{n}}; \quad r_n = \frac{a}{۲}\cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

$$S_n = a^۲ \times \frac{n}{۴}\cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

بدان که در همهٔ چند ضلعی‌های منتظم به جز مربع، اگر طول ضلع عـددی گویا باشد، مساحت آن عددی گنگ خواهد بود.

مثال: مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع a (a عـددی گویـا) برابـر $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$ خواهد بود که عددی گنگ است.

کاشانی مقدار تقریبی $\frac{n}{۴}\cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ را به ازای n هـای مختلـف هـم در دستگاه شمار شصتگانی و هم در دستگاه شـمار دهگـانی نقـل کـرده اسـت. در این‌جا فقط مقادیر دهگانی این عدد در یک جدول ارائه شده‌انـد. بـه طـور مثـال مساحت یک ۶ ضلعی منـتظم بـا طـول ضـلع ۲۰/۵ ذراع، ۱۰۹۱/۸۴۱۴۳۹ ذراع مربع خواهد بود:

$$S_{۶} = ۲/۵۹۸۰۷۶ \times a_{۶}^{۲} = ۲/۵۹۸۰۷۶ \times ۲۰/۵^{۲}$$
$$S_{۶} = ۱۰۹۱/۸۴۱۴۳۹$$

n	$\frac{n}{۴}\cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}$		n	$\frac{n}{۴}\cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}$	
	کاشانی	محاسبه		کاشانی	محاسبه
۳	۰/۴۳۳۰۱۲	۰/۴۳۳۰۱۲۷۰	۹	۶/۱۸۱۸۲۵	۶/۱۸۱۸۲۴۱۹
۵	۱/۷۲۰۴۷۷	۱/۷۲۰۴۷۷۴۰	۱۰	۷/۶۹۴۹۰۹	۷/۶۹۴۲۰۸۸۴
۶	۲/۵۹۸۰۷۶	۲/۵۹۸۰۷۶۲۱	۱۲	۱۱/۱۹۶۱۵۲	۱۱/۱۹۶۱۵۲۴۲
۷	۳/۶۳۳۹۱۴	۳/۶۳۳۹۱۲۴۴	۱۵	۱۷/۶۴۲۳۶۳	۱۷/۶۴۲۳۶۲۹۱
۸	۴/۸۲۸۴۲۷	۴/۸۲۸۴۲۷۱۲	۱۶	۲۰/۱۰۹۳۵۸	۲۰/۱۰۹۳۵۷۹۷

جدول ۱۰- محاسبهٔ مساحت n ضلعی از روی طول ضلع آن

همان گونه که در جدول ۱۰ مشاهده می‌شود، مقادیر ارائه شده توسط کاشانی به مقادیر محاسبه شده (با تقریب کمتر از یک صد میلیونیم) بسیار نزدیک و غالباً همهٔ ۶ رقم اعشاری آن درست است. بیشترین درصد خطا مربوط به محاسبهٔ ضریب مربوط به ۱۰ ضلعی منتظم است. در نسخ موجود *مفتاح الحساب* این ضریب ۷/۶۹۴۹۰۹ ثبت شده، در حالی که مقدار ۷/۶۹۴۲۰۹ بسیار نزدیک به مقدار واقعی این ضریب است. به نظر می‌رسد که کاشانی این مقدار را درست حساب کرده در هنگام ثبت رقم چهارم اعشار این عدد، به جای ۲ اشتباهاً ۹ ثبت کرده است.

باب چهارم: مساحت دایره و قسمت‌های مختلف آن

جِیب: نصف وتر یک کمان را «جیب نصف آن کمان» نامند. در نتیجه جیب هر کمان، ۶۰ برابر سینوس همان کمان است (زیرا در گذشته، شعاع دایره مثلثاتی را به جای یک، ۶۰ می‌گرفتند). امروزه معمولاً جیب کمان a را با علامت Sina (با S بزرگ) و سینوس آن را با علامت sina (با s کوچک) نشان می‌دهند.

سَهم: عمود خارج از وسط یک کمان به وتر آن کمان را برخی از ریاضی‌دانان سهم آن کمان می‌نامند. اما بیشتر ریاضی‌دانان این عمود را «سهم نصف آن کمان» نام داده‌اند.

سطح اَهلیلَجی(هَلیلِه‌ای، شبیه میوه‌ای به نام هلیله): اگـر سـطحی میـان دو کمان متساوی از دو دایرهٔ متساوی محصـور شـود، آنـرا سـطح اهلیلجـی نامنـد مشروط بر آن‌که این دو کمان کوچک‌تر از نیم‌دایره باشند.

سطح شَلْجَمی: اگر این دو کمان بزرگ‌تر از نیم‌دایـره باشـند ایـن سـطح را شلجمی نامند.

اگر این دو کمان نیم‌دایره باشند حاصل یک دایره است.

حلقهٔ مسطحه: سطح محصور میان دو دایرهٔ متحد المرکز را گویند.

سطوح هلالی و نعلی: سطح محصور بین دو کمان از دو دایرهٔ دلخواه (برابـر یا نابرابر) به شرط آن‌که تحدب آنها در یک جهت باشد هلالی نامیده می‌شـود و اگر این دو کمان بزرگ‌تر از نیم‌دایره باشند این شکل را نعلی نامند.

کاشانی در این باب برای محاسبهٔ محیط بر حسـب قطـر (از یـک تـا ۶۰) و مساحت بر حسب مربع قطر (از یک تا ۶۰) ارائه کرده است. در واقع ایـن جـدول چیزی نیست جز مضارب ۱ تا ۶۰ عدد π و $\frac{\pi}{۴}$. یعنـی جـدول π، ۲π، ۳π، ...، ۶۰π و $\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۲\pi}{۴}$، $\frac{۳\pi}{۴}$، ... $۶۰\frac{\pi}{۴}$ $(= ۱۵\pi)$. وی ارقام این عـدد را در دسـتگاه شصتگانی، هم با ارقام هندی و هم با ارقام جمل ثبت کرده است. در این جـدول کاشانی فقط تا ثالثه‌ها (۳ رقم کسر شصتگانی) پیش رفته است.

کاشـانی در یـک جـدول مختصـرتر مضـارب ۱ تـا ۱۰ عـدد π و $\frac{\pi}{۴}$ را در دستگاه شمار دهگانی (تا ۶ رقم اعشار) ثبت کرده است.

کاشانی در فصل پنجم جدول جیْب زوایای ۰ تا ۸۹ درجه (یعنی $60\sin\theta$) را به ازای هر درجه در دستگاه شمار شصتگانی تا دو رقم کسری شصتگانی، هم با ارقام هندی و هم با ارقام جُمَّل ثبت کرده است.

باب پنجم: در مساحت سطوح دیگر

در این باب کاشانی دربارهٔ مساحت اشکالی مانند ستارهٔ چند پر، مُدَرَّج (شکلی شبیه به پلکان) و جز آن سخن گفته است.

باب ششم: دربارهٔ سطح کره، استوانه و مانند آن

در این بخش مطلب جدید و جالب توجهی به چشم نمی‌آید.

باب هفتم: دربارهٔ حجم اجسام

ضلع کره: حجم محصور ،بین سطح کره و سطوح دو نیم‌دایرهٔ عظیمهٔ کره را ضلع کره نامند.

ضلع کره شبیه به یک قاچ سیب است و به همین مناسبت امروزه به آن قاچ کروی می‌گویند.

گفتار هشتم

یافتن مجهول به کمک جبر و مقابله و خطأین و روش‌های دیگر

(مقالهٔ پنجم *مفتاح الحساب*)

باب اول: در جبر و مقابله

📖 جبر و مقابله علم به قانونی است که بـه وسـیلهٔ آن بسـیاری از مجهـولات عددی از معلومات مخصوص با روش ویژه‌ای شناخته می‌شود. و این معلومات یـا به خودی خود معلوم‌اند مانند اعداد، یا به واسطهٔ اصطلاحاتی ویژه معلوم می‌شوند مانند جذر فلان (مثلاً $\sqrt{5}$) یا نسبت فلان و دیگر اطلاعات حسابی و هندسـی که از سخن پرسنده شناخته می‌شود. مجهول (x) را بناچار باید شیء یا دینـار یـا درهم یا نصیب یا سهم یا مانند آن نامید و بیشـتر آن را شـیء مـی‌نـامیم و اگـر مجهول که شیء نامیده می‌شود در خودش ضرب شـود بـه حاصـل مـال (x^2) می‌گویند زیرا که شیء در این‌جا چونان جذر (به عبارت بهتـر: جـذرِ مـال یعنـی

$x = \sqrt{x^2}$ و نه $\sqrt{x}$) است و حاصل ضرب شیء در مال، کعب (x^3) است و در کعب، «مال مال» (x^4) و ... به همان ترتیب که در باب پنجم از مقالهٔ نخست گفتیم. و این توان‌ها را توان‌های مجهول می‌نامند زیرا که پایهٔ آنها مجهول است.

اگر مسأله‌ای پرسیده شود، مجهول را شیء(x) می‌گیریم و مربع آن را نیز مال، و اعمالی را که از سخن پرسنده برمی‌آید با آنها انجام می‌دهیم تا آن‌که به یک معادله برسیم. مثلاً اگر عددی را بخواهیم که مجموع دو برابر آن و نصف آن، ۳۰ بشود، آن عدد را x فرض می‌کنیم پس حاصل جمع دو برابر آن و نصف آن برابر $۲x + \frac{۱}{۲}x$ خواهد بود و این برابر۳۰ است یعنی: $۲\frac{۱}{۲}x = ۳۰$.

مثال دیگر: عددی را می‌خواهیم که جذر آن ۳ باشد. این جذر را x می‌گیریم پس خود عدد x^2 خواهد بود. یعنی $x^2 = ۹$.

این نکته بسیار جالب توجه است که اغلب قدما به «بُعد» یا «واحد» کمیت‌ها اهمیتی ویژه می‌دادند. به طور مثال اگر در مسأله‌ای از جذر یک کمیت مجهول سخن به میان می‌آمد به جای آن‌که آن کمیت را x و جذر آن را $\sqrt{x}$ بگیرند. کمیت مجهول را x^2 و در نتیجه جذر آن، یعنی $\sqrt{x^2}$ را x فرض می‌کردند. این کار عملاً معادل تغییر متغیر $x = y^2$ است. در این مثال کاشانی چون از جذر مجهول سخن به میان آمده برای آن‌که جملهٔ $\sqrt{x}$ در معادله پدید نیاید مجهول را x^2 و جذر آن را x فرض کرده است. اما بسیاری از به اصطلاح ریاضی‌دانان قبل و پس از وی، تصور می‌کردند که اصولاً راهی جز این کار وجود

ندارد. تا آن‌جا که فقیه و ریاضی‌دانی به نام ابوالعلاء بهشتی که حدوداً ۱۰۰ سال پیش از کاشانی می‌زیسته در رسالهٔ عربی حساب و جبر و مقابلهٔ خود گفته است: « اگر گفته شود، شخصی وصیت کرد به مبلغی که سه ثلث آن برابر جذرش باشد. این مبلغ را مال (x^2) فرض کن. زیرا که در کنار جذرش از آن یاد شده و شیء دارای جذر نیست و به درستی که [فقط] مال جذر دارد!». کاملاً روشن است که وی با مفهوم $\sqrt{x}$ آشنایی نداشته است.

جَبْر:«اگر در یکی از دو سوی معادله یا در هر دو سو، استثنائی باشد، تمامی جملات کم شده را (یعنی جملاتی که ضریب آنها منفی است) می‌اندازیم تا مستثنی منه (جملات با ضریب مثبت) در آن سوی معادله به تنهایی باقی ماند و سپس به اندازهٔ همین مقادیر کم شده، به سوی دیگر معادله می‌افزاییم. و معادله‌ای میان این مجموع و مستثنی منه طرف دیگر برقرار می‌کنیم (البته بهتر بود می‌گفت که با این کار معادله برهم نمی‌خورد) و این معنی جبر است. مثلاً اگر «مالی به جز دو شیء» برابر ۱۵ باشد ($x^2 - 2x = 15$) پس از جبر یک مال برابر ۱۵ و دو شیء خواهد شد ($x^2 = 15 + 2x$).

مقابله: و اگر یکی از اجناس (عدد ثابت یا توان‌های مجهول) در هر دو سوی معادله وجود داشته باشد مقدار مشترک را از دو سوی معادله حذف می‌کنیم. مثلاً اگر یک شیء و ۱۰ ، برابر ۴۰ باشد ($x + 10 = 40$)، عدد ۱۰ را که در دو طرف مشترک است از هر دو سو کم می‌کنیم و به معادلهٔ $x = 30$ می‌رسیم و این معنی مقابله است».

جبر به تعبیر امروزی بردن جملات منفی از یک سوی معادله به سوی دیگر آن است. و وجه تسمیهٔ آن نیز این است که با این کار مقادیری که از یک طرف معادله کم شده‌اند جبران خواهد شد (و در عوض به سمت دیگـر اضـافه خواهـد شد). منظور از مقابله نیز حذف مقادیر مشترک از دو سوی یک معادله است.

ابوریحان بیرونی در بخش «شُمار» (=حساب) کتاب *التفهـیم* بـه زیبـایی دو اصطلاح جبر و مقابله را توضیح داده است:

«جبر و مقابله چی باشد؟ چون چیزهایی باشد از گونه‌های مختلـف و به مقدار، برابر یک با دیگر (با یکدیگر) باشند؛ همچنـان باشـد کـه پلّـهٔ ترازو و زفانهٔ ترازو راست شده و عمود او راست ایستاده (در این‌جا معادله به ترازویی در حالت توازن تشبیه شده است) پس پیداست که اگر از یک پلّهٔ ترازو چیزی برداریم از دیگر پلّه همچندان بَر باید داشتن به [همـان] اندازه تا عمود، راست بماند و حـال میـان ایشـان (یعنـی تـوازن)ماننـدهٔ نخستین بود. و نیز اگر به یک پلّه چیزی بر افزائیم به دیگر نیز همچندان بر باید فزودن. اکنون چون به دو سو چیزهایی بحاصـل شـود بـه انـدازهٔ یک با دیگر برابر و به یک سوی کمی (=کاستی) باشد، آن کمی را تمام کنیم. و بر دیگر سو همچندان فزائیم. و این را جبر خوانند... و اما مقابلـه آن است که به هر دو سو نگریم، اگـر آن‌جـا چیزهـا بـود از یـک گونـه، کمترین بیفکنیم. وز آنک بیشتر است همچند آن نیز بفکنیم».

رد و تکمیل: و اگر در یکی از دو سوی معادله تعداد مال‌ها بیش از (ضـریب x^2 بزرگ‌تر از) یک بود. آن را به یک رد می‌کنیم و اگر کمتر از یک بـود آن را

کاملش می‌کنیم و از دیگر جنس‌ها (عدد ثابت یا توان‌های مختلف x) نیز به همین نسبت می‌گیریم و برای این کار ضریب همهٔ جنس‌ها را بر ضریب x^{2} تقسیم می‌کنیم تا پس از این کار این ضریب در معادله برابر یک شود. مثلاً اگر $5x^{2}+10x=30$ همهٔ جملات دو سوی معادله را بر ۵ که ضریب x^{2} است تقسیم می‌کنیم به دست می‌آید: $x^{2}+2x=6$ و بدین کار رَدّ می‌گویند (زیرا x^{2} های اضافی را با این کار «ردّ» می‌کنیم و از معادله بیرون می‌گذاریم). و اگر $\frac{1}{2}x^{2}+5x=7$ تک تک جملات دو سوی معادله را بر «نصف» که ضریب x^{2} است تقسیم می‌کنیم که این کار را «تکمیل» نامیده می‌شود (زیرا با این کار تعداد x^{2}ها را تکمیل می‌کنیم تا به یک x^{2} کامل برسد).

رد و تکمیل به زبان امروز تقسیم تمامی ضرایب معادله بر ضریب بزرگ‌ترین توان x است (طبیعی است که پس از این کار ضریب بزرگ‌ترین توان x، یک خواهد شد). با این تفاوت که قدما اگر ضریب بزرگ‌ترین درجهٔ معادله بزرگ‌تر از یک بود نام عمل را «ردّ» می‌نامیدند (زیرا به تعبیر آنان مقادیر اضافه تر از یک باید «رد» یا کنار گذاشته می‌شد) و اگر این ضریب کمتر از یک بود بدان تکمیل می‌گفتند (چون پس از این عمل ضریب بزرگ‌ترین توان x که کمتر از یک بود، تکمیل می‌شد و به یک می‌رسید). همان گونه که دیدیم کاشانی با هوشمندی بسیار درمی‌یابد که این دو عمل در واقع هیچ تفاوتی با یکدیگر ندارند و اگر می‌بینیم که هر دو اصطلاح را تعریف کرده، تنها به خاطر هماهنگی با آثار ریاضی دیگر بوده است. در حالی که ریاضی‌دانان دیگر معمولاً

قادر به درک این نکته مهم نبوده‌اند. به همین جهت اولاً هر یک از این دو کار را جداگانه توضیح می‌دادند و ثانیاً برای انجام هر کدام از آنها، راه دشواری را می‌پیمودند و به قول معروف لقمه را دور سر خود می‌گرداندند! برای آن‌که بدانیم روش کاشانی تا چه اندازه ساده‌تر از روش دانشمندان دیگر است یک معادله را با روش دانشمندان دیگر تکمیل می‌کنیم:

تکمیل معادلهٔ $\frac{۳}{۴}x^{۲} + ۶x = ۹$. به روش دانشمندان دیگر:

«چنان که می‌بینیم به $\frac{۳}{۴}x^{۲}$ باید $\frac{۱}{۴}x^{۲}$، یعنی یک سوم آن ($\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۴}x^{۲} = \frac{۱}{۴}x^{۲}$) بیفزاییم تا حاصل برابر «مال کامل» ($x^{۲}$) بشود. پس به $۶x$ نیز به اندازهٔ یک سوم آن (یعنی $۲x$) می‌افزاییم و به ۹ نیز به اندازهٔ یک سوم آن (یعنی ۳) می‌افزاییم. در نتیجه معادله به صورت $x^{۲} + ۸x = ۱۲$ در می‌آید.

تازه در این جا روش قدیمی را در نهایت اختصار توضیح داده‌ایم در حالی که در اغلب موارد، این کار ساده حتی پیچیده‌تر و طولانی‌تر از این می‌شود!

کاشانی نخستین کسی است که رد و تکمیل را به شیوهٔ امروزی (یعنی تقسیم بر ضریب بزرگ‌ترین توان x) تعریف کرده است و به نظر می‌رسد که این کار اصولاً در دورهٔ اسلامی بی‌سابقه باشد.

در جدول زیر چگونگی ضرب و تقسیم توان‌های مختلف ثبت شده است.

مقسوم	مضروب فیه									مضروب
	$\frac{۱}{x^{۴}}$	$\frac{۱}{x^{۳}}$	$\frac{۱}{x^{۲}}$	$\frac{۱}{x}$	۱	x	$x^{۲}$	$x^{۳}$	$x^{۴}$	
$\frac{۱}{x^{۴}}$	۱	x	$x^{۲}$	$x^{۳}$	$x^{۴}$	$x^{۵}$	$x^{۶}$	$x^{۷}$	$x^{۸}$	$x^{۴}$
$\frac{۱}{x^{۳}}$	$\frac{۱}{x}$	۱	x	$x^{۲}$	$x^{۳}$	$x^{۴}$	$x^{۵}$	$x^{۶}$	$x^{۷}$	$x^{۳}$
$\frac{۱}{x^{۲}}$	$\frac{۱}{x^{۳}}$	$\frac{۱}{x}$	۱	x	$x^{۲}$	$x^{۳}$	$x^{۴}$	$x^{۵}$	$x^{۶}$	$x^{۲}$
$\frac{۱}{x}$	$\frac{۱}{x^{۲}}$	$\frac{۱}{x^{۳}}$	$\frac{۱}{x}$	۱	x	$x^{۲}$	$x^{۳}$	$x^{۴}$	$x^{۵}$	x
۱	$\frac{۱}{x^{۴}}$	$\frac{۱}{x^{۳}}$	$\frac{۱}{x^{۲}}$	$\frac{۱}{x}$	۱	x	$x^{۲}$	$x^{۳}$	$x^{۴}$	۱
x	$\frac{۱}{x^{۵}}$	$\frac{۱}{x^{۴}}$	$\frac{۱}{x^{۳}}$	$\frac{۱}{x^{۲}}$	$\frac{۱}{x}$	۱	x	$x^{۲}$	$x^{۳}$	$\frac{۱}{x}$
$x^{۲}$	$\frac{۱}{x^{۶}}$	$\frac{۱}{x^{۵}}$	$\frac{۱}{x^{۴}}$	$\frac{۱}{x^{۳}}$	$\frac{۱}{x^{۲}}$	$\frac{۱}{x}$	۱	x	$x^{۲}$	$\frac{۱}{x^{۲}}$
$x^{۳}$	$\frac{۱}{x^{۷}}$	$\frac{۱}{x^{۶}}$	$\frac{۱}{x^{۵}}$	$\frac{۱}{x^{۴}}$	$\frac{۱}{x^{۳}}$	$\frac{۱}{x^{۲}}$	$\frac{۱}{x}$	۱	x	$\frac{۱}{x^{۳}}$
$x^{۴}$	$\frac{۱}{x^{۸}}$	$\frac{۱}{x^{۷}}$	$\frac{۱}{x^{۶}}$	$\frac{۱}{x^{۵}}$	$\frac{۱}{x^{۴}}$	$\frac{۱}{x^{۳}}$	$\frac{۱}{x^{۲}}$	$\frac{۱}{x}$	۱	$\frac{۱}{x^{۴}}$
مقسوم	$x^{۴}$	$x^{۳}$	$x^{۲}$	x	۱	$\frac{۱}{x}$	$\frac{۱}{x^{۲}}$	$\frac{۱}{x^{۳}}$	$\frac{۱}{x^{۴}}$	مضروب
	مقسوم علیه									

کاشانی برای تعیین جنس ضرب و تقسیم توان‌های مختلف مجهول جدول فوق را تشکیل داده است. به طور مثال حاصل ضرب $x^{۳}$ در $\frac{۱}{x^{۴}}$ مطابق جدول برابر $\frac{۱}{x}$ خواهد بود و حاصل تقسیم این دو نیز برابر $x^{۷}$.

وی همچنین برای تشخیص علامت هر جمله همان دستور مشهورِ «مثبت در مثبت: مثبت، منفی در منفی: مثبت، مثبت در منفی: منفی» را ارائه کرده است.

مثالی از ضرب چند جمله‌ای‌ها:

$$f(x) = (x - x^{۲} + ۲x + ۵ - \frac{۱}{x})(x^{۳} + ۲x^{۲} - x - ۴)$$

$$f(x) = x^{۶} + x^{۵} - x^{۴} + ۶x^{۳} + ۱۱x^{۲} - ۱۵x - ۱۹ + \frac{۴}{x}$$

کاشانی برای محاسبهٔ این حاصل از جدول زیر بهره برده است:

	مضروب					
مضروب فیه		۵	$۲x$	$x^{۳}$	$-x^{۲}$	$-\frac{۱}{x}$
	$۲x^{۲}$	$۱۰x^{۲}$	$۴x^{۳}$	$۲x^{۵}$	$-۲x^{۴}$	$-x$
	$x^{۳}$	$۵x^{۳}$	$۲x^{۴}$	$x^{۶}$	$-x^{۵}$	$-x^{۲}$
	-۴	-۲۰	$-۸x$	$-۴x^{۳}$	$۴x^{۲}$	$\frac{۴}{x}$
	$-x$	$-۵x$	$-۲x^{۲}$	$-x^{۴}$	$x^{۳}$	

البته کاشانی به جای علائم امروزی از این نشانه‌ها بهره برده است:

«و»: (واو عطف) برای جمع

«الاّ»: برای تفریق

«ید»: به جای علامت + (انتهای کلمهٔ «زاید» به معنی افزوده شده)

«قص»: به جای علامت − (انتهای کلمهٔ «ناقص» به معنی کاسته شده)

گفتنی است که نشانه‌گذاری برای روابط ریاضی، در تاریخ ریاضیات از اهمیت بسیاری برخوردار است. به عبارت بهتر پیشرفت علم ریاضی در سده‌های اخیر تا حد زیادی مدیون نشانه‌گذاری‌های جبری است. پیش از کاشانی، ریاضی‌دانی به نام ابن قُنْفُذ از اهالی قُسَنْطینه (در شمال آفریقا) از نشانه‌ها و رمزهای جبری کامل‌تری استفاده کرده بود.

بحث کاشانی دربارهٔ تقسیم چند جمله‌ای‌ها بر یکدیگر و نیز پیدا کردن جذر یک چند جمله‌ای (به شرط آن‌که مربع کامل باشد) بسیار جالب و کم نظیر است. وی در فصل ششم این باب قاعدهٔ کلی پیدا کردن جذر یک چند جمله‌ای را، به شرط آن‌که مربع کامل باشد توضیح داده است. برخی مثال‌های وی بدین قرار است:

$$\sqrt{۴x^{۲}+۲۰x^{۳}+۲۵x^{۴}}=۲x+۵x^{۲}$$

$$\sqrt{۴x^{۲}+۲۰x^{۳}+۴۱x^{۴}+۴۰x^{۵}+۱۶x^{۶}}=۲x+۵x^{۲}+۴x^{۳}$$

$$\sqrt{۴x^{۲}+۲۰x^{۳}+۴۱x^{۴}+۵۲x^{۵}+۴۶x^{۶}+۲۴x^{۷}+۹x^{۸}}=$$

$$=۲x+۵x^{۲}+۴x^{۳}+۳x^{۴}$$

کاشانی در پایان این فصل از ریشهٔ n اُم چند جمله‌ای‌ها نیز به اختصار سخن گفته است.

فصل هفتم از باب نخست مقالهٔ پنجم، به بررسی و حل معـادلات ششـگانه (حالات مختلف معادلات درجهٔ اول و درجهٔ دوم) اختصاص دارد. کاشانی در ایـن فصل مطالب مهمی دربارهٔ دسته‌بندی معادلات درجهٔ اول تا چهارم و حل آنهـا و نیز حل معادلات درجات بالاتر آورده که بـه لحـاظ اهمیـت موضـوع، آنهـا را در کتاب دیگری که در مجموعهٔ «کارنامهٔ دانشوران ایران و اسـلام» بـه بازنویســی آثار کاشانی اختصاص یافته خواهیم آورد.

کاشانی در فصل هشتم حالت‌های مختلف معـادلات درجـهٔ اول و دوم را بـا شیوه‌ای بسیار جالب حل کرده است. به عبارت دقیق‌تر جـدولی کـه وی تنظـیم کرده معادل «نمودار مسیر اجرای برنامهٔ کامپیوتری» یـا فلوچـارت اسـت و اگـر بخواهیم برنامه‌ای برای روش کاشانی بنویسـیم، هـر مرحلـه از روش وی دقیقـاً معادل یک سطر از برنامه خواهد بود.

کاشانی در باب نهم این مقاله روش کاهش درجهٔ معادلات را وقتی که همهٔ جملات آن بر x^n قابل قسمت باشد شرح داده و این مثال را آورده است:

$$۶x^{۳} = ۸x^{۴} + x^{۵}$$

$$۶ = ۸x + x^{۲}$$

می‌دانیم که با این کار ریشهٔ مکرر $x = ۰$ از بین می‌رود اما دانشمندان دورهٔ اسلامی در هر صورت ریشه‌های برابر صفر (و به طریق اولی ریشه‌هـای منفـی) را در نظر نمی‌گرفتند. پس تقسیم جملات یک معادله بر x^n تغییـری در پاسـخ نهایی ایجاد نمی‌کرد.

📖 حل حالات خاصی از معادلات درجهٔ n: اگر پس از انجام اعمال جبری مسأله منتهی شد به معادلهٔ ضریبی از یک توان مجهول با ضریبی از توان دیگر آن، هر چند فاصلهٔ مرتبهٔ این دو توان (یعنی نمای توان‌ها) از یکدیگر بسیار باشد، روشی اختراع کرده‌ام که در حالت کلی می‌توان پاسخ آن را به دست آورد.

روش کاشانی را با علائم ریاضی کنونی می‌توان چنین بیان کرد $(m<n)$

$$ax^n = bx^m$$

$$x^n = \frac{b}{a}x^m$$

$$x^{n-m} = \frac{b}{a} \quad , x = \sqrt[(n-m)]{\frac{b}{a}}$$

📖 مثال اول: اگر $۴x^{۶} = ۶۴x^{۲}$ آنگاه $x = \sqrt[۶-۲]{\frac{۶۴}{۴}} = ۲$.

📖 مثال دوم: اگر $۵x^{۳} = ۴۰$ آنگاه $x = \sqrt[۳-۰]{\frac{۴۰}{۵}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$.

📖 مثال سوم: اگر $۳x^{۴} = ۲۴۳$ آنگاه $x = \sqrt[۴-۰]{\frac{۲۴۳}{۳}} = ۳$.

همان گونه که می‌بینیم، کاشانی در مثال‌های دوم و سوم، بار دیگر تلویحا به مفهوم صفر به عنوان عدد و نیز مفهوم $x^{۰} = ۱$ اشاره کرده است. زیرا به طور مثال در مثال سوم برای استفاده از قاعدهٔ کلی خود باید عدد ۲۴۳ را برابر $۲۴۳x^{۰}$ فرض کند.

باب دوم در یافتن مجهول با روش خطأین

روش خطأین که در برخی آثار ریاضی «حساب خطأین» نیز نامیده شده روشی است برای حل معادلات یا دستگاه‌های معادلات خطی. در این روش (که به تفصیل دربارهٔ آن سخن خواهیم گفت)، با استفاده از دو تخمین و خطای حاصل از این تخمین‌ها پاسخ مسأله را به دست می‌آوریم. به همین علت آن را روش خطأین (روش دو خطا) نامیده‌اند

گفتیم که روش خطأین برای معادلات یا دستگاه‌های معادلات غیر خطی چاره ساز نخواهد بود. اما اغلب ریاضی‌دانان به این نکتهٔ مهم اشاره نکرده‌اند. در حالی که کاشانی آن قدر بدین مسأله اهمیت می‌داده که مبحث خطأین را چنین آغاز کرده است:

روش خطأین هنگامی به پاسخ درست منتهی خواهد شد که در مسأله از مجهولی پرسیده شود که مثلاً آن را در عددی معین ضرب یا بر عددی معین تقسیم کرده باشند، یا آن‌که عدد معینی بدان افزوده باشند و اعمالی از این قبیل؛ اما اگر در صورت مسأله از ضرب یک مجهول در مجهول دیگر یا تقسیم آنها بر یکدیگر سخن رفته باشد به گرفتن جذر یا ریشهٔ سوم نیاز باشد یا اعمالی از این قبیل این روش دیگر سودمند نخواهد بود.

دیدیم که کاشانی وجود جملاتی مانند $\sqrt[n]{x}$، $\frac{x}{y}$، و xy و مانند آن را (به شرط آن‌که x و y هر دو مجهول باشند) موجب بی‌فایده بودن روش خطأین

دانسته است. زیرا وجود این جملات در یک معادله به تعبیر امروزی باعث غیر خطی شدن آن می‌شود.

روش خطأین: آن است که مجهول را عددی دلخواه فرض کنیم و همهٔ اعمالی را که در صورت مسأله آمده است با آن عدد انجام دهیم اگر حاصل این اعمال همان عددی شد که باید باشد، حدس ما اتفاقاً درست بوده است در غیر این صورت تفاوت عدد به دست آمده با عددی را که باید به دست می‌آمد، «خطای اول» می‌نامیم. باز همین کار را با یک عدد دلخواه دیگر تکرار می‌کنیم اگر باز هم خطا وجود داشت آن را خطای دوم می‌نامیم. سپس با استفاده از این دو خطا، مقدار صحیح مجهول را بدین طریق پیدا می‌کنیم: عدد مفروض اول را در خطای ثانی و عدد مفروض دوم را در خطای اول ضرب می‌کنیم. اگر هر دو خطا زائد (مثبت) باشند (یعنی مقدار حاصل از اعداد تخمینی بیشتر از مقدار مذکور در مسأله باشد) تفاضل این دو حاصل ضرب را بر تفاضل بین دو خطا بخش می‌کنیم خارج این قسمت همان عدد مجهول خواهد بود. ولی اگر یکی از دو خطا مثبت و دیگری منفی بود، مجموع دو حاصل ضرب را بر مجموع دو خطا بخش می‌کنیم تا مجهول مورد نظر بیرون آید.

مسائلی که در آنها حساب خطأین به کار می‌آید نهایتاً منجر به معادله‌ای به شکل $f(x) = ax - b = ۰$ خواهد شد که هر دو ضریب a و b مطابق رسم قدما مثبت فرض شده‌اند. فرض می‌کنیم که $x_۱$ و $x_۲$ به ترتیب حدس‌های اول و دوم باشند و داشته باشیم: $۰ < x_۱ < x_۲$ در این صورت خطای اول و دوم به ترتیب برابر $f(x_۱) = ax_۱ - b$ و $f(x_۲) = ax_۲ - b$ خواهد بود.

در این صورت پاسخ مسأله که آن را $x_۰$ می‌نامیم بنا بر روش خطأین چنین به دست می‌آید:

$$x_۰ = \frac{[x_۱ \times f(x_۲)] - [x_۲ \times f(x_۱)]}{f(x_۲) - f(x_۱)}$$

با قرار دادن مقادیر خطای اول و دوم خواهیم داشت:

$$x_۰ = \frac{ax_۱x_۲ - bx_۱ - ax_۱x_۲ + bx_۲}{ax_۲ - b - ax_۱ + b} = \frac{b(x_۲ - x_۱)}{a(x_۲ - x_۱)} = \frac{b}{a}$$

که همان مقداری است که از معادلهٔ $ax - b = ۰$ به دست می‌آمد. اما شاید این پرسش برای خواننده پیش بیاید که چرا قدما به جای یک تقسیم ساده از چنین روشی استفاده می‌کرده‌اند. پاسخ آن است که این روش زمانی به کار می‌رفت که چند عمل ریاضی (خطی) پی‌درپی روی مجهول انجام می‌گرفت و در نتیجه پیدا کردن معادلهٔ نهایی مستلزم صرف وقت بسیار بود. یا آن‌که مسأله به صورت یک دستگاه معادلات خطی چند معادله و چند مجهول بود. اثبات درستی به کار بردن این روش دربارهٔ دستگاه‌های معادلات خطی نیز بسیار ساده است. فرض کنیم که مجهول‌های معادله به ترتیب $x_۱$، $x_۲$ ... x_n باشند، و داشته باشیم:

$$\begin{cases} f_۱(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = ۰ \\ f_۲(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = ۰ \\ \dots \\ f_n(x_۱, x_۲, \dots, x_n) = ۰ \end{cases}$$

از آن‌جا که طبق فرض مسأله، تمامی معادلات فوق نسبت به تمامی مجهول‌ها خطی است می‌توان همهٔ مجهول‌ها را بر حسب یکی از آنها (در این‌جا بر حسب $x_۱$) حساب کرد یعنی:

$$x_i = g_i(x_۱) \quad ; \; i = ۲,۳,...n$$

با گذاردن مقادیر فوق در معادلهٔ نخست دستگاه خواهیم داشت:

$$f_۱(x_۱, g_۲(x_۱), g_۳(x_۱), ..., g_n(x_۱)) = ۰$$

یعنی معادلهٔ اول نسبت به $x_۱$ از درجهٔ اول خواهد بود و در ضمن به دیگر مجهول‌ها بستگی نخواهد داشت. یعنی مسألهٔ حل دستگاه معادلات خطی یاد شده به حل معادلهٔ خطی $g_۱(x_۱) = ax_۱ - b = ۰$ منجر می‌شود که بنا بر آنچه پیش از این آمد می‌توان مقدار مجهول نخست (در این‌جا $x_۱$) را از روش خطأین به دست آورد. و چون این مجهول، معلوم گردد مقادیر دیگر مجهول‌ها به سادگی به دست خواهد آمد. به عبارت بهتر باید گفت که استفاده از روش خطأین به ویژه در مسائلی که دارای دو مجهول است کار را ساده تر می‌کند. زیرا در این گونه مسائل دیگر نیازی به ترکیب معادلات برای حذف متغیرهای دیگر نخواهیم داشت. بدین ترتیب که نخست یکی از دو مقدار را حدس می‌زنیم. سپس بر اساس یکی از معادلات مقدار دیگر را حساب می‌کنیم و آنگاه این دو مقدار را در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم تا مقدار خطا به دست آید و ...

اما اگر بخواهیم همهٔ مقادیر معادلهٔ مربوطه مطابق رسم قدما مثبت باشد دو حالت در نظر می‌گیریم: نخست آن‌که خطاها هر دو زائد یا هر دو ناقص (هم علامت) باشند که در این صورت همان رابطه کلی به دست خواهد آمد. اما در

صورتی که یکی از دو خطا زائد و دیگری ناقص باشد با توجه به فرض $x_۲ < x_۱ < ۰$ و مثبت بودن a می‌دانیم که $f(x_۲) > f(x_۱)$ و چون دو خطا مختلف العلامة هستند در نتیجه خواهیم داشت $f(x_۱) < ۰ < f(x_۲)$.

پس قاعدهٔ کلی خطأین بدین صورت در خواهد آمد:

$$x_۰ = \frac{[x_۱ \times f(x_۲)] + [x_۲ \times f(x_۱)]}{f(x_۲) + f(x_۱)}$$

یعنی به تعبیر کاشانی: «نسبت مجموع مضروبین به مجموع خطأین»

مثال: عددی را می‌جوییم که چون آن را در ۳ ضرب کنند و بر حاصل ۱۰ بیفزایند و سپس حاصل را دو برابر کنند و بر این حاصل ۱۰ بیفزایند عدد ۹۰ به دست آید.

فرض می‌کنیم که این عدد ۵ باشد. وقتی اعمال فوق را با عدد ۵ انجام دهیم حاصل ۶۰ خواهد بود که ۳۰ واحد کمتر از آنی است که باید می‌شد (یعنی ۹۰). پس خطای اول «۳۰ ناقص» (به عبارت امروزی ۳۰−) است. این بار عدد ۷ را می‌آزماییم. با این عدد حاصل عملیات فوق ۷۲ و مقدار خطا «۱۸ ناقص» (۱۸-) خواهد بود. چون هر دو خطا «ناقص» (منفی) هستند پاسخ چنین به دست می‌آید

$$x_۰ = \frac{[x_۱ \times f(x_۲)] - [x_۲ \times f(x_۱)]}{f(x_۲) - f(x_۱)} = \frac{۷ \times ۳۰ - ۵ \times ۱۸}{۳۰ - ۱۸} = ۱۰$$

چنان که دیدیم در مسألهٔ فوق بی‌آن‌که معادلهٔ مسأله را تشکیل بدهیم توانستیم پاسخ صحیح را بیابیم.

باب سوم: در بیان ۵۰ قاعده برای یافتن مجهول

کاشانی قواعد زیر را از اختراعات خود برشمرده است:

دستور هفتم: همان دستور محاسبهٔ جملهٔ n اُم و مجموع n جمله از یک تصاعد حسابی است که اگر جملهٔ اول تصاعد را $a_۱$ و جملهٔ n اُم را a_n و قدر نسبت را d بنامیم این دو قاعده چنین خواهد شد:

$$a_n = a_۱ + (n-۱)d$$

$$S_n = \sum_{i=۱}^{n} a_i = a_۱ + a_۲ + \ldots + a_n = \frac{n(a_۱ + a_n)}{۲}$$

دستور نهم: دستور محاسبهٔ مجموع «تضاعیف واحد» (توان‌های متوالی عدد ۲ از ۰ تا ۱-n) است. یعنی

$$S_n = \sum_{i=۱}^{n} ۲^{i-۱} = ۲^۰ + ۲^۱ + \ldots + ۲^{n-۱} = ۲^n - ۱$$

$$S_۷ = ۱ + ۲^۱ + ۲^۲ + ۲^۳ + ۲^۴ + ۲^۵ + ۲^۶ = ۲^۷ - ۱ = ۱۲۷$$

این دستور مدت‌ها پیش از کاشانی کشف شده بود ولی ظاهراً کاشانی از آن آگاهی نداشته است. کاشانی شکل تعمیم یافتهٔ این قاعده را در دستور پانزدهم بیان کرده است .

دستور پانزدهم: دستور محاسبهٔ مجموع قوای متوالی یک عدد دلخواه است یعنی مجموع جملات یک تصاعدی هندسی که جملهٔ اول آن «یک» باشد. کاشانی سه شکل متفاوت برای این دستور پیشنهاد کرده است:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a^k = a^1 + \ldots + a^n$$

$$S_n = \frac{a \times a^n - a}{a-1} = \frac{a(a^n - 1)}{a-1} = \frac{a^n - a}{a-1} + a^n$$

مثال :

$$S_5 = \sum_{i=1}^{5} 4^k = 4^1 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 = 1364$$

در حالت $a<1$ کاشانی دستور فوق را به صورت آشنای زیر درآورده است (فرض می‌کنیم که $p<q$; $a = \frac{p}{q}$):

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} (\frac{p}{q})^k = \frac{(q^n - p^n)p}{(q-p)q^n}$$

$$S_4 = \sum_{i=1}^{4} (\frac{3}{4})^k = (\frac{3}{4})^1 + (\frac{3}{4})^2 + (\frac{3}{4})^3 + (\frac{3}{4})^4 = \frac{3(4^4 - 3^4)}{4^4(4-3)}$$

$$S_4 = \frac{3(256-81)}{256} = 2\frac{13}{256}$$

دستور شانزدهم: محاسبهٔ a^m در صورتی که m عددی بزرگ باشد و نخواهیم که توان‌های متوالی a را به دست آوریم.

$$(a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$5^8 = [(5^2)^2]^2 = [(25)^2]^2 = 625^2 = 390,625$$

مثال:

$$3^{14} = 3^{2+4+8} = 3^2 \times (3^2)^2 \times [(3^2)^2]^2$$
$$= 9 \times 81 \times 6561 = 4,782,969$$

گفتار نهم

کاشانی و اختراع کسرهای دهگانی (اعشاری)

تاریخچهٔ کسرهای دهگانی

نخستین کسی که کسرهای اعشاری را به کار برده ابوالحسن احمد بن ابراهیم اقلیدسی، ریاضی‌دان دمشقی سدهٔ چهارم قمری است. او در ۳۴۱ قمری در کتاب *الفصول فی الحساب الهندی* خود این کسرها را به کار برده است. کوشیار گیلانی، ریاضی‌دان و ستاره‌شناس برجستهٔ ایرانی نیز در اواخر سدهٔ چهارم قمری در کتابی دربارهٔ کاربرد حساب در نجوم مقدماتی به هنگام گرفتن جذر از اصطلاح گرفتن جذر به وسیلهٔ صفرها بهره برده که عملاً همان روشی است که کاشانی در مبحث جذر اعداد کسری مطرح کرده است(صفحهٔ ۱۱۰ به بعد کتاب حاضر) با این روش می‌توان جذر تقریبی یک عدد را تا n رقم اعشار به دقت حساب کرد. وی جذر ۲۴ را چنین به دست آورده است:

$$\sqrt{۲۴} = \frac{۱}{۱۰۰}\sqrt{۲۴۰۰۰۰} \approx \frac{۱}{۱۰۰} \times ۴۸۹ = ۴ + \frac{۸۹}{۱۰۰}$$

سپس کوشیار، کسر $\frac{۸۹}{۱۰۰}$ را به دستگاه شمار شصتگانی می‌برد زیرا هنوز کسر دهگانی اختراع نشده است! او همین روش را در مورد کعب نیز به کار برده است(گرفتن کعب با صفرها).

روش کوشیار گیلانی برای گرفتن جذر و کعب در کتاب فارسی *شمارنامه* نوشتهٔ محمد بن ایوب طبری (درگذشت ۴۸۵ قمری) و *المُقْنِع فی حساب الهندی* نوشتهٔ ابوالحسن علی بن احمد نسوی (درگذشت ۴۷۳ قمری) نیز دیده می‌شود. طبری جذر ۵ و کعب ۱۲ چنین به دست آورده است:

$$\sqrt{۵} = \frac{۱}{۱۰۰۰}\sqrt{۵۰۰۰۰۰۰} \approx \frac{۱}{۱۰۰۰} \times ۲۲۳۶ = ۲ + \frac{۲۳۶}{۱۰۰۰}$$

$$\sqrt[۳]{۱۲} = \frac{۱}{۱۰۰}\sqrt[۳]{۱۲۰۰۰۰۰۰} \approx \frac{۱}{۱۰۰} \times ۲۲۸ = ۲ + \frac{۲۸}{۱۰۰}$$

جالب این که طبری نیز چون هنوز کسرهای اعشاری اختراع نشده، کسرهای $\frac{۲۳۶}{۱۰۰۰}$ و $\frac{۲۸}{۱۰۰}$ را به دستگاه شصتگانی برده است.

ریاضی‌دان سَمَوأل بن یحیی مَغْرِبی نیز در ۵۶۸ قمری در کتاب *القَوامی فی الحساب الهندی* از همین کسرها بهره برده است.

پیش از آنکه اروپاییان با *مفتاح الحساب* و *رسالهٔ محیطیهٔ* کاشانی آشنا شوند، اختراع کسرهای دهگانی معمولاً به سیمون اِستون بلژیکی در ۱۵۸۵ میلادی، بورگی سوئیسی در حدود ۱۵۹۲ میلادی و وی‌یِت فرانسوی (زنده در ۱۵۴۰ تا

۱۶۰۳ میلادی) و دیگران نسبت می‌دادند. اما پس از تحقیقات پاول لوکی دربارهٔ *مفتاح الحساب* کاشانی در ۱۹۴۴ میلادی (که در ۱۹۵۱ میلادی منتشر شد) جهانیان دانستند که غیاث الدین جمشیدکاشانی، ریاضی‌دان برجستهٔ ایرانی در ۱۴۲۳ میلادی یعنی حدود ۱۵۰ سال پیش از اروپاییان این کسرها را اختراع کرده و به طور مستمر در آثار خود به کار برده است.

برخی سخنان کاشانی دربارهٔ کسرهای اعشاری

در باب اول از مقالهٔ دوم *مفتاح الحساب*: «منجمان کسرهای معطوفه‌ای به کار می‌برند که مخرج‌های متوالی آنها شصت و قوای متوالی شصت است تا هر جا که بخواهند و آنها را به ترتیب دقیقه‌ها، ثانیه‌ها، ثالثه‌ها، رابعه‌ها، و غیره می‌نامند و ما به قیاس حساب منجمان، کسرهایی را بیان کردیم که مخرج‌های متوالی آنها ده و قوای متوالی ده می‌باشد تا هرجا بخواهیم و آنها را به ترتیب اعشار، دومین اعشار، سومین اعشار، چهارمین اعشار و ... نامیدیم»

در باب اول از مقالهٔ سوم *مفتاح الحساب* (حساب منجمان): همان گونه که در حساب با ارقام هندی (دستگاه شمار دهگانی)، ارزش مکانی هر رقم یک دهم ارزش مکانی رقم سمت چپ آن است، در حساب شصتگانی نیز ارزش مکانی هر رقم، یک شصتم ارزش مکانی رقم سمت چپ آن خواهد بود ... با این تفاوت که در حساب شصتگانی دو سلسله از مراتب داریم که یکی صحیح و دیگری کسری است اما در حساب دهگانی سلسلهٔ مراتب یکی است (یعنی بخش کسری ندارد). پس ما در حساب دهگانی نیز دو سلسله وضع کردیم به قسمی که همهٔ

مرتبه‌های هر دو سلسله به یک نسبت هستند(یعنی در بخش کسری نیز ارزش مکانی هر رقم ده برابر ارزش مکانی رقم سمت راست و یک دهم ارزش مکانی سمت چپ خواهد بود)

آغاز باب ششم از مقالهٔ سوم: «باب ششم در تحویل ارقام شصتگانی به ارقام هندی و بر عکس، و تحویل کسرهای آنها به مخارج دیگر و شناسایی کسرهایی که ما به قیاس کسرهای شصتگانی وضع کردیم. و قبلا متذکر می‌شویم که پس از آن که نسبت محیط دایره را به قطر آن (=عدد π)، تا مرتبهٔ نهم کسر شصتگانی یافتیم، خواستیم که آن کسرها را در دستگاه شمار دهگانی بنویسیم تا حسابگری که حساب شصتگانی نمی‌داند در حساب درنماند. پس واحد صحیح را به ده قسمت متساوی تقسیم کردیم و هر یک دهم را به ده قسمت متساوی دیگر و همچنان ادامه دادیم... تا مراتب کسرها به قیاس حساب منجمان به یک نسبت (= یک دهم) باشد و آنها را کسرهای اعشاری نامیدیم و باید اعشار در سمت آحاد و اعشار دوم در سمت راست اعشار اول و اعشار سوم در سمت راس اعشار دوم نوشته شوند و همین طور تا آخر و قسمت صحیح و کسری روی یک سطر نوشته شوند».

از سخن کاشانی نتیجه می‌شود که تا زمان وی عدد نویسی در دستگاه شمار دهگانی فقط مختص اعداد صحیح بوده و کسرهای دهگانی وجود نداشته است، تا آنکه کاشانی کسرهای اعشاری را به قیاس کسرهای شصتگانی اختراع کرده و چگونگی نوشتن این کسرها، و نحوهٔ محاسبه با آنها را در آثار خود توضیح داده و

به کار بردن آنها را به همگان توصیه کرده است. چنان که دیدیم حتی نام کسر اعشاری را نیز خود کاشانی بر این کسرها نهاده است.

کاشانی برای نوشتن کسرهای اعشاری و جدا کردن بخش اعشاری از صحیح از ممیز استفاده نمی‌کرده است. در عوض گاهی اوقات هر یک از دو بخش عدد را با رنگی متفاوت یا با خط درشت و ریز می‌نوشته و گاهی اوقات مرتبهٔ کم ارزش‌ترین رقم را در کنار آن یاد می‌کرده است(مانند کسرهای شصتگانی) یا آنکه بخش کسری و صحیح را با خط قائمی از یکدیگر جدا می‌کرده و روی آنها به ترتیب کلمات کسری و صحیح را می‌نوشته است.

مثال‌هایی از کاربرد کسرهای اعشاری توسط کاشانی

۱. عمل ضرب ۲۵/۰۷ در ۱۴/۳ به کمک شبکهٔ ضرب.

۲. تحویل عدد کسری «ح کط مد ثالثه» از دستگاه شصتگانی به دستگاه دهگانی که برابر است با «۱۴۱۵۹۳ از مرتبهٔ ششم اعشار» یعنی ۰/۱۴۱۵۹۳ یعنی: $[۰/۱۴۱۵۹۳]_{۱۰} = [۰;۸,۲۹,۴۴]_{۶۰}$

۳. وی عدد ۰/۳۷۶ را نیز به دستگاه شصتگانی برده و مقدار آن را «کب لج لو ثالثه» یعنی ۰;۲۲,۳۳,۳۶ به دست آورده است.

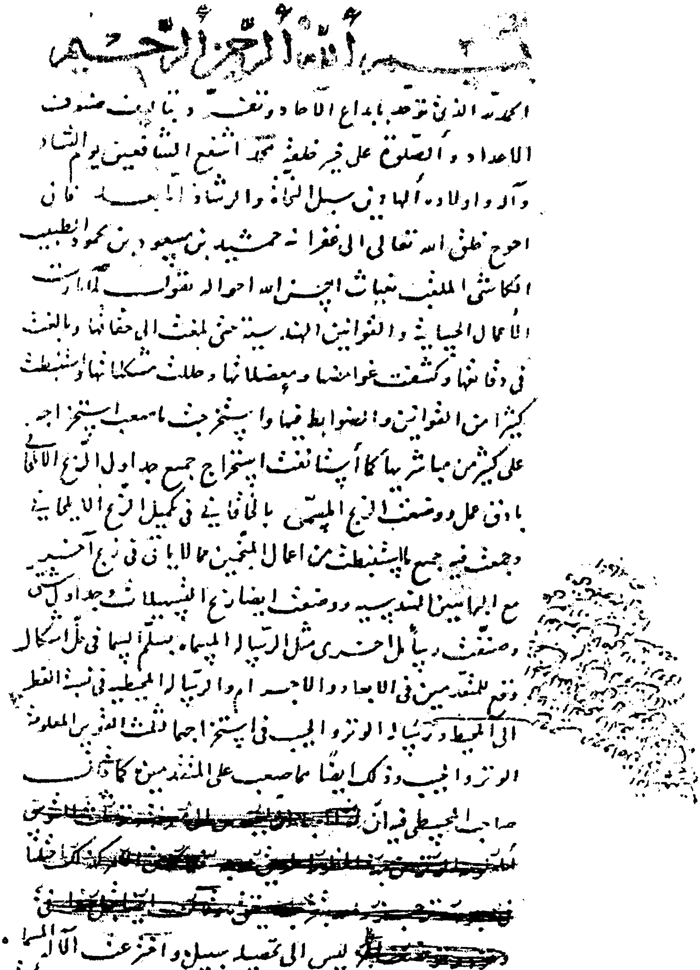
۴. محاسبهٔ مقدار $\frac{n}{۴}\cot g\frac{۱۸۰^\circ}{n}$ برای n ضلعی‌های مختلف و ثبت مقدار آنها با کسرهای دهگانی (جدول ۱۰ کتاب حاضر)

۵. جدول مضارب ۱ تا ۱۰ اعداد π و $\frac{\pi}{۴}$ (البته با دقتی بسیار کمتر از آنچه در *رسالهٔ محیطیه* آورده است).

۶. در مقالهٔ چهارم مساحت دایره‌ای را که شعاع آن ۷۷ ذراع است، برابر ۱۸۶۲۶/۵۰۴۸۹۷ ذراع مربع به دست آورده است.

۷. در یکی از مسائل مربوط به محاسبهٔ ارث پس از تشکیل یک معادله، ریشهٔ آن را ۹/۲۵۴۵ و سهم هر یک از فرزندان را ۲۴۷/۶۸۶۴ به دست آورده است.

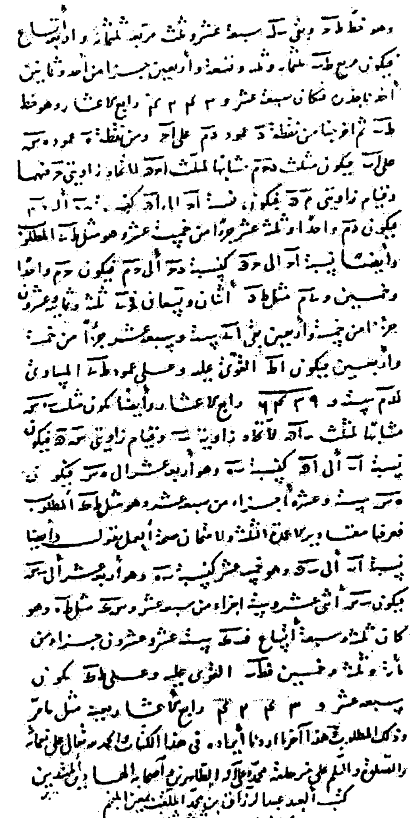
کاشانی افزون بر مثال‌هایی که در *مفتاح الحساب* برای کسرهای اعشاری آورده، در *رسالهٔ محیطیه* نیز عدد π را هم با کسرهای شصتگانی و هم با کسرهای اعشاری ثبت کرده است.



بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله الذي توحد بابداع الآحاد وتفرد بايجاد صنوف
الاعداد والصلوة على خير خلقه محمد اشفع الشافعين يوم التناد
وآله واولاده الهادين سبيل النجاة والرشاد اما بعد فان
احوج خلق الله تعالى الى غفرانه جمشيد بن مسعود بن محمود الطبيب
الكاشي الملقب بغياث الدين احسن الله احواله يقول لما ان مارست
الاعمال الحسابية والقوانين الهندسية حتى بلغت الى حقائقها وبالغت
في دقائقها وكشفت غوامضها ومعضلاتها وحللت مشكلاتها واستنبطت
كثيرا من القوانين والضوابط فيها واستخرجت ما صعب استخراجه
على كثير من مباشريها كما اني استخرجت جميع جداول الزيج الخاقاني
بادق عمل وصنفت الزيج المسمى بالخاقاني في تكميل الزيج الايلخاني
وجمعت فيه جميع ما استنبطت من اعمال المنجمين مما لا يوجد في زيج آخر
مع البراهين الهندسية وصنفت ايضا زيج التسهيلات وجداول اخرى
وصنفت رسائل مثل الرسالة المسماة بسلم السماء في حل اشكال
وقع للمتقدمين في الابعاد والاجرام والرسالة المحيطية في نسبة القطر
الى المحيط ورسالة الوتر والجيب في استخراجهما لثلث القوس المعلومة
الوتر والجيب وذلك ايضا مما صعب على المتقدمين كما قال
صاحب المجسطي فيه ان [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible] ليس الى تحصيله سبيل واخترعت الآلة المسماة
بطبق المناطق وحررت في كيفية صنعتها ومعرفتها كتاب نزهة الحدائق

تصویر ۱ – صفحهٔ نخست نسخهٔ خطی *مفتاح الحساب* (نگاه کنید به ص۲۹)



تصویر ۲ – صفحهٔ آخر همان نسخهٔ *مفتاح الحساب* (کتابخانهٔ ملی ملک)

یادداشت پایان نسخه: [این نسخه را] بندهٔ خدا، عبد الرزاق فرزند محمد ملقب به معین منجم کاشانی در رجب سال ۸۳۰ قمری در شهر سمرقند رونویسی کرد

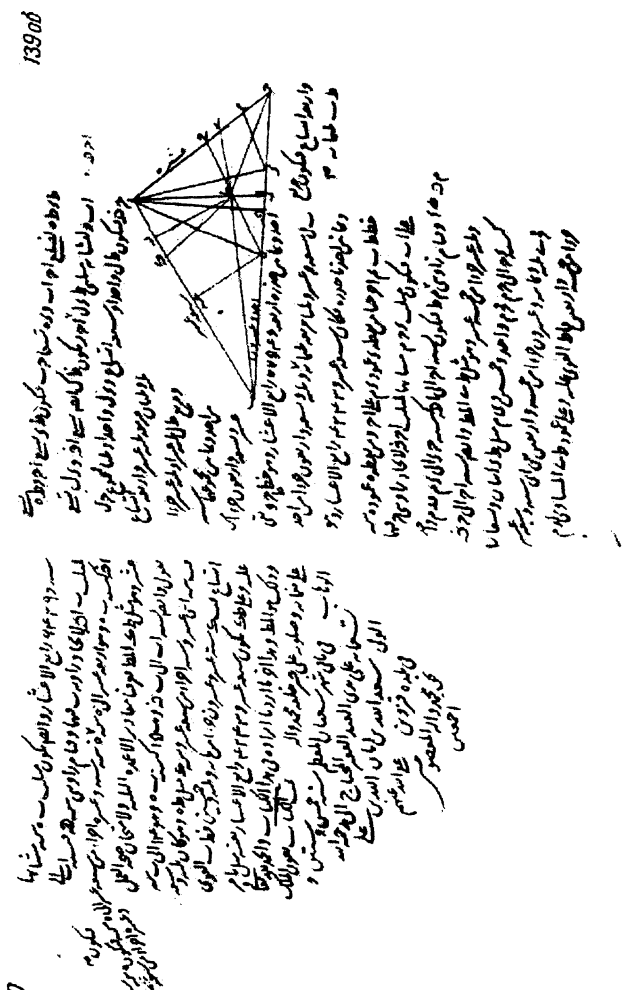
جمشید غیاث الدین
الکاشي

مفتاح الحساب
والرسالة المحيطية

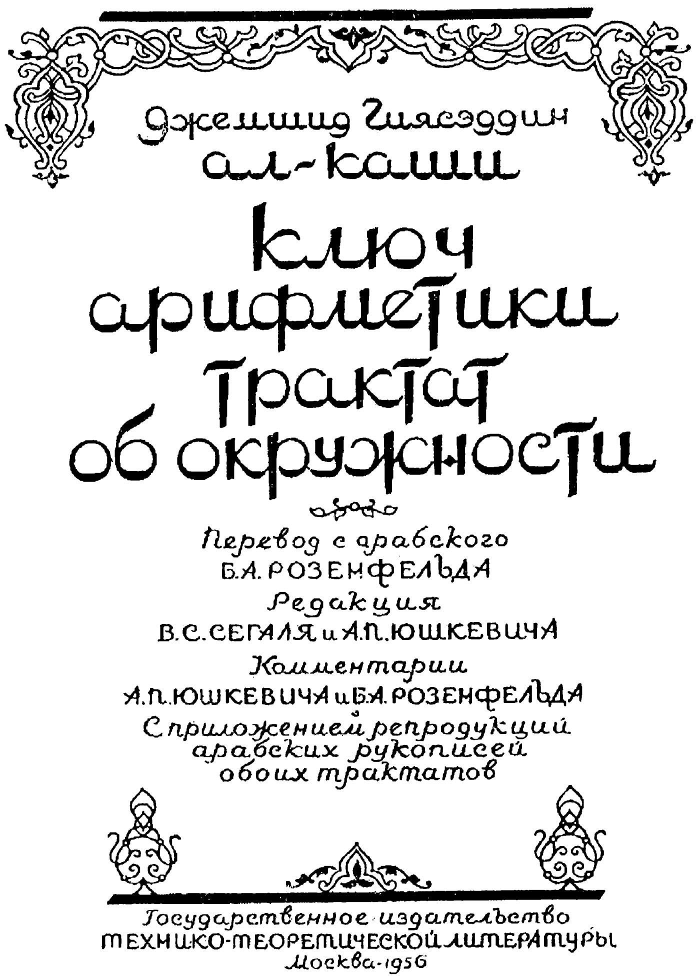
الترجمة
لبوريس روزنفيلد
التحرير
لفلاديمير سيغال وادولف يوشكيفيتش
الشرح
لادولف يوشكيفيتش وبوريس روزنفيلد
مع الصور المنقولة
لمخطوطي الرسالتين

دار الطبع والنشر للادب الفني والعلمي للدولة
موسكو - ١٩٥٦

تصویر ۳ – صفحهٔ عنوان چاپ عکسی *مفتاح الحساب* (مسکو)



تصویر ۴ – چاپ عکسی (فاکسیمیله) **مفتاح الحساب** (مسکو) که همراه با شرح و ترجمهٔ روسی منتشر شده است.



Джемшид Гиясэддин
ал-Каши
Ключ арифметики
Трактат об окружности

Перевод с арабского
Б.А. РОЗЕНФЕЛЬДА
Редакция
В.С. СЕГАЛЯ и А.П. ЮШКЕВИЧА
Комментарии
А.П. ЮШКЕВИЧА и Б.А. РОЗЕНФЕЛЬДА
С приложением репродукций
арабских рукописей
обоих трактатов

Государственное издательство
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва-1956

تصویر ۵ – صفحهٔ عنوان ترجمهٔ روسی *مفتاح الحساب* و *الرسالة المحيطية*

تصویر ۶ – *مفتاح الحساب* چاپ دمشق

تراثنا

مفتاح الحساب

تأليف

جمشيد غياث الدين الكاشي

تحقيق وشرح

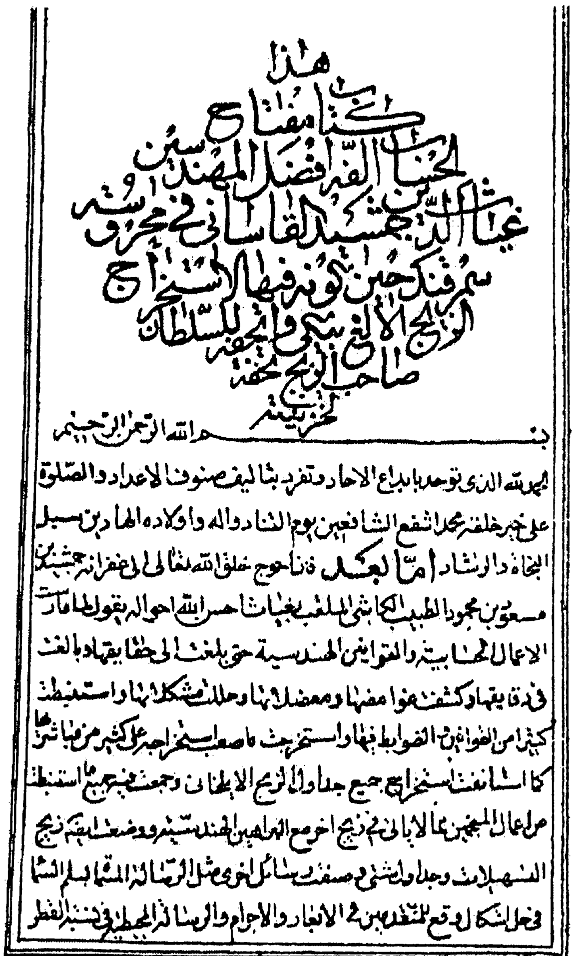
الأستاذ أحمد سعيد الدمرداش . الدكتور محمد حمدي الحفني الشيخ

مراجعة

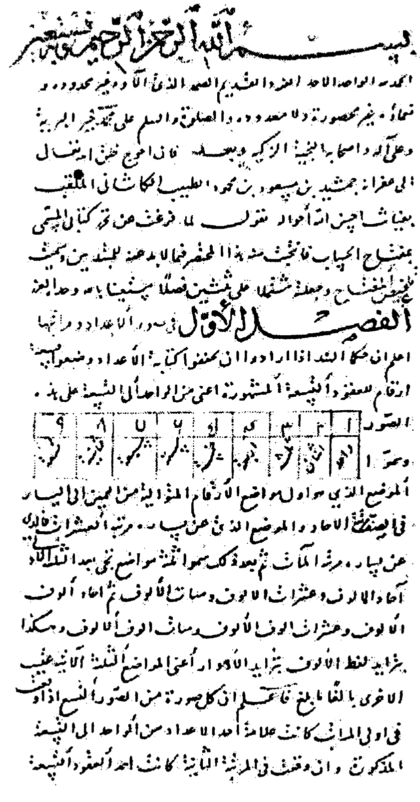
الأستاذ عبد الحميد لطفي

دار الكاتب العربي للطباعة والنشر

تصوير ٧ – *مفتاح الحساب* چاپ مصر



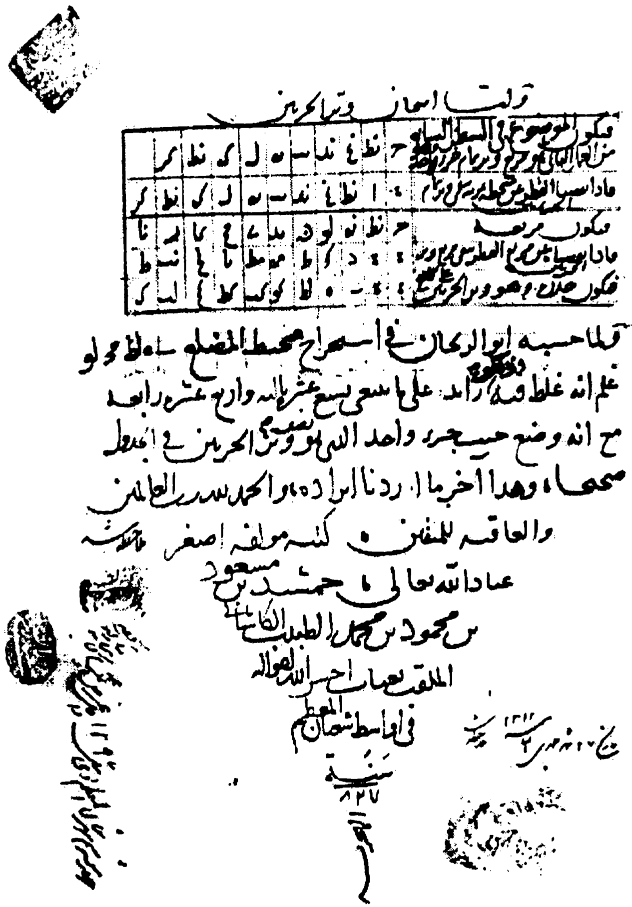
تصویر ۸ – چاپ سنگی *مفتاح الحساب* (تهران)



تصویر ۹ – صفحهٔ نخست نسخهٔ خطی *تلخیص المفتاح* (نگاه کنید به ص۲۹)

تصویر ۱۰ – صفحهٔ آخر همان نسخه (کتابخانهٔ ملی ملک)

یادداشت پایان نسخه: «نگارش کتاب در هفتم شعبان ۸۲۴ قمری به پایان رسید. رونویسی این نسخه به یاری خدا در نیمهٔ همان ماه از همان سال (۸۲۴) به دست بندهٔ خدا، معین بن محمد منجم کاشانی در شهر کاشان به پایان رسید».



تصویر ۱۱ – صفحهٔ آخر نسخهٔ خطی *رسالهٔ محیطیه* به خط خود کاشانی

نسخهٔ خطی شمارهٔ ۲۲۹ کتابخانهٔ آستان قدس رضوی (با تاریخ ۸۲۷ قمری)

کاشانی‌نامه

احوال و آثار
غیاث‌الدین جمشید کاشانی

تألیف

ابوالقاسم قربانی

مرکز نشر دانشگاهی، تهران

تصویر ۱۲ – صفحهٔ عنوان کتاب *کاشانی نامه* که توسط شادروان ابوالقاسم قربانی دربارهٔ زندگی‌نامه و کارنامهٔ علمی کاشانی نوشته شده است.

اهل قلم

۹۶۴-۵۵۶۸-۶۳-۳

پس از پژوهش دربارهٔ برخی آثار کاشانی ، که خوشبختانه بیشتر آنها در کتابخانه‌های شرق و غرب موجود است، اورا ریاضی دانی هوشمند، مخترع ، نقّاد و صاحب افکار عمیق یافتم. کاشانی از آثار ریاضی دانان پیش از خود آگاه و بویژه در فن محاسبه و به کار بستن روش های تقریبی متبحر و چیره دست بوده است. اگر رسالهٔ محیطیهٔ او به دست ریاضی دانان غربی معاصر وی‌رسیده بود، از آن پس مردم مغرب زمین از بعضی منازعات و تألیفات مبتذل دربارهٔ اندازه گیری دایره (= محاسبهٔ عدد π) بی‌نیاز می‌شدند. اگر نظریهٔ واضح و روشن علمی وی در مورد شناساندن کسرهای اعشاری انتشار یافته بود، فرانسوا ویِتْ ، اِستوِن و بورگی ناچار نمی‌شدند که یک قرن و نیم پس از کاشانی نیروی فکری و عملی خود را برای از نو یافتن این کسرها به کار اندازند.

< از پیشگفتار بازنویس >